幾何学II　演習問題 No.4　2019年10月30日

問題16　授業ではコチェイン複体の短完全列 $0 \to C^\bullet \xrightarrow{f} D^\bullet \xrightarrow{g} E^\bullet \to 0$ からコホモロジーの長完全列 $\cdots \to H^{n-1}(E) \xrightarrow{d^*} H^n(C) \xrightarrow{f} H^n(D) \xrightarrow{g} H^n(E) \xrightarrow{d^*} H^{n+1}(C) \to \cdots$ が得られることを説明した．その証明の残りを完成させよう．

(1) 連結準同型 d^* は次のようにして得られるものであった．(a) $d\omega = 0$ を満たす $\omega \in E^n$ に対して，$g(\xi) = \omega$ を満たす $\xi \in D^n$ をとる．(b) $f(\eta) = d\xi$ を満たす $\eta \in C^{n+1}$ が (ただ一つ) 存在する．(c) $d^*[\omega] = [\eta]$ と定める．コホモロジー類 $[\eta]$ が ξ の取り方によらないこと，また $[\omega]$ の代表元 ω の取り方によらないことを確かめよ．

(2) コホモロジー長完全列が完全であること，つまり (i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} d^*$，(ii) $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$，(iii) $\operatorname{Ker} d^* = \operatorname{Im} g$ を示せ．ただし，ここでの写像 f, g はコチェイン複体の間の写像ではなく，コホモロジーの間の写像であることに注意せよ．

問題17　単位円 S^1 を2つの開区間 U, V で覆う．ただし $U = \{e^{i\theta} : -\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}\}$, $V = \{e^{i\theta} : \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3}\}$ とする．以下の問いでは de Rham コホモロジーを考える．

(1) 開被覆 $\{U, V\}$ に関する Mayer-Vietoris 完全列を書き下せ．

(2) Mayer-Vietoris 完全列に現れる群 $H^*(U) \oplus H^*(V)$, $H^*(U \cap V)$ およびそれらの間の準同型を求めよ．

(3) Mayer-Vietoris 完全列を使って $H^0(S^1) \cong H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ を示せ．連結準同型 d^* を利用して $H^1(S^1)$ の基底を代表する微分形式を一つ与えよ．また写像 $H^1(S^1) \to \mathbb{R}$, $[\omega] \mapsto \int_{S^1} \omega$ が同型写像であることを示せ．

問題18　S^1 の de Rham コホモロジーを（Mayer-Vietoris 完全列を使わず）定義から直接計算せよ．また $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の de Rham コホモロジーを計算せよ．(後半のヒント：問題15の変位レトラクトを使うか，ポアンカレの補題を使う．)

問題19 [Bott-Tu, Exercise 1.7]　$\mathbb{R}^2$ から相異なる2点を除いた空間 $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ を考える．P を中心とする半径 ϵ の円を C_P, Q を中心とする半径 ϵ の円を C_Q とする．(ただし P と Q の距離は 3ϵ より大きいとする．) 写像

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) \to \mathbb{R}^2, \quad [\omega] \mapsto \left(\int_{C_P} \omega, \int_{C_Q} \omega \right)$$

が同型であることを示せ．また $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\})$ の基底となる閉微分形式を一組与えよ．

ヒント：Mayer-Vietoris 完全列を使う．いろいろな方法がある．

(a) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ とし，P, Q を中心とする開円盤の和を $V = B_P \cup B_Q$ とおくと，$\mathbb{R}^2 = U \cup V$.

(b) 簡単のため $P = (-1, 0)$, $Q = (1, 0)$ とおく．$U = \{(x, y) : x < \frac{1}{2}\} \setminus \{P\}$, $V = \{(x, y) : x > -\frac{1}{2}\} \setminus \{Q\}$ とすれば $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\} = U \cup V$.

(c) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{Q\}$ とおくと，$U \cup V = \mathbb{R}^2$, $U \cap V = \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$.