幾何学 II　演習問題 No.14　 2020 年 1 月 22 日

胞体ホモロジーの計算問題

問題 68 $4g$ 角形の辺を 2 つづつ組にして張り合わせることにより，g 人乗りの浮輪の表面 Σ_g(向き付け可能な種数 g の曲面) ができることを (視覚的に) 観察せよ．また Σ_g を胞体分割してそのホモロジーを求めよ．

問題 69 $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ を胞体分割し，そのホモロジーを求めよ．

問題 70 $\mathbb{RP}^n$ の胞体分割を用いて，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数および $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群を求めよ．

問題 71 $k \leq n$ に対して写像 $[z_0, z_1, \ldots, z_k] \mapsto [z_0, z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0]$ により $\mathbb{CP}^k$ を $\mathbb{CP}^n$ の部分空間とみなす．相対ホモロジー群 $H_*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{CP}^k)$ を求めよ．

問題 72 $S^1 \times [0, 1]/(e^{i\theta}, 0) \sim (e^{in\theta}, 1)$ を胞体分割し，そのホモロジー群を求めよ．ただし n は正の整数．

問題 73 $D^2 \times S^1/(\partial D^2 \times S^1)$ を胞体分割し，そのホモロジー群を求めよ．

問題 74 Klein の壺 $K = [0, 1] \times [0, 1]/(0, y) \sim (1, y), (x, 0) \sim (1 - x, 1)$ を胞体分割し，そのホモロジー群を求めよ．

その他の基本的な問題

問題 75 特異ホモロジーとコホモロジーのペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H^n(X) \times H_n(X) \to \mathbb{Z}$ を $\langle [\omega], [\sigma] \rangle = \omega(\sigma)$ で定義する．このペアリングが well-defined であることを確かめ，連続写像 $f \colon X \to Y$ に対して $\langle f^*[\omega], [\sigma] \rangle = \langle [\omega], f_*[\sigma] \rangle$ が成り立つことを示せ．ただし $[\omega] \in H^n(Y)$, $[\sigma] \in H_n(X)$.

問題 76 M, N を C^∞ 級多様体とする．de Rham の定理の与える同型 $\theta_M \colon H^n_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^n_{\mathrm{sing}}(M; \mathbb{R})$ は滑らかな写像に関して自然であることを示せ．つまり C^∞ 級写像 $f \colon M \to N$ に対して次の図式は可換であることを示せ．

$$\begin{array}{ccc} H^n_{\mathrm{dR}}(N) & \xrightarrow{\theta_N} & H^n_{\mathrm{sing}}(N) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow \\ H^n_{\mathrm{dR}}(M) & \xrightarrow{\theta_M} & H^n_{\mathrm{sing}}(M) \end{array}$$

問題 77 X_α を CW 複体，$x_\alpha \in X_\alpha$ を基点で 0 セルの一つになっている [1] ものとする．授業で説明したように，同型 $\widetilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha) \cong \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n(X_\alpha)$ が成り立つ (wedge 和公理)．写像 $p_\alpha \colon \bigvee_\alpha X_\alpha \to X_\alpha$ を X_α 上で恒等写像，X_α 以外を基点につぶす写像，$i_\alpha \colon X_\alpha \to \bigvee_\alpha X_\alpha$ を自然な包含写像とするとき，これらがホモロジーに誘導する写像 $p_{\alpha *}$ は α 成分への射影，$i_{\alpha *}$ は α 成分の包含写像を与えることを示せ．

[1] 各 $\{x_\alpha\}$ を 0 セルとする仮定は不要．Hatcher, *Algebraic Topology*, Proposition A.4 の証明参照．

問題 78 $n \neq m$ のとき $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ は同相ではないことを示せ．(ヒント：1 点を除く．)

問題 79 任意の連続写像 $f\colon D^n \to D^n$ は不動点を持つことを示せ．(Brouwer の不動点定理，ヒント：全ての $x \in D^n$ に対して $f(x) \neq x$ とし，$f(x)$ と x を結ぶ直線と $\partial D^n = S^{n-1}$ との (x 側での) 交わりを $r(x)$ とすると，$r\colon D^n \to S^n$ はレトラクションになる．ここから矛盾を導く．)

問題 80 問題 88 と No.12 の問題 59 の結果を用いて，次の切除同型を示せ．X を CW 複体，$A, B \subset X$ を部分複体とするとき，$H_*(A, A\cap B) \cong H_*(A\cup B, B)$ が成り立つ．

注 授業では，$\{A, B\}$ が切除対であるとき，切除同型が成り立つことを示した．逆に切除同型が成り立てば，$\{A, B\}$ は切除対であることも言える．証明はホモロジーに同型を導くチェイン写像はチェインホモトピー同値であること（中岡稔「位相幾何学」の第 1 章，定理 3）を用いるとよい．

<u>基本類 (fundamental class) に関わる問題</u>

問題 81 恒等写像 $1_n\colon \Delta^n \to \Delta^n$ を特異 n 単体とみなしたとき，1_n は相対ホモロジー群 $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を与えることを示せ．ヒント：同型 $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to \widetilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n) \cong H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ を使って n に関する帰納法で示す．

問題 82 多様体 M に対して，$S_*^{\mathrm{sm}}(M)$ で滑らかな特異チェイン複体を表す．

(1) 境界付き多様体 M に対してペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \Omega_c^k(M\setminus\partial M)\times S_k^{\mathrm{sm}}(M, \partial M) \to \mathbb{R}$ を $\langle\omega, \sigma\rangle = \int_{\Delta^k}\sigma^*\omega$ で定める．$\langle d\omega, \sigma\rangle = \langle\omega, \partial\sigma\rangle$ を示せ．特にこのペアリングはペアリング $H^k_{\mathrm{dR,c}}(M\setminus\partial M)\times H_k^{\mathrm{sing}}(M) \to \mathbb{R}$ を誘導する．

(2) (1) の誘導する写像

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}_1\colon H_n(D^n, \partial D^n; \mathbb{R}) &\to H^n_{\mathrm{dR,c}}(D^n\setminus\partial D^n)^* \\ \mathrm{DR}_2\colon H_{n-1}(\partial D^n; \mathbb{R}) &\to H^{n-1}_{\mathrm{dR}}(\partial D^n)^*\end{aligned}$$

は同型であることを示せ．さらに，$H_n(D^n, \partial D^n; \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 上の生成元 σ で

$$\mathrm{DR}_1(\sigma) = \int_{D^n}, \quad \mathrm{DR}_2(\partial\sigma) = \int_{\partial D^n}$$

を満たすものが存在することを示せ．ただし，D^n には標準的な向き，∂D^n には境界に誘導される向きを入れておく．

つまり，$H_n(D^n, \partial D^n)$ の生成元は D^n の向きをとることで決まり，$H_{n-1}(\partial D^n)$ の生成元は ∂D^{n-1} の向きをとることで決まり，写像 $\partial\colon H_n(D^n, \partial D^n) \to H_{n-1}(\partial D^n)$ は D^n の向きから境界 ∂D^n の向きを誘導する操作に対応する．

問題 83 相対ホモロジー完全系列を用いて $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \cong \mathbb{Z}$ を示せ．また，n 次元多様体 M とその 1 点 x に対して $H_n(M, M\setminus\{x\}) \cong \mathbb{Z}$ を示せ．$H_n(M, M\setminus\{x\})$ を点 x での局所ホモロジー群という．さらに，点 x での局所ホモロジー群の生成元と点 x での M の向きの間に自然な一対一対応があることを観察せよ．

問題 84 Mを連結コンパクト向き付け可能なn次元多様体とする．このとき$H_n(M) \cong \mathbb{Z}$であり，自然な写像$H_n(M) \to H_n(M, M \setminus \{x\})$は全ての$x \in M$に対して同型であることが知られている．(証明はそれほど難しくない．例えば，Hatcher, *Algebraic Topology* の Theorem 3.26 を参照．) $H_n(M)$の生成元$[M]$をMの基本類と呼ぶ．このことを認めたうえで，Mの向きをうまく選ぶと，de Rham の定理の同型$H_n(M;\mathbb{R}) \cong H^n_{\mathrm{dR}}(M)^*$の下で，$[M]$は$M$上での積分$\int_M$に対応することを示せ．

CW 複体の位相的性質

問題 85 CW 複体は Hausdorff であることを示せ．

問題 86 Xを CW 複体とする．$K \subset X$をコンパクト部分集合とするとき，Kと交わる open cell の個数は有限個であることを示せ．($K \cap e^n_\alpha \neq \emptyset$なるセルごとに 1 点づつ選んだ集合が離散閉集合であることを示す．)

問題 87 CW 複体Xは次の性質 (weak topology) を持つことを示せ．

$$F \subset X \text{ は閉} \iff F \text{ と 任意の closed cell の交わり } F \cap \overline{e^n_\alpha} \text{ は閉}$$

問題 88 Xを CW 複体，$A \subset X$をその部分複体とする．AはAのある開近傍の強変位レトラクトであることを示せ．

胞体ホモロジーの応用

問題 89 有限 CW 複体に対する Künneth の定理を示そう．

(1) X, Yを有限 CW 複体とし，$e^n_\alpha \subset X$, $f^m_\beta \subset Y$を開セルとする．$X \times Y$は$e^n_\alpha \times f^m_\beta$を開セルとする CW 複体の構造を持つことを示せ．

(2) (1) より$X \times Y$の胞体チェイン複体は (アーベル群として) $C_n(X \times Y) = \bigoplus_{p+q=n} C_p(X) \otimes C_q(Y)$で与えられる．このチェイン複体の微分は$d(\sigma \otimes \tau) = (d\sigma) \otimes \tau + (-1)^{\dim \sigma} \sigma \otimes d\tau$で与えられることを示せ．

(3) 普遍係数定理の証明をまねて，次の分裂する完全列があることを示せ．

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_q(Y)) \to 0$$

注：一般の位相空間の特異ホモロジーについても同様の Künneth の定理が成り立つ．証明はチェインホモトピー同値写像$S_*(X) \otimes S_*(Y) \to S_*(X \times Y)$を構成することによりなされる．詳細は中岡稔「位相幾何学」2.3 節「Eilenberg-Zilber の定理」を参照．

問題 90 単体複体Kを CW 複体とみなしたとき，単体チェイン複体$C_*(K)$は CW 複体としての胞体チェイン複体と同型であることを確認せよ (No.1 の問題 3 参照)．特に単体ホモロジーと特異ホモロジーは同型になる．