幾何学II　演習問題 No.1　 2019年10月2日

問題1　3単体 $|abcd|$ の境界の定める単体複体 $K = K(\partial|abcd|)$ を考える．チェイン複体 $C_\bullet(K)$ の (向き付けられた) 単体からなる基底をとり，境界作用素 $\partial\colon C_p(K) \to C_{p-1}(K)$ の行列表示を求めよ．また (整数係数の) ホモロジー $H_p(K)$ を計算せよ．ただし $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ は一般の位置にある (アフィン独立な)4 点で $|abcd|$ はこの 4 点を頂点とする 3 単体 (つまり四面体) を表す.

問題2　2次元トーラス $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の単体分割 (三角形分割) を構成せよ.

問題3　$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^N$ を一般の位置にある $n+1$ 点とする．授業で説明した単体 $|a_0a_1\cdots a_n|$ の向き[1] は単体 $|a_0a_1\dots a_n|$ の生成するアフィン部分空間 E

$$E = \left\{t_0a_0 + \cdots + t_na_n \in \mathbb{R}^N : t_i \in \mathbb{R}, t_0 + \cdots + t_n = 1\right\}$$

の向きを自然に定めることを示せ．また，境界作用素 ∂ の定義式

$$\partial\langle a_0, \dots, a_n\rangle = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle a_0, \dots, \check{a}_i, \dots, a_n\rangle$$

は向き付けられた単体 $\langle a_0, \dots, a_n\rangle$ から，(Stokes の定理によって) その境界に誘導される向きと整合的であることを (各 $n-1$ 次元面ごとに) 確かめよ.

問題4　次の微分形式の計算をせよ.

(1) $\alpha = a_1dx + a_2dy + a_3dz$, $\beta = b_1dx + b_2dy + b_3dz$ に対して $\alpha \wedge \beta$ を計算し，空間ベクトルの外積と関係していることを見よ.

(2) $\mathbb{R}^3$ 上の微分形式 $B = B_1dy\wedge dz + B_2dz\wedge dx + B_3dx\wedge dy$ に対して dB を計算し，ベクトル場の divergence と関係していることを見よ．ただし $B_i = B_i(x, y, z)$ は C^∞ 級関数.

(3) $\mathbb{R}^3$ 上の微分形式 $E = E_1dx + E_2dy + E_3dz$ に対して dE を計算し，ベクトル場の rotation と関係していることを見よ．ただし $E_i = E_i(x, y, z)$ は C^∞ 級関数.

(4) $\mathbb{R}^3$ 上の微分形式に対して $d \circ d = 0$ を用いて $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$, $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$ を説明せよ.

(5) 写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$ に対して $\varphi^*(xdy - ydx)$ を計算せよ．(ただし，定義域と値域両方とも，(x, y) によって座標を表している．)

(6) $\mathbb{R}^2$ 上の微分形式 $dx \wedge dy$ を極座標 (r, θ) で表せ.

(7) $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_6$ に対して $\omega \wedge \omega \wedge \omega$ を計算せよ.

[1] 頂点の順列 $(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ の同値類．ただし，偶置換で移りあう順列を同値とする.

問題 5　$\mathbb{R}^3$ 上の 2 次微分形式 $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ を $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に制限して得られる微分形式を η とする．

(1) S^2 の向きを適当に定め，$\int_{S^2} \eta$ を計算せよ．

(2) S^2 上の 1 次微分形式 α で $\eta = d\alpha$ を満たすものは存在するか？