幾何学 II　演習問題 No.2　 2019 年 10 月 9 日

問題 6　$\mathbb{R}^n$ 上の微分形式に対する外微分 $d\colon \Omega^p(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ は $d(\sum_I f_I dx_I) = \sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$ で与えられる．ただし $I = (i_1, \ldots, i_p)$ は $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n$ を満たす multi-index で，$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$．また C^∞ 級写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ に関する微分形式 $\omega = \sum_I f_I(x) dx_I \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ の引き戻しは $\varphi^*\omega = \sum_I f_I(\varphi(y)) d\varphi_{i_1}(y) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p}(y)$ で与えられる．ただし $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ とし $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y))$ と書いた．これらの定義に基づき次を示せ．

(1) $d(d\omega) = 0$.

(2) $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\tau$.

(3) $\varphi^*(\omega \wedge \tau) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\tau$.

(4) $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$.

問題 7　$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の微分形式 α を次で定義する．

$$\alpha = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

(1) α は閉微分形式であることを示せ．

(2) $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ を単位円とする．$\int_{S^1} \alpha$ を計算し，α は完全微分形式ではない，つまり $\alpha = df$ を満たす $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の C^∞ 級関数 f は存在しないことを示せ．

問題 8　$\mathbb{R}^1$ の de Rham コホモロジー群 $H^*_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^1)$ を求めよ．

問題 9　$\varphi\colon M \to N$ を多様体の間の C^∞ 級写像とする．微分形式の引き戻し $\varphi^*\colon \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$ は de Rham コホモロジーの間の写像 $\varphi^*\colon H^p_{\mathrm{dR}}(N) \to H^p_{\mathrm{dR}}(M)$, $[\omega] \mapsto [\varphi^*\omega]$ を (well-defined に) 定めることを示せ．

問題 10　複素平面上の微分形式 τ を次で与える．

$$\tau = \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

ただし $\mathbb{C}$ の座標を $z = x + iy$ とした．

(1) τ は $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の滑らかな 2 次微分形式 $\hat{\tau}$ に拡張されることを示せ．(ヒント：無限遠での座標 $w = z^{-1}$ に関して座標表示せよ．)

(2) $\mathbb{CP}^1$ 上の 2 形式 $\hat{\tau}$ は完全形式ではないことを示せ．

(3) $\mathbb{C}$ 上の 2 形式 τ は完全形式であることを示せ．