幾何学 II　演習問題 No.10　 2019 年 12 月 18 日

問題 45　M を向き付けられた m 次元多様体，$S \subset M$ を向き付けられた s 次元閉部分多様体とする．Poincaré 双対性定理を用いて次を証明せよ．(この問題では M が有限個の good cover を持つと仮定してよい．)

(1) 任意のコンパクト台の s 次閉微分形式 $\alpha \in \Omega_c^s(M)$ に対して

$$\int_M \alpha \wedge \eta_S = \int_S \alpha$$

を満たす閉微分形式 $\eta_S \in \Omega^{m-s}(M)$ が存在することを示せ．またこのコホモロジー類 $[\eta_S] \in H^{m-s}(M)$ は一意であることを示せ.

(2) さらに S がコンパクトな部分多様体であると仮定する．このとき，任意の s 次閉微分形式 $\alpha \in \Omega^s(M)$ に対して

$$\int_M \alpha \wedge \eta_{S,c} = \int_S \alpha$$

を満たすコンパクト台の閉微分形式 $\eta_{S,c} \in \Omega_c^{m-s}(M)$ が存在することを示せ．またこのコホモロジー類 $[\eta_{S,c}] \in H_c^{m-s}(M)$ は一意であることを示せ.

以上の性質を満たす $[\eta_S]$, $[\eta_{S,c}]$ を S の **Poincaré 双対**という.

問題 46 (No.5, 問題 20 も参照)　多様体 $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ の部分多様体

$$\begin{aligned}
P &= \{(1,0,0)\} \\
R &= \{(x,0,0) : x > 0\} \\
C &= \{(x,y,0) : x^2 + y^2 = 1\} \\
H &= \{(x,y,0) : (x,y) \neq (0,0)\} \\
S &= \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}
\end{aligned}$$

を考える．各々の Poincaré 双対を与える微分形式 $\eta_P, \eta_R, \eta_C, \eta_H, \eta_S, \eta_{P,c}, \eta_{C,c}, \eta_{S,c}$ を与え，これらの代表するコホモロジー類はゼロかどうかを判定せよ．また $\int_M \eta_R \wedge \eta_{S,c}$ を求めよ.

問題 47　$E \to M$ を向き付けられた階数 r の実ベクトル束とする．E が至る所消えない切断 s を持つとする (すなわち任意の $x \in M$ に対して $s(x) \neq 0$ となる切断 s が存在するとする)．このとき，E のオイラー類 $e(E)$ はゼロであることを示せ．ここで E のオイラー類とは Thom 類 $\Theta \in H_{cv}^r(E)$ のゼロ切断 $s_0 \colon M \to E$ による引き戻し $e(E) := s_0^*\Theta \in H^r(M)$ として定義される.

問題 48　n 次元多様体 M に対して接ベクトル束 TM を考える．授業で説明したように，M が向き付け可能であることと接ベクトル束 TM が (ベクトル束として) 向き付け可能であることは同値である．M が向き付け可能であるかどうかにかかわらず，TM の全空間は多様体として常に向き付け可能であることを示せ.

問題 49　M を向き付けられた m 次元多様体，S を向き付けられたコンパクト s 次元多様体とする．二つの埋め込み $f, g\colon S \to M$ がホモトピック，すなわちある C^∞ 級写像 $H\colon S \times [0,1] \to M$ が存在して $H(x,0) = g(x)$, $H(x,1) = f(x)$ であるとき，部分多様体 $f(S)$ と $g(S)$ のコンパクト Poincaré 双対は ($H_c^{m-s}(M)$ の元として) 等しいことを示せ.

問題 50　$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ の接ベクトル束 TS^2 を考える．S^2 には D^3 の境界としての向きを入れておく.

(1) TS^2 の切断 $s\colon S^2 \to TS^2$, $s(x,y,z) = (-y,x,0) \in T_{(x,y,z)}S^2 \subset \mathbb{R}^3$ の像はゼロ切断 S^2 と横断的に交わることを示せ．ここで $T_{(x,y,z)}S^2$ を (x,y,z) の直交補空間と同一視している．また 0 次元多様体 $S^2 \cap \mathrm{Im}(s)$ の向きを決定せよ．(注：0 次元多様体の向きは各点に対して ± 1 を対応させる関数である．)

(2) ゼロ切断 $S^2 \subset TS^2$ のコンパクト Poincaré 双対を $\eta \in H_c^2(TS^2)$ とする．$\int_{S^2} \eta$ を求めよ.

(3) TS^2 が自明束ではないことを示せ.