幾何学II　演習問題 No.13　 2020年1月15日

問題 58(再掲)　$f\colon (X,A)\to(Y,B)$ を位相空間対の間の連続写像とする．次の図式が可換であることを示せ．

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

ただし ∂ は相対ホモロジーの長完全列に現れる連結準同型．

問題 59(再掲)　X を位相空間，$A\subset X$ を閉集合とする．A の開近傍 U が存在して A は U の strong deformation retract であるとする．このとき商写像 $\pi\colon (X,A)\to(X/A,*)$ が同型

$$\pi_*\colon H_k(X,A)\cong H_k(X/A,*)$$

を誘導することを示そう．ただし，X/A は X において部分集合 A を一点につぶして得られる空間で，$*\subset X/A$ は A の像 (1 点集合)．

(1) 相対ホモロジー長完全列を用いて $H_k(X,A)\cong H_k(X,U)$ および $H_k(X/A,*)\cong H_k(X/A,U/A)$ を示せ．

(2) 切除同型を用いて $H_k(X,U)\cong H_k(X\setminus A,U\setminus A)$, $H_k(X/A,U/A)\cong H_k((X/A)\setminus *,(U/A)\setminus *)$ を示し，これから同型 $H_k(X,A)\cong H_k(X/A,*)$ を導け．

問題 61　実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ の整数係数ホモロジー群が次で与えられることを示せ．(必要なら問題 57，59 の結果を用いてもよい．)

$$H_n(\mathbb{RP}^2)\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & n=0\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n=1\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

問題 62　普遍係数定理を用いて $H_*(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $H^*(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $H^*(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z})$ を求めよ．ただし p は素数とする．

問題 63　クラインの壺 K は $\mathbb{R}^2$ を関係 $(x,y)\sim(x+1,y)$, $(x,y)\sim(-x,y+1)$ の生成する同値関係で割った多様体である．K の整数係数ホモロジー群を求めよ．(K がメビウスの帯 2 つを貼り合わせてできること，あるいは円筒 2 つを貼り合わせてできることを使う．)

記号 以下では R は 1 をもつ可換環 とする．

問題 64　M,N を R 加群とし，次の 2 つの完全列が与えられているとする．

$$0\longleftarrow M\xleftarrow{\ \epsilon\ } P_0\xleftarrow{\ \partial_1\ } P_1\xleftarrow{\ \partial_2\ } P_2\longleftarrow\cdots$$
$$0\longleftarrow N\xleftarrow{\ \epsilon\ } Q_0\xleftarrow{\ \partial_1\ } Q_1\xleftarrow{\ \partial_2\ } Q_2\longleftarrow\cdots$$

さらに P_i は自由 R 加群とする．(すなわち M の自由分解が与えられている．)

(1) R 加群の準同型 $f\colon M \to N$ に対して，次の図式を可換にする準同型 $\varphi_i\colon P_i \to Q_i$ が存在することを示せ．

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longleftarrow & M & \xleftarrow{\epsilon} & P_0 & \xleftarrow{\partial_1} & P_1 & \xleftarrow{\partial_2} & P_2 & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \\ 0 & \longleftarrow & N & \xleftarrow{\epsilon} & Q_0 & \xleftarrow{\partial_1} & Q_1 & \xleftarrow{\partial_2} & Q_2 & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

(2) (1) を満たす $\varphi = \{\varphi_i\}$ はチェイン複体 (P_*, ∂), (Q_*, ∂) の間のチェイン写像を与える．(1) を満たすチェイン写像が 2 つあれば，それらはチェインホモトピックであることを示せ．すなわち (1) を満たす写像 $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$ に対して準同型 $K_i\colon P_i \to Q_{i+1}$ であって

$$\varphi_i - \psi_i = \partial_{i+1} \circ K_i + K_{i-1} \circ \partial_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

を満たすものが存在することを示せ．ただし $\partial_0 = 0$, $K_{-1} = 0$ とおく．

(3) 授業では以上の性質を用いて $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$, $\mathrm{Ext}_R^i(M,N)$ を定義した．これらの群が M, N について functorial であることを示せ．

(4) $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_i^R(N,M)$ を示せ．

問題 65　M を R 加群, $i \geq 1$ とする．N が平坦 R 加群[1]であるとき，$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = 0$ を示せ．また，N が単射的 R 加群[2]であるとき，$\mathrm{Ext}_R^i(M,N) = 0$ を示せ．

注意　$R = \mathbb{Z}$ のとき，次のことが知られている．N が平坦 $\mathbb{Z}$ 加群であることと，N がねじれ元 (torsion) を持たないこと[3]は同値である．また N が単射的 $\mathbb{Z}$ 加群であることと N が可除 (divisible) であること[4]とは同値である．

問題 66　$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ を R 加群の短完全列とするとき，長完全列

$$\to \mathrm{Tor}_i(M_1,N) \to \mathrm{Tor}_i(M_2,N) \to \mathrm{Tor}_i(M_3,N) \to \mathrm{Tor}_{i-1}(M_1,N) \to \cdots$$
$$\to \mathrm{Ext}^i(M_3,N) \to \mathrm{Ext}^i(M_2,N) \to \mathrm{Ext}^i(M_1,N) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(M_3,N) \to \cdots$$

が存在することを示せ．

問題 67　普遍係数定理の証明で授業で省略したところを埋めよ．

[1] N が平坦 R 加群であるとは，任意の R 加群の単射 $i\colon M_1 \hookrightarrow M_2$ に対して $i \otimes 1\colon M_1 \otimes_R N \to M_2 \otimes_R N$ が単射になること．

[2] N が単射的 R 加群であるとは，任意の R 加群の単射 $i\colon M_1 \hookrightarrow M_2$ と準同型 $f\colon M_1 \to N$ に対してある準同型 $g\colon M_2 \to N$ が存在して $g \circ i = f$ が成り立つこと．

[3] N のねじれ元とは，ある自然数 n に対して $n \cdot x = 0$ を満たすゼロでない元 $x \in N$ のこと．

[4] N が可除とは，任意の $x \in N$ と自然数 n に対して $n \cdot y = x$ を満たす $y \in N$ が存在すること．