幾何学II　演習問題[1] No.5　2019年11月13日

問題 19 (再掲[2]) [Bott-Tu, Exercise 1.7]　$\mathbb{R}^2$ から相異なる 2 点を除いた空間 $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ を考える．P を中心とする半径 ϵ の円を C_P, Q を中心とする半径 ϵ の円を C_Q とする．(ただし P と Q の距離は 3ϵ より大きいとする．) 写像

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) \to \mathbb{R}^2, \quad [\omega] \mapsto \left(\int_{C_P} \omega, \int_{C_Q} \omega \right)$$

が同型であることを示せ．また $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\})$ の基底となる閉微分形式を一組与えよ．

ヒント：Mayer-Vietoris 完全列を使う．いろいろな方法がある．

(a) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ とし，P, Q を中心とする開円盤の和を $V = B_P \cup B_Q$ とおくと，$\mathbb{R}^2 = U \cup V$.

(b) 簡単のため $P = (-1, 0)$, $Q = (1, 0)$ とおく．$U = \{(x, y) : x < \frac{1}{2}\} \setminus \{P\}$, $V = \{(x, y) : x > -\frac{1}{2}\} \setminus \{Q\}$ とすれば $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\} = U \cup V$.

(c) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{Q\}$ とおくと，$U \cup V = \mathbb{R}^2$, $U \cap V = \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$.

問題 20　$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の通常のコホモロジーとコンパクト台コホモロジーを調べよう．

(1) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ は $S^2 \times \mathbb{R}$ と微分同相であることを示せ．

(2) 授業では S^2 のコホモロジーを求めた．その計算結果を使って，$H^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ および $H^*_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ を求めよ．

(3) 次の 3 つの写像 I_1, I_2, I_3 が同型であることを示せ．

$$I_1 \colon H^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}, \qquad [\omega] \mapsto \int_{S^2} \omega$$
$$I_2 \colon H^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}, \qquad [\omega] \mapsto \int_{R} \omega$$
$$I_3 \colon H^3_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}, \qquad [\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \omega$$

ただし R は $\{(x, 0, 0) : x > 0\}$ で与えられる半直線とする．

問題 21 [コンパクト台コホモロジーに対する Poincaré の補題, Bott-Tu, Chapter I, Section 4]　多様体 M に対して，次の同型写像がある

$$e_* \colon H^*_c(M) \leftrightarrows H^{*+1}_c(M \times \mathbb{R}) \colon \pi_*$$

---

[1] 問題及び解答は `https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~iritani/teaching2019KikaII.htm` に順次掲載される．

[2] まだ復習していない人はやってみよう．

ここで同型写像 π_*, e_* は次のように与えられる．$\pi\colon M\times\mathbb{R}\to M$ は射影であり，π に関する "integration along the fiber" 写像 $\pi_*\colon \Omega_{\mathrm{c}}^*(M\times\mathbb{R})\to\Omega_{\mathrm{c}}^{*-1}(M)$ は M の局所座標 $\{x_i\}$ を使って

$$\begin{aligned} f(x,t)dx_I &\mapsto 0 \\ f(x,t)dt\wedge dx_I &\mapsto \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt\right)dx_I \end{aligned}$$

と定義する．また $\int_{-\infty}^{\infty} e(t)dt=1$ なるコンパクト台の C^∞ 級関数 $e(t)\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ を選び，写像 $e_*\colon\Omega_{\mathrm{c}}^*(M)\to\Omega_{\mathrm{c}}^{*+1}(M\times\mathbb{R})$ を

$$e_*(\omega)=e\wedge\pi^*\omega$$

と定義する．ただし $e=e(t)dt$. π_* と e_* が互いに逆写像であることを証明しよう．

(1) $d\pi_*=-\pi_*d$, $de_*=-e_*d$ を示せ．(これより，π_*, e_* はコホモロジーの間の写像を誘導する．)

(2) $\pi_*e_*=1$ を示せ．

(3) 写像 $K\colon\Omega_{\mathrm{c}}^p(M\times\mathbb{R})\to\Omega_{\mathrm{c}}^{p-1}(M\times\mathbb{R})$ を

$$\begin{aligned} f(x,t)dx_I &\mapsto 0 \\ f(x,t)dt\wedge dx_I &\mapsto \left(\int_{-\infty}^{t} f(x,s)ds - A(t)\int_{-\infty}^{\infty} f(x,s)ds\right)dx_I \end{aligned}$$

と定義する．ただし $A(t)=\int_{-\infty}^{t} e(s)ds$ である．このとき，K は 1 と $e_*\pi_*$ の間のチェインホモトピーであること，つまり，$1-e_*\pi_*=Kd+dK$ が成り立つことを示せ．

問題 22 [Bott-Tu, Exercise 4.8] メビウスの帯 $M=[0,1]\times\mathbb{R}/(0,x)\sim(1,-x)$ のコホモロジー $H^*(M)$ 及びコンパクト台コホモロジー $H_{\mathrm{c}}^*(M)$ を求めよ．

問題 23 $\mathbb{R}^2$ の開集合 $X=\mathbb{R}^2\setminus(\{(0,0)\}\cup\{(\frac{1}{n},0):n=1,2,3,\dots\})$ のコホモロジー $H^*(X)$ およびコンパクト台コホモロジー $H_{\mathrm{c}}^*(X)$ を求めよ．