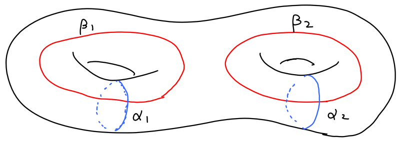
幾何学II　演習問題 No.12　2020年1月8日

問題 55　二人乗りの浮輪の表面 Σ(下図参照) の de Rham コホモロジーを求めよ．また図のサイクル α_i, β_i のポアンカレ双対が $H^1(\Sigma)$ の基底になることを示せ．



問題 56　S^1 と S^2 の整数係数の特異ホモロジー群を，簡約ホモロジーに対する Mayer-Vietoris 完全列を使って計算せよ．

問題 57　(コンパクトな) メビウスの帯 $M = [0,1] \times [-1,1]/(0,x) \sim (1,-x)$ とその境界 $\partial M \cong S^1$ を考える．整数係数の相対ホモロジー $H_*(M, \partial M)$ を求めよ．

問題 58　$f\colon (X,A) \to (Y,B)$ を位相空間対の間の連続写像とする．次の図式が可換であることを示せ．

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

ただし ∂ は相対ホモロジーの長完全列に現れる連結準同型．

問題 59　X を位相空間，$A \subset X$ を閉集合とする．A の開近傍 U が存在して A は U の strong deformation retract であるとする[1]．このとき商写像 $\pi\colon (X,A) \to (X/A, *)$ が同型

$$\pi_*\colon H_k(X,A) \cong H_k(X/A, *)$$

を誘導することを示そう．ただし，X/A は X において部分集合 A を一点につぶして得られる空間で，$* \subset X/A$ は A の像 (1 点集合)．

(1) 相対ホモロジー長完全列を用いて $H_k(X,A) \cong H_k(X,U)$ および $H_k(X/A, *) \cong H_k(X/A, U/A)$ を示せ．

(2) 切除同型を用いて $H_k(X,U) \cong H_k(X \setminus A, U \setminus A)$, $H_k(X/A, U/A) \cong H_k((X/A) \setminus *, (U/A) \setminus *)$ を示し，これから同型 $H_k(X,A) \cong H_k(X/A, *)$ を導け．

問題 60　Hatcher, “Algebraic Topology” (https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf) の Proposition 2.21 (p.119) の証明を読み，分からないところがあれば TA の方に質問して下さい．

---

[1]すなわち，連続写像 $r\colon U \to A$ で，$r \circ i = \mathrm{id}_A$，$i \circ r \sim \mathrm{id}_U$ を満たすものが存在し，さらに $i \circ r$ と id_U の間のホモトピー $h\colon U \times [0,1] \to U$ は $h(a,t) = a, \forall (a,t) \in A \times [0,1]$ を満たすようにとれる．ただし $i\colon A \to U$ は包含写像．Hatcher では strong deformation retract のことを単に deformation retract と呼んでいる．