# 幾何学II　演習問題 No.11　2019年12月25日

問題50-52はde Rhamコホモロジーに関する問題，問題53-54は特異ホモロジーに関する問題である．

**問題50(再掲[1])**　$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ の接ベクトル束 $TS^2$ を考える．$S^2$ には $D^3$ の境界としての向きを入れておく．

(1) $TS^2$ の切断 $s\colon S^2 \to TS^2$, $s(x,y,z) = (-y,x,0) \in T_{(x,y,z)}S^2 \subset \mathbb{R}^3$ の像はゼロ切断 $S^2$ と横断的に交わることを示せ．ここで $T_{(x,y,z)}S^2$ を $(x,y,z)$ の直交補空間と同一視している．また0次元多様体 $S^2 \cap \mathrm{Im}(s)$ の向きを決定せよ．(注：0次元多様体の向きは各点に対して $\pm 1$ を対応させる関数である．)

(2) ゼロ切断 $S^2 \subset TS^2$ のコンパクトPoincaré双対を $\eta \in H^2_c(TS^2)$ とする．$\int_{S^2} \eta$ を求めよ．

(3) $TS^2$ が自明束ではないことを示せ．

**問題51**　$M$ を向き付けられたコンパクト多様体，$E \to M$ を向き付けられた階数 $r$ のベクトル束とする．$E$ のEuler類 $e(E)$ は，Thom類 $\Theta \in H^r_{cv}(E)$ のゼロ切断 $s_0\colon M \to E$ による引き戻し $e(E) := s_0^*\Theta$ と定義される(No.10, 問題47).

$s\colon M \to E$ をゼロ切断 $\mathrm{Im}(s_0) \subset E$ と横断的な切断とする．(本講義ではゼロ切断 $s_0$ とゼロ切断 $\mathrm{Im}(s_0)$ の像を混同してどちらも「ゼロ切断」と呼ぶ．) このとき $s$ のゼロ点集合 $Z(s) := \{x \in M : s(x) = 0\}$ は $M$ の部分多様体である．$Z(s)$ のPoincaré双対はオイラー類 $e(E) \in H^r(M)$ と等しいことを示せ.

**問題52**　(1) $M$ をコンパクト多様体，$x \in M$ を $M$ の点とする．$p > 0$ に対して包含写像 $j\colon M \setminus \{x\} \to M$ の誘導する写像 $j_*\colon H^p_c(M \setminus \{x\}) \to H^p(M)$ は同型写像であることを示せ.

(2) $x_n = [0,\dots,0,1] \in \mathbb{CP}^n$ に対し，$\mathbb{CP}^n \setminus \{x_n\}$ は $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上の複素直線束の構造を持つことを示せ．ただし直線束の射影は $[z_0,\dots,z_n] \mapsto [z_0,\dots,z_{n-1}]$ で与える．

(3) 複素直線束のファイバーには，ファイバーの元 $v \neq 0$ に対して $\{v, \sqrt{-1}v\}$ が向き付けられた基底になるように標準的な向きが入り，複素直線束は(実ベクトル束として) 常に向き付けられている．Thom同型と(1), (2)の結果を用いて次を示せ．

$$H^p(\mathbb{CP}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & 0 \le p \le 2n,\ p\text{は偶数} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

(4) $H^2(\mathbb{CP}^n)$ の生成元は部分多様体 $\mathbb{CP}^{n-1}$ のポアンカレ双対 $\xi$ で与えられることを示せ．ただし，$\mathbb{CP}^{n-1}$ は写像 $[z_0,\dots,z_{n-1}] \mapsto [z_0,\dots,z_{n-1},0]$ により $\mathbb{CP}^n$ に埋め込んでおくことにする．また $\xi^n \neq 0$ を示すことにより，環同型 $H^*(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{R}[\xi]/(\xi^{n+1})$ を示せ.

[1]以前の演習問題の解答は`https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~iritani/teaching2019kikaII.htm`にある．

**記号**　$\Delta^q = \{(t_0, \ldots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} : t_i \geq 0, \sum_{i=0}^q t_i = 1\}$ を $q$ 単体とする．連続写像 $\sigma\colon \Delta^q \to X$ を特異 $q$ 単体という．位相空間 $X$ に対して

$$S_q(X) = \text{特異 } q \text{ 単体 } \sigma\colon \Delta^q \to X \text{ の生成する自由 } \mathbb{Z} \text{ 加群}$$

とし，境界作用素 $\partial\colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ を

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \partial_i$$

で定める．ただし，$\partial_i\colon \Delta^{q-1} \to \Delta^q$ は $\partial_i(t_0, \ldots, t_{q-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{q-1})$ で与えられる写像 ($i$ 面)．$(S_*(X), \partial)$ を特異チェイン複体という．特異コチェイン複体は $S^*(X) = \mathrm{Hom}(S_*(X), \mathbb{Z})$ で与えられる．

**問題 53**　特異チェイン複体の境界作用素 $\partial\colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ について，$\partial \circ \partial = 0$ を示せ.

**問題 54**　$f, g\colon X \to Y$ をホモトピックな連続写像とする．授業で定義した写像 $K\colon S_q(X) \to S_{q+1}(Y)$ が $f_*, g_*\colon S_*(X) \to S_*(Y)$ の間のチェインホモトピーを与えることを示せ．さらに $f^*, g^*\colon S^*(Y) \to S^*(X)$ もチェインホモトピックであることを示せ.

**記号**　$H\colon X \times I \to Y$ を $H|_{X\times\{1\}} = f$, $H|_{X\times\{0\}} = g$ を満たすホモトピーとする．このときチェインホモトピー $K\colon S_q(X) \to S_{q+1}(Y)$ は次の式で与えられた：

$$K(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \theta_i$$

ただし，$\theta_i\colon \Delta^{q+1} \to \Delta^q \times I$ は頂点 $e_0, e_1, \ldots, e_{q+1}$ を $(e_0, 0), \ldots, (e_i, 0), (e_i, 1), \ldots, (e_q, 1)$ に移すアフィン線形写像.