幾何学II　演習問題 No.3　 2019年10月23日

問題 11　 M を C^∞ 級多様体とする．授業で定義した写像 $K^p\colon \Omega^p(M\times\mathbb{R})\to\Omega^{p-1}(M\times\mathbb{R})$ を考える．ただし K^p は M の局所座標 $\{x_i\}$ と $\mathbb{R}$ の座標 t を用いて

$$\sum_I f_I(x,t)dx_I \mapsto 0$$
$$\sum_I f_I(x,t)dt\wedge dx_I \mapsto \sum_I\left(\int_0^t f_I(x,s)ds\right)dx_I$$

と定義された．(いつものように添字の I は multi-index を表す．)

(1) この写像は局所座標の取り方によらず well-defined であることを示せ.

(2) $\pi\colon M\times\mathbb{R}\to M,\ s\colon M\to M\times\mathbb{R}$ を $\pi(x,t)=x,\ s(x)=(x,0)$ で定める．$\Omega^p(M\times\mathbb{R})$ 上で $\mathrm{id}-\pi^*\circ s^* = d\circ K^p+K^{p+1}\circ d$ が成り立つことの証明を完成させよ．(これから $H^*(M\times\mathbb{R})\cong H^*(M)$ が従った．)

問題 12　 de Rham コホモロジーの積 $H^p(M)\times H^q(M)\to H^{p+q}(M)$ を $[\omega]\wedge[\tau]=[\omega\wedge\tau]$ により定めたい．ただし ω,τ は閉微分形式で $[\omega]$, $[\tau]$ は ω,τ の代表するコホモロジー類を表す.

(1) この積の定義が well-defined であることを示せ．(Leibniz 則を使う)

(2) この積により de Rham コホモロジー $H^*(M)=\bigoplus_{p=0}^{\dim M}H^p(M)$ は (超可換な) 環になる．この環の単位元は何か？

(3) C^∞ 級写像 $\varphi\colon M\to N$ の誘導する写像 $\varphi^*\colon H^*(N)\to H^*(M)$ は環準同型であることを示せ.

問題 13　 2 つの C^∞ 級写像 $f,g\colon M\to N$ が (C^∞ 級の意味で) ホモトピックであるとする．すなわち C^∞ 級写像 $H\colon M\times\mathbb{R}\to N$ で $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ を満たすものがあるとする．このとき微分形式の引き戻し $f^*,g^*\colon\Omega^*(N)\to\Omega^*(M)$ の間のチェインホモトピーを構成せよ.

問題 14　 $(C^\bullet,d^\bullet)$, $(D^\bullet,d^\bullet)$ を次のコチェイン複体とする.

$$C^\bullet\colon\ \cdots\to 0\to 0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{2}\mathbb{Z}\to 0\to\cdots$$
$$D^\bullet\colon\ \cdots\to 0\to 0\to\mathbb{Z}\to 0\to 0\to\cdots$$

すなわち，$C^0=\mathbb{Z}$, $C^1=\mathbb{Z}$, $d^0\colon C^0\to C^1$ は 2 倍写像，$D^0=\mathbb{Z}$ とし，それ以外の C^k, D^k はすべて 0 とする.

(1) チェイン写像 $f\colon C^\bullet\to D^\bullet$ を $f^0=\mathrm{id},\ f^k=0\ (k\neq 0)$ で定める．$(C^\bullet,d^\bullet)$, $(D^\bullet,d^\bullet)$ のコホモロジーを求め，f がコホモロジーに誘導する写像を求めよ.

(2) f は 0 写像とチェインホモトピックか？

問題 15　S^1 を $\mathbb{C}$ の部分集合 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ と考える．S^1 は $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の変位レトラクトであることを示せ．

余談：コチェイン複体の間の準同型全体の空間をまたコチェイン複体にすることができる．$(C^\bullet, d^\bullet)$, $(D^\bullet, d^\bullet)$ をコチェイン複体とするとき，

$$\mathrm{Hom}^p(C^\bullet, D^\bullet) := \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(C^k, D^{k+p})$$

とおく．ここで右辺の Hom はアーベル群の準同型全体を表す．すなわち $\mathrm{Hom}^p(C^\bullet, D^\bullet)$ の元 ϕ は（次数を p 上げる）準同型 $\phi^k \colon C^k \to D^{k+p}$ たちの $k \in \mathbb{Z}$ にわたった集まりである．次に，微分 $\delta^p \colon \mathrm{Hom}^p(C^\bullet, D^\bullet) \to \mathrm{Hom}^{p+1}(C^\bullet, D^\bullet)$ を

$$(\delta\phi)^k := d^{k+p} \circ \phi^k - (-1)^p \phi^{k+1} \circ d^k$$

と定める．このように定めると $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$ となることは容易にわかる．このとき

$$f \in \mathrm{Hom}^0(C^\bullet, D^\bullet) \text{ がチェイン写像} \iff \delta f = 0$$
$$\text{チェイン写像 } f, g \in \mathrm{Hom}^0(C^\bullet, D^\bullet) \text{ がチェインホモトピック} \iff f - g \in \mathrm{Im}\,\delta$$

であることは定義からわかる．つまり商

$$\{\text{チェイン写像}\}/\text{チェインホモトピー}$$

はコホモロジーとみなせる．