幾何学入門演習　No.1　(2023 年 10 月 4 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．$(\star)$ は基本的な問題です．

問題 1 2 次元トーラスを $\mathbb{R}^3$ 内の曲面として表す式を与えよ．二人乗りの浮き輪（種数 2 の曲面）を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面として表す式を与えよ．

問題 2 $(\star)$ X を位相空間，$A \subset X$ を部分集合とする．A に X からの相対位相を入れる．つまり，A の開集合は X の開集合 U を用いて $A \cap U$ の形に書ける集合である．

(1) 包含写像 $i\colon A \to X,\ i(a) = a$ は連続であることを示せ.

(2) X がハウスドルフ空間なら A もハウスドルフ空間であることを示せ.

(3) A の閉集合は X の閉集合か.（答えは一般には否．反例を与えよ．但し，A がコンパクトで X がハウスドルフ空間の時はどうなるか.）

問題 3 $(\star)$ (X, d) を距離空間とする．距離から定まる位相について X はハウスドルフであることを示せ.

問題 4 $(\star)$ $\mathbb{R}^n$ 上のユークリッド距離 $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ を考え，$\mathbb{R}^n$ にはこの距離 d に付随する位相を入れる．積位相空間の定義を復習し，$n, m \geq 0$ に対して，位相空間 $\mathbb{R}^{n+m}$ は $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の積位相空間であることを証明せよ.

問題 5 $(\star)$ $f_i\colon X_i \to Y_i,\ i = 1, 2$ を連続写像とする．写像 $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ を $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ と定める．$f_1 \times f_2$ は連続写像であることを示せ.

問題 6 $(\star)$ X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続写像とし，$A \subset X$ と $B \subset Y$ を部分集合であって $f(A) \subset B$ が成り立つものとする．A, B に相対位相を入れるとき，f を A に制限して得られる写像 $f|_A\colon A \to B$ は連続であることを示せ.

問題 7 $(\star)$ 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について，次は同値であることを示せ.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ such that } \forall y \in \mathbb{R}^n, \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$

(2) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ について $f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合

問題 8 $(\star)$ 複素平面 $\mathbb{C}$ と開円盤 $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ は同相か．閉円盤 $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ の場合はどうなるか.

問題 9 三角形 $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ の境界 $\partial\Delta$ と $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ とは同相か.

問題 10 ($\star$) 次のアルファベットの文字のペアは互いに同相か．但し，文字は太さを持たない 1 次元のグラフと考える．

(1) L と M，(2) A と R，(3) O と D，(4) X と Y, (5) L と Y, (6) A と O

問題 11 ($\star$) 写像 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$，$f(x,y) = (x,y)$ を包含写像とする．f は定値写像 $g\colon S^1 \to \mathbb{R}^2, g(x,y) = (1,0)$ とホモトピックであることを示せ.

問題 12 上の問題で $f, g\colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とみなすと f と g はホモトピックではないことを示せ.

問題 13 任意の連続写像 $f\colon S^1 \to S^2$ は定値写像とホモトピックである．この理由を考えよ.（ヒント：もし f が全射でなければ，あまり難しくはない．ただしペアノ曲線のように f は全射になることもあり得る.）

問題 14 ($\star$) X, Y を位相空間，A, B を X の閉部分集合で，$X = A \cup B$ とする．写像 $f\colon X \to Y$ について次は同値であることを示せ.

(1) f は連続である.

(2) $f|_A\colon A \to Y$, $f|_B\colon B \to Y$ は共に連続である.（ただし，A, B には相対位相が入っているものとする.）

また，$X = A \cup B$ は満たすが，A, B が閉部分集合とは限らない場合に，同値性の反例を与えよ.

幾何学入門演習　No.1 解答例

問題 1 (2 次元トーラスのパラメータ表示) $R > r > 0$ とする．2 次元トーラス T^2 は $\mathbb{R}^3$ の中で, 実パラメータ θ, ψ を用いて

$$x = (R + r\cos\psi)\cos\theta, \quad y = (R + r\cos\psi)\sin\theta, \quad z = r\sin\psi$$

とパラメータ表示できる．これは (x, z) 平面の $(R, 0)$ を中心とする半径 r の円を z 軸を回転軸として回転させて得られる．

(陰関数による方法) 上記のパラメータ表示を閉じた式に直すことができる．

$$x^2 + y^2 = (R + r\cos\psi)^2$$

より

$$r\cos\psi = \sqrt{x^2 + y^2} - R$$

これと $z = r\sin\psi$ を合わせて

$$z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 = r^2$$

(種数 2 の曲面を表す式の例[1])

$$(y^2 + x(x-1)^2(x-2))^2 + z^2 = 0.01$$

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} = 6$$

問題 2 (1) X の任意の開集合 O に対し, $i^{-1}(O) = A \cap O$ は A の開集合なので, 包含写像 i は連続.

(2) A の異なる 2 点 a と b を任意に取る．X はハウスドルフなので, X の開集合 U と V が存在し, $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たす．そこで, $U' = U \cap A$, $V' = V \cap A$ とおけば, U' と V' は A の開集合であり, $a \in U'$, $b \in V'$, $U' \cap V' = \emptyset$ を満たす．従って, A もハウスドルフである．

(3) $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ とする．このとき, $[1/2, 1) \subset A$ は A の閉集合であるが, X の閉集合ではない．また, A がコンパクトかつ X がハウスドルフのとき, A の閉集合 F はコンパクトなので, 連続写像 $i : A \to X$ による像 $i(F)$ はコンパクト．X はハウスドルフなので, $i(F)$ は X の中で閉集合となる．

別の反例：$X = \mathbb{R}, A = [0, 2)$ にすると，$A_0 = [1, 2)$ は A の閉集合であるが，X の閉集合ではない.

A コンパクト，X ハウスドルフの時の別解：A の閉集合は X の閉集合 F を用いて $A \cap F$ と表せる．ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉であるため，A は X の閉部分集合．したがって $A \cap F$ も X の閉部分集合となる．

[1] 1 つ目の式は TA の Tian Minjie さんによるもの.

問題 3 X の任意の異なる 2 点 a と b に対し, $d_0 := d(a,b) \neq 0$ であるので, a を中心とする半径 $d_0/2$ の開球体 $B_{d_0/2}(a)$ と b を中心とする半径 $d_0/2$ の開球体 $B_{d_0/2}(b)$ を取れば, 互いに交わらない X の開集合となる. 従って, X はハウスドルフ.

問題 4 定義によって $\mathbb{R}^{n+m}$ の位相は開基

$$B_r((x,y)) = \{p \in \mathbb{R}^{n+m} \mid d(p,(x,y)) < r\}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, r > 0$$

により生成されており，$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の位相は開基

$$U \times V, \qquad U \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の開集合，} V \text{ は } \mathbb{R}^m \text{ の開集合}$$

により生成されている．任意の開集合は開基の（任意個の）和集合として書くことができるので，一方の開基が他方の開基の和集合で表されることを示せば十分である．$\mathbb{R}^{n+m}$ の開基 $B_r((x,y))$ については,

$$B_r((x,y)) = \bigcup_{(a,b) \in B_r((x,y))} B_{\delta(a,b,r)}(a) \times B_{\delta(a,b,r)}(b)$$

ただし，$\delta(a,b,r) = \frac{1}{2}(r - d((x,y),(a,b)))$ とおいた．また，$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の開基 $U \times V$ については

$$U \times V = \bigcup_{(a,b) \in U \times V} B_{\epsilon(a,b)}((a,b))$$

と表せる．ただし，$e = \epsilon(a,b)$ は $B_e(a) \subset U$, $B_e(b) \subset V$ を同時に満たす正の実数である（各 $(a,b) \in U \times V$ に対してそのような実数 $\epsilon(a,b)$ を選んでおく.）

問題 5 $Y_1 \times Y_2$ の開集合は, Y_1 の開集合の族 $\{O_1^i\}_i$ と Y_2 の開集合の族 $\{O_2^i\}_i$ を用いて, $O = \bigcup_i (O_1^i \times O_2^i)$ と書ける．$(f_1 \times f_2)^{-1}(O) = \bigcup_i \left(f_1^{-1}(O_1^i) \times f_2^{-1}(O_2^i)\right)$ であり, f_1 と f_2 は連続なので, $f_1^{-1}(O_1^i) \times f_2^{-1}(O_2^i)$ は $X_1 \times X_2$ の開集合. 従って, $f_1 \times f_2$ は連続である.

別解：任意の点 $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ と $(y_1, y_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ の開近傍 U に対して，積空間の位相より，Y_1 の開集合 U_1 と Y_2 の開集合 U_2 が存在して，$(y_1,y_2) \in U_1 \times U_2 \subset U$ を満たす．$V_i = f_i^{-1}(U_i), i = 1, 2$ とすると，V_1, V_2 は X_1, X_2 の開集合, さらに $(f_1 \times f_2)(V_1 \times V_2) \subset U_1 \times U_2 \subset U$．故に $f_1 \times f_2$ は (x_1, x_2) 点で連続，(x_1, x_2) の任意性より $f_1 \times f_2$ は連続.

問題 6 B の任意の開集合 O に対し, Y の開集合 $\widetilde{O}$ であって, $\widetilde{O} \cap B = O$ なるものが存在する. f は連続なので, $f^{-1}(\widetilde{O})$ は X の開集合. 従って, $f|_A^{-1}(O) = f^{-1}(\widetilde{O} \cap B) \cap A = f^{-1}(\widetilde{O}) \cap f^{-1}(B) \cap A = f^{-1}(\widetilde{O}) \cap A$ は A の開集合となり, $f|_A$ は連続.

問題 7 $[(1) \Rightarrow (2)]$ 任意の点 $x \in f^{-1}(U)$ をとる．U は $\mathbb{R}^m$ の開集合で $f(x) \in U$ より，$B_\epsilon(f(x)) \subset U$ を満たす $\epsilon > 0$ が存在する．(1) より $\delta > 0$ があって $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ を満たす．したがって $f(B_\delta(x)) \subset U$．故に x 中心の開球体 $B_\delta(x)$ は $f^{-1}(U)$ に含まれる．x の任意性より $f^{-1}(U)$ は開集合.

$[(2) \Rightarrow (1)]$ 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と任意の正の数 ϵ に対し, (2) から, $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合で x を含む. 従ってある $\delta > 0$ が存在し, $\|x - y\| < \delta$ ならば $y \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$. つまり $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ を満たす.

問題 8 $f\colon \mathbb{C} \to B$ を

$$f(z) = \frac{z}{|z|+1}$$

とおく．f は連続である．(実際，f を実部と虚部に分けると

$$f(x+iy) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}+1} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+1}$$

と書け，各成分は連続関数になっている.）さらに f の逆写像は

$$g(w) = \frac{w}{1-|w|}$$

で与えられ，f は全単射であること，また f の逆写像 $f^{-1} = g$ も連続であることが分かる．実際,

$$(f \circ g)(w) = f\left(\frac{w}{1-|w|}\right) = \frac{\frac{w}{1-|w|}}{\left|\frac{w}{1-|w|}\right|+1} = \frac{\frac{w}{1-|w|}}{\frac{1}{1-|w|}} = w$$

$$(g \circ f)(z) = g\left(\frac{z}{1+|z|}\right) = \frac{\frac{z}{1+|z|}}{1-\left|\frac{z}{1+|z|}\right|} = \frac{\frac{z}{1+|z|}}{\frac{1}{1+|z|}} = z$$

と計算でき $f \circ g = \mathrm{id}_B$, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ であることがわかる．以上より，$\mathbb{C}$ と B は同相である．

$\overline{B}$ は $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の有界閉集合であるから，位相空間としてコンパクトである．一方 $\mathbb{C}$ はコンパクトではない．したがって $\overline{B}$ と $\mathbb{C}$ は同相ではない．

問題 9 $\partial\Delta$ と S^1 は同相である．同相写像は次のように構成できる．$\partial\Delta$ を 3 つの区間 I_1, I_2, I_3 に分けて

$$\partial\Delta = I_1 \cup I_2 \cup I_3,$$
$$I_1 = \{(x,0) \mid 0 \le x \le 1\},\ I_2 = \{(1-y,y) \mid 0 \le y \le 1\},\ I_3 = \{(0,1-t) \mid 0 \le t \le 1\}$$

と書く．また，$S^1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ であった．このとき $f\colon \partial\Delta \to S^1$ を次のように定める．

$$\begin{aligned} f|_{I_1}(x,0) &= (\cos(\pi x/2), \sin(\pi x/2)) && 0 \le x \le 1 \\ f|_{I_2}(1-y,y) &= (\cos(\pi(y+1)/2), \sin(\pi(y+1)/2)) && 0 \le y \le 1 \\ f|_{I_3}(0,1-t) &= (\cos(\pi(1+t)), \sin(\pi(1+t))) && 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

この定義は二つの区間の重なり $I_i \cap I_j$ 上では一致していることに注意する．また各 $i = 1,2,3$ について $f|_{I_i}$ は連続である．従って授業で紹介した補題（問題 14) から f は連続写像である．また f が全単射であることは容易に分かる．f はコンパクト空間 $\partial\Delta$ （これは有界閉集合であるからコンパクト）からハウスドルフ空間 S^1 への全単射連続写像であるから，同相写像である.（逆写像を具体的に作って確かめてもよい.）

問題 10 この問題では文字 A, M, R 等の数学的定義を与えていないため，正確な証明はできないが，以下の解答では，同相か否かと，その大体の理由を与える．

(1) L と M は同相．どちらも単位区間 $I=[0,1]$ と同相である．

(2) A と R は同相．どちらも S^1 に二つの単位区間を付けた図形

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,0)\mid -2\le x\le -1\}\cup\{(x,0)\mid 1\le x\le 2\}$$

と同相になる．

(3) O と D は同相．どちらも S^1 と同相である．

(4) X と Y は同相でない．X の中心の点 c（二つの斜線が交わる点）を X から取り除くと，X $\setminus\{c\}$ は 4 つの連結成分に分かれる．一方，Y からどの点を取り除いても 3 つ以上の連結成分に分かれることはない．従って X と Y は同相ではない．(より正確には，背理法を使って議論する．もし X と Y の間に同相写像 $f\colon \mathsf{X}\to\mathsf{Y}$ があったと仮定すれば，f は同相写像 $f|_{\mathsf{X}\setminus\{c\}}\colon \mathsf{X}\setminus\{c\}\to\mathsf{Y}\setminus\{f(c)\}$ を導くはずである．連結成分の数を比較して矛盾を導く．)

(5) L と Y は同相ではない．実際，Y の中心の点 c（三叉路の交点）を Y から取り除くと，Y $\setminus\{c\}$ は 3 つの連結成分に分かれる．一方，L からどの点を取り除いても 3 つ以上の連結成分に分かれることはない．

(6) A と O は同相でない．理由は上と同様で，A からある 1 点を取り除くとき， A は非連結になることがあるが，O からどの点を取り除いても非連結になることはないことから．

問題 11 円の族 $(x-r)^2+y^2=(1-r)^2$（r は 0 から 1 まで動く）に沿って f から g へのホモトピーを構成する．すなわち，$h\colon S^1\times[0,1]\to\mathbb{R}^2$ を $h(x,y,t)=(t+(1-t)x,(1-t)y)$ とすれば h は連続で，$h(x,y,0)=f(x,y), h(x,y,1)=g(x,y)$ である．

別解： $h:S^1\to\mathbb{R}^2,\ h(x,y)=(0,0)$ とする。h は g と明らかにホモトピックなので f と h がホモトピックであることを示せばよい． 写像 $F:S^1\times[0,1]\to\mathbb{R}^2$ を

$$F((x,y),t)=(tx,ty)$$

で定めるとこれは $S^1\times[0,1]$ から $\mathbb{R}^2$ への連続写像で，$F|_{t=0}=h,\ F|_{t=1}=f$ であるから主張が従う．

問題 12 （雰囲気による説明）原点を囲む円を 1 点に縮めようとすると原点で引っかかってしまう．

完全な証明はここでは与えないが，後で授業で紹介する予定の<u>被覆空間の性質</u>を使った証明の概要を与える．連続写像 $H\colon S^1\times I\to\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で，$H((x,y),0)=(1,0)=g(x,y)$ を満たすものが与えられたとする．このとき，H の「偏角」を与える連続写像 $\theta\colon S^1\times I\to\mathbb{R}$ が取れることが示せる．つまり，

$$\frac{H(p,t)}{\|H(p,t)\|}=e^{i\theta(p,t)}$$

および $\theta(p,0)=0$ を満たす連続写像 θ が取れることが分かる．ここで p は S^1 の点を表す．また，$\mathbb{R}^2$ の点 (x,y) を複素数 $x+iy$ と同一視した．このような写像 θ

の存在は，$\mathbb{R}\to S^1$, $\theta\mapsto e^{i\theta}$ が被覆写像であることと，$g(x,y)$ の偏角が一定値 0 をとることから分かる（授業で後述する予定「ホモトピー持ち上げ性質」）．もし，$H((x,y),1)=(x,y)=f(x,y)$ が成立したとすると，任意の $p\in S^1$ について $e^{i\theta(p,1)}=p$ が成り立つので，$p=e^{i\varphi}$ とおくとき，

$$\theta(e^{i\varphi},1)-\varphi\in 2\pi\mathbb{Z}$$

でなければならない．左辺は φ の連続関数であるから，ある決まった整数 $n\in\mathbb{Z}$ が存在して

$$\theta(e^{i\varphi},1)=\varphi+2\pi n$$

がすべての $\varphi\in\mathbb{R}$ について成立する．$\varphi=0$ と $\varphi=2\pi$ で左辺の値は等しくないといけないが，右辺の値は異なるため矛盾．従って f と g の間のホモトピーは存在しない．

問題 13 まず，f が全射でない場合について示す．$y\in S^2\setminus f(S^1)$ をとる．$S^2\setminus\{y\}$ は $\mathbb{R}^2$ と同相であり，$\mathbb{R}^2$ 内の任意のループは 1 点に縮めることが出来るため，定値写像とホモトピックである．($S^2\setminus 1$ 点が $\mathbb{R}^2$ と同相であることは，後で授業でも示す．また，任意の連続写像 $f\colon S^1\to\mathbb{R}^2$ はホモトピー $H(p,t)=tf(p)$ によって原点への定値写像とホモトピックである．)

次に f が全射の場合について示す[2]．まず S^1 を $[0,1]/0\sim 1$（区間 $[0,1]$ の端点を同一視したもの）と同一視する．勝手な点 $y\in S^2\setminus f(0)$ をとり，$f(0)$ を含まない y の開近傍 $D\subset S^2$ をとる．D は S^2 と y 中心の開球体 $B_\epsilon(y)$ との交わりと仮定してよい． $f^{-1}(D)$ は $[0,1]$ に含まれる互いに交わらない開区間の（無限個かもしれない）和集合となる．一つの開区間を (α,β) とする．このとき $f(\alpha),f(\beta)\in\partial D=\overline{D}\setminus D$ である．$f(\alpha)$ と $f(\beta)$ とつなぐ $\overline{D}$ 内の道 $f|_{[\alpha,\beta]}$ をホモトピーで動かすことで $f([\alpha,\beta])\cap D=\varnothing$ と変形できる．実際，$\overline{D}$ を 2 次元閉円盤と同一視するとき，$\overline{D}$ 内の任意の 2 点は直線で結べることから，$f|_{[\alpha,\beta]}$ は，$f(\alpha)$ と $f(\beta)$ を ∂D 内でつなぐ任意の道 $g\colon[\alpha,\beta]\to\partial D$, $g(\alpha)=f(\alpha)$, $g(\beta)=f(\beta)$ にホモトピックになる．(ホモトピーとして $h(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$, $(x,t)\in[\alpha,\beta]\times[0,1]$ を取ればよい.）

$f^{-1}(D)$ が有限個の開区間からなる場合は，これを繰り返すことで f が全射でない場合に帰着できる．

$f^{-1}(D)$ が無限個の開区間からなる場合，$f^{-1}(y)$ は $[0,1]$ の閉集合でコンパクトであり，$f^{-1}(D)$ の開区間が $f^{-1}(y)$ の開被覆となっている．コンパクトの定義から有限個の開区間を選んで $f^{-1}(y)$ を被覆できる．これら有限個の開区間に対して先ほどのホモトピーによる変形をすればよい．

別解：授業では後でファン・カンペンの定理を紹介する予定であるが，それを使っても示すことができる．あるいは，任意の連続写像 $f\colon S^1\to S^2$ は滑らかな写像 $g\colon S^1\to S^2$ とホモトピックであることを使ってもよい．滑らかな写像は Sard の定理（授業で紹介予定）より正則値を持ち，従って全射でないことがわかる．

[2] 以下の証明の方針は TA の久保田肇さんによるもの．

問題 14 (1)⇒(2): 任意の開部分集合 $U \subset Y$ に対し，${f|_A}^{-1}(U)$ が A の開集合であることを示す．f は連続より，$f^{-1}(U)$ は X の開集合．相対位相の定義から，${f|_A}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$ は A の開集合である．よって $f|_A$ は連続である．$f|_B$ も同様.

(2)⇒(1): 任意の閉部分集合 $V \subset Y$ に対し，$f^{-1}(V)$ が X の閉集合であることを示せばよい．$f|_A$ は連続より ${f|_A}^{-1}(V)$ は A の閉集合である．相対位相の定義から，X の閉集合 U_A が存在して $U_A \cap A = {f|_A}^{-1}(V)$ と書ける．同様に X の閉集合 U_B が存在して $U_B \cap B = {f|_B}^{-1}(V)$ と書ける．ここで $U_A \cap A$ および $U_B \cap B$ は X の閉集合でもあることに注意する．$f^{-1}(V) = {f|_A}^{-1}(V) \cup {f|_B}^{-1}(V) = (U_A \cap A) \cup (U_B \cap B)$ より，$f^{-1}(V)$ は X の閉集合である．したがって f は連続である．

反例 1：$X = Y = [0,2], A = [0,1], B = (1,2]$ とし，$x \in A$ のとき $f(x) = 0$，$x \in B$ のとき $f(x) = 1$ とすると，(2) は満たすが (1) は満たさない.

反例 2：関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ (x \leq 0) \\ 1 \ (0 < x) \end{cases}$$

で定める。また $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ とすると $A \cup B = \mathbb{R}$ であり，f は A, B それぞれで連続であるが $\mathbb{R}$ 全体では連続でない。

幾何学入門演習　No.2　(2023年10月11日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習のTAが採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．$(\star)$ は基本的な問題です．

問題 1 $(\star)$ $f, g\colon X \to Y$ をホモトピックな連続写像とする．任意の連続写像 $k\colon Y \to Z$ に対して，$k \circ f \simeq k \circ g$ を示せ．また任意の連続写像 $h\colon W \to X$ に対して，$f \circ h \simeq g \circ h$ を示せ．

問題 2 $(\star)$ 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して，連続写像 $g\colon Y \to X$ で $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ を満たすものが存在するとき，f をホモトピー同値写像，g を f のホモトピー逆写像と呼んだ．与えられた f に対して，f のホモトピー逆写像 g はホモトピーを除いて一意であることを示せ.（つまり，2つのホモトピー逆写像 $g_1, g_2\colon Y \to X$ があるとき，$g_1 \simeq g_2$ であることを示せ．）

問題 3 $(\star)$ $I = [0, 1]$ は可縮，つまり，1点空間とホモトピー同値であることを示せ.

問題 4 $(\star)$ $\mathbb{R}^n$ は可縮，つまり，1点空間とホモトピー同値であることを示せ.

問題 5 $(\star)$ X を可縮な空間とする．このとき，任意の連続写像 $f\colon Y \to X$ は定値写像とホモトピックであることを示せ.

問題 6 密着位相空間は可縮であることを示せ.

問題 7 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ はその部分集合

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

とホモトピー同値か？(ホモトピーを作れるか？まずは図を書いて考えよう.)

問題 8 問題7の位相空間 X は2つの S^1 の1点和 $S^1 \vee S^1$ と同相であることを示せ．ただし，$S^1 \vee S^1$ は2つの S^1 の非交和 $S^1 \sqcup S^1 = S^1 \times \{0, 1\}$ に対して，$((1, 0), 0)$ と $((1, 0), 1)$ を同一視して得られる商位相空間 $S^1 \sqcup S^1/\sim$ である．(問題13, 14の結果を使う．)

問題 9 $(\star)$ $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と S^{n-1} はホモトピー同値であることを示せ.

問題 10 $\mathbb{R}^3$ から2点を除いた空間は $S^2 \vee S^2$ とホモトピー同値であることを示せ.

問題 11 2次元トーラス T^2 から1点を除いた空間が $S^1 \vee S^1$ とホモトピー同値であることを観察せよ．ホモトピーを具体的に構成できるか？

問題 12 1 点空間と 2 点空間に離散位相を入れるとき，これらはホモトピー同値ではないことを示せ．

問題 13 (⋆) 次を証明せよ．X, Y を位相空間，$\sim$ を位相空間 X 上の同値関係，$\pi\colon X \to X/\!\sim$ を自然な射影とする．写像 $f\colon X/\!\sim \to Y$ に対して次は同値である．

(1) f は連続である．

(2) $f \circ \pi$ は連続である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ X/\!\sim \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

問題 14 (⋆) X をコンパクト位相空間，Y をハウスドルフ位相空間とする．連続な全単射 $f\colon X \to Y$ は同相写像であることを示せ．

問題 15 (⋆) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は $[0, 1]$ の端点 $0, 1$ を同一視した空間 $[0, 1]/0{\sim}1$ と同相であることを示せ．($[0, 1]/0{\sim}1$ には $[0, 1]$ の商位相が入っている．)

問題 16 I^n の境界 ∂I^n を 1 点につぶして得られる位相空間 $I^n/\partial I^n$ は S^n と同相であることを示せ．$I^n/\partial I^n$ とは，I^n 上の同値関係

$$p \sim q \iff p = q \text{ または } p, q \in \partial I^n$$

によって I^n を割った商位相空間を表す．($I^n/\partial I^n$ も S^n も共に $\mathbb{R}^n$ の 1 点コンパクト化であることに注意.)

問題 17 S^1 が可縮ではない理由を考えよ．($\mathrm{id}_{S^1}\colon S^1 \to S^1$ は定値写像とホモトピックか？もしホモトピックにならないとしたら何故か？)

問題 18 有限次元球面 S^n は可縮ではないが，無限次元球面 $S^\infty = \bigcup S^n$ は可縮であることが知られている．ただし，S^∞ には帰納的極限の位相を入れる，つまり $U \subset S^\infty$ が開 $\iff$ すべての n について $U \cap S^n$ が開，と定める．S^∞ が可縮である理由を考えよ.（ヒント：座標を一つずらすことを考えれば，S^∞ は S^∞ 自身の「赤道」に連続的に変形できる.）

幾何学入門演習　No.2 解答例

問題 1 f と g の間のホモトピーを $F: X \times I \to Y$ とする．ただし, $I = [0,1]$ である．このとき, $H = k \circ F : X \times I \to Z$ は $k \circ f$ と $k \circ g$ の間のホモトピーとなる．従って, $k \circ f \simeq k \circ g$. また, $G = F \circ (h \times \mathrm{id}_I) : W \times I \to Y$ は $f \circ h$ と $g \circ h$ の間のホモトピーとなる．従って, $f \circ h \simeq g \circ h$.

問題 2 $g_1, g_2 \colon Y \to X$ を f のホモトピー逆写像とすると,

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1 \circ \mathrm{id}_Y \\ &\simeq g_1 \circ (f \circ g_2) \\ &= (g_1 \circ f) \circ g_2 \\ &\simeq \mathrm{id}_X \circ g_2 = g_2 \end{aligned}$$

となるので, ホモトピー逆写像はホモトピーを除いて一意.

問題 3 $f \colon I \to \mathrm{pt}$ を定値写像, $g \colon \mathrm{pt} \to I$ を $\mathrm{pt} \mapsto 0 \in I$ で定める．このとき, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{pt}}$. $F \colon I \times I \to I$ を $F(x,t) = tx$ で定義すると, $g \circ f$ から id_I へのホモトピーとなるので, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_I$. 従って, I は可縮.

問題 4 $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{pt}$ を定値写像, $g \colon \mathrm{pt} \to \mathbb{R}^n$ を $\mathrm{pt} \mapsto 0 \in \mathbb{R}^n$ で定める．このとき, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{pt}}$. $F \colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ を $F(x,t) = tx$ で定義すると, $g \circ f$ から $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ へのホモトピーとなるので, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. 従って, $\mathbb{R}^n$ は可縮.

問題 5 X は可縮なので, id_X と定値写像 $e : X \to \{x_0\} \subset X$ の間のホモトピー $F \colon X \times I \to X$ が存在する．そこで, $H = F \circ (f \times \mathrm{id}_I) : Y \times I \to X$ とすると, これは f と定値写像 $e \circ f$ の間のホモトピー.

問題 6 X を密着位相空間とする．このとき, 任意の写像 $F \colon X \times I \to X$ は連続写像となる．そこで, X の点 x_0 を一つ取り, 写像 $F \colon X \times I \to X$ を $(x,0) \mapsto f(x)$, $t \neq 0$ に対し, $(x,t) \mapsto x_0$ で定義すれば, これは f と定値写像の間のホモトピーとなる．従って, X は可縮.

問題 7 $\mathbb{R}^2 \backslash \{(-1,0),(1,0)\}$ と X はホモトピー同値である．連続写像 $r \colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(-1,0),(1,0)\} \to X$ を以下で定義する．

$$r(x,y) = \begin{cases} (1,0) + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}(x-1,y) & 0 < (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ または } x \geq 1 \text{ のとき} \\ (x, \sqrt{2|x| - x^2}) & |x| \leq 1,\ (|x|-1)^2 + y^2 \geq 1,\ y \geq 0 \text{ のとき} \\ (x, -\sqrt{2|x| - x^2}) & |x| \leq 1,\ (|x|-1)^2 + y^2 \geq 1,\ y \leq 0 \text{ のとき} \\ (-1,0) + \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}(x+1,y) & 0 < (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ または } x \leq -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$i \colon X \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$ を包含写像とする．このとき, $r \circ i = \mathrm{id}_X$ である．$i \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}}$ を与えるホモトピー

$$H \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\} \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$$

は以下のようにして作れる．

$$H(x,y,t)=\begin{cases}(1,0)+((1-t)+\frac{t}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}})(x-1,y) & 0<(x-1)^2+y^2\le 1 \text{ または } x\ge 1\\ (x,(1-t)y+t\sqrt{2|x|-x^2}) & |x|\le 1,\ (|x|-1)^2+y^2\ge 1,\ y\ge 0\\ (x,(1-t)y-t\sqrt{2|x|-x^2}) & |x|\le 1,\ (|x|-1)^2+y^2\ge 1,\ y\le 0\\ (-1,0)+((1-t)+\frac{t}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}})(x+1,y) & 0<(x+1)^2+y^2\le 1 \text{ または } x\le -1\end{cases}$$

r や H が連続であることを示すには，演習 No.1 の問題 14 を使えばよい．

別解：$r\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(1,0),(-1,0)\}\to X$ を次で定義する．

$$r(x,y)=\begin{cases}(1,0)+\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}(x-1,y) & (x-1)^2+y^2\le 1 \text{ のとき}\\ (\frac{2x^2}{x^2+y^2},\frac{2xy}{x^2+y^2}) & (x-1)^2+y^2\ge 1,\ x>0 \text{ のとき}\\ (0,0) & x=0 \text{ のとき}\\ -(\frac{2x^2}{x^2+y^2},\frac{2xy}{x^2+y^2}) & (x+1)^2+y^2\ge 1,\ x<0 \text{ のとき}\\ (-1,0)+\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}(x+1,y) & (x+1)^2+y^2\le 1 \text{ のとき}\end{cases}$$

$i\colon X\to\mathbb{R}^2\setminus\{(-1,0),(1,0)\}$ を包含写像とする．このとき $r\circ i=\mathrm{id}_X$ を満たす．$i\circ r$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2\setminus\{(-1,0),(1,0)\}}$ とのホモトピーは次で与えられる．

$$H(x,y,t)=\begin{cases}(1,0)+((1-t)+\frac{t}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}})(x-1,y) & 0<(x-1)^2+y^2\le 1 \text{ のとき}\\ (1-t)(x,y)+t(\frac{2x^2}{x^2+y^2},\frac{2xy}{x^2+y^2}) & (x-1)^2+y^2\ge 1,\ x>0 \text{ のとき}\\ (0,(1-t)y) & x=0 \text{ のとき}\\ (1-t)(x,y)-t(\frac{2x^2}{x^2+y^2},\frac{2xy}{x^2+y^2}) & (x+1)^2+y^2\ge 1,\ x<0 \text{ のとき}\\ (-1,0)+((1-t)+\frac{t}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}})(x+1,y) & 0<(x+1)^2+y^2\le 1 \text{ のとき}\end{cases}$$

別解のように r,H を定義した場合は，連続性のチェックがやや非自明である．（本解答では省略．）

問題 8 写像 $f\colon S^1\sqcup S^1=S^1\times\{0,1\}\to X$ を次で定義する．

$$f((x,y),i)=\begin{cases}(x-1,y) & i=0\\ (-x+1,y) & i=1\end{cases}$$

これは連続であって，S^1 の基点 $((1,0),i)$, $i=0,1$ を同じ点 $(0,0)$ に写す．従って問題 17 の結果より，連続写像 $\overline{f}\colon S^1\sqcup S^1/\!\sim\,\to X$ を誘導する．$\overline{f}$ は明らかに全単射である．位相空間 $S^1\sqcup S^1/\sim$ はコンパクト位相空間 $S^1\sqcup S^1$ の商位相空間であるからコンパクトであり，X は $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間であるからハウスドルフである．コンパクト位相空間からハウスドルフ位相空間への連続全単射は同相（問題 14）であることを使うと $\tilde{f}$ は同相である．

問題 9 写像 $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ を

$$r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}\,(x_1, \ldots, x_n)$$

とし，$i\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を包含写像とする．このとき，$r \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ である．$i \circ r$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ との間のホモトピーを構成する．$H\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = (1 - t + \frac{t}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}})(x_1, \ldots, x_n)$$

と定義すると，H は連続で，$H(x,0) = x$, $H(x,1) = (i \circ r)(x)$ である．したがって $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と S^{n-1} はホモトピー同値.

問題 10 (略解) $\mathbb{R}^3$ から 2 点を除いた空間は $\mathbb{R}^3$ の線形変換により $\mathbb{R}^3 \setminus \{(-1,0,0),(1,0,0)\}$ と同相であることがわかる．問題 7 と同様に $\mathbb{R}^3 \setminus \{(-1,0,0),(1,0,0)\}$ と

$$\{(x,y,z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ または } (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とがホモトピー同値であることを示すことができる．

問題 11 以下ではまず略解を与え，技術的な細部については後で注意する．T^2 は $I^2 = [0,1]^2$ に次で生成される同値関係を入れたときの商位相空間である．

$$(x,0) \sim (x,1), \qquad (0,y) \sim (1,y), \qquad x, y \in I.$$

このとき，∂I^2 にも同値関係 $\sim$ が誘導され，$\partial I^2/\!\sim$ は $S^1 \vee S^1$ と同相である．

平行移動により，T^2 から抜く 1 点を $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ としてよい．$I^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ は ∂I^2 にホモトピー同値である．実際，包含写像 $i\colon \partial I^2 \to I^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ とレトラクション $r\colon I^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} \to \partial I^2$

$$r(x,y) = (x,y) \text{ と } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ を結ぶ直線と } \partial I^2 \text{ の交点のうち，} (x,y) \text{ 側にある点}$$

が互いにホモトピー逆写像を与えている．$r \circ i = \mathrm{id}_{\partial I^2}$ であり，

$$\begin{aligned} &H\colon (I^2 \setminus \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}) \times I \to I^2 \setminus \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\} \\ &H(x,y,t) = (1-t)r(x,y) + t(x,y) \end{aligned}$$

が $i \circ r$ と $\mathrm{id}_{I^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}}$ の間のホモトピーを与える．

i, r は連続写像

$$\begin{aligned} &\bar{i}\colon S^1 \vee S^1 \cong \partial I^2/\!\sim\, \hookrightarrow I^2/\!\sim\, \cong T^2 \\ &\bar{r}\colon (T^2 \setminus \mathrm{pt}) \cong (I^2 \setminus \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\})/\!\sim\, \longrightarrow S^1 \vee S^1 \cong \partial I^2/\!\sim \end{aligned}$$

を誘導する．さらにホモトピー H も連続写像

$$\overline{H}\colon (T^2 \setminus \mathrm{pt}) \times I \longrightarrow T^2 \setminus \mathrm{pt}$$

を誘導することがわかり，$\overline{r}\circ\overline{i}$ と $\mathrm{id}_{S^1\vee S^1}$ とのホモトピーを与える．従って $T^2\setminus\mathrm{pt}$ と $S^1\vee S^1$ はホモトピー同値.

以上の証明で省略した点をもう少し説明する．写像 $\overline{i},\overline{r}$ が連続であることを示すには問題 13 を使えばよい（i,r が連続であることから従う）．$\overline{H}$ が連続であることを示すには，問題 13 および次の事実を使う必要がある：

事実：$(T^2\setminus\mathrm{pt})\times I$ は $(I^2\setminus\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\})\times I$ の商位相空間である.

一般に，全射 $\pi\colon X\to\overline{X}$ が商写像，すなわち「$U\subset\overline{X}$ が開集合 $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(U)\subset X$ が開集合」が成り立つとき，$\pi\times\mathrm{id}\colon X\times Y\to\overline{X}\times Y$ が商写像であるとは限らない.（今はこのことを示す必要がある.）ただし次の有用な命題が知られており，現在の状況に適用できる.

命題：全射 $\pi\colon X\to\overline{X}$ が商写像で Y が局所コンパクト空間なら $\pi\times\mathrm{id}\colon X\times Y\to\overline{X}\times Y$ は商写像となる.

命題の証明：任意の部分集合 $U\subset\overline{X}\times Y$ について，$(\pi\times\mathrm{id})^{-1}(U)$ が開集合なら U は開集合であることを示せばよい.（逆は $\pi\times\mathrm{id}$ の連続性からわかる.）$(\overline{x},y)\in U$ をとり，$\pi(x)=\overline{x}$ とする．$\widetilde{U}=(\pi\times\mathrm{id})^{-1}(U)$ は (x,y) の近傍であるから，x の開近傍 A と y の開近傍 B が存在して $A\times B\subset\widetilde{U}$. Y は局所コンパクトなので，ある y のコンパクトな近傍 K で $K\subset B$ なるものが存在する．このとき $A\times K\subset\widetilde{U}$ である．ここで次の集合を考える.

$$V=\bigcup_{O\times K\subset\widetilde{U},\ O\text{ は }X\text{ の open}} O$$

明らかに，V は x を含む開集合であり（$A\subset V$ であることに注意），$V\times K\subset\widetilde{U}$．また，$x_1\in V$ であり，$\pi(x_1)=\pi(x_2)$ であれば，$x_2\in V$ であることを示そう．実際，$\{x_1\}\times K\subset\widetilde{U}$ ゆえ，$\{\pi(x_1)\}\times K\subset U$. $\pi(x_1)=\pi(x_2)$ であるから，$\{x_2\}\times K\subset\widetilde{U}$ である．K のコンパクト性から x_2 の開近傍 O が存在して $O\times K\subset\widetilde{U}$．従って $x_2\in O\subset V$ である．以上より，$V=\pi^{-1}(\pi(V))$ であることがわかる．$\overline{X}$ には商位相が入っているから，$\pi(V)$ は $\overline{x}$ を含む開集合．このとき $\pi(V)\times K$ は $(\overline{x},y)$ の近傍であり，U に含まれる．従って U は開集合である.

問題 12 1 点位相空間 $\{x\}$ と 2 点離散位相空間 $\{y_1,y_2\}$ の間にホモトピー同値写像 $f\colon\{x\}\to\{y_1,y_2\}$ があったとする．$f(x)=y_1$ として一般性を失わない．ホモトピー逆写像 $g\colon\{y_1,y_2\}\to\{x\}$ とすると，$f\circ g$ は恒等写像とホモトピックである．したがって $H\colon\{y_1,y_2\}\times[0,1]\to\{y_1,y_2\}$ が存在して $H(y_i,0)=y_i$, $H(y_i,1)=y_1$ が $i=1,2$ について成立する．$\{y_1,y_2\}$ には離散位相が入っているから，$H^{-1}(y_1)$ と $H^{-1}(y_2)$ は $\{y_1,y_2\}\times[0,1]$ の開集合である．単位区間 $[0,1]\cong\{y_2\}\times[0,1]$ は 2 つの互いに交わらない開集合 $H^{-1}(y_1)$ と $H^{-1}(y_2)$ で覆われ，$(y_2,0)\in H^{-1}(y_2)$, $(y_2,1)\in H^{-1}(y_1)$ より，$(\{y_2\}\times[0,1])\cap H^{-1}(y_1)\neq\emptyset$, $(\{y_2\}\times[0,1])\cap H^{-1}(y_2)\neq\emptyset$ である．これは $[0,1]$ の連結性に反している．したがって 1 点位相空間と 2 点位相空間（に離散位相を入れたもの）はホモトピー同値でない.（もっと一般に，濃度の異なる離散位相空間 X,Y はホモトピー同値でないことが示せる.）

問題 13 (1) $\Rightarrow$ (2): 商写像 $\pi\colon X\to X/\sim$ は連続であるから，f が連続なら π との合成写像 $f\circ\pi$ も連続である.

(2) $\Rightarrow$ (1): $f\circ\pi$ が連続であるとする．Y の任意の開集合 U に対して，$(f\circ\pi)^{-1}(U)$ は X の開集合である．$(f\circ\pi)^{-1}(U)=\pi^{-1}(f^{-1}(U))$ であるから，商位相の定義から $f^{-1}(U)\subset(X/\sim)$ は $X/\sim$ の開集合である．従って f は連続写像である.

問題 14 $f\colon X\to Y$ の逆写像が連続写像であることを言えばよい．そのためには $f=(f^{-1})^{-1}$ が閉集合を閉集合に移すことを示せばよい．$F\subset X$ を閉集合とする.

X はコンパクトであるから，F はコンパクトである．f は連続であるから，$f(F)$ は Y のコンパクト部分集合である．Y はハウスドルフであるから，$f(F)$ は Y の閉集合である．以上より，f^{-1} は連続である．

問題 15 写像 $f\colon [0,1] \to S^1$ を $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ で定める．この写像 f は $f(0) = f(1)$ を満たす連続写像である．従って写像 $\overline{f}\colon [0,1]/0 \sim 1 \to S^1$ を誘導し，問題 13 より $\overline{f}$ は連続である．さらに，$\overline{f}$ は全単射であることは明らか．$[0,1]/0 \sim 1$ はコンパクト集合 $[0,1]$ の連続写像による像であるから，コンパクト．S^1 はハウスドルフ空間 $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間であるから，ハウスドルフ．従って問題 14 より $\overline{f}$ は同相写像である．

問題 16 まず，I^n の内部 $I^n \setminus \partial I^n = (0,1)^n$ と $\mathbb{R}^n$ が同相であることを示す．このことは，$(0,1)$ と $\mathbb{R}$ は同相であることからわかる．$(0,1)$ と $\mathbb{R}$ との同相写像は，例えば，

$$f(x) = \log(x/(1-x))$$

で与えられる．$\phi\colon (0,1)^n \to \mathbb{R}^n$ を同相写像とする．また $\mathbb{R}^n$ と $S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$ は同相であることに注意しておく（来週取り扱う予定）．この同相写像を $\psi\colon \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$ とする．写像 $\Phi\colon I^n/\partial I^n \to S^n$ を

$$\Phi([x]) = \begin{cases} \psi(\phi(x)) & x \in (0,1)^n \\ (0,\dots,0,1) & x \in \partial I^n \end{cases}$$

で定める．これは明らかに well-defined である．Φ が連続であることを示すには，$\Phi \circ \pi$ が連続であることを示せばよい．ただし $\pi\colon I^n \to I^n/\partial I^n$ は射影．$\Phi \circ \pi|_{(0,1)^n}$ は明らかに連続．$\Phi \circ \pi$ が ∂I^n の各点で連続であることを示そう．そのためには $(0,\dots,0,1)$ の任意の開近傍 U に対して，$\pi^{-1}\Phi^{-1}(U)$ が I^n の開集合であることを示せばよい．S^n はコンパクトであるから U の補集合 U^c はコンパクト集合であり，

$$(\pi^{-1}\Phi^{-1}(U))^c = \pi^{-1}\Phi^{-1}(U^c)$$

は $\Phi^{-1}|_{S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}} = \phi^{-1} \circ \psi^{-1}$ の連続性からコンパクトである．従ってこれは $[0,1]^n$ のハウスドルフ性より閉集合であって，$\pi^{-1}\Phi^{-1}(U)$ は開集合であることがわかる．以上より Φ は連続．Φ は全単射であることは明らかであって，$I^n/\partial I^n$ はコンパクト，S^n はハウスドルフ位相空間であるから，問題 13 より Φ は同相写像である．

注意：以上の証明は $I^n/\partial I^n$, S^n がどちらも $\mathbb{R}^n$ の一点コンパクト化である，ということを示していることにほぼ対応する．

問題 17 後ほど授業でやる予定．

問題 18 (ヒントのみ) $\sigma\colon S^\infty \to S^\infty, (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ という写像と恒等写像がホモトピックであることを示す．次に，σ が $(1,0,0,\dots)$ に値を持つ定値写像 c とホモトピックであることを示す．

幾何学入門演習　No.3　(2023 年 10 月 25 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．$(\star)$ は基本的な問題です．

問題 1 $(\star)$ 授業で説明したように立体射影によって写像 $f\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ を定める．f が次の形で与えられることを確認せよ．

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

また f の逆写像が

$$g(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

で与えられることを示し，f, g が共に連続であることを観察して，f が $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ と $\mathbb{R}^2$ の間の同相写像を与えることを示せ．

問題 2 $(\star)$ 前問の結果を一般化して，S^n から 1 点を除いた空間は $\mathbb{R}^n$ と同相であることを示せ．

問題 3 $(\star)$ S^2 から 2 点を除いた空間 $S^2 \setminus \{P, Q\}$ は S^1 とホモトピー同値であることを示せ．

問題 4 $(\star)$ 位相空間 X, Y に対して $[X, Y]$ を X から Y への連続写像のホモトピー類のなす集合とする．Y_1 と Y_2 がホモトピー同値であるとき，$[X, Y_1]$ と $[X, Y_2]$ の間に一対一対応（集合の全単射）が存在することを示せ．

問題 5 二つの離散位相空間 X, Y がホモトピー同値であるとき，X の濃度と Y の濃度は等しいことを示せ．

問題 6 $(\star)$ 自然な写像 $\pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$ が存在することを示せ．（この写像は一般には全単射ではない．）

問題 7 $(\star)$ X, Y を位相空間，$A \subset X$ を部分集合とする．連続写像 $f, g\colon X \to Y$ が $f|_A = g|_A$ を満たすとする．f と g が A をとめてホモトピックである ($f \simeq g \ \mathrm{rel}\, A$) とは連続写像 $H\colon X \times I \to Y$ が存在して $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, $H(a,t) = f(a) = g(a)$ がすべての $x \in X$, $a \in A$, $t \in I$ について成立することである．この関係が同値関係であることを示せ．

問題 8 $(\star)$ $\pi_1(X, x_0)$ が群になることの証明で，授業で省略した部分を補うこと．（あるいは授業で与えたのとは別のホモトピーを使って再証明してもよい．）

問題 9 ($\star$) X を位相空間とする．$x, y \in X$ に対して，集合 $\Pi(x, y)$ を次で定義する．

$$\Pi(x,y) = \{x \text{ から } y \text{ への道 } p\colon I \to X\}/\text{端点をとめてホモトピック}$$

基本群の定義と同様にして 2 項演算 $\Pi(x,y) \times \Pi(y,z) \to \Pi(x,z)$, $([p_1],[p_2]) \mapsto [p_1 \cdot p_2]$ が道の合成により定まる．（ここで $(p_1 \cdot p_2)(s)$ は $0 \leq s \leq 1/2$ のとき $p_1(2s)$, $1/2 \leq s \leq 1$ のとき $p_2(2s-1)$ と定める.）この演算が次の性質を満たすことを示せ．

(1) $x \in X$ に対して $e_x \in \Pi(x,x)$ がただ一つ存在して，任意の $p \in \Pi(x,y)$ と $q \in \Pi(z,x)$ について $e_x \cdot p = p$, $q \cdot e_x = q$ が成り立つ．

(2) $p \in \Pi(x,y)$ に対して次を満たす $p^{-1} \in \Pi(y,x)$ がただ一つ存在する．$p \cdot p^{-1} = e_x$, $p^{-1} \cdot p = e_y$.

(3) $p \in \Pi(x,y)$, $q \in \Pi(y,z)$, $r \in \Pi(z,w)$ に対して $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.

以上の演算が与えられた集合の集まり $\{\Pi(x,y)\}_{x,y \in X}$ を基本亜群 (fundamental groupoid) という．($\Pi(x,x) = \pi_1(X,x)$ であることに注意.）

問題 10 ($\star$) $\gamma_n\colon [0,1] \to S^1$ を $\gamma_n(x) = e^{2\pi i n x}$ で定める．ここで S^1 を絶対値 1 の複素数の集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と同一視している．基本群 $\pi_1(S^1, 1)$ において $[\gamma_n] \cdot [\gamma_m] = [\gamma_{n+m}]$ であることを示せ．ただし $n, m \in \mathbb{Z}$ とする．

問題 11 ($\star$) $f\colon X \to Y$ を連続写像，$f(x_0) = y_0$ とする．x_0 を基点とするループ $\gamma\colon I \to X$ に対して y_0 を基点とするループ $f \circ \gamma\colon I \to Y$ を対応させる写像は，基本群の間の準同型 $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ を誘導することを示せ．

問題 12 ($\star$) $f, g\colon X \to Y$ を連続写像，$f(x_0) = g(x_0) = y_0$ とする．$f \simeq g \ \mathrm{rel}\, x_0$ のとき，f と g は基本群に同じ写像を誘導する $f_* = g_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ ことを示せ．

問題 13 ($\star$) $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ に対して，群としての同型 $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ を示せ．

問題 14 位相空間 X の 2 点 x_0 と x_1 を結ぶ道 $p\colon [0,1] \to X$, $p(0) = x_0$, $p(1) = x_1$ に対して，写像 $p_\#\colon \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$, $\gamma \mapsto [p^{-1}] \cdot \gamma \cdot [p]$ は同型写像であることを示せ．ここで $p^{-1}\colon [0,1] \to X$ は $p^{-1}(x) = p(1-x)$ で定義される逆の道であり，$\cdot$ は基本亜群での積である．道 p を別のものに取り換えたとき $p_\#$ はどのように変化するか．

問題 15 $\mathbb{R}^3$ から S^1 を除いたものは $S^2 \vee S^1$ とホモトピー同値であることを示せ．

問題 16 X が可縮であるとき，任意の $x_0 \in X$ について $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ を示せ．

問題 17 任意の連続写像 $f\colon [0,1] \to S^1$, $f(0) = e^{2\pi i \theta_0}$ に対して，連続写像 $\theta\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ であって $f(x) = e^{2\pi i \theta(x)}$, $\theta(0) = \theta_0$ を満たすものが一意に存在することを示せ．（この結果は $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ を示すときに使われる.）

問題 18 $x_0 = (0,0,1)$ を S^2 の基点とする．$\pi_1(S^2, x_0) = \{e\}$ であることを示せ．(No.1 の問題 13 を参照)

幾何学入門演習　No.3 解答例

問題 1 まず，g と f が互いに逆写像であることを証明する．

$$
\begin{aligned}
f\circ g(x,y)&=\left(\frac{\frac{2x}{1+x^2+y^2}}{1-\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}},\frac{\frac{2y}{1+x^2+y^2}}{1-\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}\right)\\
&=(x,y)\\
g\circ f(x,y,z)&=\left(\frac{\frac{2x}{1-z}}{1+\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}},\frac{\frac{2y}{1-z}}{1+\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}},\frac{-1+\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}}{1+\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}}\right)\\
&=\left(\frac{2x}{1-z+\frac{1-z^2}{(1-z)}},\frac{2y}{1-z+\frac{1-z^2}{(1-z)}},\frac{-(1-z)^2+1-z^2}{(1-z)^2+1-z^2}\right)\\
&=(x,y,z)
\end{aligned}
$$

よって，f と g は互いに逆写像である．

次に，f と g は連続写像であることを示そう．写像 $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^3\setminus\{z\neq 1\}\to\mathbb{R}^2$ を f と同じ式

$$
\tilde{f}(x,y)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)
$$

で定めるとき，$\tilde{f}$ は各成分が連続写像であるから連続である．f は $\tilde{f}$ を $S^2\setminus\{(0,0,1)\}$ に制限して得られる写像であるから（演習問題 No.1 問題 6 の結果より）連続である．g についてもある連続写像 $\tilde{g}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ から誘導されることに注意すれば連続性が言える．

以上より，f は $S^2\setminus\{(0,0,1)\}$ と $\mathbb{R}^2$ の間の同相写像である．

問題 2 任意の点 $P=(p_0,\dots,p_n)\in S^n$ に対して第 $n+1$ 列が $(p_0,\dots,p_n)^{\mathrm{T}}$ で与えられる直交行列

$$
A=\begin{pmatrix} a_{00} & & a_{0n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n0} & & a_{nn}\end{pmatrix}\in O(n+1)
$$

が存在する． A を（縦ベクトルに）左から掛ける写像 $\phi\colon\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$, $x\mapsto Ax$ は同相写像であり，S^n に制限すると，$e_{n+1}=(0,\dots,0,1)^{\mathrm{T}}$ を P に写す同相写像

$$
\phi|_{S^n}\colon S^n\to S^n,\qquad \phi(e_{n+1})=P
$$

を誘導する．従って $S^n\setminus\{(0,\dots,0,1)\}$ と $S^n\setminus\{P\}$ は同相である．

あとは $S^n\setminus\{(0,\dots,0,1)\}$ と $\mathbb{R}^n$ が同相であることを示せばよい．写像 $f\colon S^n\setminus\{(0,0,\dots,0,1)\}\to\mathbb{R}^n$ と逆写像 g が次のように定義できる．

$$
f(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})=\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\frac{x_2}{1-x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)
$$

$$
g(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left(\frac{2x_1}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2},\frac{2x_2}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2},\dots,\frac{2x_n}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\frac{-1+\sum_{i=1}^n x_i^2}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)
$$

問題1と同じ計算により f は同相であることが分かる．よって S^n から1点を除いた空間は $\mathbb{R}^n$ と同相.

問題 3 問題2より $S^2\backslash\{Q\}$ は $\mathbb{R}^2$ と同相．さらに1点を除いて $S^2\backslash\{P,Q\}$ は $\mathbb{R}^2\backslash\{P'\}$ と同相になる．ただし P' は P の同相写像 $S^2\setminus\{Q\}\cong\mathbb{R}^2$ による像である．平行移動により $\mathbb{R}^2\setminus P'$ と $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ は同相．$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ と S^1 は演習 No.2 の問題9よりホモトピー同値.

問題 4 $\phi\colon Y_1\to Y_2$ をホモトピー同値写像とし, ϕ のホモトピー逆写像を $\psi\colon Y_2\to Y_1$ とする．このとき写像 $\Phi\colon [X,Y_1]\to[X,Y_2]$ を以下で定義する．$[f]\in[X,Y_1]$ に対し, $\Phi([f])=[\phi\circ f]$ とすると, $f\simeq f'$ ならば $\phi\circ f\simeq\phi\circ f'$ なので, Φ は well-defined. 同様にして, 写像 $\Psi\colon[X,Y_2]\to[X,Y_1]$ を $[g]\in[X,Y_2]$ に対し, $\Psi([g])=[\psi\circ g]$ で定義する．すると, ϕ と ψ はホモトピー逆写像なので,

$$\Phi\circ\Psi([g])=[\phi\circ\psi\circ g]=[g],\quad \Psi\circ\Phi([f])=[\psi\circ\phi\circ f]=[f]$$

より, Φ と Ψ は逆写像となり, $[X,Y_1]$ と $[X,Y_2]$ の間の全単射が作れた.

問題 5 離散位相空間 X と Y がホモトピー同値とする．前問から $[\mathrm{pt},X]$ と $[\mathrm{pt},Y]$ の間に全単射が存在する．従って，離散位相空間 X について，$[\mathrm{pt},X]$ と X の間に全単射が存在することを言えばよい．X の点 x_0 に対して $\{x_0\}$ を像とする写像 $\mathrm{pt}\to X$ のホモトピー類を対応させる写像 $X\to[\mathrm{pt},X]$ を考える．これが全射であることは明らか．単射性を示す．$x_0\neq x_1$ とするとき，x_0 を像に持つ写像 $f_0\colon\ \mathrm{pt}\to X$ と x_1 を像に持つ写像 $f_1\colon\ \mathrm{pt}\to X$ がホモトピックではないことを示そう．もしホモトピー $H\colon I\to X$, $H(0)=x_0$, $H(1)=x_1$ が存在したとすると，$I=H^{-1}(x_0)\sqcup H^{-1}(x_1)$, $H^{-1}(x_i)$ は I の空でない開集合となる．これは I の連結性に反する．

問題 6 $\gamma(0)=\gamma(1)=x_0$ を満たす任意の連続写像 $\gamma\colon[0,1]\to X$ は連続写像

$$\overline{\gamma}\colon[0,1]/(0\sim1)\to X$$

を誘導する（演習 No.2, 問題13より）．また演習 No.2, 問題15より $[0,1]/0\sim1$ は S^1 と同相である．したがって $\overline{\gamma}$ は $S^1\to X$ とみなすことができる．これにより対応 $\pi_1(X,x_0)\ni[\gamma]\mapsto[\overline{\gamma}]\in[S^1,X]$ を考えることができる．これが well-defined であることを示そう．

$[\gamma_0]=[\gamma_1]\in\pi_1(X,x_0)$ に対して, 基点を保つホモトピー $H\colon[0,1]\times[0,1]\to X$ を取る．すなわち, H を $H(x,0)=\gamma_0(x)$, $H(x,1)=\gamma_1(x)$ $(\forall x\in[0,1])$ かつ $H(0,t)=H(1,t)=x_0$ $(\forall t\in[0,1])$ を満たす連続写像とする．このとき H は連続写像 $\overline{H}\colon([0,1]/0\sim1)\times[0,1]\to X$

$$\overline{H}([x],t):=H(x,t)$$

を誘導する．実際，$H(0,t)=H(1,t)=x_0$ ゆえ，$\overline{H}$ は well-defined である．また，$\overline{H}$ は連続写像である．実際, 2つの閉部分集合 $A=[0,\frac{1}{2}]\times[0,1]$, $B=[\frac{1}{2},1]\times[0,1]$ に $\overline{H}$

を制限すると連続であり，$([0,1]/0\sim 1)\times[0,1]=A\cup B$ であるから，演習 No.1, 問題 14 より $\overline{H}$ は連続である．（あるいは，演習 No.2, 問題 11 の解答中に示した命題により，$[0,1]\times[0,1]\to([0,1]/0\sim 1)\times[0,1]$ は商写像である．つまり $[0,1]/(0\sim 1)\times[0,1]$ の位相は $[0,1]\times[0,1]$ の商位相と同一視される．このことからも $\overline{H}$ が連続であることが分かる.）$\overline{H}$ は $\overline{\gamma_0}$ から $\overline{\gamma_1}$ へのホモトピーを与えるので，$[\overline{\gamma_0}]=[\overline{\gamma_1}]\in[S^1,X]$ が示された.

問題 7 以下では $I=[0,1]$ とかく.

(反射律) $H\colon X\times I\to X$ を $H(x,t)=f(x)$ で定めると $f\simeq f$ rel A となる.

(対称律) $f\simeq g$ rel A とすると, $H\colon X\times I\to Y$ が存在し,

$$H(x,0)=f(x),\quad H(x,1)=g(x),\quad H(a,t)=f(a)=g(a)$$

を満たす．そこで, $H'\colon X\times I\to Y$ を $H'(x,t)=H(x,1-t)$ で定めると, H' は g と f の間の A を固定するホモトピーを与える．従って $g\simeq f$ rel A が成り立つ.

(推移律) $f\simeq g$ rel A かつ $g\simeq h$ rel A とする． f から g への A を固定するホモトピー $H_1\colon X\times I\to Y$ と, g から h への A を固定するホモトピー $H_2\colon X\times I\to Y$ が存在する．このとき, $H\colon X\times I\to Y$ を

$$H(x,t)=\begin{cases}H_1(x,2t) & (0\le t\le 1/2)\\ H_2(x,2t-1) & (1/2\le t\le 1)\end{cases}$$

で定めると，$H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=h(x)$, $H(a,t)=f(a)=g(a)=h(a)$ が成り立っており，$f\simeq h$ rel A となる.

問題 8 $\pi_1(X,x_0)$ の積の定義（とそれが well-defined であること）は授業で行ったため，以下では結合性，単位元の存在，逆元の存在（のうち，授業で完全に示さなかった部分）を扱う.

(結合性の証明) $f,g,h\colon[0,1]\to X$ を x_0 を基点とするループとする．$\pi_1(X,x_0)$ での等式 $([f]\cdot[g])\cdot[h]=[f]\cdot([g]\cdot[h])$ を示すには，$(f\cdot g)\cdot h$ と $f\cdot(g\cdot h)$ の間の端点を止めたホモトピーを作ればよい．ホモトピー $H\colon I\times I\to X$ は

$$H(x,t)=\begin{cases}f(\frac{4x}{t+1}) & 0\le x\le\frac{t+1}{4}\\ g(4x-(t+1)) & \frac{t+1}{4}\le x\le\frac{t+2}{4}\\ h(\frac{4}{2-t}(x-\frac{t+2}{4})) & \frac{t+2}{4}\le x\le 1\end{cases}$$

で与えられる．H は $x=\frac{t+1}{4}$, $x=\frac{t+2}{4}$ で連続であること，また，$H(0,t)=H(1,t)=x_0$, $H(x,0)=((f\cdot g)\cdot h)(x)$, $H(x,1)=(f\cdot(g\cdot h))(x)$ に注意せよ.

(単位元の存在) $e\colon I\to X$ を定値ループ $e(x)=x_0$ とする．x_0 を基点とするループ $f\colon I\to X$ について，$e\cdot f\simeq_0 f\cdot e\simeq_0 f$ を示せばよい．このうち，$f\cdot e\simeq_0 f$ は授業で説明したので，$e\cdot f\simeq_0 f$ を示す．ホモトピーは次で定めるとよい.

$$H(x,t)=\begin{cases}x_0 & 0\le x\le\frac{1-t}{2}\\ f(\frac{2}{1+t}(x-\frac{1-t}{2})) & \frac{1-t}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

このとき $H(x,0)=(e\cdot f)(x)$, $H(x,1)=f(x)$ である．

(逆元の存在) x_0 を基点とするループ $f\colon I\to X$ に対して逆の道 $f^{-1}\colon I\to X$ を $f^{-1}(x)=f(1-x)$ と定義する．(f^{-1} は逆写像ではないことに注意する．) $f\cdot f^{-1}\simeq_0$ $f^{-1}\cdot f\simeq_0 e$ を示せばよい．f と f^{-1} の役割は対称なので，$f\cdot f^{-1}\simeq_0 e$ を示せば十分である．ホモトピー $H\colon I\times I\to X$ を

$$H(x,t)=\begin{cases} f(2(1-t)x) & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ f(2(1-t)(1-x)) & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

と定める．$H(x,t)$ は $x=\frac{1}{2}$ で連続になっていることに注意する．また $H(x,0)=(f\cdot f^{-1})(x)$, $H(x,1)=e(x)$，$H(0,t)=H(1,t)=x_0$ であることがチェックできる．従って $f\cdot f^{-1}\simeq_0 e$ である．

問題 9 以下では $P(x,y)=\{f\colon I\to X\mid x$ から y への道$\}$ とおく．道の合成は写像 $P(x,y)\times P(y,z)\to P(x,z)$ を定める．定義より

$$\Pi(x,y)=P(x,y)/\text{端点をとめてホモトピック}$$

である．

(二項演算が定まること) $([p_1],[p_2])\mapsto[p_1\cdot p_2]$ が well-defined であることをみればよい．$p_1'\in P(x,y)$, $p_2'\in P(y,z)$ で $[p_1]=[p_1']$, $[p_2]=[p_2']$ となるものをとり，$[p_1\cdot p_2]=[p_1'\cdot p_2']$ を示す．p_1 と p_1' はホモトピックなので $H_1\colon I\times I\to X$ で $H_1(s,0)=p_1(s)$, $H_1(s,1)=p_1'(s)$ をみたす連続写像 H_1 がとれ，p_2 と p_2' についても同様に H_2 をとる．このとき $H\colon I\times I\to X$ を

$$H(s,t)=\begin{cases} H_1(2s,t) & 0\le s\le \frac{1}{2} \\ H_2(2s-1,t) & \frac{1}{2}\le s\le 1 \end{cases}$$

とすればこれは連続で $H(s,0)=p_1\cdot p_2$, $H(s,1)=p_1'\cdot p_2'$ となる連続写像 H を得るので主張が従う．

(1) まず存在を示す．$e_x\in P(x,x)$ を定値ループ $e_x(s)=x$ $(0\le s\le 1)$ と定める．このとき，$p\in P(x,y), q\in P(y,x)$ に対して，$e_x\cdot p\simeq_0 p$ および $q\cdot e_x\simeq_0 q$ を示せばよい．$e_x\cdot p$ と p の間のホモトピーは次で与えられる．

$$H(s,t)=\begin{cases} x & 0\le s\le \frac{1-t}{2} \\ p(\frac{2}{1+t}(s-\frac{1-t}{2})) & \frac{1-t}{2}\le s\le 1 \end{cases}$$

このとき $H(s,0)=(e_x\cdot p)(s)$, $H(s,1)=p(s)$ であり，$H(0,t)=x$, $H(1,t)=y$ を満たす．従って $e_x\cdot p\simeq_0 p$．同様に $q\cdot e_x\simeq_0 q$ も示せる．

次に一意性を示す．もし (1) の性質を満たす $\Pi(x,x)$ の元（単位元）が 2 つあるとし，$e_x, e_x'\in\Pi(x,x)$ とする．このとき，$e_x'=e_x\cdot e_x'=e_x$ である．

(2) $p\in P(x,y)$ に対し，$p^{-1}\in P(y,x)$ を $p^{-1}(s)=p(1-s)$ で定める．$e_x\simeq_0 p\cdot p^{-1}$ を示す．$H\colon I\times I\to X$ を

$$H(s,t)=\begin{cases} p(2st) & 0\le s\le \frac{1}{2} \\ p(2(1-s)t) & \frac{1}{2}\le s\le 1 \end{cases}$$

とすると $H(s,0)=e_x$，$H(s,1)=(p\cdot p^{-1})(s)$ となる連続写像であり，$H(0,t)=x$, $H(1,t)=x$ が成立する．したがって $e_x\simeq_0 p\cdot p^{-1}$ が成り立つ．$e_y\simeq_0 p^{-1}\cdot p$ も同様.

(3) $p\in P(x,y)$, $q\in P(y,z)$, $r\in P(z,w)$ に対して，$(p\cdot q)\cdot r\simeq_0 p\cdot(q\cdot r)$ を示せばよい.

$$((p\cdot q)\cdot r)(s)=\begin{cases}p(4s) & 0\le s\le 1/4\\ q(4s-1) & 1/4\le s\le 1/2\\ r(2s-1) & 1/2\le s\le 1\end{cases}$$

であり,

$$(p\cdot(q\cdot r))(s)=\begin{cases}p(2s) & 0\le s\le 1/2\\ q(4s-2) & 1/2\le s\le 3/4\\ r(4s-3) & 3/4\le s\le 1\end{cases}$$

であることに注意．ここで $H\colon I\times I\to X$ を

$$H(s,t)=\begin{cases}p(\frac{4s}{t+1}) & 0\le s\le \frac{t+1}{4}\\ q(4s-(t+1)) & \frac{t+1}{4}\le s\le \frac{t+2}{4}\\ r(\frac{4}{2-t}(s-\frac{t+2}{4})) & \frac{t+2}{4}\le s\le 1\end{cases}$$

とすると，H は連続で，$H(s,0)=((p\cdot q)\cdot r)(s)$，$H(s,1)=(p\cdot(q\cdot r))(s)$ である．また $H(0,t)=x$, $H(1,t)=w$ である．従って H は $(p\cdot q)\cdot r$ と $p\cdot(q\cdot r)$ の端点をとめたホモトピーを与える.

問題 10 $\gamma_n\cdot\gamma_m$ と γ_{m+n} の間の基点を固定するホモトピーを作ればいい．まず，$\gamma_n\cdot\gamma_m$ は次で与えられることに注意する.

$$(\gamma_n\cdot\gamma_m)(x)=\begin{cases}e^{2\pi i2nx} & 0\le x\le 1/2\\ e^{2\pi im(2x-1)} & 1/2\le x\le 1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}e^{2\pi i2nx} & 0\le x\le 1/2\\ e^{2\pi i(n+m(2x-1))} & 1/2\le x\le 1\end{cases}$$

ここで，2 番目の表式では，$x=1/2$ での偏角が一致するように $1/2\le x\le 1$ での表式に $1=e^{2\pi in}$ を掛けている．従って $\gamma_n\cdot\gamma_m$ は次のように書き直せる.

$$(\gamma_n\cdot\gamma_m)(x)=e^{2\pi if(x)}$$

ただし，$f\colon I\to\mathbb{R}$ は次で与えられる連続関数

$$f(x)=\begin{cases}2nx & 0\le x\le 1/2\\ (n+m(2x-1)) & 1/2\le x\le 1\end{cases}$$

また，$g\colon I\to\mathbb{R}$ を $g(x)=(n+m)x$ とおくとき,

$$\gamma_{n+m}=e^{2\pi ig(x)}$$

と書くことができる．ここで $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = n+m$ に注意する．$\gamma_n \cdot \gamma_m$ と γ_{n+m} の間のホモトピー $H\colon I \times I \to S^1$ は，偏角を与える関数 $f(x)$ と $g(x)$ を連続に補完することにより得られる．

$$H(x,t) = e^{2\pi i((1-t)f(x)+tg(x))}$$

このとき $H(x,0) = (\gamma_n \cdot \gamma_m)(x)$, $H(x,1) = \gamma_{n+m}(x)$ であり，$H(0,t) = H(1,t) = 1$ が成り立っている．従って H は $\gamma_n \cdot \gamma_m$ と γ_{n+m} の間のホモトピーを与える．

問題 11 γ_0 と γ_1 が x_0 を基点とするループで端点をとめてホモトピックと仮定する．このとき $f \circ \gamma_0$ と $f \circ \gamma_1$ もホモトピックになる．実際，$H\colon I \times I \to X$ を γ_1 と γ_2 の間のホモトピーとすると，$f \circ H\colon I \times I \to Y$ は $f \circ \gamma_1$ と $f \circ \gamma_2$ の間のホモトピーとなる．よって $f_*[\gamma_0] = [f \circ \gamma_0] = [f \circ \gamma_1] = f_*[\gamma_1]$ であり，f_* は well-defined.

また定義から明らかに，$f \circ (\gamma_0 \cdot \gamma_1) = (f \circ \gamma_0) \cdot (f \circ \gamma_1)$．実際，

$$\begin{aligned}(f \circ (\gamma_0 \cdot \gamma_1))(x) &= \begin{cases} f(\gamma_0(2x)) & 0 \le x \le 1/2 \\ f(\gamma_1(2x-1)) & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \\ &= ((f \circ \gamma_0) \cdot (f \circ \gamma_1))(x)\end{aligned}$$

よって $f_*[\gamma_0 \cdot \gamma_1] = f_*[\gamma_0] \cdot f_*[\gamma_1]$．従って f_* は準同型になる。

問題 12 $f \simeq g \ \mathrm{rel}\, x_0$ のホモトピーを $H(x,t)$ と書く．ただし $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x), H(x_0,t) = x_0$ を満たす．$\pi_1(X,x_0)$ の任意の元 $[\gamma]$ に対し，$f \circ \gamma \simeq_0 g \circ \gamma$ を証明すればよい．ホモトピー $K\colon I \times I \to Y$ を

$$K(x,t) = H(\gamma(x),t)$$

と定義すると，$K(x,0) = f(\gamma(x))$, $K(x,1) = g(\gamma(x))$ である．さらに $K(0,t) = K(1,t) = x_0$ が成り立っている．よって $g \circ \gamma$ と $f \circ \gamma$ は端点をとめてホモトピックなループである．

問題 13 積位相の性質によって，任意の位相空間 Z について

$$\begin{aligned}&\text{写像 } f\colon Z \to X \times Y \text{ が連続} \\ &\quad \Longleftrightarrow f_X = p_X \circ f\colon Z \to X \text{ と } f_Y = p_Y \circ f\colon Z \to Y \text{ が共に連続.}\end{aligned}$$

ここで $p_X\colon X \times Y \to X$, $p_Y\colon X \times Y \to Y$ は射影である．よって次の一対一対応が得られる．

$$\begin{aligned}&\{X \times Y \text{ 内の } (x_0,y_0) \text{ を基点とするループ } f\} \\ &\quad \cong \{X \text{ 内の } x_0 \text{ を基点とするループ } f_X\} \times \{Y \text{ 内の } y_0 \text{ を基点とするループ } f_Y\}\end{aligned}$$

さらにループの間のホモトピーは $I \times I$ からの写像であることに注意すると，この対応の下で，

$$f \simeq_0 g \Longleftrightarrow f_X \simeq_0 g_X \text{ かつ } f_Y \simeq_0 g_Y$$

であることも分かる．以上より全単射 $\pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \cong \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$, $[f] \mapsto ([f_X],[f_Y])$ が得られる．これが群準同型であることは容易なので省略する．

問題 14 $p_\#$ が準同型であることを示す．任意の $a, b \in \pi_1(X, x_0)$ について，基本亜群における積 $\cdot$ を使って

$$\begin{aligned} p_\#(a \cdot b) &= [p^{-1}] \cdot a \cdot b \cdot [p] \\ &= [p^{-1}] \cdot a \cdot [p] \cdot [p^{-1}] \cdot b \cdot [p] \\ &= p_\#([f]) \cdot p_\#([g]) \end{aligned}$$

より，$p_\#$ は準同型である．ここで $[p] \cdot [p^{-1}] = e_{x_0} \in \pi_1(X, x_0)$ を用いた．(途中に現れる積がすべて well-defined であることに注意する．) 次に $p_\#$ が全単射であることを示す．逆の道 $p^{-1}(x) = p(1-x)$ の定義する写像

$$(p^{-1})_\# \colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), \quad \gamma \mapsto [p] \cdot \gamma \cdot [p^{-1}]$$

を考える．このとき，$(p^{-1})_\#(p_\#(\gamma)) = \gamma$, $p_\#((p^{-1})_\#(\gamma)) = \gamma$ は容易に確かめられる．従って $p_\#$ は全単射である．

問題 15 (ヒント) まず，$\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$ と

$$S^2 \cup \{(0, 0, z) : -1 \le z \le 1\}$$

がホモトピー同値である（変形レトラクトになっている）ことを観察してみよう．

問題 16 X が可縮であると仮定するとき，授業で説明したように次を満たす写像 $H \colon X \times [0, 1] \to X$ が存在する．

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = y_0 \quad \forall x \in X.$$

ここで y_0 は X の点である．与えられた点 x_0 を基点とするループ $\gamma \colon [0, 1] \to X$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ に対して，端点を止めたホモトピー $K \colon [0, 1] \times [0, 1] \to X$ を次のように構成する．

$$K(x, t) = \begin{cases} H(x_0, 3x) & 0 \le x \le \frac{t}{3} \\ H(\gamma((x - \frac{t}{3})/(1 - \frac{2t}{3})), t) & \frac{t}{3} \le x \le 1 - \frac{t}{3} \\ H(x_0, 3 - 3x) & 1 - \frac{t}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

これは $K(x, 0) = \gamma(x)$, $K(0, t) = K(1, t) = x_0$ を満たす．また $\gamma'(x) := K(x, 1)$ は次で与えられる x_0 を基点とするループである．

$$\gamma'(x) = \begin{cases} H(x_0, 3x) & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ y_0 & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ H(x_0, 3 - 3x) & \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

構成から γ と γ' は端点をとめてホモトピックである．さらに γ' と定値ループの間のホモトピー $L \colon [0, 1] \times [0, 1] \to X$ を次のように構成する．

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x_0, 3(1 - t)x) & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ H(x_0, 1 - t) & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ H(x_0, 3(1 - t)(1 - x)) & \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

このように定義すると $L(x,0)=\gamma'(x)$, $L(0,t)=L(1,t)=x_0$，$L(x,1)=x_0$ となる．したがって γ' は x_0 に値をとる定値ループ e と端点を止めてホモトピック．以上より $\gamma \simeq_0 \gamma' \simeq_0 e$ となる．したがって $\pi_1(X,x_0)=\{1\}$.

問題 17 (θ の存在) 連続写像 $p\colon \mathbb{R}\to S^1$ を $p(\theta)=e^{2\pi i\theta}$ で定める．$\mathbb{R}$ の開区間 $W_0=(0,1)$, $W_1=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ を考え，$V_i=p(W_i)$ とおく．$V_i=S^1\setminus\{(-1)^i\}$ であり，これは S^1 の開集合である．まず，$p|_{W_i}\colon W_i\to V_i$, $i=0,1$ は同相写像であることを示そう．演習 No.2 の問題 15 の解答でみたように，p は同相写像 $[0,1]/0\sim 1\ \cong S^1$ を誘導する．ここから 1 点を除いて同相写像 $p|_{W_0}\colon W_0=(0,1)\to V_0$ を得る．同様の議論を $p\colon[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]\to S^1$ に適用して $p|_{W_1}\colon W_1\to V_1$ も同相であることが分かる．

S^1 の開被覆 $\{V_0,V_1\}$ を連続写像 $f\colon[0,1]\to S^1$ で引き戻して，$[0,1]$ の開被覆 $\{f^{-1}(V_0),f^{-1}(V_1)\}$ を得る．$[0,1]$ はコンパクト距離空間であることから，次を満たす正数 $\epsilon>0$（ルベーグ数という）が存在する．$[0,1]$ 内の任意の長さ ϵ の閉区間は，どれかの $f^{-1}(V_i)$ に含まれる．$1/N<\epsilon$ を満たす自然数 N をとり，$p\circ\theta_k=f$ および $\theta_k(0)=\theta_0$ を満たす連続写像 $\theta_k\colon[0,k/N]\to\mathbb{R}$ を k について帰納的に定義する．$k=0$ のときは $\theta_0(0)=\theta_0$ と定める．θ_{k-1} まで定義されているとする．N の取り方から，$[\frac{k-1}{N},\frac{k}{N}]$ を含む $f^{-1}(V_i)$ をとることができる．このとき $f([\frac{k-1}{N},\frac{k}{N}])\subset V_i$. $p(\theta_{k-1}(\frac{k-1}{N}))=f(\frac{k-1}{N})\in V_i$ より，ある整数 n が存在して $\theta_{k-1}(\frac{k-1}{N})\in n+W_i$．ここで $\theta_k\colon[0,\frac{k}{N}]\to\mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$\theta_k(x)=\begin{cases}\theta_{k-1}(x) & 0\le x\le \frac{k-1}{N}\\ (p|_{W_i})^{-1}(f(x))+n & \frac{k-1}{N}\le x\le\frac{k}{N}\end{cases}$$

$x=\frac{k-1}{N}$ のときに二つの定義が一致することに注意されたい．また定義から明らかに $p\circ\theta_k=f$ である．$\theta=\theta_N$ が求めるものである．

(θ の一意性) $\theta_1,\theta_2:[0,1]\to\mathbb{R}$ は条件を満たすと仮定する．このとき $e^{2\pi i\theta_1(x)}=f(x)=e^{2\pi i\theta_2(x)}$ であるから，$\delta(x):=\theta_1(x)-\theta_2(x)\in\mathbb{Z}$．$\delta(x)$ は $\mathbb{Z}$ に値をとる連続関数で $\delta(0)=0$．ここで，$\delta^{-1}(0)=\delta^{-1}((-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ は $[0,1]$ の閉集合かつ開集合で空でない．$[0,1]$ の連結性から $\delta^{-1}(0)=[0,1]$．すなわち $\delta(x)=0$ であり，$\theta_1(x)=\theta_2(x)$.

問題 18 任意の x_0 を基点とするループ $f\colon I\to S^2$ が x_0 への定値ループ e と端点をとめてホモトピックであることを示せばよい．演習 No.1，問題 13 の解答の方法により，$y_0\in S^2\setminus\{x_0\}$ に対して，f は y_0 を像に含まないループ $\tilde f\colon I\to S^2$ と端点をとめてホモトピックになることが示せる．問題 2 より $S^2\setminus\{y_0\}\cong\mathbb{R}^2$ であり，$\mathbb{R}^2$ 内の任意のループは定値ループと（端点をとめて）ホモトピックであるから，$\tilde f$ は x_0 への定値ループと端点をとめてホモトピックである．

(別解）授業で後述する予定の Van Kampen の定理を使うと次のようにも解ける．$U=S^2\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x>-1/2\}$, $V=S^2\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x<1/2\}$ とすると，$U\cup V=S^2$ であり, U と V は開円板と同相なので可縮. $i_U\colon\pi_1(U\cap V,x_0)\to\pi_1(U,x_0)$, $i_V\colon\pi_1(U\cap V,x_0)\to\pi_1(V,x_0)$ を包含写像が誘導する準同型とする．Van Kampen の定理から,

$$\pi_1(S^2,x_0)\cong\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/\{i_U(\omega)i_V(\omega)^{-1}\mid\omega\in\pi_1(U\cap V,x_0)\}\cong\{e\}.$$

幾何学入門演習　No.4　(2023 年 11 月 8 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．$(\star)$ は基本的な問題です．

問題 1 (No.3 問題 14 の再掲 $\star$) 授業で説明した以下のことを復習せよ．位相空間 X の 2 点 x_0 と x_1 を結ぶ道 $p\colon [0,1] \to X,\ p(0) = x_0,\ p(1) = x_1$ に対して，写像 $p_\#\colon \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1),\ \gamma \mapsto [p^{-1}]\cdot\gamma\cdot[p]$ は同型写像であることを示せ．ここで $p^{-1}\colon [0,1] \to X$ は $p^{-1}(x) = p(1-x)$ で定義される逆の道であり，$[p^{-1}]\cdot\gamma\cdot[p]$ は基本亜群での積である．道 p を別のものに取り換えたとき $p_\#$ はどのように変化するか．

問題 2 $(\star)$ G を群，$g \in G$ とする．写像 $G \to G,\ x \mapsto gxg^{-1}$ は群の同型を与えることを示せ．この写像を g による共役という．$\mathrm{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$ とも書く．

問題 3 $(\star)$ X を弧状連結空間とする．問題 1 より X の点 x_0 と x_1 をつなぐ道 p を選ぶごとに，同型 $p_\#\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$ が定まる．$\pi_1(X)$ がアーベル群であるとき，この同型は道 p の取り方によらないことを示せ．

問題 4 連続写像 $h\colon X \to X$ は id_X とホモトピックとする．このとき任意の $x_0 \in X$ について $h_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,h(x_0))$ は同型であることを示せ．

授業では写像 $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to X$ を考え，$h = g\circ f$ の形であるときにこの主張を述べた．h と id_X の間のホモトピーを $H\colon X\times[0,1] \to X$ とすると，$h(x_0)$ から x_0 への道 p が $p(t) = H(x_0,t)$ で定まる．h_* と $p_\#\colon \pi_1(X,h(x_0)) \cong \pi_1(X,x_0)$ を合成した写像 $p_\#\circ h_*$ が恒等写像であることが主張された．

問題 5 $(\star)$ $x, y \in X$ とし，x から y への道 $p\colon I \to X,\ p(0) = x,\ p(1) = y$ があるとする．$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき次の図式が可換であること，すなわち，$(f\circ p)_\# \circ f_* = f_* \circ p_\#$ が成り立つこと，を示せ．

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "p_\#"] & \pi_1(Y,f(x)) \arrow[d, "(f\circ p)_\#"] \\
\pi_1(X,y) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(Y,f(y))
\end{tikzcd}$$

ここで $p_\#,\ (f\circ p)_\#$ は問題 1 で定義した群の同型写像である．

問題 6 $(\star)$ $n \geq 3$ について $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^n$ は同相でないことを示せ.（ヒント：基本群）

問題 7 $(\star)$ S を集合とする．S の各元 $s \in S$ について s^{-1} という記号を準備し，$S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$ と書く．S^{-1} は S のコピーである．また $s \in S$ に対して，$(s^{-1})^{-1} = s$ と定める．S 上の語 (word) とは $S \sqcup S^{-1}$ の元からなる有限列

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \qquad 但し\ s_1, \ldots, s_n \in S \sqcup S^{-1}$$

のことである．空の列 $()$（$n=0$ のとき）も語とみなし，空語とよぶ．S 上の語全体の集合を $W(S)$ と表す．$W(S)$ には語の連結によって積 $W(S)\times W(S)\to W(S)$ が入る．

$$(s_1,s_2,\dots,s_n)\cdot(t_1,t_2,\dots,t_m)=(s_1,s_2,\dots,s_n,t_1,t_2,\dots,t_m)$$

$W(S)$ に次の関係で生成される同値関係 $\sim$ を入れる．

$$(a_1,\dots,a_n,x,x^{-1},b_1,\dots,b_m)\sim(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)$$

ここで $a_i,b_i,x\in S\sqcup S^{-1}$ である．$F(S)=W(S)/\sim$ を W の同値関係 $\sim$ による商集合とする．$W(S)$ の積は $F(S)$ の積 $F(S)\times F(S)\to F(S)$ を誘導することを示せ．空語 $()\in W(S)$ の $F(S)$ における像を 1 と書くと，$F(S)$ は 1 を単位元とする群の構造を持つことを示せ．

$F(S)$ を S **の生成する自由群**という．$n=|S|$ のとき，$F(S)=F_n$ と書く．

問題 8 ($\star$) S 上の語 $(s_1,\dots,s_n)\in W(S)$ が簡約 (reduced) であるとは $s_{i+1}\neq s_i^{-1}$ がすべての $i=1,\dots,n-1$ について成り立つことである．ただし，空語は簡約とみなす．任意の語 $w=(s_1,\dots,s_n)\in W(S)$ に対して簡約語 $r(w)\in W(S)$ を定義しよう．語の列 $w_1,\dots,w_n$ を帰納的に次のように定める．$w_1=(s_1)$ とし，$w_{i-1}=(a_1,\dots,a_k)$ であるとき，

$$w_i=\begin{cases}(a_1,\dots,a_{k-1}) & a_k=s_i^{-1}\text{ のとき}\\ (a_1,\dots,a_k,s_i) & a_k\neq s_i^{-1}\text{ のとき}\end{cases}$$

と定める．最後に $r(w)=w_n$ と定める．空語については $r(())=()$ とする．$r(w)$ が簡約であることは定義から明らか．問題 7 にある同値関係 $\sim$ について，次を示せ．

(1) $v,w\in W(S)$ が $v\sim w$ を満たすとき，$r(v)=r(w)$．

(2) $W(S)$ の $\sim$ に関する同値類は簡約語をただ一つ含む．

従って $F(S)$ は簡約語全体の集合と同一視できる．

問題 9 ($\star$) $F(S)$ を S の生成する自由群とする．$i\colon S\to F(S)$ を自然な写像とする．G を任意の群とする．任意の写像 $f\colon S\to G$ に対して，群準同型 $\varphi\colon F(S)\to G$ であって $\varphi\circ i=f$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ．

問題 10 自然数 n,m について，$F_n\cong F_m$ なら $n=m$ を示せ．(もっと一般に，$F(S)\cong F(S')$ なら S と S' の濃度は等しい.）

問題 11 X を弧状連結空間，$x_0\in X$ を基点とする．x_0 を基点とするループ $f\colon[0,1]\to X$ は連続写像 $\overline{f}\colon S^1\cong[0,1]/(0\sim1)\to X$ を定める．写像 $p\colon\pi_1(X,x_0)\to[S^1,X]$, $[f]\mapsto[\overline{f}]$ は全射であって，$\gamma_1,\gamma_2\in\pi_1(X,x_0)$ に対して

$$p(\gamma_1)=p(\gamma_2)\iff\exists g\in\pi_1(X,x_0)\text{ s.t. }\gamma_1=g\gamma_2g^{-1}$$

が成り立つことを示せ．(つまり，p は共役による商写像と同一視される.）

問題 12 $[S^1,X]$ が 1 点集合であるとき，X は弧状連結かつ単連結であることを示せ．

幾何学入門演習　No.4 解答例

問題 1 $p_\#$ が準同型であることを示す．任意の $a, b \in \pi_1(X, x_0)$ について，基本亜群における積 $\cdot$ を使って

$$
\begin{aligned}
p_\#(a \cdot b) &= [p^{-1}] \cdot a \cdot b \cdot [p] \\
&= [p^{-1}] \cdot a \cdot [p] \cdot [p^{-1}] \cdot b \cdot [p] \\
&= p_\#([f]) \cdot p_\#([g])
\end{aligned}
$$

より，$p_\#$ は準同型である．ここで $[p] \cdot [p^{-1}] = e_{x_0} \in \pi_1(X, x_0)$ を用いた．(途中に現れる積がすべて well-defined であることに注意する．）次に $p_\#$ が全単射であることを示す．逆の道 $p^{-1}(x) = p(1-x)$ の定義する写像

$$
(p^{-1})_\# \colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), \quad \gamma \mapsto [p] \cdot \gamma \cdot [p^{-1}]
$$

を考える．このとき，$(p^{-1})_\#(p_\#(\gamma)) = \gamma$, $p_\#((p^{-1})_\#(\gamma)) = \gamma$ は容易に確かめられる．従って $p_\#$ は全単射である．

最後に道 p を取り換えたときに $p_\#$ がどのように変化するのかを記述する．$q \colon [0,1] \to X$, $q(0) = x_0$, $q(1) = x_1$ を x_0 と x_1 を結ぶ別の道とする．このとき $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ に対して

$$
\begin{aligned}
p_\#(\alpha) &= [p^{-1}] \cdot \alpha \cdot [p] \\
&= [p^{-1}] \cdot [q] \cdot [q^{-1}] \cdot \alpha \cdot [q] \cdot [q^{-1}] \cdot [p] \\
&= [p^{-1}] \cdot [q] \cdot q_\#(\alpha) \cdot [q^{-1}] \cdot [p]
\end{aligned}
$$

ここで $[q] \cdot [q^{-1}] = e_{x_0}$ を用いた．ここで $g = [p^{-1}] \cdot [q] \in \pi_1(X, x_1)$ とおくとき，$g^{-1} = [q^{-1}] \cdot [p]$ であって

$$
p_\#(\alpha) = g \cdot q_\#(\alpha) \cdot g^{-1}
$$

となる．従って異なる道をとると，同型写像は共役だけずれることが分かる．

問題 2 $\mathrm{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$ とおく．

$$
\mathrm{Ad}_g(x_1 x_2) = g x_1 x_2 g^{-1} = g x_1 g^{-1} g x_2 g^{-1} = \mathrm{Ad}_g(x_1) \, \mathrm{Ad}_g(x_2)
$$

より Ad_g は群準同型である．また $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$ は Ad_g の逆写像を与える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_g(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(x)) &= \mathrm{Ad}_g(g^{-1}xg) = gg^{-1}xgg^{-1} = x \\
\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\mathrm{Ad}_g(x)) &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(gxg^{-1}) = g^{-1}gxg^{-1}g = x
\end{aligned}
$$

（より一般に，$\mathrm{Ad}_{g_1} \circ \mathrm{Ad}_{g_2} = \mathrm{Ad}_{g_1 g_2}$, $\mathrm{Ad}_e = \mathrm{id}$ が成り立つ.）従って Ad_g は群の同型である．

問題 3 問題1でみたように，道の取り方を変えるとき同型写像は共役だけ変わる．正確には p, q を x_0 から x_1 への二つの道とするとき，ある元 $g \in \pi_1(X, x_1)$ を用いて，すべての $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ に対して

$$p_\#(\alpha) = \mathrm{Ad}_g(q_\#(\alpha)) = g \cdot q_\#(\alpha) \cdot g^{-1}$$

と書くことができるのであった．ところが，仮定より $\pi_1(X, x_1)$ はアーベル群であるから，$\mathrm{Ad}_g = \mathrm{id}$ である．従って

$$p_\#(\alpha) = q_\#(\alpha)$$

が成立する．つまり同型は道の取り方によらない．

問題 4 $I = [0, 1]$ とおく．写像 $h\colon X \to X$ と id_X の間のホモトピーを $H\colon X \times I \to X$ とする．H は $H(x, 0) = h(x), H(x, 1) = \mathrm{id}_X$ を満たす連続写像である．ここで $p\colon I \to X$ を $p(t) = H(x_0, t)$ とすると，p は連続写像で $p(0) = h(x_0), p(1) = x_0$ となり，これは $h(x_0)$ から x_0 への道である．

問題1より，h は群の準同型 $h_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, h(x_0))$ を誘導する．$p_\#\colon \pi_1(X, h(x_0)) \to \pi_1(X, x_0)$ は同型であるから，$p_\# \circ h_*$ が恒等写像であることを示せばよい．任意の $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ について，$p_\# \circ h_*([\gamma]) = p_\#([h \circ \gamma]) = [p^{-1}] \cdot [h \circ \gamma] \cdot [p]$ である．$[p^{-1}] \cdot [h \circ \gamma] \cdot [p]$ は次のループ c で代表される．

$$c(s) = \begin{cases} p(1-4t) & (0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}) \\ h \circ \gamma(4t-1) & (\frac{1}{4} \leqq t \leqq \frac{1}{2}) \\ p(2t-1) & (\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1) \end{cases}$$

$c \simeq_0 \gamma$ を示せばよい．そこで $K\colon I \times I \to X$ を

$$K(s, t) = \begin{cases} p(1-4s) & (0 \leqq s \leqq \frac{1}{4}t) \\ H(\gamma(\frac{4s-t}{4-3t}), 1-t) & (\frac{1}{4}t \leqq s \leqq 1 - \frac{1}{2}t) \\ p(2s-1) & (1 - \frac{t}{2} \leqq s \leqq 1) \end{cases}$$

と定める．$K(\cdot, t)$ は $x_0 = p(1)$ から $p(1-t)$ まで p^{-1} にそって進み，次に $p(1-t)$ を基点とするループ $H(\gamma(\cdot), 1-t)$ を進み，最後に $p(1-t)$ から $p(1)$ に p に沿って戻る道である．$K(s, 0) = \gamma(s)$, $K(s, 1) = c(s)$，$K(0, t) = K(1, t) = p(1) = x_0$ より，K は γ と c の間の端点を止めたホモトピーを与える．

問題 5 任意の $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ に対し，

$$\begin{aligned} ((f \circ p)_\# \circ f_*)([\gamma]) &= (f \circ p)_\#([f \circ \gamma]) \\ &= [((f \circ p)^{-1} \cdot (f \circ \gamma)) \cdot (f \circ p)] \\ &= [((f \circ p^{-1}) \cdot (f \circ \gamma)) \cdot (f \circ p)] \\ &= [f \circ ((p^{-1} \cdot \gamma) \cdot p)] \\ &= f_*([(p \cdot \gamma) \cdot p^{-1}]) = f_* \circ p_\#([\gamma]) \end{aligned}$$

より従う．

問題 6 $n \geq 3$とし，$\mathbb{R}^2$と$\mathbb{R}^n$が同相であったとする．このとき同相写像の下で$0 \in \mathbb{R}^2$に対応する点を$p \in \mathbb{R}^n$とするとき，$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$と$\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$とは同相である．ところがこれらは異なる基本群を持つ．$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$は$S^1$とホモトピー同値だから，

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

であり，$\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$と$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$は同相でこれは$S^{n-1}$とホモトピー同値だから，

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^{n-1}) \cong \{1\}$$

となる．これは矛盾である．

問題 7 同値関係$\sim$は関係

$$(a_1, \ldots, a_n, x, x^{-1}, b_1, \ldots, b_m) \approx (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$$

で「生成される」関係として定義された．つまり$w \sim w'$とは$W(S)$の元の有限列$w_1, \ldots, w_n$が存在して$w_1 = w$, $w_n = w'$が成り立ち，各$i = 1, \ldots, n-1$に対して$w_i \approx w_{i+1}$あるいは$w_{i+1} \approx w_i$あるいは$w_i = w_{i+1}$が成り立つことである．語の積$W(S) \times W(S) \to W(S)$が商空間$F(S) = W(S)/\sim$の積を誘導することをいうには，次を示せば十分である．

$$\begin{aligned} w_1 \approx w_1' &\implies w_1 \cdot w_2 \sim w_1' \cdot w_2 \\ w_2 \approx w_2' &\implies w_1 \cdot w_2 \sim w_1 \cdot w_2' \end{aligned}$$

このことは定義から明らかである．よって$W(S)$の積から誘導された$F(S)$の積$[w_1] \cdot [w_2] := [w_1 \cdot w_2]$はwell-defined.

任意の元$[w] \in F(S)$，$w = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$をとる．このとき

$$[w] \cdot 1 = [(a_1, \ldots, a_n) \cdot ()] = [(a_1, \ldots, a_n)] = w = [() \cdot (a_1, \ldots, a_n)] = 1 \cdot [w]$$

より$1 = [()]$は単位元．また$[w]^{-1} = [(a_n^{-1}, \ldots, a_1^{-1})]$と定義すれば，同値関係を使うことにより

$$\begin{aligned} [w] \cdot [w]^{-1} &= [(a_1, \ldots, a_n, a_n^{-1}, \ldots, a_1^{-1})] \\ &= [(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n-1}^{-1}, \ldots, a_1)] \\ &\vdots \\ &= [(a_1, a_1^{-1})] = [()] = 1 \end{aligned}$$

が言える．同様にして$[w]^{-1} \cdot [w] = 1$．また語の積は明らかに結合法則を満たすので，$F(S)$の積も結合法則を満たす．従って$F(S)$は1を単位元とする群の構造を持つ．

問題 8 (1) 前問の解答と同じく同値関係ではない$W(S)$上の関係$\approx$を

$$(a_1, \ldots, a_n, x, x^{-1}, b_1, \ldots, b_m) \approx (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$$

により定めることとする．$\sim$ は $\approx$ で生成される同値関係である．$w \approx w'$ のときに $r(w) = r(w')$ を示せば十分である．

$$w = (a_1, \dots, a_n, x, x^{-1}, b_1, \dots, b_m), \qquad w' = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$$

とおく．問題文に従って列 $w_1, \dots, w_{n+m+2}$ および列 $w'_1, \dots, w'_{n+m}$ を定める．このとき明らかに $w_i = w'_i$, $i = 1, \dots, n$ が成立する．$w_n = w'_n = (s_1, \dots, s_l)$ とする．次の 2 つの場合に分かれる．

Case 1: $s_l = x^{-1}$ のとき．$w_{n+1} = (s_1, \dots, s_{l-1})$ である．また列の作り方から w_n は簡約であって，特に $s_{l-1} \neq s_l^{-1}$．すなわち $s_{l-1} \neq x$ であり，$w_{n+2} = (s_1, \dots, s_{l-1}, x^{-1}) = (s_1, \dots, s_{l-1}, s_l) = w_n$ となる．

Case 2: $s_l \neq x^{-1}$ のとき．$w_{n+1} = (s_1, \dots, s_l, x)$, $w_{n+2} = (s_1, \dots, s_l)$ となる．

以上よりいずれの場合も $w_{n+2} = w_n = w'_n$．従って $w_{n+2+j} = w'_{n+j}$ が $j = 0, \dots, m$ で成立し，$r(w) = r(w')$ が従う．

(2) まず，任意の語 w について $w \sim r(w)$ を示そう．$w = (s_1, \dots, s_n)$ に対して $w_i \sim (s_1, \dots, s_i)$ であることを i に関する帰納法で示す．$i = 1$ の時は明らか．$w_i \sim (s_1, \dots, s_i)$ が正しいと仮定する．問題 7 で示したことから，$(s_1, \dots, s_{i+1}) = (s_1, \dots, s_i) \cdot (s_{i+1}) \sim w_i \cdot (s_{i+1})$．ここで w_{i+1} の定義より

$$w_i \cdot (s_{i+1}) \approx w_{i+1} \quad \text{あるいは} \quad w_i \cdot (s_{i+1}) = w_{i+1}$$

が成り立つ．従って $w_{i+1} \sim (s_1, \dots, s_{i+1})$．以上により帰納法が完成し，$r(w) = w_n \sim (s_1, \dots, s_n) = w$ が示された．

$W(S)$ の同値類 $[w]$ をとる．$w \sim r(w)$ であるから，$[w]$ は少なくとも一つの簡約語 $r(w)$ を含む．もし $[w]$ が 2 つの簡約語 v, v' を含んだとする．このとき $v \sim v'$ ゆえ $r(v) = r(v')$．簡約語 v, v' については定義より $v = r(v), v' = r(v')$ であることが分かるから，$v = r(v) = r(v') = v'$．従って $[w]$ はただ一つの簡約語を含む．

問題 9 $\varphi\colon F(S) \to G$ を次で定める．$F(S)$ の元を一つ取り，その同値類の代表元を $(s_1, \dots s_n)$，$(s_1, \dots s_n \in S \sqcup S^{-1})$ とする．このとき，$\varphi(s_1, \dots, s_n) = f(s_1) \cdots f(s_n)$ と定める．ただし $s_i \in S^{-1}$ の時は $f(s_i) = f(s_i^{-1})^{-1}$ とする．つまり任意の $s \in S \sqcup S^{-1}$ に対して $f(s^{-1}) = f(s)^{-1}$ が成り立つ．

まずこの写像が well-defined であることは

$$\begin{aligned} \varphi(s_1, \dots s_k, x, x^{-1}, s_{k+1}, \dots, s_n) &= f(s_1) \cdots f(s_k) f(x) f(x)^{-1} f(s_{k+1}) \cdots f(s_n) \\ &= f(s_1) \cdots f(s_n) = \varphi(s_1, \dots s_n) \end{aligned}$$

より従う．さらに $\varphi \circ i = f$ も作り方からわかる．

最後に一意性を確認する．準同型 $\varphi'\colon F(S) \to G$ で $\varphi' \circ i = f$ となるものをとるとき，$\varphi' \circ i = f$ から全ての $s \in S$ に対して $\varphi'(s) = f(s)$．さらに $s \in S$ に対して $\varphi'(s^{-1}) = \varphi'(s)^{-1} = f(s)^{-1} = f(s^{-1})$ が成り立つ[1]．つまり任意の $s \in S \sqcup S^{-1}$ に対

[1] 群準同型 $\varphi\colon G \to H$ に対して $\varphi(1) = 1$, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ が成り立つ．まず $\varphi(1)^2 = \varphi(1^2) = \varphi(1)$ に $\varphi(1)^{-1}$ を左から掛けて $\varphi(1) = 1$ を得る．次に $\varphi(g^{-1})\varphi(g) = \varphi(g^{-1} \cdot g) = \varphi(1) = 1$．よって $\varphi(g)$ の逆元を右からかけて $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$．

して $\varphi(s)=f(s)$．$F(S)$ の任意の元は $S\sqcup S^{-1}$ の元の積で表されるから，準同型の性質より $\varphi'=\varphi$ でなければならない．

問題 10 F_n を $\{x_1,\dots,x_n\}$ で生成される自由群とする．問題 9 より，F_n から自由アーベル群 $\mathbb{Z}^k$ への準同型は $x_1,\dots,x_n$ の像を定めることで与えられる．もし準同型が全射であるとすれば，$\mathbb{Z}^k$ は $x_1,\dots,x_n$ の像で生成される．$\mathbb{Z}^k$ の生成元の個数は k 以上であることが知られている[2]から，このとき $n\geq k$ である．従って

$$n\geq \max\{k \mid \text{全射準同型}\ \varphi\colon F_n\to\mathbb{Z}^k\ \text{が存在する}\}$$

一方で F_n から $\mathbb{Z}^n$ への全射準同型は存在する ($x_1,\dots,x_n$ を $\mathbb{Z}^n$ の基底に写すものを考えればよい) から，実際には

$$n=\max\{k \mid \text{全射準同型}\ \varphi\colon F_n\to\mathbb{Z}^k\ \text{が存在する}\}$$

となる．従って $F_n\cong F_m$ なら $n=m$ である．

$\boxed{\text{注意}}$ 一般に群 G に対して群 G の可換化 $G/[G,G]$ が定義される．ここで $[G,G]$ は交換子群と呼ばれ，$aba^{-1}b^{-1}(a,b\in G)$ の形の元で生成される部分群であり，G の正規部分群である．$G/[G,G]$ はアーベル群であり，G の商として得られるアーベル群の中で「最も大きい」ものである．自由群 F_n の可換化 $F_n/[F_n,F_n]$ は $\mathbb{Z}^n$ であることが容易にわかるので，そのことを用いてもよい．

問題 11 (略解) 以下では $S^1=[0,1]/0\sim 1$ とみなし，S^1 からの連続写像を I からの連続写像で端点で一致しているものと同一視する．

写像 $p\colon \pi_1(X,x_0)\to[S^1,X]$ が全射であること．任意の連続写像 $c\colon I/(0\sim 1)\to X$ をとる．$c(0)=x_1$ とする．X は弧状連結であるから，x_0 から x_1 への道 $f\colon I\to X$ が存在する．このとき x_0 を基点とするループ $(f\cdot c)\cdot f^{-1}$ は c と（端点をとめずに）ホモトピックであることを示せばよい．ホモトピー $H\colon I\times I\to X$ を

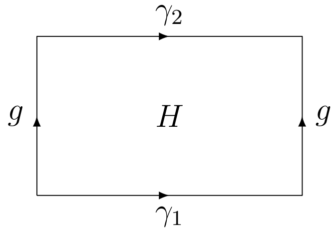
$$H(x,t)=\begin{cases} f(1-t+4x) & 0\leq x\leq t/4\\ c(\frac{4x-t}{4-3t}) & t/4\leq x\leq 1-t/2\\ f(3-2x-t) & 1-t/2\leq x\leq 1\end{cases}$$

で定めると，H は $H(0,t)=H(1,t)=f(1-t)$ を満たすため，$S^1\times I\to X$ とみなすことができる．このとき $H(x,1)=((f\cdot c)\cdot f^{-1})(x)$，$H(x,0)=c(x)$ ゆえ c と $(f\cdot c)\cdot f^{-1}$ は（端点をとめずに）ホモトピックとなる．

次に x_0 を基点とするループ γ,g に対して，$p([g]\cdot[\gamma]\cdot[g]^{-1})=p([\gamma])$ を示そう．先ほどの議論と同様に，$(g\cdot\gamma)\cdot g^{-1}$ と γ は基点をとめずにホモトピックである．このことから示したいことが直ちに従う．

最後に $p([\gamma_1])=p([\gamma_2])$ ならば $[\gamma_1]$ と $[\gamma_2]$ が基本群で共役であることを示そう．仮定から，ホモトピー $H\colon I\times I\to X$ で $H(x,0)=\gamma_1(x)$, $H(x,1)=\gamma_2(x)$, $H(0,t)=H(1,t)$ を満たすものが存在する．ここで x_0 を基点とするループ $g\colon I\to X$ を $g(x)=H(0,x)=H(1,x)$ と定義するとき，$\gamma_1\simeq_0(g\cdot\gamma_2)\cdot g^{-1}$ であることが示せる（図参照）．

[2] $\mathbb{Z}^k$ の生成元 $z_1,\dots,z_m$ は，$\mathbb{R}$ 上で考えると，ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ も生成する．線形代数で $\mathbb{R}^k$ の生成元の個数が k 以上であることはよく知られているので，$m\geq k$ である．



問題 12 まず X は弧状連結であることを示そう．$x, y \in X$ を任意の点とする．x への定値ループ $e_x\colon S^1 \to X$ と y への定値ループ $e_y\colon S^1 \to X$ はホモトピックであるから，e_x と e_y の間のホモトピー $H\colon S^1 \times [0,1] \to X$ が存在する．ここで点 $u \in S^1$ を固定し，$p(t) = H(u,t)$ とおけば $p(t)$ は $p(0) = x$, $p(1) = y$ を満たす．従って任意の 2 点 x, y は道で結ぶことができる．

前問より，$[S^1, X] \cong \pi_1(X, x_0)/$共役である．$[S^1, X]$ が 1 点集合であるとき $\pi_1(X, x_0)$ の任意の 2 元は互いに共役．従って任意の $g \in \pi_1(X, x_0)$ は単位元 1 と共役であり，1 と共役な元は 1 しかないので，$g = 1$．従って $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ である．

幾何学入門演習　No.5　(2023 年 11 月 15 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．$(\star)$ は基本的な問題です．

定義　写像 $p\colon X \to Y$ が被覆写像であるとは，任意の $y \in Y$ に対して y の開近傍 U と X の互いに交わらない開集合の族 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在して $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ かつ $p|_{V_\alpha}\colon V_\alpha \to U$ がすべての $\alpha \in A$ について同相写像となること．

問題 1 $(\star)$　$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とみなす．$p\colon \mathbb{R} \to S^1$ を $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ と定める．

(1) (a, b) を実数の開区間で $0 < b - a \leq 1$ とする．このとき，$p((a, b))$ は S^1 の開集合で，$p|_{(a,b)}\colon (a, b) \to p((a, b))$ は同相写像であることを示せ．

(2) p は被覆写像であることを示せ．

(3) $q\colon S^1 \to S^1$ を $q(z) = z^2$ で定める．q は被覆写像であることを示せ．

問題 2 $(\star)$　$p\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $p(z) = z^n$ と定める．p は n 次の被覆写像であることを示せ．

問題 3 $(\star)$　被覆写像は局所同相写像 (local homemorphism) であることを示せ．ただし $p\colon X \to Y$ が局所同相写像であるとは，任意の $x \in X$ に対して x のある開近傍 U が存在して $p(U)$ は Y の開集合であり $p|_U\colon U \to p(U)$ は同相写像となることをいう．

問題 4 $(\star)$　$p\colon X \to Y$ を局所同相写像とする．任意の $y \in Y$ に対して $p^{-1}(y)$ は（X からの相対位相について）離散位相空間であることを示せ．

問題 5 $(\star)$　$p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．Y がハウスドルフなら X もハウスドルフであることを示せ．(これは p が局所同相であるだけでは反例がある．)

問題 6　X, Y を局所コンパクトハウスドルフ空間，$p\colon X \to Y$ を局所同相写像とする．p が固有 (proper) であれば，p は被覆写像であることを示せ．

問題 7 $(\star)$　問題 1 の写像を開区間 $(0, 2)$ に制限した写像 $p|_{(0,2)}\colon (0, 2) \to S^1$ は局所同相写像であるが，被覆写像ではないことを示せ．

問題 8　$p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．Y が連結であれば，$p^{-1}(y)$ の濃度は点 $y \in Y$ の取り方によらないことを示せ．

問題 9 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を整数行列で，$\det(A) \neq 0$ を満たすものとする．$T^2 = S^1 \times S^1$ とし，S^1 を絶対値 1 の複素数全体とみなす．写像 $p\colon T^2 \to T^2$ を $p(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ と定める．p は次数 $|\det(A)|$ の被覆写像であることを示せ．

問題 10 授業では $S^1 \vee S^1$ の無限次被覆空間として F_2 の Cayley グラフを紹介した．$S^1 \vee S^1$ の有限次数の被覆空間を構成せよ．

問題 11 K をコンパクト距離空間，$\{U_\alpha\}$ を K の開被覆とする．このとき次を満たす正数 $\epsilon > 0$ が存在することを示せ．任意の $x \in K$ に対して x 中心の ϵ 開球体 $B_\epsilon(x) = \{y \in K \mid d(x,y) < \epsilon\}$ はどれかの U_α に含まれる．

問題 12 ($\star$) $1 \in S^1$ を基点とするループ $f\colon [0,1] \to S^1$ に対して，f のリフト $\hat{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ で $f(x) = e^{2\pi i \hat{f}(x)}$, $\hat{f}(0) = 0$ を満たすものがただ一つ存在する．このとき $n_f = \hat{f}(1)$ は整数であり f の**回転数**という．1 を基点とするループ $f, g\colon [0,1] \to S^1$ に対して $n_f = n_g$ であれば，f と g は端点をとめてホモトピック $f \simeq_0 g$ であることを示せ．

問題 13 $p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．$Z = I$（あるいは，より一般の位相空間でもよい）とする．$f\colon Z \to Y$ を連続写像とし，$\hat{f}\colon Z \to X$ を f の持ち上げ（つまり $p \circ \hat{f} = f$ を満たす連続写像）とする．$H\colon Z \times I \to Y$ を $H(z,0) = f(z)$ を満たす連続写像（f のホモトピー）とするとき，次を満たす連続写像 $\hat{H}\colon Z \times I \to X$ が一意に存在することを示せ．ここで $I = [0,1]$ を表す．

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\hat{H}"] & Y \end{tikzcd} \qquad p \circ \hat{H} = H, \qquad \hat{H}(z,0) = \hat{f}(z).$$

問題 14 ($\star$) $p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．連続写像 $f\colon I \to Y$ を $y_0 = f(0)$ から $y_1 = f(1)$ への道とする．授業で示したように，点 $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ に対して道 $\hat{f}\colon I \to X$ であって $\hat{f}(0) = x_0, p \circ \hat{f} = f$ を満たすものがただ一つ存在する．$\hat{f}$ の始点 $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ に対して終点 $x_1 = \hat{f}(1) \in p^{-1}(y_1)$ を対応させる写像を $\Pi_f\colon p^{-1}(y_0) \to p^{-1}(y_1)$ とする（**道 f に沿った平行移動**という）．問題 13 の結果を用いて，Π_f は f の端点をとめたホモトピー類のみに依存することを示せ．つまり，$f \simeq_0 f'$（端点をとめてホモトピック）ならば $\Pi_f = \Pi_{f'}$ であることを示せ．

問題 15 $p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．点 $x_0 \in X$ をとり，$y_0 = p(x_0) \in Y$ とおく．このとき $p_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ は単射であることを示せ．

問題 16 $p\colon X \to Y$ を被覆写像とし，X を空でない弧状連結空間，Y を弧状連結かつ単連結な空間とする．p は同相写像であることを示せ．

幾何学入門演習　No.5 解答例

問題 1 (1) 仮定より $a < b \leq a+1$ である．閉区間 $[b, a+1]$ はコンパクトであり，その像 $p([b,a+1])$ もコンパクトである．S^1 はハウスドルフなので $p([b,a+1])$ は閉集合である．$p((a,b)) = S^1 \setminus p([b,a+1])$ は従って S^1 の開集合である．

次に $p|_{(a,b)} \colon (a,b) \to p((a,b))$ が同相写像であることを示す．p は連続全単射であるから，p^{-1} が連続であること，すなわち，(a,b) に含まれる任意の開集合 U について $p(U)$ が開集合であることを示せばよい．U は（長さが 1 以下の）開区間の和集合として表され，既にみたように長さが 1 以下の開区間の p による像は開集合であるから $p(U)$ も開集合である．

(2) 任意の $e^{2\pi i\theta_0} \in S^1$ に対してそれを含む開近傍 $U = p((\theta_0 - \frac{1}{3}, \theta_0 + \frac{1}{3}))$ をとる．

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n, \quad V_n = (\theta_0 - \tfrac{1}{3} + n, \theta_0 + \tfrac{1}{3} + n)$$

であり，(1) で示したように $p|_{V_n} \colon V_n \to U$ は同相写像である．

(3) 任意の $e^{2\pi i\theta_0} \in S^1$ に対してそれを含む開近傍 $U = p((\theta_0 - \frac{1}{3}, \theta_0 + \frac{1}{3}))$ をとる．このとき，

$$q^{-1}(U) = p((\tfrac{\theta_0}{2} - \tfrac{1}{6}, \tfrac{\theta_0}{2} + \tfrac{1}{6})) \sqcup p((\tfrac{\theta_0}{2} + \tfrac{5}{6}, \tfrac{\theta_0}{2} + \tfrac{7}{6}))$$

であり，$p((\frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{6}))$ および $p((\frac{\theta_0}{2} + \frac{5}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{7}{6}))$ は (1) より開集合．さらに次の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
p((\frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{6})) & \xrightarrow{q} & U \\
\cong\Big\uparrow p & & \cong\Big\uparrow p \\
(\frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{6}) & \underset{\cong}{\xrightarrow{x\mapsto 2x}} & (\theta_0 - \frac{1}{3}, \theta_0 + \frac{1}{3})
\end{array}$$

が成立することから，$q|_{p((\frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{6}))}$ は像 U への同相写像である．$q|_{p(\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{7}{6})}$ についても同様.

問題 2 $\mathbb{C}^\times$ と $\mathbb{R} \times S^1$ の間の同相写像 f を次のように与える．

$$f(z) = \left(\log|z|, \frac{z}{|z|}\right)$$

f は明らかに連続で，その逆写像は $(x,w) \mapsto e^x w$ で与えられるため連続．f によって $\mathbb{C}^\times$ と $\mathbb{R} \times S^1$ を同一視するとき，$p \colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ は

$$f \circ p \circ f^{-1} \colon \mathbb{R} \times S^1 \to \mathbb{R} \times S^1, \qquad (x,w) \mapsto (nx, w^n)$$

に対応する．この写像が被覆写像であることを示せばよい．$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto nx$ は同相写像なので，$q \colon S^1 \to S^1,\ w \mapsto w^n$ が被覆写像であることを示せば十分である．任意の点 $w \in S^1$ をとり，それを含む開集合 $U = S^1 \setminus \{-w\}$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}
q^{-1}(U) &= S^1 \setminus \{e^{2\pi i\theta_0}, \ldots, e^{2\pi i\theta_{n-1}}\}) \\
&= \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})\}
\end{aligned}$$

ここで，$-w = e^{2\pi i\alpha}$として，$\theta_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n}$とおいた．問題1より$\{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})\}$は$S^1$の開集合である．最後に

$$q|_{\{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})\}} \colon \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})\} \to U$$

が同相写像であることを示せばよい．この写像は

$$\{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})\} \cong (\theta_k, \theta_{k+1}) \xrightarrow{x \mapsto nx-k} (\alpha, \alpha+1) \cong S^1 \setminus \{-w\}$$

と分解できるため同相である（ここで問題1の(1)を使った）．

問題 3 任意の$x \in X$をとる．pは被覆写像だから，$p(x)$の開近傍$U \subset Y$とXの互いに交わらない開集合の族$\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$が存在して$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$かつ$p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$がすべての$\alpha \in A$について同相写像となる．ここで$x \in V_{\alpha_0}$となる$\alpha_0 \in A$をとると，$V_{\alpha_0}$は$x$の開近傍で$p|_{V_{\alpha_0}} \colon V_{\alpha_0} \to U$は同相写像．また，その像$p(V_{\alpha_0}) = U$は開集合．従って$p$は局所同相写像である．

問題 4 $p^{-1}(y)$の各点xについて，$\{x\}$が$p^{-1}(y)$の開集合であることを示せばよい．xのある開近傍Uが存在して$p|_U \colon U \to p(U)$は同相写像である．従って$p^{-1}(y) \cap U = \{x\}$．これは$\{x\}$が$p^{-1}(y)$の開集合であることを示している．

問題 5 異なる2点$x_1, x_2 \in X$を任意に取る．

$p(x_1) = p(x_2)$のとき，pは被覆写像だから，$p(x_1)$の開近傍UとXの互いに交わらない開集合の族$\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$が存在して$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$かつ$p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$がすべての$\alpha \in A$について同相写像となる．族$\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$は互いに交わらないから，ある元$\alpha_1, \alpha_2 \in A$がそれぞれただ1つ存在して$x_1 \in V_{\alpha_1}$，$x_2 \in V_{\alpha_2}$を満たす．ここで$\alpha_1 = \alpha_2$と仮定する．$p|_{V_{\alpha_1}}$は同相写像だが，$p(x_1) = p(x_2)$より$p$が単射でなくなり矛盾．よって$\alpha_1 \neq \alpha_2$である．よって$V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}$が$x_1, x_2 \in X$を分離する開集合である．

$p(x_1) \neq p(x_2)$のとき，Yはハウスドルフより$p(x_1), (x_2)$を分離するたがいに交わらない開集合W_1, W_2が存在する．このとき$p^{-1}(W_1)$と$p^{-1}(W_2)$はx_1, x_2を分離する開集合となる．

問題 6 連続写像$f \colon X \to Y$が固有(proper)であるとは，Yの任意のコンパクト部分集合Kに対して$f^{-1}(K)$がコンパクトになることである．以下の証明では，局所コンパクトハウスドルフ空間の間の固有写像が閉写像である（閉集合の像が閉），という有名な事実を用いる．

点$y \in Y$をとる．$p^{-1}(y)$は問題4より離散位相空間である．また$\{y\}$はコンパクトでpはproperなので$p^{-1}(y)$はコンパクトでもある．従って$p^{-1}(y)$は有限集合である（$p^{-1}(y)$の1点部分集合による開被覆を考えよ）．$p^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$とする．$p$は局所同相写像であるから，$x_i$の開近傍$U_i$が存在して$p(U_i)$は開集合であり，$p|_{U_i} \colon U_i \to p(U_i)$は同相写像である．$X$はハウスドルフなので，必要ならば$U_i$を小

さく取り直して，U_i が互いに交わらないとしてよい[1]．ここで，$X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$ は X の閉集合なので，

$$F = p(X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n))$$

は Y の閉集合．$y \notin F$ であることに注意しよう．このとき

$$V := (p(U_1) \cap \cdots \cap p(U_n)) \setminus F$$

は y の開近傍である．$p^{-1}(V)$ は $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ に含まれることに注意しよう．(実際，そうでなければ，$p(x) \in V$, $x \notin U_1 \cup \cdots \cup U_n$ となる点 $x \in X$ が存在するが，後者から $p(x) \in F$ となり $p(x) \in V$ と矛盾する．) 従って，U_i が互いに交わらないことを思い出すと，

$$p^{-1}(V) = (U_1 \cap p^{-1}(V)) \sqcup \cdots \sqcup (U_n \cap p^{-1}(V))$$

である．ここで $p(U_i \cap p^{-1}(V)) = V$ である．(実際，$\subset$ は明らか．逆に任意の $y \in V$ は $y = p(x)$, $x \in U_i$ の形で書ける．このとき $x \in U_i \cap p^{-1}(V)$．従って $y = p(x) \in p(U_i \cap p^{-1}(V))$．よって $p(U_i \cap p^{-1}(V)) \supset V$．) $p|_{U_i} \colon U_i \to p(U_i)$ は同相写像であったから，それを開部分集合に制限した $p|_{U_i \cap p^{-1}(V)} \colon U_i \cap p^{-1}(V) \to V$ も同相写像である．

問題 7 p は被覆写像であるから，問題 3 より局所同相写像である．従ってそれを $(0,2)$ に制限した写像 $p|_{(0,2)} \colon (0,2) \to S^1$ も局所同相写像である．

写像 $q := p|_{(0,2)}$ の点 $1 \in S^1$ でのファイバー $q^{-1}(1)$ は 1 点 $1 \in \mathbb{R}$ からなる．一方で任意の $z \in S^1 \setminus \{1\}$ に対して z のファイバー $q^{-1}(z)$ はちょうど 2 点ある．もし q が被覆写像であるとすると，$1 \in S^1$ の開近傍 U と $(0,2)$ のたがいに交わらない開集合の族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在して，$q^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$ は同相，となる．このとき点 $z \in U$ での q のファイバーの濃度は一定で $|A|$ に等しい．$1 \in U$ でのファイバーの濃度（個数）は 1 であるから，$|A| = 1$．U は 1 以外の点を含むため，矛盾が生じる．

問題 8 $y_0 \in Y$ をとり，Y を次の二つの部分集合に分ける．

$$Y_0 = \{y \in Y \mid p^{-1}(y) \text{ と } p^{-1}(y_0) \text{ の間に集合の全単射が存在する}\}$$
$$Y_1 = \{y \in Y \mid p^{-1}(y) \text{ と } p^{-1}(y_0) \text{ の間に集合の全単射が存在しない}\}$$

明らかに $Y = Y_0 \sqcup Y_1$．被覆空間の定義により，任意の $y \in Y$ について，y の開近傍 U と X のたがいに交わらない開集合の族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在して，$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$ は同相，となる．このとき $y' \in U$ について $p^{-1}(y') \subset p^{-1}(U)$ は各 V_α と 1 点でのみ交わり，従って $p^{-1}(y')$ と A の間に集合の全単射が存在する．このことから，$i = 0, 1$ について，$y \in Y_i$ ならば $V \subset Y_i$ であることが分かる．従って Y_i は開集合．Y は連結で $Y_0 \neq \emptyset$ より，$Y = Y_0$ でなければならない．

---

[1] $i \neq j$ なる全てのペア (i,j) に対して，x_i と x_j を分離する開集合 $W_{i,j}, W_{j,i}$ をとり，$W_i = \bigcap_{j \neq i} W_{i,j}$ とおくと，$W_1, \ldots, W_n$ は互いに交わらない開集合で $x_i \in W_i$．

問題 9 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して写像 $\Phi_A \colon T^2 \to T^2$ を $\Phi_A(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ と定める．このとき $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$ であることは容易に確かめられる．行列式が ± 1 の整数行列

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を（左および右から）かける操作は（行および列）基本変形に対応する．整数係数正方行列に基本変形を繰り返して対角行列にすることができることはよく知られている．従って整数行列 P, Q で $|\det P| = |\det Q| = 1$ を満たし，

$$PAQ = D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

を満たす行列が存在する．このとき $\Phi_P \circ \Phi_D \circ \Phi_Q = \Phi_A$ であり，Φ_P と Φ_Q は同相写像（実際，P^{-1} は整数行列であり，$\Phi_{P^{-1}} \circ \Phi_P = \Phi_P \circ \Phi_{P^{-1}} = \mathrm{id}$ となるので $\Phi_{P^{-1}}$ が連続な逆写像を与える）．また $|\det A| = |\det D|$．従って Φ_D が $|\det D|$ 次の被覆写像であることを示せば十分である．

$$\Phi_D(z,w) = (z^{d_1}, w^{d_2})$$

である．これが $|d_1 d_2|$ 次の被覆であることは，$S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$ が k 次の被覆であることから容易にわかる（詳細略）．

問題 10 (略解) $S^1 \vee S^1$ はトーラス T^2 に埋め込むことができる．問題 9 にあるようなトーラスの有限被覆 $p \colon T^2 \to T^2$ により $S^1 \vee S^1$ を引き戻せば，$S^1 \vee S^1$ の有限次被覆 $p^{-1}(S^1 \vee S^1) \to S^1 \vee S^1$ ができる.（例えば S^1 の n 等分点に n 個の S^1 をくっつけたもの.）

問題 11 (解 1) もしそのような $\epsilon > 0$ が存在しなかったとする．このとき各 $n \in \mathbb{N}$ に対してある点 $x_n \in K$ が存在して $B_{1/n}(x_n)$ はどの U_α にも含まれない．K はコンパクト集合だから $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ を持つ．$x_\infty = \lim_{j \to \infty} x_{n_j}$ とおく．x_∞ を含む開集合 U_α が存在する．U_α は開集合なので，$B_\epsilon(x_\infty) \subset U_\alpha$ を満たす $\epsilon > 0$ が存在する．十分大きい j に対して $x_{n_j} \in B_{\epsilon/2}(x_\infty)$ かつ $1/n_j < \epsilon/2$ が成立する．このとき $B_{1/n_j}(x_{n_j}) \subset B_\epsilon(x_\infty) \subset U_\alpha$ となり，仮定に矛盾する．

(解 2) この解では非空な集合 F からの距離関数 $d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y)$ が x の連続関数であることを使う．K のコンパクト性より，$\{U_\alpha\}$ から有限部分開被覆 $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ が取れる．関数 $f \colon K \to \mathbb{R}$ を次で定義する

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, K \setminus U_i).$$

f はコンパクト空間 K 上の連続関数であるので，最小値 ϵ が存在する．任意の $x_0 \in K$ に対して，$f(x_0) \geq \epsilon$ より，少なくとも一つの $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $d(x_0, K \setminus U_{i_0}) \geq \epsilon$．すなわち $B_\epsilon(x_0) \subset U_{i_0}$.

問題 12 $n := n_f = n_g$ とすると，ある連続関数 $\theta_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\theta_2 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ が存在して，$\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, $\theta_1(1) = \theta_2(1) = n$ および $f(x) = e^{2\pi i \theta_1(x)}$, $g(x) = e^{2\pi i \theta_2(x)}$ が満たされる．ここで $H \colon [0,1] \times [0,1] \to S^1$ を

$$H(x,t) = e^{2\pi i((1-t)\theta_1(x) + t\theta_2(x))}$$

とおくと，$H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ が満たされる．さらに $H(0,t) = 1$, $H(1,t) = e^{2\pi i((1-t)n+tn)} = e^{2\pi i n} = 1$ も満たされる．従って H は f と g の間の端点をとめたホモトピーを与える．

問題 13 Z が一般の位相空間のときに示そう．$z \in Z$ を固定するとき，$t \mapsto H(z,t)$ は Y 内の道で，点 $H(z,0) = f(z)$ のリフト $\hat{f}(z)$ が与えられている．授業で説明した道の持ち上げに関する定理から，X 内の道 $t \mapsto \hat{H}(z,t)$ であって $p(\hat{H}(z,t)) = H(z,t)$, $\hat{H}(z,0) = \hat{f}(z)$ を満たすものがただ一つ存在する．このように定義された $\hat{H}(z,t)$ が連続であることを示す．

$p \colon X \to Y$ は被覆であるので，Y の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ および V の開集合の族 $\{V_{\alpha,\beta}\}_{\alpha \in A, \beta \in B_\alpha}$ が存在して，$p^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{\beta \in B_\alpha} V_{\alpha,\beta}$, $p|_{V_{\alpha,\beta}} \colon V_{\alpha,\beta} \to U_\alpha$ が同相，を満たす．$z_0 \in Z$ を固定する．I のコンパクト性より（詳細は授業でやった方法より），ある自然数 N が存在して，$k = 0, 1, \ldots, N-1$ に対して $H(\{z_0\} \times [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}])$ はある U_{α_k} に含まれる．$[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ のコンパクト性から，z_0 の開近傍 W_k が存在して $H(W_k \times [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]) \subset U_{\alpha_k}$ であることも従う．さらに $W = \bigcap_{k=0}^{N-1} W_k$ とおくと，$H(W \times [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]) \subset U_{\alpha_k}$.

この状況では，授業でやった道の持ち上げの構成と同様にして $H|_{W \times I}$ の連続な持ち上げ $\tilde{H} \colon W \times I \to Y$ で $\tilde{H}(z,0) = \hat{f}(z)$ を満たすものが構成できる．実際，k について帰納的に連続写像 $\tilde{H} \colon W \times [0, \frac{k}{N}] \to Y$ で $p \circ \tilde{H} = H$, $\tilde{H}(z,0) = \hat{f}(z)$ を満たすものを構成する．$k = 0$ のときは自明．$k-1$ まで構成されたとする．$\tilde{H}(z, \frac{k-1}{N}) \in p^{-1}(U_{\alpha_k}) = \bigsqcup_{\beta \in B_{\alpha_k}} V_{\alpha_k,\beta}$ に注意しよう．同相写像

$$\Phi \colon \bigsqcup_{\beta \in B_{\alpha_k}} V_{\alpha_k,\beta} \cong U_{\alpha_k} \times B_{\alpha_k}$$

を $V_{\alpha_k,\beta}$ の元 x を $(p(x), \beta)$ に写すことで定義する．Φ の第 2 成分を φ で表すことにする．ここで添字集合 B_{α_k} には離散位相が入っているものと考える．$t \in [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]$ に対して $\tilde{H}$ を次の式で拡張する．

$$\tilde{H}(z,t) = \Phi^{-1}\left(H(z,t), \varphi(\tilde{H}(z, \tfrac{k-1}{N}))\right)$$

$t = \frac{k-1}{N}$ の時には既に定義されたものと一致し，従って $\tilde{H}(z,t)$ は $W \times [0, \frac{k}{N}]$ 上の連続写像に拡張された．

以上から $W \times I$ 上での連続なリフト $\tilde{H}$ が構成された．持ち上げた道 $t \mapsto \tilde{H}(z,t)$ の一意性から，$\tilde{H} = \hat{H}|_{W \times I}$ である．従って $\hat{H}$ は連続であることがわかる．

問題 14 $f \simeq_0 f'$ とし，$H \colon I \times I \to Y$ を $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = f'(x)$, $H(0,t) = y_0$, $H(1,t) = y_1$ を満たす端点をとめたホモトピーとする．$x_0 \in p^{-1}(y_0)$ をとる．平行

移動の定義より，f の持ち上げ $\hat{f}$ で $\hat{f}(0) = x_0$ を満たすものをとると，$\Pi_f(x_0) = x_1 := \hat{f}(1)$ である．この $\hat{f}$ に対して，問題13より H の持ち上げ $\hat{H}\colon I \times I \to X$, $p \circ \hat{H} = H$, $\hat{H}(x,0) = \hat{f}(x)$ が存在する．ここで道 $t \mapsto \hat{H}(0,t)$, $t \mapsto \hat{H}(1,t)$ は各々，定値の道 $t \mapsto H(0,t) = y_0$, $t \mapsto H(1,t) = y_1$ の持ち上げであり，始点は $\hat{H}(0,0) = \hat{f}(0) = x_0$, $\hat{H}(1,0) = \hat{f}(1) = x_1$ である．一方，定値の道 $t \mapsto x_0$, $t \mapsto x_1$ も同じ条件を満たす $t \mapsto H(0,t)$, $t \mapsto H(1,t)$ の持ち上げになっているから，持ち上げの一意性により $\hat{H}(0,t) = x_0$, $\hat{H}(1,t) = x_1$ であることが分かる．従って $x \mapsto \hat{H}(x,1)$ は x_0 から x_1 への道であり，f' の持ち上げになっている．よって $\Pi_{f'}(x_0) = x_1 = \Pi_f(x_0)$．すなわち $\Pi_f = \Pi_{f'}$．

問題 15 $[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$ に対して $p_*([\gamma]) = 1$ ならば $[\gamma] = 1$ を示せばよい．e_{y_0} を y_0 を値にとる定値ループとする．$\overline{\gamma} = p \circ \gamma$ とおくと，$\overline{\gamma} \simeq_0 e_{y_0}$ である．$H\colon I \times I \to Y$ を $\overline{\gamma}$ と e_{y_0} の間のホモトピーとする．つまり $H(x,0) = \overline{\gamma}(x)$, $H(x,1) = y_0$, $H(0,t) = H(1,t) = y_0$. 問題13より H のリフト $\hat{H}\colon I \times I \to X$ であって $\hat{H}(x,0) = \gamma(x)$ であるものが存在する．道のリフトの一意性を用いて，$\hat{H}(0,t) = \hat{H}(1,t) = x_0$ でなければならないことが前問と同様にわかる．従って $x \mapsto \hat{H}(x,1)$ は x_0 を基点とするループで，e_{y_0} のリフトになっている．再び道のリフトの一意性から，$\hat{H}(x,1) = x_0$ である．よって $\hat{H}$ は γ と e_{x_0} の間の端点を止めたホモトピーを与え，$[\gamma] = 1$ がわかる．

問題 16 p が単射であることを示そう．$y_0 = p(x_1) = p(x_2)$ とする．X は弧状連結であるから，x_1 と x_2 を結ぶ道 γ が存在する．γ は $\overline{\gamma} = p \circ \gamma$ のリフトになっており，Y は単連結なので $\overline{\gamma} \simeq_0 e_{y_0}$ である．従って x_2 は $\overline{\gamma}$ に沿った x_1 の平行移動であるが，平行移動は問題14より道のホモトピー類にのみよるため，定値の道 e_{y_0} に沿った平行移動とも一致する．これは $x_1 = x_2$ を意味する．

次に p が全単射を示そう．問題8より $p^{-1}(y)$ の濃度は y によらない．単射性から $|p^{-1}(y)| \leq 1$ であり，X が空でないことから $|p^{-1}(y_0)| \geq 1$ となる点 y_0 が存在する．従って全ての y に対して $|p^{-1}(y)| = 1$.

p は局所同相写像であるから，特に開写像である．従って p^{-1} も連続であり，p は同相写像である．

幾何学入門演習　No.6　(2023 年 11 月 29 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．$(\star)$ は基本的な問題です．

定義　X が**局所単連結**であるとは，任意の $x \in X$ および x の任意の開近傍 U に対して，x の弧状連結かつ単連結な開近傍 V で $V \subset U$ となるものが存在すること．

以下の問題 1-7 では $X \neq \varnothing$ を弧状連結かつ局所単連結な位相空間とし，X は**普遍被覆** $Y \to X$（空でない弧状連結かつ単連結な被覆空間）を持つことを示す．$x_0 \in X$ を基点とし，集合 Y を

$$Y = \{(x, \ell) \mid x \in X, \ell \in \Pi(x_0, x)\}$$

と定める．$p\colon Y \to X$ を第 1 成分への射影とする．ここで $\Pi(x_0, x)$ は x_0 から x への道の端点を止めたホモトピー類の集合である．以下では，単に「単連結」といえば弧状連結であることも仮定する．

問題 1 $(\star)$ U を単連結空間とする．$x_1, x_2 \in U$ に対して $\Pi(x_1, x_2)$ は 1 点集合であることを示せ．

問題 2 $x \in X$, $\ell \in \Pi(x_0, x)$ および x の単連結な開近傍 U に対して，Y の部分集合を $\widetilde{U}_{x,\ell} = \{(x', \ell \cdot \gamma_{x,x'}) \mid x' \in U\}$ とおく．ここで $\gamma_{x,x'}$ は x から x' への U 内の道のホモトピー類である（問題 1 よりホモトピー類は一意）．このようにして得られる集合 $\widetilde{U}_{x,\ell}$ たちを開基とする位相が Y に定まることを示せ．

注：一般に Y の部分集合族 $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が Y 上のある位相の開基となるための必要十分条件は $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha = Y$ であり，任意の $y \in S_\alpha \cap S_\beta$ に対して $y \in S_\gamma \subset S_\alpha \cap S_\beta$ を満たす $\gamma \in A$ が存在することである．

問題 3 $(\star)$ $x \in X$，U を x の単連結開近傍とする．$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\ell \in \Pi(x_0,x)} \widetilde{U}_{x,\ell}$ を示せ．

問題 4 $(\star)$ 問題 3 を使って p が連続であることを示せ．

問題 5 $(\star)$ $p|_{\widetilde{U}_{x,\ell}}\colon \widetilde{U}_{x,\ell} \to U$ は同相写像であることを示せ．問題 3-5 により p が被覆写像であることが分かる．

問題 6 $y_0 = (x_0, e_{x_0}) \in Y$ を Y の基点とする．y_0 から始まる道 $f\colon I \to Y$ に対して X 内の x_0 から始まる道 $x\colon I \to X$ が存在して $f(s) = (x(s), [x_s])$ となることを示せ．ただし，$x_s\colon I \to X$ は $x_s(t) = x(st)$ で定められる X 内の道であり，$I = [0, 1]$ は単位閉区間である．逆に X 内の x_0 から始まる道 $x\colon I \to X$ に対して $f(s) = (x(s), [x_s])$ は Y の道を与えることを示せ．

問題 7 ($\star$) Y は弧状連結であることを示せ．さらに Y は単連結であることを示せ．

定義　被覆写像 $p\colon Y \to X$ に対し，$\mathrm{Aut}(Y/X) := \mathrm{Aut}(p) := \{$ 同相写像 $\phi\colon Y \to Y \mid p \circ \phi = p\}$ は合成に関して群をなす．$\mathrm{Aut}(Y/X)$ を被覆変換群，その元を被覆変換 (covering transformation, deck transformation) という．

問題 8 ($\star$) $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ を $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ で定めるとき，その被覆変換群は $\mathbb{Z}$ であることを示せ．また $p\colon S^1 \to S^1$, $p(z) = z^n$ のときはどうか．

問題 9 (リフトの存在定理) $p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．Z を弧状連結，局所弧状連結[1]かつ単連結な位相空間で，$f\colon Z \to Y$ を連続写像とする．$p(x_0) = f(z_0)$ を満たす $x_0 \in X$, $z_0 \in Z$ に対して，連続写像 $\hat{f}\colon Z \to X$ であって $p \circ \hat{f} = f$, $\hat{f}(z_0) = x_0$ を満たすものがただ一つ存在することを示そう．

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "p"] \\
Z \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

(1) 写像 $\hat{f}\colon Z \to Y$ を次のように定める．$z \in Z$ に対して z_0 から z への道 $\gamma\colon I \to Z$ をとり，$\hat{f}(z)$ を Y 内の道 $f \circ \gamma$ に沿った $x_0 \in X$ の平行移動と定める．$\hat{f}(z)$ は道 γ の取り方によらないこと，また $p \circ \hat{f} = f, \hat{f}(z_0) = x_0$ が成り立つことを示せ．

(2) 連続写像 $g\colon Z \to X$ で $p \circ g = f$, $g(z_0) = x_0$ を満たすものがあれば，$g = \hat{f}$ であることを示せ．

(3) 上で構成した $\hat{f}$ は連続写像であることを示せ．

問題 10 ($\star$) 授業で紹介した次の定理について，問題 9 の結果を使って証明の細部を埋めよ：X を弧状連結かつ局所単連結な位相空間とする．$p_1\colon Y_1 \to X$, $p_2\colon Y_2 \to X$ を X の普遍被覆とする．$x_0 \in X$, $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ を $p_1(y_1) = x_0 = p_2(y_2)$ を満たす点とする．このとき同相写像 $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ で $p_2 \circ \phi = p_1$ かつ $\phi(y_1) = y_2$ を満たすものがただ一つ存在する．

問題 11 ($\star$) X を弧状連結かつ局所単連結な空間．$p\colon Y \to X$ を普遍被覆とする．$p(y_0) = x_0$ を満たす $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ を固定する．

(1) $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して，γ に沿った y_0 の平行移動を対応させる写像 $\pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ は全単射であることを示せ．

(2) 被覆変換 $\phi \in \mathrm{Aut}(Y/X)$ に対して $\phi(y_0) \in p^{-1}(x_0)$ を対応させる写像 $\mathrm{Aut}(X/Y) \to p^{-1}(x_0)$ は全単射であることを示せ.（ヒント：問題 10）

---

[1]位相空間 Z が局所弧状連結とは，任意の点 $z \in Z$ および z の任意の開近傍 U に対して，z の弧状連結な開近傍 V であって $V \subset U$ を満たすものが存在すること．

幾何学入門演習　No.6 解答例

問題 1 演習 No.3 の問題 9 で定義した基本亜群の積構造を思い出す．$\alpha, \beta\colon I \to U$ を x_1 から x_2 への道とする．U は単連結だから，$[\alpha] \cdot [\beta^{-1}] = e_1$ である．ここで e_1 は $\pi_1(U, x_1)$ の単位元である．よって，

$$[\alpha] = [\alpha] \cdot ([\beta^{-1}] \cdot [\beta]) = ([\alpha] \cdot [\beta^{-1}]) \cdot [\beta] = [\beta]$$

となり，$\Pi(x_1, x_2)$ は 1 点集合である．

問題 2 Y の部分集合族

$$\{\widetilde{U}_{x,\ell} \mid x \in X,\, \ell \in \Pi(x_0, x),\, U \text{ は } x \text{ の単連結開近傍}\}$$

が Y 全体を覆うことをみよう．X は局所単連結なので，任意の点 x と $\ell \in \Pi(x_0, x)$ に対して，ある x の単連結開近傍 U が存在する．このとき $(x, \ell) \in \widetilde{U}_{x,\ell}$ である．

U を x_1 の単連結開近傍，V を x_2 の単連結開近傍，$\ell_i \in \Pi(x_0, x_i)$ とする．$(x, \ell) \in \widetilde{U}_{x_1,\ell_1} \cap \widetilde{V}_{x_2,\ell_2}$ をとる．X は局所単連結なので，x の単連結開近傍 W が存在して $W \subset U \cap V$ となる．このとき

$$\widetilde{W}_{x,\ell} \subset \widetilde{U}_{x_1,\ell_1} \cap \widetilde{V}_{x_2,\ell}$$

であることを示せばよい．$\widetilde{W}_{x,\ell}$ の点は $y = (x', \ell \cdot \gamma^W_{x,x'})$，$x' \in W$，但し $\gamma^W_{x,x'}$ は W 内の x から x' への道のホモトピー類，という形で表される．$(x, \ell) \in \widetilde{U}_{x_1,\ell_1}$ ゆえ，$\ell = \ell_1 \cdot \gamma^U_{x_1,x}$ ($\gamma^U_{x_1,x}$ は U 内の x_1 から x' への道のホモトピー類) と書くことができる．従って

$$y = (x', \ell \cdot \gamma^W_{x,x'}) = (x', \ell_1 \cdot \gamma^U_{x_1,x} \cdot \gamma^W_{x,x'})$$

であるが，$\gamma^U_{x_1,x} \cdot \gamma^W_{x,x'}$ は x_1 から x' を結ぶ U 内の道で代表されるため $\gamma^U_{x_1,x'}$ に等しい．従って $y \in \widetilde{U}_{x_1,\ell_1}$．同様に $y \in \widetilde{V}_{x_2,\ell_2}$ も言える．

問題 3 U を x の単連結開近傍とする．任意の $x' \in U$ に対して $\Pi(x_0, x) \to \Pi(x_0, x')$, $\ell \mapsto \ell \cdot \gamma_{x,x'}$ は全単射である.（実際，逆写像は $\ell' \mapsto \ell' \cdot \gamma^{-1}_{x,x'}$ で与えられる.）このことから

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &= \{(x', \ell') \mid x' \in U, \ell' \in \Pi(x_0, x')\} \\ &= \{(x', \ell \cdot \gamma_{x,x'}) \mid x' \in U, \ell \in \Pi(x_0, x)\} = \bigsqcup_{\ell \in \Pi(x_0,x)} \widetilde{U}_{x,\ell} \end{aligned}$$

問題 4 問題 3 より，単連結な開集合 $U \subset X$ に対して $p^{-1}(U)$ は Y の開集合である．一方で，X は局所単連結であるから，任意の開集合 $V \subset X$ は単連結な開集合の和としてあらわされる．従って $p^{-1}(V)$ は開集合である．

問題 5 $p|_{\widetilde{U}_{x,\ell}}\colon \widetilde{U}_{x,\ell} \to U$ が同相写像であることを示す．全単射であることは明らかであり，連続であることは既に示したので，p が開写像であることを示せばよい．開基の像が開であることを示せばよい．実際，任意の開基の元 $\widetilde{U'}_{x',\ell'}$ に対して（ここで $x' \in X$, U' は x' の単連結開近傍, $\ell' \in \Pi(x_0, x')$），$p(\widetilde{U'}_{x',\ell'}) = U'$ は開集合である．

問題 6 $f\colon I\to Y$ を y_0 から始まる道とする．$x(s)=p(f(s))$ とし，$g(s)=(x(s),[x_s])$ とおく．$x_s\colon I\to X$ は x_0 から $x(s)$ までの道であるから $(x(s),[x_s])\in Y$ であることに注意しよう．$g\colon I\to Y$ が連続であることを示そう．$s_0\in I$ に対して，$x(s_0)$ を含む単連結開近傍 U をとり，$g(s_0)$ の開近傍 $\widetilde{U}_{x(s_0),[x_{s_0}]}$ を考える．$x(s)$ の連続性から s_0 の開近傍 $(s_0-\epsilon,s_0+\epsilon)$ が存在して $x((s_0-\epsilon,s_0+\epsilon))\subset U$ である．ここで $\epsilon>0$．このとき $s\in(s_0-\epsilon,s_0+\epsilon)$ に対して

$$g(s)=(x(s),[x_s])=(x(s),[x_{s_0}]\cdot[\gamma])$$

が成立する．ここで γ は $\gamma(u)=x(s_0+(s-s_0)u)$ で定義される U 内の道である．γ は $x(s_0)$ と $x(s)$ を結ぶ U 内の道であるから，$g(s)\in\widetilde{U}_{x(s_0),[x_{s_0}]}$．従って g は連続である．

以上より f と g は $s\mapsto x(s)$ のリフトであり，$f(0)=g(0)=(x_0,e_{x_0})=y_0$ である．リフトの一意性から $f=g$ である．

「逆に」の部分は上の議論で既に示されている．

問題 7 任意の点 $y=(x,\ell)\in Y$ に対して，ℓ は基点 x_0 から x の道 $\gamma\colon I\to X$ のホモトピー類である．$\tilde{\gamma}(s)=(\gamma(s),[\gamma_s])$ とすると，前問で示したことから，$\tilde{\gamma}\colon I\to Y$ は $y_0=(x_0,e_{x_0})$ から y までの Y の中の道．y は任意だから Y は弧状連結である．

y_0 を基点をする Y 内の任意のループが定値ループ e_{y_0} とホモトピックであることを示せばよい．前問の結果より，$f(s)=(x(s),[x_s])$ と表示することができる．ここで $x\colon I\to X$ は X 内の x_0 を基点とするループ．$f(1)=y_0$ より $[x]=[x_1]=e_{x_0}$．すなわち x は定値ループ e_{x_0} とホモトピックである．ホモトピー持ち上げ性質より f も定値ループ e_{y_0} とホモトピックになる．(詳しくは演習 No.5 の問題 14 の議論を参照せよ．)

問題 8 $T\in\mathrm{Aut}(\mathbb{R}/S^1)$ をとる．被覆変換群の定義より，

$$e^{2\pi i\theta}=e^{2\pi iT(\theta)}$$

が成り立つ．従って $\theta\mapsto T(\theta)-\theta$ は整数に値をとる連続関数．従って，$T(\theta)-\theta$ は定数 $m\in\mathbb{Z}$ でなければならない (詳しくはここで I の連結性を使っている)．

以上より $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}/S^1)$ の元はある整数 m を用いて

$$T_m(\theta)=\theta+m$$

の形に書くことができる．任意の整数 m について $T_m\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が被覆変換であることは明らか．明らかに $T_m\circ T_n=T_{m+n}$ であり，群の同型写像 $\mathbb{Z}\to\mathrm{Aut}(\mathbb{R}/S^1)$, $m\mapsto T_m$ が定まる．

次に $p\colon S^1\to S^1$, $p(z)=z^n$ の被覆変換群を求める．被覆変換 T は

$$p\circ T=p$$

を満たすことから，

$$T(z)^n=z^n$$

でなければならない．従って $T(z)z^{-1}$ は 1 の n 乗根であり，ある $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ について

$$T(z) = e^{2\pi ik/n} z$$

の形であることが分かる．群としては被覆変換全体は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同型である．

問題 9 (1) この定義は γ のとり方によらない．実際，Z は単連結であるから，z_0 と z を結ぶ道 γ は端点をとめるホモトピーを除いて一意である (問題 1)．従って道 $f \circ \gamma$ の端点をとめるホモトピー類は一意に定まる．$\hat{f}(z)$ は道 $f \circ \gamma$ に沿った x_0 の平行移動 $\Pi_{f\circ\gamma}(x_0)$ として定められているが，これは道 $f \circ \gamma$ の端点をとめたホモトピー類のみに依存するのであった (演習 No.5 の問題 14 の記号と結果をみよ)．従って $\hat{f}(z)$ は道 γ のとり方によらないことが言えた．

また定義より明らかに $p \circ \hat{f} = f$, $\hat{f}(z_0) = x_0$ である．

(2) 連続写像 $g\colon Z \to X$ で $p \circ g = f$, $g(z_0) = x_0$ を満たすものが与えられたとする．この g が (1) の $\hat{f}$ と一致することを示そう．点 $z \in Z$ を任意にとる．Z の弧状連結性から z_0 と z を結ぶ道 $\gamma\colon I \to Z$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$ が存在する．ここで $f \circ \gamma$ は Y 内の道となる．X 内の道 $g \circ \gamma\colon I \to X$ を考えると，$p \circ (g \circ \gamma) = (p \circ g) \circ \gamma = f \circ \gamma$ より，これは道 $f \circ \gamma$ の持ち上げになっている．また $(g \circ \gamma)(0) = g(z_0) = x_0$ も満たしている．従って道の持ち上げの一意性より，$g(z) = (g \circ \gamma)(1)$ は x_0 の $f \circ \gamma$ に沿った平行移動であり，$\hat{f}(z)$ と一致する．

(3) $\hat{f}$ が任意にとった点 $z \in Z$ の近傍で連続であることを示そう．$p\colon X \to Y$ は被覆写像であるから，$f(z)$ の開近傍 $U \subset Y$ と X の互いに交わらない開集合の族 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在して，$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ であり $p|_{V_\alpha}\colon V_\alpha \to U$ は同相写像となる．また $\hat{f}(z) \in V_{\alpha_0}$ を満たす $\alpha_0 \in A$ をとる．$f^{-1}(U)$ は z の開近傍であり，Z は局所弧状連結であるから，z の弧状連結な開集合 W であって $W \subset f^{-1}(U)$ となるものが存在する．このとき，

$$\hat{f}|_W = (p|_{V_{\alpha_0}})^{-1} \circ f|_W \tag{$\star$}$$

であることを示そう．ここで $(p|_{V_{\alpha_0}})^{-1}$ は $p|_{V_{\alpha_0}}\colon V_{\alpha_0} \to U$ の逆写像である．これが示されれば $\hat{f}$ は W 上で連続であることが分かる．

($\star$) を示すために z_0 と z を結ぶ Z 内の道 γ をとる．道 $f \circ \gamma$ の持ち上げ $\hat{\gamma}\colon I \to X$ であって $\hat{\gamma}(0) = x_0$ となるものをとる．定義より $\hat{\gamma}$ は x_0 から $\hat{f}(z)$ への道である．W は弧状連結であるから，$z' \in W$ に対して z と z' を結ぶ W 内の道 γ' をとることができる．また $f \circ \gamma'$ の X への持ち上げとして $\hat{\gamma}' := (p|_{V_{\alpha_0}})^{-1} \circ f \circ \gamma'$ をとることができる．$\hat{\gamma}'$ は $\hat{f}(z)$ を始点とする道である．道の合成 $\gamma \cdot \gamma'$ は z_0 と z' を結ぶ道であり，道 $f \circ (\gamma \cdot \gamma')$ の x_0 を始点とする持ち上げは $\hat{\gamma} \cdot \hat{\gamma}'$ で与えられる．従って $\hat{f}$ の定義より，

$$\hat{f}(z') = \text{道 } \hat{\gamma} \cdot \hat{\gamma}' \text{ の終点} = ((p|_{V_{\alpha_0}})^{-1} \circ f \circ \gamma')(1) = (p|_{V_{\alpha_0}})^{-1}(f(z'))$$

これは全ての $z' \in W$ に対して成立するから，($\star$) が示された．

問題 10 まず，Y_1, Y_2 は普遍被覆空間であるから，定義によって弧状連結かつ単連結である．また $p_i\colon Y_i \to X$ は（被覆写像であるから）局所同相でもあり，したがって Y_1, Y_2 は局所単連結（特に局所弧状連結）になっていることに注意する．

問題 9 により，連続写像 $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ であって $p_2 \circ \phi = p_1$，$\phi(y_1) = y_2$ を満たすものがただ一つ存在することが分かる．さらに Y_1 と Y_2 の役割を入れ替えて，連続写像 $\psi\colon Y_2 \to Y_1$ であって $p_1 \circ \psi = p_2$, $\psi(y_2) = y_1$ を満たすものがただ一つ存在することが言える．ここで $\theta = \psi \circ \phi\colon Y_1 \to Y_1$ は $p_1 \circ \theta = p_1$ および $\theta(y_1) = y_1$ を満たす連続写像である．問題 9 を再び適用すればそのような θ はただ一つしかない．一方，$\mathrm{id}_{Y_1}\colon Y_1 \to Y_1$ も同じ条件を満たすため，$\theta = \mathrm{id}_{Y_1}$ でなければならない．同様にして $\xi = \phi \circ \psi\colon Y_2 \to Y_2$ は $p_2 \circ \xi = p_2$, $\xi(y_2) = y_2$ を満たす連続写像であり，従って $\xi = \mathrm{id}_{Y_2}$ でなければならない．以上より ϕ と ψ は互いに逆写像であるから，ϕ は同相写像である．

問題 11 (1) $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して γ に沿った y_0 の平行移動を y_γ と書く．まず単射性を示す．x_0 を基点とするループ γ_1, γ_2 に対して，$y = y_{\gamma_1} = y_{\gamma_2}$ とする．このとき y_0 と y を結ぶ道 g_1, g_2 が存在して，$p \circ g_1 = \gamma_1$, $p \circ g_2 = \gamma_2$ である．Y は単連結であるから，問題 1 の結果より，$g_1 \simeq_0 g_2$．従って $\gamma_1 \simeq_0 \gamma_2$ である．次に全射性を示す．Y は弧状連結であるから，任意の $y \in p^{-1}(x_0)$ に対して y_0 から y への道 g が存在する．このとき g は $\gamma := p \circ g$ の持ち上げであるから，$y = y_\gamma$ である．

(2) 問題 10 より被覆変換 ϕ は $\phi(y_0) \in p^{-1}(x_0)$ と一対一に対応する．

幾何学入門演習　No.7　(2023 年 12 月 6 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．$(\star)$ は基本的な問題です．

問題 1 $(\star)$ G, H, K を群とし，表示 $G = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $H = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$, $K = \langle S_3 \mid R_3 \rangle$ を持つとする．さらに $i\colon K \to G$, $j\colon K \to H$ を群準同型とする．K の生成元 $k \in S_3$ に対して $i(k)$ の持ち上げ $\widetilde{i(k)} \in F(S_1)$ および $j(k)$ の持ち上げ $\widetilde{j(k)} \in F(S_2)$ を固定しておく．このとき融合積 $G *_K H$ を

$$G *_K H = \left\langle S_1 \sqcup S_2 \,\middle|\, R_1 \cup R_2 \cup \{\widetilde{i(k)} \cdot \widetilde{j(k)}^{-1} \mid k \in S_3\} \right\rangle$$

と定める．G の元 g を $S_1 \cup S_1^{-1}$ の元の積で表してその像をとることにより自然な準同型 $i_G\colon G \to G *_K H$ が定まる．同様に $i_H\colon H \to G *_K H$ が定まる．$G *_K H$ は次の universal property を満たすことを示せ．

任意の群 L と準同型 $\varphi\colon G \to L$, $\psi\colon H \to L$ に対して，$\varphi \circ i = \psi \circ j$ が成り立つならば，群準同型 $f\colon G *_K H \to L$ であって $f \circ i_G = \varphi$, $f \circ i_H = \psi$ を満たすものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & G *_K H \arrow[r, dashed, "f"] & L \\
 & H \arrow[u, "i_H"'] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

問題 2 $(\star)$ 問題 1 の universal property を用いて，$G *_K H$ が G, H, K の表示の取り方，および持ち上げ $\widetilde{i(k)}, \widetilde{j(k)}$ のとり方によらないことを示せ．

問題 3 $(\star)$ 問題 1 の設定において，$K = \{1\}$ のとき，i_G, i_H は単射であることを示せ．このとき $G *_K H$ を $G * H$ と書き，G と H の自由積という．

問題 4 $(\star)$ 問題 1 の設定で考える．$k \in K$ に対して，$i(k)j(k)^{-1}$ を自由積 $G*H$ の元とみなし，$\{i(k)j(k)^{-1} \mid k \in K\}$ の生成する正規部分群を N とする．$G*_K H \cong G*H/N$ であることを示せ．

問題 5 自由積 $G * H$ の元 $x \neq 1$ は次の形に一意に表示できることを示せ．

$$x = g_1 g_2 \cdots g_k$$

ただし，$g_i \neq 1$ は $G \sqcup H$ の元であり，全ての $i = 1, \ldots, k-1$ について $g_i \in G$ ならば $g_{i+1} \in H$ を満たし，$g_i \in H$ ならば $g_{i+1} \in G$ を満たす．

問題 6 ($\star$) $\mathbb{Z}^2 \cong \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1}\rangle$ を示せ.

問題 7 ($\star$) $U \subset \mathbb{R}^3$ を弧状連結な開集合とする．Van Kampen の定理を使って，$x \in U$ に対して $\pi_1(U \setminus \{x\}) \cong \pi_1(U)$ を示せ.

問題 8 ($\star$) Klein の壺 K は $[0,1]^2$ を次の関係 $\sim$ で生成される同値関係で割ったものである.

$$(0,y) \sim (1,y), \quad (x,0) \sim (1-x,1)$$

Van Kampen の定理を使って $\pi_1(K)$ の表示を求めよ.

問題 9 ($\star$) $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ とし，一つ固定した正の整数 n に対して D^2 上の同値関係 $\sim$ を次で定める.

$$z_1 \sim z_2 \iff z_1 = z_2 \quad \text{または} \quad |z_1| = |z_2| = 1, z_1^n = z_2^n$$

Van Kampen の定理を使って，商位相空間 $D^2/\sim$ の基本群を求めよ.

問題 10 ($\star$) $\mathbb{R}^3 \setminus (\{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\})$ の基本群を求めよ.

問題 11 ($\star$) 種数 2 の曲面は 8 角形の辺を 2 つずつ対にして (適当な向きで) 同一視することにより得られることを観察し，その基本群の表示を求めよ.

問題 12 $\pi_1(SO(3,\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示せ．(ヒント：1 列目をとる写像 $SO(3,\mathbb{R}) \to S^2$ を考え，S^2 を二つの開集合で覆う．あるいは二重被覆 $S^3 \to SO(3,\mathbb{R})$ を作る.)

問題 13 Van Kampen の定理を次の手順で証明せよ．U, V を $X = U \cup V$ を満たす弧状連結な開集合で，$U \cap V$ は弧状連結で非空とする．$x_0 \in U \cap V$ をとる．$G = \pi_1(U, x_0)$, $H = \pi_1(V, x_0)$, $K = \pi_1(U \cap V, x_0)$ とする．包含写像が定める準同型 $K \to G$, $K \to H$ に関して融合積 $G *_K H$ を考える.

(1)* 包含写像の定める準同型 $G \to \pi_1(X, x_0)$, $H \to \pi_1(X, x_0)$ は準同型 $G *_K H \to \pi_1(X, x_0)$ を誘導することを示せ.

(2) x_0 を基点とする任意のループ $\gamma\colon I \to X$ について，十分大きい $N > 0$ をとれば，各 $k = 0, \ldots, N-1$ について $\gamma([\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}])$ は U または V に含まれることを観察せよ．このことから $G *_K H \to \pi_1(X, x_0)$ は全射であることを結論せよ.

(3) 次に単射性を示す．$x = g_1 g_2 \cdots g_k \in G *_K H$ の $\pi_1(X, x_0)$ での像が単位元であるとする．ここで $g_i \in G \sqcup H$ である．g_i を代表する (U または V 内の) ループを γ_i とするとき，x の像は，$[0,1]$ を k 等分し，区間 $[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$ 上で $s \mapsto \gamma_i(ks - i)$ で与えられるループ γ で代表できる．仮定からホモトピー $H\colon I \times I \to X$ であって $H(s,0) = \gamma(s)$, $H(s,1) = x_0$, $H(0,t) = H(1,t) = x_0$ を満たすものが存在する．k で割れる十分大きい自然数 $N > 0$ をとれば，各小区域 $[\frac{a}{N}, \frac{a+1}{N}] \times [\frac{b}{N}, \frac{b+1}{N}]$ の H による像が U または V のどちらかに含まれるようにすることができる．このホモトピーと $G *_K H$ での関係式を用いて $x = 1$ であることを結論せよ.

幾何学入門演習　No.7 解答例

問題 1 群 $G, H, G*_K H$ の表示から定まる射影をそれぞれ $\pi_G\colon F(S_1) \twoheadrightarrow G$, $\pi_H\colon F(S_2) \twoheadrightarrow H$, $\pi_{G*_K H}\colon F(S_1 \sqcup S_2) \twoheadrightarrow G *_K H$ とする．

任意の群 L と群準同型 $\varphi\colon G \to L$, $\psi\colon H \to L$ をとる．演習 No.4 の問題 9 より，自由群 $F(S_1 \sqcup S_2)$ から L への群準同型は生成元 $s \in S_1 \sqcup S_2$ たちの行き先を決めることにより一意に定まるから，群準同型 $f'\colon F(S_1 \sqcup S_2) \to L$ であって

$$f'(s) = \begin{cases} \varphi(\pi_G(s)) & \text{if } s \in S_1 \\ \psi(\pi_H(s)) & \text{if } s \in S_2 \end{cases}$$

を満たすものがただ一つ存在する．任意の元 $x = s_1^{k_1} \cdots s_n^{k_n} \in F(S_1)$（ただし $s_i \in S_1$, $k_i \in \mathbb{Z}$）に対して

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(s_1)^{k_1} \cdots f'(s_n)^{k_n} \\ &= (\varphi(\pi_G(s_1)))^{k_1} \cdots (\varphi(\pi_G(s_n)))^{k_n} \\ &= \varphi(\pi_G(s_1^{k_1} \cdots s_n^{k_n})) \\ &= \varphi(\pi_G(x)) \end{aligned}$$

が成り立つ．同様にして，任意の $x \in F(S_2)$ について

$$f'(x) = \psi(\pi_H(x))$$

が成り立つ．従って $r_1 \in R_1$ に対し，$\pi_G(r_1) = 1 \in G$ ゆえ，$f'(r_1) = \varphi(\pi_G(r_1)) = 1$. 同様に $r_2 \in R_2$ に対し，$f'(r_2) = \psi(\pi_H(r_2)) = 1$ である．また，$k \in S_3$ に対し，

$$\begin{aligned} f'\left(\widetilde{i(k)} \cdot \widetilde{j(k)}^{-1}\right) &= \varphi\left(\pi_G\left(\widetilde{i(k)}\right)\right) \cdot \psi\left(\pi_H\left(\widetilde{j(k)}^{-1}\right)\right) \\ &= \varphi(i(k)) \cdot \psi\left(j(k)^{-1}\right) \quad \left(\because \pi_G\left(\widetilde{i(k)}\right) = i(k),\ \pi_H\left(\widetilde{j(k)}\right) = j(k)\right) \\ &= (\varphi \circ i)(k) \cdot (\psi \circ j)(k^{-1}) \\ &= (\varphi \circ i)(k) \cdot (\varphi \circ i)(k^{-1}) \qquad (\because \psi \circ j = \varphi \circ i) \\ &= (\varphi \circ i)(kk^{-1}) = 1. \end{aligned}$$

以上より，f' は R_1, R_2, $\left\{\widetilde{i(k)} \cdot \widetilde{j(k)}^{-1} \mid k \in S_3\right\}$ 上で 1 であり，特にそれらの生成する正規部分群上で 1 の値をとる．従って，f' は群準同型

$$f\colon G *_K H \to L$$

を誘導する．$f' = f \circ \pi_{G*_K H}$ なので，任意の元 $g \in G$ に対し，$\pi_G(\tilde{g}) = g$ を満たす $\tilde{g} \in F(S_1)$ をとるとき

$$\begin{aligned} (f \circ i_G)(g) &= (f \circ i_G)(\pi_G(\tilde{g})) \\ &= f(\pi_{G*_K H}(\tilde{g})) \quad (\because i_G \text{ の定義より}) \\ &= f'(\tilde{g}) \\ &= \varphi(\pi_G(\widetilde{g})) = \varphi(g). \end{aligned}$$

となり，$f \circ i_G = \varphi$ が従う．同様にして，$f \circ i_H = \psi$.

最後に，$f \circ i_G = \varphi$ と $f \circ i_H = \psi$ を満たす準同型 $f\colon G *_K H \to L$ は一意であることを示そう．$G *_K H$ の元は定義により $S_1 \cup S_1^{-1}$ と $S_2 \cup S_2^{-1}$ の元たちの積で表されるから，特に i_G の像と i_H の像の元たちの積で表される．従って準同型 f は f の $i_G(G)$ 上での値と $i_H(H)$ 上での値から一意に定まる．従って $f \circ i_G = \varphi$, $f \circ i_H = \psi$ を満たす準同型 f は存在すればただ一つしかない．

問題 2 まず問題 1 での融合積 $G *_K H$ の定義より，$i_G \circ i = i_H \circ j\colon K \to G *_K H$ が成り立つことに注意する．実際，$k \in S_3$ に対して

$$\begin{aligned}
i_G(i(k)) &= \pi_{G *_K H}\left(\widetilde{i(k)}\right) \\
&= \pi_{G *_K H}\left(\widetilde{i(k)}\widetilde{j(k)}^{-1}\widetilde{j(k)}\right) \\
&= \pi_{G *_K H}\left(\widetilde{j(k)}\right) \qquad \left(\because \pi_{G *_K H}\left(\widetilde{i(k)}\widetilde{j(k)}^{-1}\right) = 1\right) \\
&= i_H(j(k))
\end{aligned}$$

であり，K の元は $S_3 \cup S_3^{-1}$ の元の積で表されることから，任意の $k \in K$ について $i_G(i(k)) = i_H(j(k))$ が言える．

G, H, K の表示の取り方と持ち上げ $\widetilde{i(k)}, \widetilde{j(k)}$ の取り方を変えて，融合積 L_1, L_2 が得られたとする．問題 1 での自然な準同型をそれぞれ $i_G^1\colon G \to L_1$, $i_H^1\colon H \to L_1$, $i_G^2\colon G \to L_2$, $i_H^2\colon H \to L_2$ とおく．

L_1 は universal property を満たすので，準同型 $f\colon L_1 \to L_2$ であって $f \circ i_G^1 = i_G^2$, $f \circ i_H^1 = i_H^2$ を満たすものが存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G^1"] \arrow[dr, "i_G^2"] & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & L_1 \arrow[r, dashed, "f"] & L_2 \\
 & H \arrow[u, "i_H^1"'] \arrow[ur, "i_H^2"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで $i_G^2 \circ i = i_H^2 \circ j$ であることを使った．

また，L_2 も universal property を満たすので，準同型 $g\colon L_2 \to L_1$ であって $g \circ i_G^2 = i_G^1$, $g \circ i_H^2 = i_H^1$ を満たすものが存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G^2"] \arrow[dr, "i_G^1"] & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & L_2 \arrow[r, dashed, "g"] & L_1 \\
 & H \arrow[u, "i_H^2"'] \arrow[ur, "i_H^1"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで $i_G^1 \circ i = i_H^1 \circ j$ であることを使った．

上記二つの可換図式を合わせて次を得る．

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, "i_G^2"] \arrow[drr, "i_G^1"] \arrow[drrr, bend left, "i_G^2"] & & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & L_2 \arrow[r, "g"] & L_1 \arrow[r, "f"] & L_2 \\
& H \arrow[u, "i_H^2"] \arrow[urr, "i_H^1"] \arrow[urrr, bend right, "i_G^2"'] & &
\end{tikzcd}$$

すなわち，$f \circ g$ は次の可換図式を満たしている．

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, "i_G^2"] \arrow[drr, "i_G^2"] & & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & L_2 \arrow[rr, "f \circ g"] & & L_2 \\
& H \arrow[u, "i_H^2"] \arrow[urr, "i_H^2"'] & &
\end{tikzcd}$$

一方，$\mathrm{id}_{L_2}\colon L_2 \to L_2$ も同じ可換図式を満たしている．

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, "i_G^2"] \arrow[drr, "i_G^2"] & & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & L_2 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{L_2}"] & & L_2 \\
& H \arrow[u, "i_H^2"] \arrow[urr, "i_H^2"'] & &
\end{tikzcd}$$

L_2 に対する universal property における一意性から，$f \circ g = \mathrm{id}_{L_2}$ でなければならない．同様の議論により，$g \circ f = \mathrm{id}_{L_1}$ が成り立つから，L_1 と L_2 は同型になる．よって融合積は G, H, K の表示の取り方と持ち上げ $\widetilde{i(k)}, \widetilde{j(k)}$ の取り方によらない．

問題 3 問題 1 において $K = \{1\}$ とする．$G *_K H$ の universal property を $L = G$, $\varphi = \mathrm{id}_G\colon G \to G$, $\psi\colon H \to G$ が $\psi(g) \equiv 1$ なる場合に適用すると，

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, "i_G"] \arrow[drr, "\mathrm{id}_G"] & & \\
\{1\} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & G *_{\{1\}} H \arrow[rr, dashed, "f"] & & G \\
& H \arrow[u, "i_H"] \arrow[urr, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

を可換にする準同型 $f\colon G *_{\{1\}} H \to G$ が存在する．ここで $f \circ i_G = \mathrm{id}_G$ ゆえ，i_G は単射でなければならない．i_H の単射性も同様である．

問題 4 $G * H/N$ が問題 1 の融合積 $G *_K H$ と同じ universal property を満たすことを示せばよい．自然な写像 $i_G\colon G \to G * H$, $i_H\colon H \to G * H$ は準同型 $\bar{i}_G\colon G \to G * H/N$,

$\overline{i}_H\colon H \to G * H/N$ を誘導する．L を任意の群，$\varphi\colon G \to L$, $\psi\colon H \to L$ を準同型で $\varphi \circ i = \psi \circ j$ を満たすものとする．自由積 $G * H$ に対する universal property より，次の図式を可換にする準同型 $f\colon G * H \to L$ がただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G"] \arrow[drr, "\varphi"] & & \\
\{1\} \arrow[ur] \arrow[dr] & G * H \arrow[rr, dashed, "f"] & & L \\
 & H \arrow[u, "i_H"'] \arrow[urr, "\psi"'] & &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

$k \in K$ に対して $i(k)j(k)^{-1} \in G * H$ は正確に書けば $i_G(i(k))i_H(j(k))^{-1}$ のことであるが，

$$\begin{aligned}
f(i_G(i(k))i_H(j(k))^{-1}) &= f(i_G(i(k)))f(i_H(j(k^{-1}))) \\
&= \varphi(i(k))\psi(j(k^{-1})) \quad (\because f \circ i_G = \varphi, f \circ i_H = j) \\
&= \varphi(i(k))\varphi(i(k^{-1})) \quad (\because \varphi \circ i = \psi \circ j) \\
&= \varphi(i(k \cdot k^{-1})) = 1
\end{aligned}$$

より f は $i(k)j(k)^{-1}$ で 1 の値をとる．従って $i(k)j(k)^{-1}$ の生成する正規部分群 N 上で 1 の値をとるため，f は $\overline{f}\colon G * H/N \to L$ で次の図式を可換にするものを誘導する．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "\overline{i}_G"] \arrow[drr, "\varphi"] & & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & G * H/N \arrow[rr, dashed, "\overline{f}"] & & L \\
 & H \arrow[u, "\overline{i}_H"'] \arrow[urr, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

逆に準同型 $\overline{f}\colon G{*}H/N \to L$ で上の図式を可換にするものがあれば，$G{*}H \to G{*}H/N$ と $\overline{f}$ を合成して得られる写像 $G * H \to L$ は最初の図式 (1) を可換にするため上の f と等しくなくてはならない．これは $\overline{f}$ の一意性を示している．

問題 5 集合 W を $(G \setminus \{1\}) \sqcup (H \setminus \{1\})$ の元からなる有限列 $(g_1, \ldots, g_k)$ であって $g_i \in G$ なら $g_{i+1} \in H$ であり，$g_i \in H$ なら $g_{i+1} \in G$ を満たすもの全体の集合とする．空の列 $()$ も W の元とみなす．$G * H$ の W への左作用を次のように定めよう．$1 \neq g \in G$ に対して $\psi_g\colon W \to W$ を

$$\psi_g(g_1, \ldots, g_k) = \begin{cases} (gg_1, g_2, \ldots, g_k) & \text{if } g_1 \in G \text{ and } gg_1 \neq 1 \\ (g_2, \ldots, g_k) & \text{if } g = g_1^{-1} \\ (g, g_1, g_2, \ldots, g_k) & \text{if } g_1 \notin G \end{cases}$$

と定め，$1 \neq h \in H$ に対して $\psi_h \colon W \to W$ を

$$\psi_h(g_1, \ldots, g_k) = \begin{cases} (hg_1, g_2, \ldots, g_k) & \text{if } g_1 \in H \text{ and } hg_1 \neq 1 \\ (g_2, \ldots, g_k) & \text{if } h = g_1^{-1} \\ (h, g_1, g_2, \ldots, g_k) & \text{if } g_1 \notin H \end{cases}$$

とする．また $\psi_1 = \mathrm{id}_W$ と定める．このとき $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$ に対して

$$\psi_{g_1} \circ \psi_{g_2} = \psi_{g_1 g_2}, \quad \psi_{h_1} \circ \psi_{h_2} = \psi_{h_1 h_2}$$

であることは容易に確かめられる．$\mathrm{Aut}(W)$ を W から W への全単射全体の集合とし，これを合成に関して群とみなす．$g \mapsto \psi_g$ は G から $\mathrm{Aut}(W)$ への準同型写像であり，$h \mapsto \psi_h$ も H から $\mathrm{Aut}(W)$ への準同型写像である．自由積の universal property から $G * H \to \mathrm{Aut}(W), x \mapsto \psi_x$ であって，G 上では $g \mapsto \psi_g$ と一致し，H 上では $h \mapsto \psi_h$ と一致するものがただ一つ存在する．これは $G * H$ の W への左作用を定める．写像 $\theta \colon G * H \to W$ を空列 $()$ への作用を使って，

$$\theta(x) = \psi_x()$$

で定める．また，$\tau \colon W \to G * H$ を $\tau(g_1, \ldots, g_k) = g_1 \cdots g_k$ で定める．但し，空列の τ による像は 1 と定める．θ と τ が互いに逆写像であることを示そう．$(g_1, \ldots, g_k) \in W$ に対して，

$$(\theta \circ \tau)(g_1, \ldots, g_k) = \psi_{g_1 \cdots g_k}() = \psi_{g_1} \psi_{g_2} \cdots \psi_{g_k}() = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$$

より $\theta \circ \tau = \mathrm{id}_W$．従って τ は単射である．また，$G * H$ の元は G の元と H の元の積で表されるから，τ は全射であることも容易に分かる．従って τ は全単射（で θ は τ の逆写像）．これは題意の成立を意味する．

問題 6 群 $G := \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ は x, y の生成する自由群 $F_2 = \langle x, y \mid \rangle$ を $xyx^{-1}y^{-1}$ の生成する正規部分群 N で割ったものである．まず準同型

$$\theta \colon F_2 \to \mathbb{Z}^2$$

を $\theta(x) = (1, 0)$, $\theta(y) = (0, 1)$ で定める.（演習 No.4 の問題 9 よりこのような群準同型が一意に定まる.）この準同型は

$$\theta(xyx^{-1}y^{-1}) = (1, 0) + (0, 1) - (1, 0) - (0, 1) = (0, 0)$$

を満たす．従って $\theta(N) = (0, 0)$ である．従って θ は準同型 $\overline{\theta} \colon G = F_2/N \to \mathbb{Z}^2$ であって $\overline{\theta}(x) = (1, 0)$, $\overline{\theta}(y) = (0, 1)$ なるものを誘導する．$\overline{\theta}(x^n y^m) = (n, m)$ ゆえ，$\overline{\theta}$ は全射である．

次に写像 $\varphi \colon \mathbb{Z}^2 \to G$ を $\varphi(n, m) = x^n y^m$ で定める．これは群準同型になる．実際 G において関係式 $xy = yx$ を用いると（x, x^{-1}, y, y^{-1} は全て互いに交換するから），

$$\varphi((n, m) + (k, l)) = x^{n+k} y^{m+l} = x^n x^k y^m y^l = x^n y^m x^k y^l = \varphi(n, m) \varphi(k, l)$$

また $(\varphi \circ \overline{\theta})(x) = \varphi(1, 0) = x$, $(\varphi \circ \overline{\theta})(y) = \varphi(0, 1) = y$ である．G が x, y で生成される群であることから，任意の $g \in G$ に対して $(\varphi \circ \overline{\theta})(g) = g$．従って $\varphi \circ \overline{\theta} = \mathrm{id}_G$ であり，$\overline{\theta}$ は単射でもある．以上より $G \cong \mathbb{Z}^2$ である．

問題 7 $\varepsilon > 0$ は十分小として $V := B_\varepsilon(x) \subset U$ とする．明らかに $(U \setminus \{x\}) \cup V = U$ である．V は 1 点にホモトピー同値であり，$(U \setminus \{x\}) \cap V = B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ は S^2 にホモトピー同値である．したがって V, $(U \setminus \{x\}) \cap V$ のどちらも単連結である．Van Kampen の定理から，

$$\pi_1(U) \cong \pi_1(U \setminus \{x\}) *_{\pi_1((U\setminus\{x\})\cap V)} \pi_1(V) \cong \pi_1(U \setminus \{x\}) *_{\{1\}} \{1\}$$

一般に群 G に対して $G *_{\{1\}} \{1\} \cong G$ を示そう．$G \cong \langle S \mid R \rangle$ を G の表示とする．$\{1\}$ は生成元の集合が空集合，関係式の集合が空集合であるような表示を持つ．従って問題 1 で与えた定義より

$$G *_{\{1\}} \{1\} \cong \langle S \mid R \rangle \cong G.$$

以上より，$\pi_1(U) \cong \pi_1(U \setminus \{x\})$.

問題 8 $K = [0,1]^2/\sim$ を次の二つの開集合で覆う．

$$U = (0,1)^2, \qquad V = ([0,1]^2 \setminus [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}]^2)/\sim$$

ここで U は可縮，V は $S^1 \vee S^1$ とホモトピー同値であり，$U \cap V \cong (0,1)^2 \setminus [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^2$ は S^1 とホモトピー同値である．包含写像から基本群の間に誘導される写像

$$\pi_1(U) \xleftarrow{i} \pi_1(U \cap V) \xrightarrow{j} \pi_1(V)$$

を調べよう．$\pi_1(U) = \{1\}$ より，i は自明である．$\pi_1(U \cap V) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を z，$\pi_1(V) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1) \cong F_2$ の生成元を a, b とする．絵を描くと

$$j(z) = aba^{-1}b$$

であることが分かる．従って

$$\pi_1(K) \cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$$

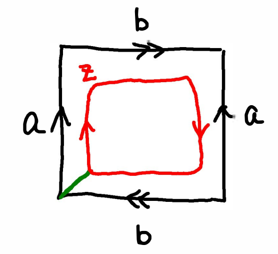


図 1: $\pi_1(U \cap V)$ の生成元 z と $\pi_1(V)$ の生成元 a, b. ループ z の基点 x_0 は正方形の内部にあり，ループ a, b の基点 x_1 は正方形の頂点（4 つの頂点は全て 1 つの点に同一視される）．2 つの基点を緑の道で結ぶことで，$\pi_1(V, x_0)$ と $\pi_1(V, x_1)$ とを同一視している．この同一視の下で z は $aba^{-1}b$ に対応することが見て取れる．

問題 9 $D^2/\sim$ を次の二つの開集合で覆う．

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad V = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}/\sim$$

ここで U は可縮，V は S^1 とホモトピー同値（ホモトピー同値写像は $\phi\colon V \to S^1$, $[z] \mapsto z^n/|z|^n$），また $U \cap V \cong \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ は S^1 とホモトピー同値である．特にこれらは全て弧状連結であり，Van Kampen の定理の条件を満たしている．包含写像の誘導する準同型

$$\pi_1(U) \xleftarrow{i} \pi_1(U \cap V) \xrightarrow{j} \pi_1(V)$$

を計算しよう．$\pi_1(U) = \{1\}$ より i は自明な写像である．$\pi_1(U \cap V) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を a, $\pi_1(V) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を b とするとき，

$$j(a) = b^n$$

である．実際，a はループ $[0,1] \ni \theta \mapsto \frac{1}{2}e^{2\pi i\theta} \in U \cap V$ で代表されるが，これをホモトピー同値写像 $\phi\colon V \to S^1$ で送ると，ループ $[0,1] \ni \theta \mapsto e^{2\pi in\theta} \in S^1$ となり，これは $\pi_1(S^1)$ の生成元の n 乗を代表する.（別の考え方は以下の図をみよ.）従って Van Kampen の定理から，

$$\pi_1(D^2/\sim) \cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) \cong \{1\} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \langle b \mid b^n \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

図 2: 空間 $D^2/\sim$ は円盤 D^2 の境界を n 個の円弧に等分し，n 個の円弧を同じ向きに同一視して得られる.（図は $n = 4$ の場合.）この図からわかるように $U \cap V$ 内のループ a の j による像は V 内のループ b^n に対応している.（問題 8 の解答でみたように，基点を結ぶ緑の道により，異なる基点に関する基本群を同一視する必要がある）.

<u>写像 $\phi\colon V \to S^1$, $\phi([z]) = z^n/|z|^n$ がホモトピー同値写像であること.</u>

連続写像 $\hat{\phi}\colon D^2 \setminus \{0\} \to S^1$, $\hat{\phi}(z) = z^n/|z|^n$ を考える．$z_1, z_2 \in D^2 \setminus \{0\}$ について $z_1 \sim z_2$ ならば $\hat{\phi}(z_1) = \hat{\phi}(z_2)$ であるから，$\hat{\phi}$ は連続写像 $\phi\colon V \to S^1$ を誘導する．

V の部分集合 $S^1/\sim$ には V からの相対位相と，S^1 からの商位相が定まるが，両者は一致することに注意する．ϕ を $S^1/\sim$ に制限した写像 $\phi|_{S^1/\sim}\colon S^1/\sim \to S^1$ は全単射連続写像であり，$S^1/\sim$ はコンパクトで S^1 はハウスドルフであるから，$\phi|_{S^1/\sim}$ は同相写像である．この逆写像と包含写像 $S^1/\sim \hookrightarrow V$ の合成写像を $\psi\colon S^1 \to V$ とする．

ψ が ϕ のホモトピー逆写像であることを示そう．定義から $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{S^1}$ は明らか．$\psi \circ \phi$ と id_V の間のホモトピーを次のように構成する．まず写像 $\hat{H}\colon (D^2 \setminus \{0\}) \times I \to D^2 \setminus \{0\}$ を次のように定める．

$$\hat{H}(z, t) = (t + \frac{1-t}{|z|})z$$

この写像は明らかに連続で，$\hat{H}(z, 0) = z/|z|$，$\hat{H}(z, 1) = z$ を満たす．また $z_1 \sim z_2$ のとき $\hat{H}(z_1, t) \sim \hat{H}(z_2, t)$ である．演習 No.2 の問題 11 の解答で「命題」として述

べたことより，$V \times I$ の位相は自然な写像 $(D^2 \setminus \{0\}) \times I \to V \times I$ に関する商位相と一致する．従って $\hat{H}$ は連続写像 $H\colon V \times I \to V$ を誘導する．ϕ と ψ の定義から $H(z,0) = (\psi \circ \phi)(z)$, $H(z,1) = z$ であることは容易に確かめられる．

補足：問題の位相空間 $D^2/\sim$ は S^1 に円盤 D^2 の境界を n 重巻きに貼り付けて得られる位相空間である．($n = 2$ の時は，実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ としても知られている.）S^1 は基本群の生成元 b を与え，貼り付ける円盤 D^2 はその関係式 $b^n = 1$ を与えている．この構成を次のように一般化できる．k 個の S^1 の 1 点和 $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ に l 個の円盤 D^2 を（境界に沿って）貼り付けることで，任意の有限表示群 $\langle b_1, \ldots, b_k \mid r_1, \ldots, r_l \rangle$ を基本群として持つ位相空間を作ることができる．

問題 10 $X = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\})$ とおく．X は S^2 から 6 点を除いた集合とホモトピー同値である．実際,

$$S^2 \cap X = S^2 \setminus \{(\pm 1,0,0),(0,\pm 1,0),(0,0,\pm 1)\}$$

であり包含写像 $S^2 \cap X \hookrightarrow X$ と写像 $\phi\colon X \to S^2 \cap X$, $(x,y,z) \mapsto (x,y,z)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ は互いにホモトピー逆写像となる（詳細は略）．S^2 から 6 点を除いた集合は $\mathbb{R}^2$ から 5 点除いた集合と同相で，S^1 の 5 つの 1 点和 $\bigvee^5 S^1 = S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ とホモトピー同値．Van Kampen の定理を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}
\pi_1(\bigvee^5 S^1) &\cong \pi_1(\bigvee^4 S^1) * \pi_1(S^1) \\
&\cong \pi_1(\bigvee^3 S^1) * \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) \\
&\vdots \\
&\cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) \\
&\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_5
\end{aligned}$$

問題 11 Σ_2 を種数 2 の曲面とすると，$\pi_1(\Sigma_2) \cong \langle a,b,c,d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle$ なる表示がある．詳細は略．以下の図を参照．

問題 12 数学的な解答は略．$SO(3)$ の基本群が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることは腕を使って体験してみることができる．$SO(3)$ の元は 3 次元空間の 3 つの正規直交するベクトルの組 (v_1, v_2, v_3) で「正の向き」をなしているもの，つまり，$v_3 = v_1 \times v_2$ となるもの，と一対一に対応している．従って $SO(3)$ の元は 3 次元空間内に広げた右手の手のひらの向きと対応すると考えられる.（例えば，親指の方向と小指の方向が v_1, v_2 であり，手のひらの向いている方向が v_3 である.）右腕を水平に伸ばして手のひらを上に向け，手のひらを上向きにしたまま（二の腕の下をくぐらせて）腕を左回りに 360 度回転してみると，手のひらは同じ向きに戻るが，手はねじれる．さらに（今度は二の腕の上をくぐって）左回りに 360 度回転させると手は元の状態に戻る．360 度回転では手はねじれるが，それを 2 回繰り返すことによりねじれが解消されており，これは $\pi_1(SO(3))$ の 2 乗して初めて 1 になる元に対応する．

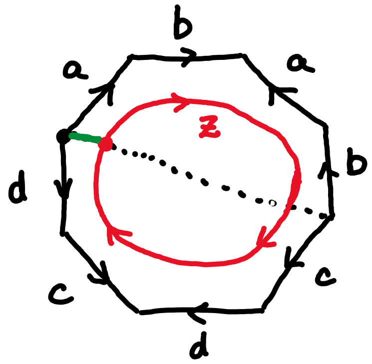


図 3: 種数 2 の曲面の展開図．同じラベルがついた辺同士を同一視する．点線の上側がトーラスから円盤を除いたものと同相．点線の下側も同様．8 角形の境界の近傍と，8 角形の内部に分けて van Kampen の定理を適用する．z は 8 角形の境界に沿ったループ $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ とホモトピック．

問題 13 (1) 包含写像が定める基本群の間の準同型を以下の図式の通りとする．

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr, "\varphi"] & \\ K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & \pi_1(X, x_0) \\ & H \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

ここで 2 つの合成 $\varphi \circ i\colon K \to \pi_1(X, x_0)$，$\psi \circ j\colon K \to \pi_1(X, x_0)$ はどちらも包含写像 $U \cap V \to X$ から誘導されているものであるから一致し，上の図式は可換である．従って融合積の universal property (問題 1) より準同型 $\theta\colon G *_K H \to \pi_1(X, x_0)$ であって，$\theta \circ i_G = \varphi$ および $\theta \circ i_H = \psi$ を満たすものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "i_G"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & G *_K H \arrow[r, dashed, "\theta"] & \pi_1(X, x_0) \\ & H \arrow[u, "i_H"'] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

(2) I のコンパクト性より，十分大きい N をとれば，$k = 0, \ldots, N-1$ に対して $\gamma([\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}])$ は U または V に含まれる．(より正確には，開被覆 $I = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ に関するルベーグ数（演習 No.5，問題 11 参照）より小さい $1/N$ をとればよい．）各 $k \in \{0, \ldots, N\}$ に対して，x_0 から $\gamma(k/N)$ への道 $\alpha_k\colon I \to X$ であって $\gamma(k/N) \in U$ ならば U に含まれ，$\gamma(k/N) \in V$ ならば V に含まれるものをとる．(特に，$\gamma(k/N) \in U \cap V$ ならば α_k は $U \cap V$ に含まれる道である．）これは U, V, $U \cap V$ が各々弧状連結であることから可能である．ここで α_0, α_N は x_0 への定値の道 e_{x_0} としておく．

$k=0,\dots,N-1$ に対して道 $\gamma_k\colon I\to X$ を $\gamma_k(s)=\gamma(\frac{k+s}{N})$ で定める．このとき基本亜群における積を用いて，

$$\begin{aligned}[\gamma] &= [\gamma_1][\gamma_2]\cdots[\gamma_{N-1}]\\ &= ([\alpha_0][\gamma_1][\alpha_1^{-1}])([\alpha_1][\gamma_2][\alpha_2^{-1}])([\alpha_2][\gamma_3][\alpha_3^{-1}])\cdots([\alpha_{N-1}][\gamma_{N-1}][\alpha_N^{-1}])\end{aligned}$$

となる．ここで $[\alpha_i][\gamma_{i+1}][\alpha_{i+1}^{-1}]\in\pi_1(X,x_0)$ であって U または V に完全に含まれるループで代表される．すなわち，$[\alpha_i][\gamma_{i+1}][\alpha_{i+1}^{-1}]$ は $G\to\pi_1(X,x_0)$ の像または $H\to\pi_1(X,x_0)$ の像に含まれる．従って任意の $\pi_1(X,x_0)$ の元は $\varphi(G)$ と $\psi(H)$ の元の積で表すことができ，$\theta\colon G*_K H\to\pi_1(X,x_0)$ は全射である．

(3) とても難しくはないが長くなるのでここでは省略する．Hatcher の Algebraic Topology などを参照のこと．

幾何学入門演習　No.8　(2023 年 12 月 13 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．($\star$) は基本的な問題です．

問題 1 ($\star$) S^2 を地球の表面と考え，その「座標」を経度・緯度を使って導入することを考える．経度を θ，緯度を φ とするとき，対応する S^2 上の点は

$$f(\theta, \varphi) = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$$

で与えられることを観察せよ．f を座標として用いるのに適切でない点，すなわち，その点のどんな小さな開近傍に制限しても，f が単射にならない点はどこか．

問題 2 ($\star$) $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された関数 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ について，次の条件 (1), (2), (3) を考える．含意関係 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) を示せ．

(1) f は C^1 級である．すなわち，$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ とおいたとき，全ての i, j について偏導関数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$ が存在して，U 上の関数として連続である．

(2) f は U の各点 x で全微分可能である．すなわち，

$$\lim_{v \to 0} \frac{|f(x+v) - f(x) - D_x v|}{|v|} = 0$$

を満たす線形写像 $D_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が存在する．

(3) f は U 上の連続関数である．

定義 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ について，点 $x \in U$ でのベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ に沿った方向微分を次で定義する．

$$Df_x(v) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

Df_x のことを $(Df)_x$, $D_x f$, $(\nabla f)_x$ などと書くこともある．

問題 3 ($\star$) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき，任意の点 $x \in \mathbb{R}^n$ について $Df_x = f$ であることを示せ．

問題 4 $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．授業では $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ が C^1 級ならば $Df_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は線形写像であることを示した．方向微分 $Df_x(v)$ が任意の $v \in \mathbb{R}^n$ について存在するが v について線形写像にならない連続関数 f と点 x の例を与えよ．また，任意の点 $x \in U$ と任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に沿っての方向微分 $Df_x(v)$ が存在し，$v \mapsto Df_x(v)$ は線形となるが，f は連続とはならない例を与えよ．

問題 5 ($\star$) 問題 ? の写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ について，その微分 $Df_{(\theta,\varphi)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を表現する行列 $Jf_{(\theta,\varphi)}$（Jacobi 行列という）を求めよ．また，$Df_{(\theta,\varphi)}$ が単射でない点を全て求め，その結果を問題 ? と比べよ．

問題 6 ($\star$) 極座標 (r,θ) に対応する写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次で定義する．

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

F の微分 $DF_{(r,\theta)}$ を表現する行列 $JF_{(r,\theta)}$ を求め，$DF_{(r,\theta)}$ が同型でない点 (r,θ) を求めよ．また，そのような点の任意の開近傍 U に対して $F|_U$ は単射でないことを示せ．

問題 7 ($\star$) $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と写像 $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x+iy \in \mathbb{C}$ によって同一視する．写像 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = z^n$ で定めるとき，$n \geq 2$ ならば Df_z が同型とならない点は $z=0$ のみであることを示せ．このことと逆関数定理から $f|_{\mathbb{C}^\times}\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ は局所同相写像であることを結論せよ．

問題 8 ($\star$) $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ を実の 2 次正方行列全体のなす空間とする．写像 $F\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を $F(A) = A^2$ で定める．

(1) $V \in M_2(\mathbb{R})$ に沿った方向微分 $DF_A(V) = \lim_{t\to 0} \frac{F(A+tV)-F(A)}{t}$ を求めよ．DF_A は線形写像 $M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を定める．

(2) DF_A が同型 $\iff \det(A) \neq 0$ かつ $\mathrm{tr}(A) \neq 0$，を示せ．ここで $\mathrm{tr}(A)$ は A のトレースである．

注：逆関数定理から，単位行列に十分近い行列 A の平方根 $A^{1/2}$ が（A の滑らかな関数として）定義できることが分かる．

問題 9 逆関数定理を次の方法で示せ．U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$f\colon U \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級写像で点 $x_0 \in U$ での微分 $Df_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が同型なものとする．

(i) まず適当な座標変換によって $x_0 = 0$, $f(0) = 0$，$Df_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ の場合に問題を帰着させる．

(ii) $g_y(x) = y + x - f(x)$ とおく．$\epsilon > 0$ が存在して $|y| \leq \epsilon/2$ ならば g_y は半径 ϵ の閉球体 $\overline{B_\epsilon(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \epsilon\}$ で定義されて $g_y(\overline{B_\epsilon(0)}) \subset \overline{B_\epsilon(0)}$ が成り立つ．

(iii) さらに $\epsilon > 0$ を小さくとれば，$g_y\colon \overline{B_\epsilon(0)} \to \overline{B_\epsilon(0)}$ は縮小写像にとることができる．すなわち，定数 $0 < k < 1$ が存在して，任意の $x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}$ に対して $|g_y(x_1) - g_y(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$. 縮小写像の原理を適用して，$y \in \overline{B_{\epsilon/2}(0)}$ の逆像 $f^{-1}(y)$ が $\overline{B_\epsilon(0)}$ 内に一意に定まることを示す．（ヒント：$g_y(x_1) - g_y(x_2) = \int_0^1 [\frac{d}{dt} g_y(tx_1 + (1-t)x_2)]dt$．）

(iv) $y \mapsto f^{-1}(y)$ が連続であることを示す．

(v) f^{-1} は全微分可能であることを示し，その微分 $(Df^{-1})_y$ を計算する．

(vi) f^{-1} が C^1 級であることを示す．さらに f が C^k 級ならば f^{-1} も C^k 級になることを示す．

注：この縮小写像の原理を利用した証明は無限次元の Banach 空間にも一般化できる．

幾何学入門演習　No.8 解答例

問題 1 前半は省略する．$\cos\varphi = 0$ となる点 (θ, φ)（S^2 上の北極と南極 $(0, 0, \pm 1)$ に対応する）では $f(\theta, \varphi)$ は θ の値によらないため，そのような点の任意の近傍に制限しても f は単射でない．

問題 2 (1) $\Rightarrow$ (2): $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ を固定し，十分小さい $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $x^i = (x_1 + v_1, \ldots, x_i + v_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ とおく．v が十分小さいとき，x^{i-1} と x^i を結ぶ線分は U に含まれる．平均値の定理より，x^{i-1} と x^i を結ぶ線分上の点 $\xi^{ji} = \xi^{ji}(v)$ が存在して，

$$
\begin{aligned}
f_j(x+v) - f_j(x) &= f_j(x^n) - f_j(x^{n-1}) + f_j(x^{n-1}) - f_j(x^{n-2}) + \cdots + f_j(x^1) - f_j(x) \\
&= \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\xi^{jn}) v_n + \frac{\partial f_j}{\partial x_{n-1}}(\xi^{j,n-1}) v_{n-1} + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\xi^{j1}) v_1
\end{aligned}
$$

線形写像 $D_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を

$$
D_x(v_1, \ldots, v_n) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) v_i, \ldots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) v_i \right)
$$

と定義するとき，

$$
\begin{aligned}
0 \leq \frac{|f(x+v) - f(x) - D_x v|}{|v|} &= \left(\sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi^{ji}) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right) \frac{v_i}{|v|} \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi^{ji}) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right) \frac{v_i}{|v|} \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi^{ji}) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right|
\end{aligned}
$$

導関数 $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ の連続性から，$|v| \to 0$ のとき，右辺はゼロに収束する．

(2) $\Rightarrow$ (3): (2) より

$$
\lim_{v \to 0} (f(x+v) - f(x) - D_x v) = 0
$$

また明らかに

$$
\lim_{v \to 0} D_x v = 0
$$

であるから，

$$
\lim_{v \to 0} (f(x+v) - f(x)) = 0
$$

これは f が点 $x \in U$ で連続であることを示している．

問題 3 f が線形写像であることに注意して，定義から，

$$\begin{aligned} Df_x(v) &:= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x)+f(tv)-f(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{tf(v)}{t} \\ &= f(v) \end{aligned}$$

問題 4 （前半の例）関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) = \begin{cases} z^3/|z|^2 & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

で定める．これは連続関数である．このとき $v \neq 0$ に対して

$$Df_0(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv)}{t} = \frac{v^3}{|v|^2}$$

であるがこれは線形ではない．実際 $Df_0(i) = -i$, $Df_0(1) = 1$ であるが，$Df_0(1+i) = -1+i$ である．

（後半の例）$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(y-x^2)^2/(x^2+y^2)^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

と定める．$(x,y) \neq (0,0)$ では明らかにこの関数は C^∞ 級である．また $x \neq 0$ に対して $f(x,x^2) = 1$ であるから，$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = 1 \neq f(0,0)$．従って f は $(0,0)$ で連続ではない．f が $(0,0)$ において任意のベクトル (v_1,v_2) に沿って方向微分が存在することを示そう．$Df_0(0,0) = 0$ は定義から明らかである．$(v_1,v_2) \neq (0,0)$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(t(v_1,v_2))-f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \exp\left(-t^{-6}(v_2-tv_1^2)^2/(v_1^2+v_2^2)^4\right) \\ &= \begin{cases} 0 & v_2 \neq 0 \\ \lim_{t\to 0} \exp(-t^{-4}v_1^{-4}) & v_2 = 0, v_1 \neq 0 \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

以上より任意の $v \in \mathbb{R}^2$ に対して $Df_0(v) = 0$.

問題 5

$$(Jf)_{(\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

この行列のランクが 1 になるのは $\cos(\varphi) = 0$ のときのみ．これは問題 1 と対応している．

問題 6

$$(JF)_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

この行列の行列式は r である．従って，$DF_{(r,\theta)}$ が同型でない点は $\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid r=0\}$ である．$r=0$ のとき，θ によらず $F(r,\theta)=(0,0)$ となるため，$r=0$ を満たす点の任意の開近傍 U に対して $F|_U$ は単射でない．

問題 7 $Df_z\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を求める．$v\in\mathbb{C}$ に対して，

$$\begin{aligned} Df_z(v) &= \lim_{t\to 0}\frac{(z+tv)^n - z^n}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(nz^{n-1}v + \binom{n}{2}z^{n-2}tv^2 + \cdots + t^{n-1}v^n\right) \\ &= nz^{n-1}v \end{aligned}$$

従って Df_z は複素数 nz^{n-1} を掛ける写像であり，これが同型でないのは $nz^{n-1}=0$，すなわち，$z=0$ のみ（ただし，$n\geq 2$ としている.）$f|_{\mathbb{C}^\times}\colon \mathbb{C}^\times\to\mathbb{C}^\times$ はすべての点 $z\in\mathbb{C}^\times$ で Df_z が同型であるから，逆関数定理より $f|_{\mathbb{C}^\times}$ は局所同相写像であることが従う．

問題 8 (1) 方向微分を直接計算する．

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{F(A+tV)-F(A)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{(A+tV)^2 - A^2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}((AV+VA)+tV^2) = AV+VA \end{aligned}$$

従って $DF_A(V) = AV+VA$.

(2) 複素係数の 2 次正方行列 $A\in M_2(\mathbb{C})$ に対して $\mathbb{C}$ 上の線形写像 $f_A\colon M_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C})$ を $f_A(V)=AV+VA$ と定める．A が実数係数のときは，$f_A|_{M_2(\mathbb{R})} = DF_A$ であり，f_A が同型であることと，DF_A が同型であることとは同値である．

そこでより一般に，$A\in M_2(\mathbb{C})$ に対して

$$f_A \text{ が同型} \iff \det A\neq 0 \text{ かつ } \mathrm{tr}(A)\neq 0$$

を示そう．正則行列 $P\in M_2(\mathbb{C})$ に対して，線形同型写像 $\mathrm{Ad}_P\colon M_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C})$ を $\mathrm{Ad}_P(X) = P^{-1}XP$ と定める．このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_P(f_A(V)) &= P(AV+VA)P^{-1} \\ &= PAP^{-1}\cdot PVP^{-1} + PVP^{-1}\cdot PAP^{-1} = f_{\mathrm{Ad}_P(A)}(\mathrm{Ad}_P(V)) \end{aligned}$$

である．すなわち，$\mathrm{Ad}_P\circ f_A = f_{\mathrm{Ad}_P A}\circ\mathrm{Ad}_P$．従って

$$f_A \text{ が同型} \iff f_{\mathrm{Ad}_P A} \text{ が同型}$$

となる．また示すべき同値条件についても，

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\mathrm{Ad}_P A), \quad \det(A) = \det(\mathrm{Ad}_P A)$$

であるから，A が Jordan 標準形のときに主張を確かめれば十分である．

Case 1: A が対角行列のとき．$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ とおく．$V = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対して，

$$\begin{aligned} f_A(V) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\lambda x & (\lambda+\mu)y \\ (\lambda+\mu)z & 2\mu w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って f_A が正則 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f_A) = \{0\} \Leftrightarrow \lambda + \mu \neq 0, \lambda \neq 0, \mu \neq 0$. これは $\det(A) \neq 0$ かつ $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ と同値.

Case 2: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ のとき．$V = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対して，

$$\begin{aligned} f_A(V) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\lambda x + z & 2\lambda y + x + w \\ 2\lambda z & 2\lambda w + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\lambda \neq 0$ のとき，$V \in \mathrm{Ker}\, f_A$ とすると $2\lambda z = 0, 2\lambda x + z = 0, 2\lambda w + z = 0, 2\lambda y + x + w = 0$ より $z = 0$, $x = 0$, $w = 0$, $y = 0$．従って $\mathrm{Ker}\, f_A = 0$ がわかる．また $\lambda = 0$ のとき $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, f_A$ となる．従って f_A が同型 $\Leftrightarrow \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$, $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

注意　上で見たように $\mathrm{Ad}_P \circ f_A = f_{\mathrm{Ad}_P A} \circ \mathrm{Ad}_P$ であるが，この両辺の行列式をとって $\det f_A = \det f_{\mathrm{Ad}_P A}$ である．つまり $\det(f_A)$ は A の共役類のみに依存する関数である．A が対角行列のとき，Case 1 の計算から，

$$\det(f_A) = 4\lambda\mu(\lambda+\mu)^2 = 4\det(A)\,\mathrm{tr}(A)^2$$

である．両辺とも A の共役類のみに依存する関数なので，この等式は対角化可能な任意の行列 A に対して成立する．対角化可能な行列は $M_2(\mathbb{C})$ の稠密な部分集合をなしているから，上記の等式は全ての $A \in M_2(\mathbb{C})$ に対して成立する．

問題 9　(i) 座標の平行移動により $x_0 = 0, f(0) = 0$ としてよい．また f を $(Df_{x_0})^{-1} \circ f$ で置き換えて $Df_{x_0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ と仮定できる．

(ii) ある $\delta > 0$ に対して $f(x)$ は $B_\delta(0)$ で定義されているとしてよい．全微分可能性から

$$f(x) = Df_0(x) + o(|x|) = x + o(|x|)$$

であり，特にある $0<\epsilon<\delta$ が存在して $|f(x)-x|\le\frac{1}{2}|x|$ が $\overline{B_\epsilon(0)}$ 上で成立する．$|y|\le\frac{\epsilon}{2}$ とすると，$x\in\overline{B_\epsilon(0)}$ に対して $g_y(x)$ は定義され，

$$|g_y(x)|=|y-f(x)+x|\le|y|+|x-f(x)|\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{|x|}{2}\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

つまり $g_y\colon\overline{B_\epsilon(0)}\to\overline{B_\epsilon(0)}$ を定める．

(iii) ヒントより

$$\begin{aligned}|g_y(x_1)-g_y(x_2)|&=\left|\int_0^1\frac{d}{dt}g_y(tx_1+(1-t)x_2)dt\right|\\&=\left|\int_0^1(E_n-(Jf)_{tx_1+(1-t)x_2})(x_1-x_2)dt\right|\\&\le\int_0^1\left|(E_n-(Jf)_{tx_1+(1-t)x_2})(x_1-x_2)\right|dt\\&\le\int_0^1\left\|(E_n-(Jf)_{tx_1+(1-t)x_2})\right\||x_1-x_2|dt\end{aligned}$$

ここで E_n は単位行列，$(Jf)_x$ は線形写像 Df_x を表現する Jacobi 行列であり，正方行列 A に対して $\|A\|=\sup_{x\neq0}|Ax|/|x|$ は作用素ノルムを表す．f は C^1 級で $(Jf)_0=E_n$ だから，ϵ を小さく取り直せば $x\in\overline{B_\epsilon(0)}$ に対して

$$\|E_n-(Jf)_x\|\le\frac{1}{2}$$

となる．ここで $x_1,x_2\in\overline{B_\epsilon(0)}$ に対して上の計算から

$$|g_y(x_1)-g_y(x_2)|\le\int_0^1\frac{1}{2}|x_1-x_2|dt=\frac{1}{2}|x_1-x_2|.$$

すなわち g_y は縮小写像．縮小写像の原理から $|y|\le\epsilon/2$ のとき，$g_y(x)=x$ を満たす $x\in\overline{B_\epsilon(0)}$ が一意に存在する．ただし，$\overline{B_\epsilon(0)}$ は完備距離空間であることを使った．

注意：縮小写像の不動点は $x_0=0,\ x_{n+1}=g_y(x_n)$ で定まる点列 $\{x_n\}$ の極限として与えられることに注意する．これは Newton 法で $y=f(x)$ の解を求めることに対応する．

(iv) $y_1,y_2\in\overline{B_{\epsilon/2}(0)}$ とし，$x_1,x_2\in\overline{B_\epsilon(0)}$ を $x_1=f^{-1}(y_1),\ x_2=f^{-1}(y_2)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}|y_1-y_2|=|f(x_1)-f(x_2)|&\ge|x_1-x_2|-|f(x_1)-x_1-(f(x_2)-x_2)|\\&=|x_1-x_2|-|g_0(x_1)-g_0(x_2)|\\&\ge|x_1-x_2|-\frac{1}{2}|x_1-x_2|=\frac{1}{2}|x_1-x_2|\end{aligned}$$

ここで (iii) で得た評価を使った．これは f^{-1} が連続であることを示す．

(v) $y \in B_{\epsilon/2}(0)$ をとる．十分小さい $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $x = f^{-1}(y)$, $x + b(a) = f^{-1}(y+a)$ とおく．$(x, x+b(a) \in \overline{B_\epsilon(0)}$．）ここで (iv) より $|b(a)| \le 2|a|$ であることに注意する．f は全微分可能なので，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$|b| < \delta$ のとき

$$|f(x+b) - f(x) - (Jf)_x b| \le \epsilon |b|$$

従って $b = b(a)$ とおけば，$|a| < \delta/2$ のとき $|b(a)| \le 2|a| < \delta$ であって，

$$|f(x+b(a)) - f(x) - (Jf)_x b(a)| \le \epsilon |b(a)| \le 2\epsilon |a|$$

すなわち，

$$|a - (Jf)_x(f^{-1}(y+a) - f^{-1}(y))| \le 2\epsilon |a|$$

がわかる．これを書き換えると

$$|f^{-1}(y+a) - f^{-1}(y) - ((Jf)_x)^{-1} a| \le 2\epsilon \|((Jf)_x)^{-1}\| \cdot |a|$$

これは f^{-1} は y で全微分可能であり，$(Jf^{-1})_y = ((Jf)_x)^{-1}$ であることを示す．

(vi) 逆関数を $h = f^{-1}$ とおく．n 次正則行列 A に対して A^{-1} の (j,k) 成分を $R_{jk}(A)$ と書くことにする．R_{jk} は A の n^2 個の成分の有理関数である．$(Jh)_y = ((Jf)_{h(y)})^{-1}$ より h の偏微分係数は

$$\frac{\partial h_j}{\partial y_k}(y) = R_{jk}\left((Jf)_{h(y)}\right)$$

の形に書けることが分かる．したがって h の偏微分係数は全て連続であり，h は C^1 級.

f が C^k 級であるとする．任意の $r \le k$ に対して，上の式から帰納的に，h は r 階偏微分可能で，その偏微分係数は f の r 階までの偏微分係数 $Jf, J^2 f, \ldots, J^r f$ と h の $r-1$ 階までの偏微分係数 $Jh, \ldots, J^{r-1}h$ の有理関数として表されることが示せる．

$$\frac{\partial^r h_j}{\partial y_{k_1} \cdots \partial y_{k_r}}(y) = R_{j,k_1,\ldots,k_r}(Jf(h(y)), \ldots, J^r f(h(y)), Jh(y), \ldots, J^{r-1}h(y))$$

従って $h = f^{-1}$ は C^k 級.

幾何学入門演習　No.9　(2023 年 12 月 20 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．$(\star)$ は基本的な問題です．

定義　$\mathbb{R}^N$ の部分集合 A で定義された関数 $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ が C^∞ 級であるとは，任意の $a \in A$ に対して，a の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^N$ と C^∞ 級関数 $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^m$ が存在して $\tilde{f}|_{A\cap U} = f|_{A\cap U}$ が成り立つことである．

問題 1 $(\star)$ 上の意味での C^∞ 級関数 $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ は連続であることを示せ．

問題 2 $(\star)$ $A \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^m$ を部分集合とする．$f\colon A \to \mathbb{R}^m, g\colon B \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級関数で，$f(A) \subset B$ を満たすとする．このとき $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}^n$ は C^∞ 級関数であることを示せ．

定義 $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ を部分集合とする．写像 $f\colon A \to B$ が全単射であって，$f\colon A \to B \subset \mathbb{R}^m$ と $f^{-1}\colon B \to A \subset \mathbb{R}^n$ が（上の定義の意味で）共に C^∞ 級であるとき，$f\colon A \to B$ を微分同相写像 (diffeomorphism) という[1]．

定義　$\mathbb{R}^N$ の部分集合 M が$\underline{m \text{ 次元 } C^\infty \text{ 級多様体}}$であるとは，$M$ の各点が $\mathbb{R}^m$ の開集合と微分同相な開近傍を持つことである．すなわち，任意の点 $p \in M$ に対して，p の（M の相対位相に関する）開近傍 $U \subset M$ と $\mathbb{R}^m$ の開集合 V, そして微分同相写像 $\phi\colon V \to U$ が存在する．この ϕ をパラメータ付け（あるいは座標）と呼ぶ．また逆写像 $\phi^{-1}\colon U \to V$ も座標と呼ばれる．

問題 3 $(\star)$ $\mathbb{R}^N$ の部分集合について，それが N 次元 C^∞ 級多様体であることと，$\mathbb{R}^N$ の開集合であることは同値であることを示せ．

問題 4 $(\star)$ S^2 のパラメータ付けを次のように導入する．$V = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\}$ とし，

$$\phi\colon V \to S^2, \quad \phi(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$$

とおく．$\phi(V)$ は S^2 の開集合で，$\phi\colon V \to \phi(V)$ は微分同相写像であることを示せ．

問題 5 $(\star)$ S^2 のパラメータ付け $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ を立体射影を用いて導入する．すなわち，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\phi(x, y)$ を $(x, y, 0)$ と $(0, 0, 1)$ を結ぶ直線と S^2 の交わりとして定める．このとき $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ は微分同相写像であることを示せ．

問題 6 $(\star)$ S^2 の各点 p について，p の開近傍 $W \subset \mathbb{R}^3$，開集合 $W' \subset \mathbb{R}^3$，微分同相写像 $f\colon W \to W'$ であって $f(S^2 \cap W) = \{(x_1, x_2, x_3) \in W' \mid x_3 = 0\}$ を満たすものを構成せよ．

[1] $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合の間の微分同相写像の概念はあまり標準的ではないが，この講義ではこの定義を採用することにする．定義から，微分同相であれば，同相である．

問題 7 ($\star$) 多様体 $M \subset \mathbb{R}^N$ の（相対位相に関する）開部分集合は多様体であることを示せ．

問題 8 $V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とする．C^∞ 級写像 $\phi\colon V \to \mathbb{R}^N$ が単射であり，任意の点 $x \in V$ に対して $D\phi_x\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ も単射であるとする．このとき $\phi(V)$ は必ず多様体となるか？

問題 9 $\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ は多様体か？

問題 10 $V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合，$\phi\colon V \to \mathbb{R}^N$ を C^∞ 級関数で次を満たすとする．

(1) ϕ は像との同相写像 $V \cong \phi(V)$ を与える．

(2) 任意の $x \in V$ について $D\phi_x\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ は単射である．

このとき $\phi\colon V \to \phi(V)$ は微分同相写像であることを示せ．

陰関数定理　W を $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の開集合，$f\colon W \to \mathbb{R}^m$ を C^∞ 級写像とする．$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の座標を $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ で表し，写像 f を $f(x, y) = (f_1(x, y), \ldots, f_m(x, y))$ と書く．ある点 $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ において，変数 y に関する Jacobi 行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x^0, y^0)\right)_{1 \le i, j \le m}$$

が正則行列であるとし，$z^0 = f(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^m$ とおく．このとき，x^0 の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^n$，y^0 の開近傍 $V \subset \mathbb{R}^m$，C^∞ 級写像 $g\colon U \to V$ が存在して，$U \times V \subset W$ および

$$\{(x, y) \in U \times V \mid f(x, y) = z^0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$$

が成立する．

問題 11 ($\star$) 逆関数定理から上記の陰関数定理を次のようにして導け．

(1) 写像 $F\colon W \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ を $F(x, y) = (x, f(x, y))$ とおく．点 (x^0, y^0) での F の Jacobi 行列 $(JF)_{(x^0, y^0)}$ が正則であることを示せ．

(2) 逆関数定理から $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の開集合 $U' \times V \subset W$（ただし，$U' \subset \mathbb{R}^n$ は x^0 の開近傍，$V \subset \mathbb{R}^m$ は y^0 の開近傍）が存在して，$D = F(U' \times V)$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の開集合であり，$F|_{U' \times V}\colon U' \times V \to D$ は微分同相写像となる．ここで

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, z^0) \in D\}$$

とおいて $x \in U$ に対して $g(x) \in V$ を

$$g(x) := (F|_{U' \times V})^{-1}(x, z^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \text{ の } \mathbb{R}^m \text{ 成分}$$

とおけば，陰関数定理の主張が成り立つことを確かめよ．

幾何学入門演習　No.9 解答例

問題 1 $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ を C^∞ 級関数とする．f が点 $a \in A$ で連続であることを示そう．そのためには，$f(a)$ の任意の開近傍 V に対して a の開近傍 $W \subset A$ が存在して $f(W) \subset V$ となればよい．定義より a を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 U と U 上の C^∞ 級関数 $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^m$ が存在して $f|_{A\cap U} = \tilde{f}|_{A\cap U}$ が成立する．V を $f(a) = \tilde{f}(a)$ の開近傍とする．$\tilde{f}$ は連続であるから，a の（U における）開近傍 $W' \subset U$ が存在して $\tilde{f}(W') \subset V$ となる．ここで $W = W' \cap A$ とおくと，W は A の開集合で a を含み，$W \subset U \cap A$ であるから，$f(W) = \tilde{f}(W) = \tilde{f}(W' \cap A) \subset V$ を満たす．従って f は連続である．

問題 2 $a \in A$ をとり，$b = f(a) \in B$ とする．条件から，b の開近傍 $V \subset \mathbb{R}^m$ と C^∞ 級関数 $\tilde{g}\colon V \to \mathbb{R}^n$ が存在して $g|_{V\cap B} = \tilde{g}|_{V\cap B}$．また a の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^N$ と C^∞ 級関数 $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^m$ が存在して $f_{U\cap A} = \tilde{f}|_{U\cap A}$．$W = \tilde{f}^{-1}(V) \cap U$ とおくと，W は a の開近傍であり，$\tilde{f}(W) \subset V$ を満たす．従って $\tilde{g} \circ (\tilde{f}|_W)\colon W \to \mathbb{R}^m$ は W 上の C^∞ 級関数である．$W \cap A \subset U \cap A$，$\tilde{f}(W \cap A) \subset V \cap B$ に注意すると，

$$g \circ f|_{W\cap A} = g \circ \tilde{f}|_{W\cap A} = \tilde{g} \circ \tilde{f}|_{W\cap A} = (\tilde{g} \circ (\tilde{f}|_W))|_{W\cap A}$$

従って $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}^n$ は C^∞ 級関数である．

問題 3 $M \subset \mathbb{R}^N$ を N 次元多様体とする．このとき各点 $p \in M$ に対してパラメータ付け $f\colon V \to M, p \in f(V)$ が存在する．ここで V は $\mathbb{R}^N$ の開集合である．$p = f(x)$ とする．授業で示したように，$Df_x\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ は単射である．値域と定義域が同じ次元のベクトル空間であるから，Df_x は同型であり，逆関数定理から x の開近傍 $V' \subset V$ が存在して $f(V')$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合であり，$f|_{V'}\colon V' \to f(V')$ は微分同相写像．特に，p を含む $\mathbb{R}^N$ の開集合 $f(V')$ で M に含まれるものが存在する．p は M の任意の点であるから，M は開集合である．

逆に $M \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とする．このとき，$V = M$ とし $\mathrm{id}\colon V \to M$ を考えると，これは明らかに微分同相写像でありパラメータ付けの条件を満たす．従って M は多様体である．

問題 4 与えられた写像 $f\colon V \to S^2$ がパラメータ付けの条件を満たすことを示そう．まず $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$ とおく．このとき $f(V) \subset S^2 \cap U$ であることは明らか．$f\colon V \to S^2 \cap U$ が全単射であることを示すため，逆写像 $g\colon S^2 \cap U \to V$ を

$$g(x, y, z) = (y, z)$$

と定める．$f \circ g = \mathrm{id}_{S^2\cap U}$, $g \circ f = \mathrm{id}_V$ は容易に確かめられる．最後に f と g が共に C^∞ 級関数であることを確かめよう．f は $\mathbb{R}^2$ の開集合上で定義された関数であり，各成分は C^∞ 級であるから，f は C^∞ 級関数である．g は $\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級関数 $\tilde{g}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{g}(x, y, z) = (y, z)$ の $S^2 \cap U$ への制限であるため，C^∞ 級である．

問題 5 立体射影で定義されるパラメータ付け $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ は次で与えられる．

$$f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

$f(x,y)$ が S^2 に値をとることは容易に確かめることができる．$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 1\}$ とおくと，U は $\mathbb{R}^3$ の開集合で f の像は U に含まれる．$f\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \cap U$ は全単射であることを示そう．逆写像 $g\colon S^2 \cap U \to \mathbb{R}^2$ を次で定義する．

$$g(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

このとき $f \circ g = \mathrm{id}_{S^2 \cap U}$, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ を満たしている．従って f は全単射で，g はその逆写像である．最後に f と g が C^∞ 級写像であることを示そう．f はユークリッド空間の開集合で定義された関数であり，各成分は明らかに C^∞ 級関数であるから，C^∞ 級関数である．写像 $g\colon S^2 \cap U \to \mathbb{R}^2$ は（同じ式で定義される）C^∞ 級写像 $\tilde{g}\colon U \to \mathbb{R}^2$ に拡張される．従って g は C^∞ 級関数である．

問題 6 点 $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ をとる．$x_0 > 0$ と仮定する．点 p の近傍 $W = \{(x,y,z) \mid y^2 + z^2 < 1, x > 0\}$ を考える．C^∞ 級写像 $\phi\colon W \to \mathbb{R}^3$ を

$$\phi(x,y,z) = (y, z, x - \sqrt{1 - y^2 - z^2})$$

と定める．ϕ の像は $W' = \{(y,z,x) \mid y^2 + z^2 < 1, -\sqrt{1-y^2-z^2} < x\}$ で与えられる開集合であり，$\phi\colon W \to W'$ は微分同相写像．(実際，逆写像は $\phi^{-1}(y,z,x) = (x + \sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)$ で与えられこれは明らかに C^∞ 級である．）このとき，

$$\phi(S^2 \cap U) = \{(y,z,x) \in W' \mid x = 0\}$$

である．

以上により $x_0 > 0$ の時は示された．x_0, y_0, z_0 のうち少なくとも一つはゼロでないことから，$x_0 > 0$, $x_0 < 0$, $y_0 > 0$, $y_0 < 0$, $z_0 > 0$, $z_0 < 0$ のいずれかの場合に分かれ，各々の場合に題意を満たす微分同相写像 $\phi\colon W \to W'$ を構成することができる．

問題 7 $M \subset \mathbb{R}^N$ を多様体とし，M の相対位相に関する開集合 M' をとる．M' の各点 p に対して，M が多様体であることから，p を像に含むパラメータ付け $f\colon V \to M$ がとれる．ここで $f(V)$ は M の相対位相に関する p の開近傍であり，$f\colon V \to f(V)$ は微分同相写像．$V' := f^{-1}(M')$ は V の開集合である．f を V' に制限して得られる写像 $f|_{V'}\colon V' \to f(V')$ は微分同相写像であり，その像 $f(V') = f(V) \cap M'$ は M' の開集合である.（実際，任意の微分同相写像 $g\colon A \to B$ と部分集合 $A' \subset A$ に対して $g|_{A'}\colon A' \to g(A')$ は微分同相写像である.）このとき $f|_{V'}$ は p を像に含む M' のパラメータ付けを与える．

問題 8 反例がある．$V = \{t \in \mathbb{R} \mid t \neq 1\}$ とおき，C^∞ 級写像 $\phi\colon V \to \mathbb{R}^2$，$\phi(t) = (1-t^2, t-t^3)$ を考える．ϕ が単射であることは容易に分かる．(ここで V から $t=1$ が抜かれていることを使う．$\phi(1) = \phi(-1)$ である.）$D\phi_t(v) = (-2tv, (1-3t^2)v)$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ について単射．しかし $\phi(V)$ は多様体でない．まず，$\phi(V)$ の各点は孤立していないから，$\phi(V)$ は 0 次元多様体ではない．また $\phi(V)$ は開集合でないから $\phi(V)$ は 2 次元多様体でもない．$\phi(V)$ が 1 次元多様体であるとすると，ある開区間 $(-\epsilon, \epsilon)$

からのパラメータ付け $g\colon (-\epsilon,\epsilon)\to\phi(V)$ であって，$g(0)=(0,0)$ を満たすものが存在する．このとき $(0,0)$ の開近傍 $B\subset\mathbb{R}^2$ が存在して $g\colon(-\epsilon,\epsilon)\to\phi(V)\cap B$ は同相写像である．特に $(-\epsilon,\epsilon)\setminus\{0\}$ と $(\phi(V)\cap B)\setminus\{(0,0)\}$ は同相．ところが，$(-\epsilon,\epsilon)\setminus\{0\}$ は2つの連結成分を持つが，$(\phi(V)\cap B)\setminus\{(0,0)\}$ は少なくとも4つ以上の連結成分を持つため，これは矛盾である．実際，$(B\cap\phi(V))\setminus\{(0,0)\}$ は x 軸，y 軸とは交わらないため，第1象限 $U_1=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$, 第2象限 $U_2=\{(x,y)\mid x<0,y>0\}$, 第3象限 $U_3=\{(x,y)\mid x<0,y<0\}$, 第4象限 $U_4=\{(x,y)\mid x>0,y<0\}$ に含まれる部分に分けることができる．ここで $B\cap\phi(V)\cap U_i$ は空集合ではないことを確かめればよい．$\phi(1)=(0,0)$ であることから，十分小さい $\epsilon>0$ について $\phi(1+\epsilon)\in\phi(V)\cap B\cap U_3, \phi(1-\epsilon)\in\phi(V)\cap B\cap U_1$. 同様に $\phi(-1)=(0,0)$ であることから，十分小さい $\epsilon>0$ について $\phi(-1+\epsilon)\in\phi(V)\cap B\cap U_4, \phi(-1-\epsilon)\in\phi(V)\cap B\cap U_2$ であることが確かめられる．

問題 9 多様体である．写像 $f\colon\{x>0\}\to\mathbb{R}^2$ を $f(x)=(x,\sin(1/x))$ とおけばパラメータ付けの条件を満たしている．

問題 10 $\phi\colon V\to\phi(V)$ の逆写像 $\psi=\phi^{-1}\colon\phi(V)\to V$ が C^∞ 級であることを示せばよい．$p=\phi(q)\in\phi(V)$ を任意にとる．写像 ϕ の成分を $\phi_1,\dots,\phi_N$ とおく．点 q でのヤコビ行列

$$J\phi_q=\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(q) & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_m}(q)\\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}(q) & & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_m}(q)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\phi_N}{\partial x_1}(q) & \cdots & \frac{\partial\phi_N}{\partial x_m}(q)\end{pmatrix}$$

のランクは m であるから，必要なら座標の順番を入れ替えて，上の m 行がなす部分行列

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(q) & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_m}(q)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\phi_m}{\partial x_1}(q) & \cdots & \frac{\partial\phi_m}{\partial x_m}(q)\end{pmatrix}$$

は正則であるとしてよい．逆関数定理を写像 $\phi'=(\phi_1,\dots,\phi_m)\colon V\to\mathbb{R}^m$ に適用すると，ある q の開近傍 $V'\subset V$ と $p_1=(\phi_1(q),\dots,\phi_m(q))$ の開近傍 $W\subset\mathbb{R}^m$ が存在して，$\phi'|_{V'}\colon V'\to W$ は微分同相写像であることが分かる．また ϕ は同相写像であることから，$\phi(V')\subset\phi(V)$ は $\phi(V)$ の開集合である．特にある $\mathbb{R}^N$ の開集合 U が存在して，$\phi(V')=U\cap\phi(V)$ と書くことができる．ここで $\pi\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^m$ を射影 $\pi(y_1,\dots,y_N)=(y_1,\dots,y_m)$ とする．ここで p の $\mathbb{R}^N$ における開近傍 $U\cap\pi^{-1}(W)$ 上の C^∞ 級関数 $\tilde\psi$ を

$$\tilde\psi(y_1,\dots,y_N)=(\phi'|_{V'})^{-1}(y_1,\dots,y_m)$$

と定める．$\tilde\psi|_{U\cap\pi^{-1}(W)\cap\phi(V)}=\psi|_{U\cap\pi^{-1}(W)\cap\phi(V)}$ であることを示せば $\psi=\phi^{-1}$ が C^∞ 級であることが示される．ここで $U\cap\pi^{-1}(W)\cap\phi(V)=\phi(V')\cap\pi^{-1}(W)$ であり，この元は $\phi(x),\ x\in V'$ の形で書くことができるが，定義により

$$\tilde\psi(\phi(x))=(\phi'|_{V'})^{-1}(\phi'(x))=x$$

より $\tilde{\psi}$ は $U \cap \pi^{-1}(W) \cap \phi(V)$ 上で ϕ の逆写像 ψ と一致する．

問題 11 (1) F の Jacobi 行列はブロック三角行列

$$JF = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & & 0 \\ \hline \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array}\right)$$

で与えられる．与えられた条件から点 (x^0, y^0) において右下のブロック $(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x^0, y^0))$ は正則行列であるから，この行列は正則行列である．

(2) $x \in U$ に対して $(x, z^0) \in D$ であるから，ある $(x', y') \in U' \times V$ が存在して $F(x', y') = (x, z^0)$．すなわち $x' = x$, $z^0 = f(x', y')$ である．従って $x = x' \in U'$．すなわち $U \subset U'$．従って $U \times V \subset U' \times V \subset W$ が言える．

次に，$(x, y) \in U \times V$ に対して，

$$\begin{aligned} f(x,y) = z^0 &\Longleftrightarrow F(x,y) = (x, z^0) \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = (F|_{U' \times V})^{-1}(x, z^0) \\ &\Longleftrightarrow y = g(x) \end{aligned}$$

であるから，

$$\{(x,y) \in U \times V \mid f(x,y) = z^0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$$

が分かる．

幾何学入門演習　No.10　(2023 年 12 月 27 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．$(\star)$ は基本的な問題です．

問題 1 $(\star)$ S^2 の座標 (パラメータ付け) $\phi_+, \phi_- \colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ を各々，北極 $(0,0,1)$ および南極 $(0,0,-1)$ からの立体射影を用いて導入する．つまり，$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\phi_+(x,y)$ を $(x,y,0)$ と $(0,0,1)$ を結ぶ直線と S^2 の交わりとし，$\phi_-(x,y)$ を $(x,y,0)$ と $(0,0,-1)$ を結ぶ直線と S^2 の交わりとする．座標変換 $\phi_-^{-1} \circ \phi_+$ の定義域およびその具体的な形を与えよ．

問題 2 $(\star)$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とする．S^2 のパラメータ付け $\phi_1 \colon D \to S^2$, $\phi_2 \colon D \to S^2$ を $\phi_1(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, $\phi_2(x,y) = (x, -\sqrt{1-x^2-y^2}, y)$ で定める．座標変換 $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$，$\phi_1^{-1} \circ \phi_2$ の定義域およびその具体的な形を与えよ．

関数のゼロ点集合としての多様体（ヤコビ判定法） $\mathbb{R}^N$ の部分集合 M について，M が m 次元多様体であることと次は同値である．任意の点 $p \in M$ に対して p の $\mathbb{R}^N$ における開近傍 $W \subset \mathbb{R}^N$ および C^∞ 級関数 $f \colon W \to \mathbb{R}^{N-m}$ が存在して，$M \cap W = \{x \in W \mid f(x) = 0\}$ かつ $Df_p \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m}$ が全射となる（つまりヤコビ行列 Jf_p のランクが $N-m$）．

問題 3 $(\star)$ 次のユークリッド空間の部分集合は多様体かどうか判定せよ．

(1) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y + 1/(xy) = 3\}$.

(2) $M_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1, xz + yw = 0\}$.

(3) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2(1-x)\}$.

問題 4 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ は C^∞ 級多様体ではないことを示せ．

問題 5 $(\star)$ $U \subset \mathbb{R}^m$ を開集合，$f \colon U \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級関数とする．f のグラフ $M = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid x \in U\}$ について，(i) パラメータ付け，(ii) 局所平坦表示，(iii) ヤコビ判定法を満たす関数のゼロ点としての表示，の各々を与えよ．

問題 6 $(\star)$ $M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid xy = zw, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ とおく．M が C^∞ 級多様体であることを示せ．

問題 7 問題 6 における M は $S^1 \times S^1$ と同相であることを示せ．

問題 8 多様体はハウスドルフであり，第 2 可算公理を満たす（可算な開基をもつ）ことを示せ.（これらの条件は，幾何学 I で学ぶ抽象的な多様体について課される条件である.）

問題 9 多様体 M の連結成分は M の相対位相に関して開かつ閉であることを示せ．特に，演習問題 No.9 の問題 7 の結果より，多様体の連結成分は多様体である．

問題 10 多様体が連結であれば弧状連結であることを示せ．

問題 11 ($\star$) $M_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ を多様体とするとき，$M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ も多様体であることを示せ．

問題 12 ($\star$) $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ を各々開集合とし，$f\colon U \to V$ を C^∞ 級写像とする．また $n \geq m$ とする．もしある点 $p \in U$ において $Df_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が全射であれば，p の開近傍 $U' \subset U$ および U' と $\mathbb{R}^n$ の開集合 W の間の微分同相写像 $\phi\colon U' \to W \subset \mathbb{R}^n$ が存在して，$f \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ が全ての $(x_1, \ldots, x_n) \in W$ について成立することを示せ．

問題 13 ($\star$) $\mathbb{R}^4$ の部分集合 M を $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ とおく．

(1) M は C^∞ 級多様体であることを示せ．

(2) 射影 $\pi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $\pi(x, y, z, w) = (x, y)$ と定める．点 $p = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in M$ の (M の相対位相に関する) ある開近傍 $U \subset M$ 上で $\pi|_U$ は座標となる，つまり，$V = \pi(U)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり，$\pi|_U\colon U \to V$ は微分同相写像である（つまり $(\pi|_U)^{-1}\colon V \to U$ はパラメータ付け）ことを示せ.（ヒント：陰関数定理）

問題 14 $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xy + zw = 0\}$ は C^∞ 級多様体ではないことを示せ．$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$ はどうか．

問題 15 $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とし，任意の点 $x \in \mathbb{R}^N$ に対して Df_x のランクがある一定の値 r に等しいとする．このとき，$f^{-1}(0)$ は $N - r$ 次元多様体であることを示せ．

問題 16 ($\star$) $M_n(\mathbb{R})$ を実数係数 n 次正方行列全体のなすベクトル空間とする．直交群 $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = I_n\}$ は C^∞ 級多様体であることを示し，その次元を求めよ．

問題 17 n 次正方行列 B が正則行列であり，n 個の相異なる固有値を持つとする．写像 $F\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ を $F(A) = A^2$ で定める．$F(A) = B$ となる A に対して，DF_A は同型であることを示せ．

問題 18 $0 \leq r \leq n$ とする．$\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rank} A = r\}$ は C^∞ 級多様体であることを示し，その次元を求めよ．

幾何学入門演習　No.10 解答例

問題 1 $(0,0,\pm 1)$ からの立体射影で定義されるパラメータ付け $\phi_+, \phi_-\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ は

$$\phi_+(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right),$$

$$\phi_-(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{-x^2-y^2+1}{x^2+y^2+1}\right).$$

で与えられる．ϕ_- の逆写像は

$$\phi_-^{-1}(u,v,w) = \left(\frac{u}{w+1}, \frac{v}{w+1}\right).$$

であるから，

$$\phi_-^{-1} \circ \phi_+(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

これは $\phi_+^{-1}(\phi_+(\mathbb{R}^2) \cap \phi_-(\mathbb{R}^2)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ から $\phi_-^{-1}(\phi_+(\mathbb{R}^2) \cap \phi_-(\mathbb{R}^2)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ への C^∞ 級写像を定めている．

問題 2 $U_1 = \phi_1(D)$, $U_2 = \phi_2(D)$ とおくと， $U_1 = S^2 \cap \{z > 0\}$，$U_2 = S^2 \cap \{y < 0\}$ である．従って $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ と $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$ は各々

$$\phi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \phi_1^{-1}(S^2 \cap \{y < 0, z > 0\}) = \{(x,y) \in D \mid y < 0\}$$
$$\phi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) = \phi_2^{-1}(S^2 \cap \{y < 0, z > 0\}) = \{(x,y) \in D \mid y > 0\}$$

で定義されている．また $\phi_2^{-1}(x,y,z) = (x,z)$, $\phi_1^{-1}(x,y,z) = (x,y)$ であることから，座標変換は

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1(x,y) = \phi_2^{-1}(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) = (x, \sqrt{1-x^2-y^2})$$
$$\phi_1^{-1} \circ \phi_2(x,y) = \phi_1^{-1}(x, -\sqrt{1-x^2-y^2}, y) = (x, -\sqrt{1-x^2-y^2})$$

で与えられる．

問題 3 (1) M_1 は関数 $f_1\colon (\mathbb{R}_{>0})^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x,y) = x + y + 1/(xy) - 3$ のゼロ点集合として与えられる．ヤコビ判定法より，f_1 の微分 $(Df_1)_{(x,y)}$ が全ての点 $(x,y) \in M_1$ で全射であることが示されればよい．$(Df_1)_{(x,y)}$ はヤコビ行列

$$(Jf_1)_{(x,y)} = \left(1 - \frac{1}{x^2y}, 1 - \frac{1}{xy^2}\right)$$

で表現されるが，このランクが 0 となるのは，$1 = \frac{1}{x^2y} = \frac{1}{xy^2}$ となる点，つまり $x = y = 1$ となる点である．一方 $(1,1) \in M_1$ である．従って，ヤコビ判定法からは M_1 が多様体であるかどうかは判定できない．

一方で M_1 は 1 点集合 $\{(1,1)\}$ であることが初等的に示せる（関数 f_1 はただ一つの点 $(1,1)$ で最小値 0 をとる）ため，M_1 は 0 次元多様体であることが分かる．

(2) $f_2\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f_2(x,y,z,w) = (x^2+y^2-1, xz+yw)$ とすると，$f_2^{-1}(0,0) = M_2$ で，Jacobi 行列 $(Jf_2)_{(x,y,z,w)}$ は

$$(Jf)_{(x,y,z,w)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ z & w & x & y \end{pmatrix}.$$

$(x,y,z,w) \in M_2$ ならば $x = y = 0$ となることはないので、この行列のランクは 2 である．よって M_2 は 2 次元 C^∞ 級多様体である．

(3) $f_3(x,y) = y^2 - x^2(1-x)$ とおくと，与えられた部分集合は $M_3 = \{(x,y) \mid f_3(x,y) = 0\}$ と表される．f_3 のヤコビ行列は

$$Jf_3 = (-2x + 3x^2, 2y)$$

となり，ヤコビ行列が消えている M_3 の点は $x = y = 0$ のみであることが容易にわかる．従って原点を除くと M_3 は多様体になっている．一方，原点の近くで M_3 は $y = x\sqrt{1-x}$ と $y = -x\sqrt{1-x}$ のグラフの和となっており，多様体とはならない．正確な証明は次の通り．もし 1 次元多様体になったとすると，原点の開近傍 U および C^∞ 級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ であって $U \cap M_3 = \{(x,y) \in U \mid F(x,y) = 0\}$ かつ $DF_{(0,0)}$ が全射，となるものが存在する．十分小さい x について $(x, \pm x\sqrt{1-x}) \in U \cap M_3$ であるから，$F(x, \pm x\sqrt{1-x}) = 0.$　これを x で微分して $x = 0$ とおくと，

$$F_x(0,0) + F_y(0,0) = 0, \quad F_x(0,0) - F_y(0,0) = 0$$

が成り立つ．これは $F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0$ を意味しており，$DF_{(0,0)}$ が全射であることに矛盾する．また M_3 の各点は孤立していないから，M_3 は 0 次元多様体にはならず，M_3 は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではないから 2 次元多様体にもならない．

注 M_3 は演習問題 No.9 の問題 8 の解答例でも現れている．そこでは M_3 を $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (1-t^2, t-t^3)$ の像として与えた．

問題 4 $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ とおく．M が 1 次元多様体でないことを示す．

位相的な証明：もし M が 1 次元多様体であったとすると，$(0,0)$ の周りのパラメータ付け $\phi\colon (-\epsilon,\epsilon) \to M$ がとれる．ここで $\phi(0) = (0,0)$ としてよい．$A := \phi(-\epsilon,\epsilon)$ は M の開集合であって，$f\colon (-\epsilon,\epsilon) \to A$ は同相写像である．従って $(-\epsilon,\epsilon) \setminus \{0\}$ と $A \setminus \{(0,0)\}$ は同相である．$A \setminus \{(0,0)\}$ は開集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \neq y^2\}$ に含まれていることに注意する．またこの開集合は明らかに 4 つの連結成分を持っている．十分小さい $\delta > 0$ に対して，A は 4 点 $(\delta,0)$, $(-\delta,0)$, $(0,\delta)$, $(0,-\delta)$ を含み，従って少なくとも 4 つの連結成分を持つ．ところが $(\epsilon,\epsilon) \setminus \{0\}$ は 2 つしか連結成分を持たない．これは矛盾である．

微分幾何的な証明：もし M が 1 次元多様体であったとすると，$(0,0)$ の開近傍 U と U 上の C^∞ 級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ が存在して $M \cap U = \{(x,y) \in U \mid f(x,y) = 0\}$ かつ $Df_{(0,0)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は全射，となる．十分小さい x に対して，$f(x,0) = f(0,x) = 0$ となるから，x で微分して $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ となる．これは $Df_{(0,0)}$ が全射であることに矛盾する．

問題 5 $M = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ とおく．

<u>パラメータ付け</u>：パラメータ付けを $g\colon U \to \mathbb{R}^{m+n}$, $g(x) = (x, f(x))$ で定める．g はパラメータ付けの条件を満たしている．まず，g の像は M 全体であるから，M の開集合である．また $g\colon U \to M$ の逆写像は射影 $(x, y) \mapsto x$ で与えられ，これは C^∞ 級関数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の制限であるから C^∞ 級．従って $g\colon U \to g(U)$ は微分同相写像である．

<u>局所平坦表示</u>：写像 $\phi\colon U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n$ を次で定義する．$\phi(x, y) = (x, y - g(x))$．これは C^∞ 級である．逆写像は $\phi^{-1}(x, y) = (x, y + g(x))$ で与えられ，これも C^∞ 級である．従って ϕ は微分同相写像．ここで $M \subset U \times \mathbb{R}^n$ であって，$\phi(M) = \{(x_1, \ldots, x_{m+n}) \in U \times \mathbb{R}^n \mid x_{m+1} = \cdots = x_{m+n} = 0\}$ となる．

<u>関数のゼロ点集合としての表示</u>：写像 $F\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ を $F(x, y) = y - g(x)$ と定める．明らかに $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid F(x, y) = 0\}$ であり，M の各点 (x, y) において F のヤコビ行列

$$(JF)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} * & & * & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ * & & * & & & 1 \end{pmatrix}$$

のランクは n であるから，$DF_{(x,y)}\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ は全射であり，ヤコビ判定法を満たす関数のゼロ点集合となっている．

問題 6 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f_2(x, y, z, w) = (xy - zw, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1)$ とすると，$f^{-1}(0, 0) = M$ で，Jacobi 行列 $(Jf)_{(x,y,z,w)}$ は

$$(Jf)_{(x,y,z,w)} = \begin{pmatrix} y & x & -w & -z \\ 2x & 2y & 2z & 2w \end{pmatrix}$$

$(x, y, z, w) \in M$ のとき，この行列のランクは常に 2 であることを示せばよい．まず $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ より，2 番目の行ベクトル $2(x, y, z, w) \neq 0$ である．もしランクが 1 以下とすると，$(y, x, -w, -z) = \lambda(x, y, z, w)$ を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する．このとき，$1 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \lambda^2(y^2 + x^2 + (-w)^2 + (-z)^2) = \lambda^2$ より，$\lambda = \pm 1$. $\lambda = 1$ ならば $x = y$, $z = -w$ であり，$xy - zw = 0$ より $x^2 + z^2 = 0$．従って $x = z = 0$ であり，$x = y = z = w = 0$．これは $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ を満たさない．$\lambda = -1$ のときも同様である．よって M は 2 次元 C^∞ 級多様体である．

問題 7 $(x, y, z, w) \in M$ とする．条件 $xy = zw, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ は $(x + y)^2 + (z - w)^2 = (x - y)^2 + (z + w)^2 = 1$ と同値である．そこで $\varphi\colon M \to S^1 \times S^1$ を

$$\varphi(x, y, z, w) = (x + y, z - w, x - y, z + w)$$

とする．ただし $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と考えた．φ は明らかに連続である．逆写像 $\psi\colon S^1 \times S^1 \to M$ は

$$\psi(x, y, z, w) = \left(\frac{x + z}{2}, \frac{x - z}{2}, \frac{y + w}{2}, \frac{y - w}{2} \right)$$

で与えられることは容易に検証できる．従って φ は同相写像である．

問題 8 M はハウスドルフ空間 $\mathbb{R}^N$ の部分位相空間であるから，ハウスドルフである（演習 No.1 の問題 2 参照）．また $\mathbb{R}^N$ は第 2 可算公理を満たす．可算な開基は例えば,

$$\mathcal{B} = \{B_{1/n}(a) \mid a \in \mathbb{Q}^N, n \in \mathbb{N}\}$$

で与えられる.（ここで，$B_{1/n}(a)$ は a 中心の半径 $1/n$ の開球体.）従ってその部分位相空間である M も第 2 可算公理を満たす．実際，M の任意の開集合は $M \cap U$, $U \subset \mathbb{R}^N$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合，の形に書くことができるが，U は $\mathcal{B}$ の元の和集合としてあらわされる．従って M の任意の開集合は

$$\mathcal{B}_M = \{B \cap M \mid B \in \mathcal{B}\}$$

に属する開集合の和集合として表される．つまり $\mathcal{B}_M$ は M の可算開基をなし，M は第 2 可算公理を満たす.

問題 9 一般に，位相空間の連結成分（包含関係について極大な連結部分集合）は常に閉である.（連結成分 A に対して A の閉包 $\overline{A}$ も連結であることを示せばよい．詳細は略.）そこで多様体 M に対して M の連結成分 A が開集合であることを示そう. $a \in A$ をとるとき，多様体の定義によって，a の周りのパラメータ付け $\phi\colon V \to M$ が存在する．ここで $V \subset \mathbb{R}^m$ は開集合で，$\phi(V)$ は a の（M における）開近傍，また $\phi\colon V \to \phi(V)$ は微分同相写像である．$\phi(x_0) = a$ とする．必要なら V を x_0 を中心とする十分小さい開球体に置き換えて V は連結としてよい．この時 $\phi(V)$ は a を含む M の連結開集合である．従って $\phi(V) \subset A$．$a \in A$ は任意だから A は開集合であることが分かる.

問題 10 M を連結多様体とする．$x_0 \in M$ をとり，$A = \{x \in M \mid x_0$ と x は道で結べる$\}$ とおく．A が開かつ閉であることを示せば，(A は空集合ではないので) 連結性から $M = A$ であることが分かり，M は弧状連結であることが従う.

$a \in A$ に対して，前問と同様に，a の周りのパラメータ付け $\phi\colon V \to M$, $a \in \phi(V)$ であって，V は $\mathbb{R}^m$ の開球体となるものをとることができる．V は弧状連結より $\phi(V)$ も弧状連結．従って $\phi(V) \subset A$ である．a は任意であったから A は開集合.

$a \notin A$ に対しても同様に a の周りのパラメータ付け $\phi\colon V \to M$, $a \in \phi(V)$ であって，V は $\mathbb{R}^m$ の開球体となるものをとることができる．このときも $\phi(V)$ は弧状連結であって，$\phi(V) \cap A = \emptyset$.（もし交われば，$x_0$ と a が道で結べることになり矛盾する.）従って A の補集合は開集合.

問題 11 $M_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ を多様体とする．任意の $M_1 \times M_2$ の点 $p = (p_1, p_2)$ をとる．点 $p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$ に対して p_1 の開近傍 $U_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$，$p_2$ の開近傍 $U_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ および C^∞ 級関数 $f_1\colon U_1 \to \mathbb{R}^{m_1-n_1}$, $f_2\colon U_2 \to \mathbb{R}^{m_2-n_2}$ が存在して,

$$M_1 \cap U_1 = \{x \in U_1 \mid f_1(x) = 0\}, \quad M_2 \cap U_2 = \{x \in U_2 \mid f_2(x) = 0\}$$

$$(Df_1)_{p_1}\colon \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_1-n_1},\ (Df_2)_{p_2}\colon \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{m_2-n_2}\ \text{は全射}$$

となる．$U := U_1 \times U_2$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^{m_1+m_2-n_1-n_2}$ を $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ と定義すると，$Df_{(p_1,p_2)}\colon \mathbb{R}^{m_1+m_2} \to \mathbb{R}^{m_1+m_2-n_1-n_2}$ は

$$Df_{(p_1,p_2)}(u, v) = ((Df_1)_{p_1}(u), (Df_2)_{p_2}(v))$$

で与えられるため全射である．また明らかに

$$(M_1 \times M_2) \cap (U_1 \times U_2) = \{(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \mid f(x_1, x_2) = 0\}$$

よって $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{m_1+m_2}$ は多様体である．

問題 12 $D_pf\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が全射であるため，ヤコビ行列 $(Jf)_p$ のランクは m である．$(Jf)_p$ の m 個の行ベクトルは一次独立であるから，それに $n-m$ 個の横ベクトル $v_1, \dots, v_{n-m} \in \mathbb{R}^n$ を付け加えて $\mathbb{R}^n$ の基底とすることができる．C^∞ 級写像 $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ を

$$\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x), v_1 \cdot x, \dots, v_n \cdot x)$$

と定義する．ただし $v_i \cdot x$ は v_i と x の標準内積である．このとき，ϕ の点 p でのヤコビ行列

$$(J\phi)_p = \left(\begin{array}{ccc} — & (Jf)_p & — \\ \hline — & v_1 & — \\ & \vdots & \\ — & v_{n-m} & — \end{array}\right)$$

は正則行列である．従って，逆関数定義より p の開近傍 $U' \subset U$ および $\mathbb{R}^n$ の開集合 W が存在して $F(U') = W$ であり，$\phi\colon U' \to W$ は微分同相写像である．このとき，$(x_1, \dots, x_n) \in W$ に対して $y = \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ とおけば，

$$x_1 = f_1(y), \dots, x_m = f_m(y)$$

であるから

$$f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

が成立する．

問題 13 (1) $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $F(x, y, z, w) = (x^3 + y^3 + z^3 + w^3, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1)$ とおく．このとき $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid F(x, y, z, w) = 0\}$ である．M の各点 $p = (x, y, z, w)$ において DF_p が全射，すなわち，Jacobi 行列 $(JF)_p$ のランクが 2 であることを示せばよい．

$$(JF)_p = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 & 3w^2 \\ 2x & 2y & 2z & 2w \end{pmatrix}$$

である．$x^2+y^2+z^2+w^2=1$ ゆえ，二つの行ベクトルはどちらもゼロではない．従って，もしランクが 2 でないとすると，

$$(x,y,z,w)=\lambda(x^2,y^2,z^2,w^2)$$

を満たす実数 $\lambda\neq 0$ が存在する．ここで

$$0=x^3+y^3+z^3+w^3=\lambda^3(x^6+y^6+z^6+w^6)$$

$\lambda\neq 0$ より，$x^6+y^6+z^6+w^6=0$. 従って $x=y=z=w=0$. これは $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ に矛盾する．従って $(JF)_p$ のランクは 2 であり，M は多様体である．

(2) 点 $p=(0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ において F のヤコビ行列は

$$(JF)_p=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

特に後半の 2 列からなる部分行列

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z}(p) & \frac{\partial F_1}{\partial w}(p)\\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(p) & \frac{\partial F_2}{\partial w}(p)\end{pmatrix}$$

は正則行列である．陰関数定理により，$(0,0)$ の開近傍 $V\subset\mathbb{R}^2$ および $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ の開近傍 $W\subset\mathbb{R}^2$，C^∞ 級写像 $g\colon V\to W$ が存在して，

$$\{(v,w)\in V\times W\mid F(v,w)=0\}=\{(v,g(v))\mid v\in V\}$$

M の開集合を $U:=M\cap(V\times W)$ とおく．上の等式より

$$U=\{(v,g(v))\mid v\in V\}$$

であり，$\pi(U)=V$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合．$\pi\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ は（明らかに）C^∞ 級写像であり，従ってその制限 $\pi|_U\colon U\to V$ も C^∞ 級写像．さらに，$\pi|_U\colon U\to V$ の逆写像は

$$f(v):=(v,g(v))$$

で与えられ，これも明らかに C^∞ 級である.（この f がパラメータ付けを与える.）従って $\pi|_U\colon U\to V$ は微分同相写像である．

問題 14 $X=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\mid xy+zw=0\}$ とおく．もし X が C^∞ 級多様体であれば，原点の開近傍 $U\subset\mathbb{R}^4$ と関数 $f\colon U\to\mathbb{R}^l$ が存在して $U\cap X=\{x\mid f(x)=0\}$ かつ $Df_0\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^l$ は全射となる．ここで全ての $t\in\mathbb{R}$ について $(t,0,0,0),(0,t,0,0),(0,0,t,0),(0,0,0,t)\in X$ より，十分 0 に近い実数 t に対して

$$f(t,0,0,0)=f(0,t,0,0)=f(0,0,t,0)=f(0,0,0,t)=0$$

従って t で微分することにより，

$$f_x(0,0,0,0)=f_y(0,0,0,0)=f_z(0,0,0,0)=f_w(0,0,0,0)=0$$

が分かる．Df_0 は全射であるから，$l=0$ であり，$X\cap U=U$ でなければならない．十分小さい $\epsilon>0$ に対して $(\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\in U$ であるが，$(\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\notin X$ であるため矛盾．

次に, $Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2=y^3\}$ とおく．もし Y が C^∞ 級多様体であれば，原点の近傍 V と C^∞ 級関数 $g\colon V\to\mathbb{R}^m$ が存在して $V\cap Y=\{(x,y)\mid g(x,y)=0\}$ かつ $Dg_0\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^m$ は全射，となる．任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $(t^3,t^2)\in Y$ であるから，十分 0 に近い実数 t に対して

$$g(t^3,t^2)=0$$

これを t で微分して

$$3t^2g_x(t^3,t^2)+2tg_y(t^3,t^2)=0$$

$t\neq 0$ のとき，$3tg_x(t^3,t^2)+2g_y(t^3,t^2)=0$．$t\to 0$ として $g_y(0,0)=0$ が分かる．もし，さらに $g_x(0,0)=0$ であれば，Dg_0 は全射ゆえ，$m=0$ でなければならない．このとき $V\cap Y=V$ であるが，これは任意の $\epsilon>0$ に対して $(0,-\epsilon)\notin Y$ に矛盾する．従って $g_x(0,0)\neq 0$．陰関数定理より，0 の開近傍 $W_1,W_2\subset\mathbb{R}$ と C^∞ 級関数 $h\colon W_2\to W_1$ が存在して $W_1\times W_2\subset V$ であり，

$$\{(x,y)\in W_1\times W_2\mid g(x,y)=0\}=\{(h(y),y)\mid y\in W_2\}$$

ここで左辺は $Y\cap(W_1\times W_2)$ に等しい．十分小さい $\epsilon>0$ に対して $-\epsilon\in W_2$ であるから，$(h(-\epsilon),-\epsilon)\in Y$ となる．一方 Y の点 (x,y) は $y^3=x^2\geq 0$ ゆえ，$y\geq 0$ を満たす．$(h(-\epsilon),-\epsilon)$ の y 成分は負であり，これは矛盾である．

問題 15 $p\in f^{-1}(0)$ をとる．$Df_p\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^n$ のランクが r であるから，必要なら $\mathbb{R}^N$ の座標 $(x_1,\ldots,x_N)$ および $f=(f_1,\ldots,f_n)$ の順番を入れ替えて，f の最初の r 個の成分と最初の r 個の座標 $(x_1,\ldots,x_r)$ に関する Jacobi 行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

のランクが r と仮定してよい．このとき，行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

は $x=p$ のある開近傍 U で正則である.（この行列の行列式は $x=p$ でゼロでなく，x の連続関数となるから．）ここで $F\colon U\to\mathbb{R}^r$ を

$$F(x)=(f_1(x),\ldots,f_r(x))$$

と定める．上の仮定から，任意の $x\in U$ に対して DF_x は全射である．従って

$$M=\{x\in U\mid F(x)=0\}$$

は点 p を含む $N-r$ 次元多様体となる．$M\supset f^{-1}(0)\cap U$ であることは明らか．十分小さい p の開近傍 $U'\subset U$ に対して，$M\cap U'=f^{-1}(0)\cap U'$ であることを示せばよい．

M は多様体であるから，点 p の周りのパラメータ付け $g\colon V \to M$ が存在する．ここで $V \subset \mathbb{R}^{N-r}$ は 0 を中心とする開球体で，$g(0) = p$ と仮定してよい．$F \circ g = 0$ であるから，chain rule より $DF_{g(x)} \circ Dg_x = 0$，つまり

$$\operatorname{Ker} DF_{g(x)} \supset \operatorname{Im} Dg_x, \quad x \in V$$

また明らかに

$$\operatorname{Ker} DF_{g(x)} \supset \operatorname{Ker} Df_{g(x)}$$

である．$\operatorname{rank} Df_{g(x)} = \operatorname{rank} DF_{g(x)} = r$ であるから，$\operatorname{Ker} DF_{g(x)}$ と $\operatorname{Ker} Df_{g(x)}$ の次元は $N - r$ に等しい．従って

$$\operatorname{Ker} Df_{g(x)} = \operatorname{Ker} DF_{g(x)} \supset \operatorname{Im} Dg_x$$

従って $D(f \circ g)_x = Df_{g(x)} \circ Dg_x = 0$．$V$ の連結性から $f \circ g$ は V 上の定数関数であり，$f(g(0)) = f(p) = 0$ であるから，V 上で $f \circ g = 0$ である．従って $g(V) \subset f^{-1}(0)$．パラメータ付け g は同相写像であることから，$\mathbb{R}^N$ の開集合 $U' \subset U$ を用いて $g(V) = M \cap U'$ の形に書ける．U' は $g(0) = p$ を含んでいる．ここで，

$$M \cap U' = g(V) \subset f^{-1}(0) \cap U'$$

逆向きの包含関係は明らかであるから，$M \cap U' = f^{-1}(0) \cap U'$．これが示すべきことであった．

問題 16 $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ を n 次対称行列全体の集合とする．これは $n(n+1)/2$ 次元の実ベクトル空間である．関数 $F\colon M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$, $F(A) = {}^tA \cdot A$ を考える．F は C^∞ 級写像で，その微分は

$$\begin{aligned}
DF_A(V) &= \lim_{t \to 0} \frac{{}^t(A + tV) \cdot (A + tV) - {}^tA \cdot A}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} ({}^tA \cdot V + {}^tV \cdot A + t\,{}^tV \cdot V) \\
&= {}^tA \cdot V + {}^tV \cdot A
\end{aligned}$$

で与えられる．ここで $V \in M_n(\mathbb{R})$．$A \in O(n, \mathbb{R})$ に対して微分 $DF_A\colon M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ が全射であることを示そう．任意の対称行列 Y に対して，$V = \frac{1}{2}{}^tA^{-1}Y$ とおく．このとき

$$d_AF(V) = {}^tA \cdot \frac{1}{2}{}^tA^{-1}Y + \frac{1}{2}{}^tYA^{-1} \cdot A = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}{}^tY = Y$$

である．従って DF_A は全射であり，

$$O(n, \mathbb{R}) = F^{-1}(I_n)$$

は $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ 次元の多様体である．

問題 17 (略解) 演習No.8の問題8の解答と同様の方針により，$DF_A(V) = AV + VA$ であり，また $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を A の（重複度[1]を込めた）固有値とするとき，

$$\det DF_A = \prod_{i=1}^{n}(2\lambda_i) \cdot \prod_{i<j}(\lambda_i + \lambda_j)^2$$

であることが分かる．$A^2 = B$ とするとき，A の（重複度を込めた）固有値が $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ であれば，B の（重複度を込めた）固有値は $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ となる．従って，もし B が n 個の互いに異なるゼロでない固有値を持つならば，$i \neq j$ に対して $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ であり，全ての i について $\lambda_i \neq 0$ であるから， $\det DF_A \neq 0$ である．

問題 18 $I = (i_1, \dots, i_r)$, $J = (j_1, \dots, j_r)$ を $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$ を満たす自然数列とする．このとき

$$U_{I,J} = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \begin{array}{l} A \text{ の } i_1, \dots, i_r \text{ 行，} j_1, \dots, j_r \text{ 列を} \\ \text{抜き出して得られる行列の行列式} \neq 0 \end{array} \right\}$$

とおく．$U_{I,J}$ は明らかに $M_n(\mathbb{R})$ の開集合である．

$$M = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rank} A = r\}$$

とおくとき，M の元はどれかの $U_{I,J}$ に属する．

$M \cap U_{I,J}$ のパラメータ付けを構成する．簡単のため $I = J = \{1, \dots, r\}$ とする．（それ以外の時も行・列の入れ替えにより同様に構成できる.）$M \cap U_{I,J}$ の元 A は

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ BX & BY \end{pmatrix}$$

の形に書ける．ここで $X \in M_r(\mathbb{R})$ は r 次正則行列，$Y \in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$ は $(r, n-r)$ 行列，$B \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ は $(n-r, r)$ 行列である．実際，$A \in U_{I,J}$ であるから，A から $1, \dots, r$ 行と $1, \dots, r$ 列を抜き出して得られる行列 X は正則である．また，A の $r+1$ 行から n 行までは 1 行から r 行までの一次結合として表されるから 1 行から r 行までの行列 (X, Y) に左から $(n-r, r)$ 行列 B を書けたものとして得られる．従って，$M \cap U_{I,J}$ のパラメータ付けが

$$\phi\colon GL_r(\mathbb{R}) \times M_{r,n-r}(\mathbb{R}) \times M_{n-r,r}(\mathbb{R}) \to M \cap U_{I,J}, \quad \phi(X, Y, B) = \begin{pmatrix} X & Y \\ BX & BY \end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで $V := GL_r(\mathbb{R}) \times M_{r,n-r}(\mathbb{R}) \times M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ は $M_r(\mathbb{R}) \times M_{r,n-r}(\mathbb{R}) \times M_{n-r,r}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{r^2 + r(n-r) + (n-r)r} = \mathbb{R}^{r(2n-r)}$ の開部分集合である．ϕ の逆写像は

$$\phi^{-1}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = (X, Y, ZX^{-1})$$

で与えられる．ϕ^{-1} はある C^∞ 級写像 $g\colon U_{I,J} \to V$ の制限として得られていることに注意する．(g を ϕ^{-1} と同じ式で定義すればよい．) 従って ϕ, ϕ^{-1} は共に C^∞ 級であり，$\phi\colon V \to M \cap U_{I,J}$ は微分同相写像．従って M は $r(2n-r)$ 次元多様体である．

[1] ここでの重複度は固有方程式における根の重複度を意味する

幾何学入門演習　No.11　(2024 年 1 月 10 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．($\star$) は基本的な問題です．

今日の授業での重要な定義と命題を以下にまとめる．

定義　$M \subset \mathbb{R}^N$ を m 次元 C^∞ 級多様体．$p \in M$ に対して，p のまわりのパラメータ付け $\phi\colon V \xrightarrow{\cong} U \subset M$ をとる．ここで V は $\mathbb{R}^m$ の開集合，U は M の開集合である．$f(x_0) = p$ を満たす点 $x_0 \in V$ をとる．点 p での<u>接空間</u> T_pM とは次で与えられる $\mathbb{R}^N$ の m 次元部分ベクトル空間である．

$$T_pM = \mathrm{Im}(Df_{x_0}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N)$$

命題　$M \subset \mathbb{R}^N$ を C^∞ 級多様体, $p \in M$ とする．p の開近傍 $W \subset \mathbb{R}^N$ と W 上の C^∞ 級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}^{N-m}$ が存在して，$M \cap W = \{x \in W \mid f(x) = 0\}$, $Df_p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m}$ は全射，となるとき，$T_pM = \mathrm{Ker}(Df_p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m})$ である．

定義　C^∞ 級写像 $F\colon M_1 \to M_2$ およびパラメータ付け $\phi_1\colon V_1 \xrightarrow{\cong} U_1 \subset M_1$, $\phi_2\colon V_2 \xrightarrow{\cong} U_2 \subset M_2$ が与えられたとする．このとき $\phi_2^{-1} \circ F \circ \phi_1\colon \phi_1^{-1}(F^{-1}(U_2)) \to V_2$ を F の<u>座標表示</u>という．F の座標表示は C^∞ 級である．

問題 1 ($\star$) 次の空間が多様体であることを示し，各点での接空間を求めよ．

(1) $X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \cos x + \cos y + \cos z = 0\}$.

(2) $X_2 = \{(y^3, xy^2, x^2y, x^3) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)\}$.

(3) $X_3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xyzw = 1, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 8\}$

問題 2 ($\star$) $M_n(\mathbb{R})$ を実数係数 n 次正方行列全体のなすベクトル空間とし，$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ とする．$GL_n(\mathbb{R})$ が多様体であることを示し，単位行列 $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ での接空間を求めよ．

問題 3 ($\star$) 部分ベクトル空間 $V \subset \mathbb{R}^N$ は多様体であり，その任意の点での接空間は V と一致することを示せ．

問題 4 写像 $F\colon S^2 \to \mathbb{R}^6$ を $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx)$ と定める．この写像の像 $M = F(S^2)$ は $S^2/\sim$ と同相であることを示せ．ここで $\sim$ は S^2 上の同値関係で，$p \sim q \Leftrightarrow p = q$ または $p = -q$ である．M を実射影平面という（これは $\mathbb{R}^3$ に埋め込むことができず，また向き付け可能ではない曲面の例である.）

問題 5 問題 4 における部分集合 $M \subset \mathbb{R}^6$ は C^∞ 級多様体であることを示し，点 $F(x, y, z) \in M$ での M の接空間を求めよ．

問題 6 ($\star$) 任意の実 n 次正方行列 $V \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$\lim_{t\to 0}\frac{\det(I_n + tV) - 1}{t} = \operatorname{tr}(V)$$

を示せ．ここで I_n は単位行列.

問題 7 ($\star$) 前問を用いて，$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ は多様体であることを示し，単位行列 $I_n \in SL_n(\mathbb{R})$ における接空間を求めよ．

問題 8 ($\star$) $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[z]$ を複素数係数の多項式で，$n \geq 1$, $a_0 \neq 0$ とする．P を写像 $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ とみなす．$\pi_\pm\colon S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ を $(0,0,\pm 1)$ からの立体射影とする．つまり $\pi_\pm(x,y,z) = (x+iy)/(1\mp z)$ と定める（複号同順）．ここで写像 $F_P\colon S^2 \to S^2$ を

$$F_P(x,y,z) = \begin{cases} (\pi_+^{-1}\circ P\circ \pi_+)(x,y,z) & (x,y,z) \neq (0,0,1) \text{ のとき} \\ (0,0,1) & (x,y,z) = (0,0,1) \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．F_P の $(0,0,1)$ の周りでの座標表示 $\pi_- \circ F_P \circ \pi_-^{-1}$ が

$$\{z \in \mathbb{C} \mid a_0 + a_1\overline{z} + \cdots + a_n\overline{z}^n \neq 0\}$$

上で定義されることを確認し，$\pi_- \circ F_P \circ \pi_-^{-1}$ を具体的に計算せよ．

定義 $i \in \{1,2\}$ に対して $M_i \subset \mathbb{R}^{N_i}$ を m_i 次元多様体とする．C^∞ 級写像 $F\colon M_1 \to M_2$ の点 $p_1 \in M_1$ での微分（接写像）$dF_{p_1}\colon T_{p_1}M_1 \to T_{p_2}M_2$ は以下の可換図式を満たす線形写像である．ただし $p_2 = F(p_1)$ であり，$\phi_i\colon V_i \xrightarrow{\cong} U_i \subset M_i$ は $\phi_i(x_i) = p_i$ を満たすパラメータ付け.

$$\begin{tikzcd} T_{p_1}M_1 \arrow[r, "d_pF"] & T_{p_2}M_2 \\ \mathbb{R}^{m_1} \arrow[u, "(D\phi_1)_{x_1}", "\cong"'] \arrow[r, "D(\phi_2^{-1}\circ F\circ\phi_1)_{x_1}"'] & \mathbb{R}^{m_2} \arrow[u, "\cong", "(D\phi_2)_{x_2}"'] \end{tikzcd}$$

問題 9 ($\star$) 上の定義において M_1 が $\mathbb{R}^{N_1}$ の開集合であるとき，dF_{p_1} は方向微分 DF_{p_1} と一致することを確かめよ．

問題 10 ($\star$) 開区間 (a,b) から多様体 $M \subset \mathbb{R}^N$ への C^∞ 級写像 $c\colon (a,b) \to M$ を M 上の C^∞ 級曲線という．c の微分 $dc_t\colon \mathbb{R} = T_t(a,b) \to T_{c(t)}M$ による $1 \in \mathbb{R}$ の像は $\frac{dc}{dt}(t)$ に一致することを確かめよ．これを速度ベクトルという．さらに任意の接ベクトル $v \in T_pM$ は点 p を通る C^∞ 級曲線の速度ベクトルとして得られることを示せ．つまり，ある C^∞ 写像 $c_v\colon (-\epsilon,\epsilon) \to M$ が存在して $c_v(0) = p$, $\frac{dc_v}{dt}(0) = v$ が成立する．

問題 11 $M \subset \mathbb{R}^N$ を多様体とする．$TM = \{(p,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid p \in M, v \in T_pM\}$ は多様体であることを示せ．TM を接ベクトル束という．

問題 12 $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^N$ を多様体とする．任意の点 $p \in M_1 \cap M_2$ について $T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^N$ が成り立つとき，$M_1 \cap M_2$ は多様体であることを示せ．

問題 13 $M = \{N \in M_n(\mathbb{R}) \mid N^{n-1} \neq 0, N^n = 0\}$ は多様体であることを示し，M に属する Jordan 標準形の行列 N_0（ただ一つある）での接空間を求めよ．

幾何学入門演習　No.11 解答例

問題 1 (1) $F(x,y,z) = \cos x + \cos y + \cos z$ とおくとき，$X_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\}$ である．多様体であることを示すには任意の $(x,y,z) \in X_1$ に対して $DF_{(x,y,z)} \neq 0$ を示せばよい．もし $DF_{(x,y,z)} = 0$ であれば，

$$(JF)_{(x,y,z)} = (-\sin x, -\sin y, -\sin z) = (0,0,0)$$

であるから，$x = n_1\pi, y = n_2\pi, z = n_3\pi$ を満たす $n_i \in \mathbb{Z}$ が存在する．このとき $F(x,y,z) = (-1)^{n_1} + (-1)^{n_2} + (-1)^{n_3}$ であり，これは奇数であるから 0 にはならない．従って $(x,y,z) \notin X_1$．以上より X_1 は多様体である．

$(x,y,z) \in X_1$ での接空間は $\mathrm{Ker}(DF_{(x,y,z)})$ で与えられるから，

$$T_{(x,y,z)}X_1 = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u\sin x + v\sin y + w\sin z = 0\}$$

(2) 写像 $\phi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to X_2$ を $\phi(x,y) = (y^3, xy^2, x^2y, x^3)$ と定める．ϕ がパラメータ付けの条件を満たすことを示そう．まず，$\phi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to X_2$ が全単射であることは容易にわかる．次に ϕ の逆写像 $\phi^{-1}\colon X_2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ が C^∞ 級であることを示そう．開集合 $U_i = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_i \neq 0\}$ を考えると．X_2 の定義より $X_2 \subset U_1 \cup U_4$ である．ここで写像 $\psi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $i \in \{1,4\}$ を

$$\psi_1(a_1,a_2,a_3,a_4) = (a_1^{-\frac{2}{3}}a_2, a_1^{\frac{1}{3}}) \quad a_1 \neq 0$$
$$\psi_4(a_1,a_2,a_3,a_4) = (a_4^{\frac{1}{3}}, a_3a_4^{-\frac{2}{3}}) \quad a_4 \neq 0$$

と定めるとこれは C^∞ 級関数であり，$(x,y) \in \phi^{-1}(U_i)$ のときに $\psi_i(\phi(x,y)) = (x,y)$ であることは容易に確かめられる．従って $X_2 \cap U_1$ 上では ϕ^{-1} は ψ_1 の制限であり，$X_2 \cap U_4$ 上では ϕ^{-1} は ψ_2 の制限となっている．従って ϕ^{-1} は C^∞ 級であり，ϕ は微分同相写像である．

写像 ϕ の微分 $D\phi_{(x,y)}$ は次のヤコビ行列で表現される．

$$(J\phi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 3y^2 \\ y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

点 $(y^3, xy^2, x^2y, x^3) \in X_2$ での接空間は $D\phi_{(x,y)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ の像で与えられるから，

$$T_{(y^3,xy^2,x^2y,x^3)}X_2 = \left\{ a\begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \\ 2xy \\ 3x^2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3y^2 \\ 2xy \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

(3) $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $F(x,y,z,w) = (xyzw - 1, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 8)$ とおく．このとき $X_3 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid F(x,y,z,w) = 0\}$ である．$(x,y,z,w) \in X_3$ に対して

$DF_{(x,y,z,w)}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ が全射であることを示せばよい．つまり，

$$(JF)_{(x,y,z,w)} = \begin{pmatrix} yzw & xzw & xyw & xyz \\ 2x & 2y & 2z & 2w \end{pmatrix}$$

のランクが 2 であることを示せばよい．$x^2+y^2+z^2+w^2=8$ より第 2 行はゼロではない．従ってもしランクが 1 以下であれば

$$(yzw, xzw, xyw, xyz) = \lambda(x,y,z,w)$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する．このとき

$$1 = xyzw = \lambda x^2 = \lambda y^2 = \lambda z^2 = \lambda w^2$$

であるから

$$8\lambda = \lambda(x^2+y^2+z^2+w^2) = 4$$

従って $\lambda = 1/2$．これから $x^2=y^2=z^2=w^2=2$．このとき，$1 = x^2y^2z^2w^2 = 2^4$ となって矛盾である．従って X_3 は多様体である．

点 $(x,y,z,w) \in X_3$ での接空間は $\operatorname{Ker} DF_{(x,y,z,w)}$ で与えられるから，

$$T_{(x,y,z,w)}X_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} yzw & xzw & xyw & xyz \\ 2x & 2y & 2z & 2w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 2 $GL(n,\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ 上の連続関数 $A \mapsto \det(A)$ が消えない点の集合であるから，$M_n(\mathbb{R})$ の開集合である．従って n^2 次元多様体である．実際，そのパラメータ付けは恒等写像 $\mathrm{id}\colon GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ で与えられる．また $I_n \in GL(n,\mathbb{R})$ での接空間は $D\,\mathrm{id}_{I_n} = \mathrm{id}_{M_n(\mathbb{R})}\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ の像，すなわち $M_n(\mathbb{R})$ 全体である．

問題 3 $V \subset \mathbb{R}^N$ を m 次元部分ベクトル空間とする．$v_1, \ldots, v_m$ を V の基底とする．写像 $\phi\colon \mathbb{R}^m \to V$ を $\phi(x_1,\ldots,x_m) = x_1v_1 + \cdots + x_mv_m$ と定める．ϕ がパラメータ付けの条件を満たすことを示そう．行列 $(v_1,\ldots,v_m)$ のランクは m なので，必要なら $\mathbb{R}^N$ の座標の順番を入れ替えて，この行列の最初の m 行からなる部分行列

$$A = \begin{pmatrix} v_{1,1} & & v_{m,1} \\ & \ddots & \\ v_{1,m} & & v_{m,m} \end{pmatrix}$$

は正則行列であるとしてよい．但し $v_i = {}^t(v_{i,1},\ldots,v_{i,N})$ とした．ϕ の逆写像 $g\colon V \to \mathbb{R}^m$ は

$$g(x_1,\ldots,x_N) = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

で与えられる．これは明らかに $\mathbb{R}^N$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像の V への制限となっているから，g は C^∞ 級である．以上より ϕ は微分同相写像であるから，パラメータ付けの条件を満たし，V は多様体となる．最後に $p \in V$ での接空間は $\phi(x) = p$ となる $x \in \mathbb{R}^m$ をとるとき，

$$T_pV = \mathrm{Im}(D\phi_x \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N) = \mathrm{Im}(\phi \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N) = V$$

で与えられる．

問題 4 写像 $F \colon S^2 \to \mathbb{R}^6$ は $F(p) = F(-p)$ を満たすため，連続写像 $\overline{F} \colon S^2/\sim \to \mathbb{R}^6$ を誘導する．$\overline{F}$ は単射であることを示す．$F(x, y, z) = F(x', y', z')$ であるとする．$x^2 = x'^2$, $y^2 = y'^2$, $z^2 = z'^2$ より $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{-1, 1\}$ が存在して

$$x' = \epsilon_1 x, \quad y' = \epsilon_2 y, \quad z' = \epsilon_3 z.$$

$(x, y, z) \in S^2$ より x, y, z のうち少なくとも一つはゼロではない．もし $x \neq 0$ とすると，$xy = x'y'$, $xz = x'z'$ より $\epsilon_1\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_1\epsilon_3 = 1$ が分かる．従って $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ であり，$(x, y, z) \sim (x', y', z')$．$y \neq 0$, $z \neq 0$ のときも同様である．以上より $\overline{F}$ は単射であることが分かった．$\overline{F} \colon S^2/\sim \to M = F(S^2)$ は全単射連続写像であり，$S^2/\sim$ はコンパクト，$M = F(S^2)$ はハウスドルフであるから，同相写像である．

問題 5 $\pi \colon S^2 \to S^2/\sim$ は開写像である．実際，任意の開集合 $U \subset S^2$ に対して $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U)$ は開集合なので $\pi(U)$ は開集合である．従って $F = \overline{F} \circ \pi \colon S^2 \to M$ も開写像となる．ただし，$\overline{F} \colon S^2/\sim \xrightarrow{\cong} M$ は前問の解答で得られた同相写像である．

S^2 の座標（パラメータ付け）$\phi \colon V \to S^2$, $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ を考える．このとき $F \circ \phi \colon V \to M$ は $M = F(S^2)$ のパラメータ付けを与えることを示そう．まず，$U := \phi(V) \subset S^2$ は開集合で，F は開写像であることから $F \circ \phi(V) = F(U)$ は M の開集合である．また $F \circ \phi(x, y) = F \circ \phi(x', y')$ であれば，$F \circ \phi = \overline{F} \circ \pi \circ \phi$ であり $\overline{F}$ は全単射であることから，$\pi(\phi(x, y)) = \pi(\phi(x', y'))$．$\phi(x, y)$ と $\phi(x', y')$ の z 成分は正であるから $\phi(x, y) = \phi(x', y')$ となり $(x, y) = (x', y')$．従って $F \circ \phi$ は単射である．最後に，$F \circ \phi$ の逆写像が C^∞ 級であることを示せばよい．写像 $\psi \colon \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in \mathbb{R}^6 \mid a_3 \neq 0\} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\psi(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (a_6 a_3^{-\frac{1}{2}}, a_5 a_3^{-\frac{1}{2}})$$

と定めるとこれは明らかに C^∞ 級．また ψ の定義域は $F \circ \phi(U)$ を含み，$\psi \circ (F \circ \phi)(x, y) = (x, y)$ であることは容易に確かめられる．従って $F \circ \phi$ の逆写像は ψ の制限であり，$(F \circ \phi)^{-1} \colon F \circ \phi(V) \to V$ は C^∞ 級写像である．以上によって $F \circ \phi$ はパラメータ付けを与える．同様に S^2 の他の座標 $\phi'(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$, $\phi''(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z)$ を考えることにより，パラメータ付け $F \circ \phi'$, $F \circ \phi''$ が得られる．これらのパラメータ付けは M を覆うため，M は C^∞ 級多様体である．

最後に接空間を計算する．$(x,y,z)\in S^2$ とし，$z>0$ とするとき，点 $F(x,y,z)=F(\phi(x,y))$ での接空間は $D(F\circ\phi)_{(x,y)}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^6$ の像で与えられる．それは

$$(2xz, 0, -2xz, yz, -xy, z^2-x^2), (0, 2yz, -2yz, xz, z^2-y^2, -xy)$$

で張られる 2 次元部分空間である．このベクトル空間は

$$(2xy, -2xy, 0, y^2-x^2, -xz, yz)$$

も含んでいる．一般の点 $(x,y,z)\in S^2$ に対しては，$F(x,y,z)$ での接空間はこれら 3 つのベクトルで生成される 2 次元部分空間となる（詳細略）．

問題 6 $P^{-1}VP$ が上三角行列になる複素係数行列 $P\in GL(n,\mathbb{C})$ をとる．

$$P^{-1}VP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

このとき，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\det(I_n+tV)-1}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\det(P^{-1}(I_n+tV)P)-1}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\det(I_n+tP^{-1}VP)-1}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(1+\lambda_1 t)(1+\lambda_2 t)\cdots(1+\lambda_n t)-1}{t}\\ &= \lambda_1+\cdots+\lambda_n\\ &= \mathrm{tr}(P^{-1}VP)=\mathrm{tr}(V)\end{aligned}$$

(別解)　$\det(I_n+tV)$ を t の多項式に展開したときの t の 1 次の項の係数が $\mathrm{tr}(V)$ になることを観察する．

問題 7 関数 $F\colon M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ を $F(A)=\det A-1$ とすると，F は C^∞ 級関数で $SL(n,\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid F(A)=0\}$．$A\in SL(n,\mathbb{R})$ に対して，

$$F(A+tV)=\det(A+tV)=\det A\cdot\det(I_n+tA^{-1}V)=\det(I_n+tA^{-1}V)$$

が成立する．これを t で微分することにより，前問の結果を用いると，

$$DF_A(V)=\mathrm{tr}(A^{-1}V)$$

が得られる．特に $DF_A(A)=n\neq 0$ より，DF_A は全射である．従って $SL(n,\mathbb{R})$ は多様体である．また I_n での接空間は $T_{I_n}SL(n,\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(DF_{I_n})=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid \mathrm{tr}(A)=0\}$．

問題 8 $\pi_\pm\colon S^2\setminus\{(0,0,\pm1)\}\to\mathbb{C}$ は全単射であり，その逆写像は

$$\pi_\pm^{-1}(x+iy)=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},\pm\frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right)$$

で与えられる．$\pi_\pm$ の間の座標変換は $z\neq0$ に対して

$$\pi_+\pi_-^{-1}(z)=\pi_+\left(\frac{2x}{1+|z|^2},\frac{2y}{1+|z|^2},\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)=\frac{x+iy}{|z|^2}=\frac{1}{\overline{z}}$$
$$\pi_-\pi_+^{-1}(z)=\frac{1}{\overline{z}}$$

となる．これらを使って問題の写像 $(\pi_-\circ F_P\circ\pi_-^{-1})(x+iy)$ を計算する．まず $z=x+iy\neq0$ のとき，$\pi_-^{-1}(z)\neq(0,0,1)$ であるから F_P の定義の前半が適用できて，

$$\begin{aligned}F_P(\pi_-^{-1}(z))&=(\pi_+^{-1}\circ P\circ\pi_+)(\pi_-^{-1}(z))\\&=\pi_+^{-1}P(1/\overline{z})\\&=\pi_+^{-1}\left(\frac{1}{\overline{z}^n}(a_0+a_1\overline{z}+\cdots+a_n\overline{z}^n)\right)\end{aligned}$$

となる．従って $a_0+a_1\overline{z}+\cdots+a_n\overline{z}^n\neq0$ のとき，$F_P(\pi_-^{-1}(z))\neq(0,0,-1)$ であり，これは π_- の定義域に入る．このとき，

$$\begin{aligned}(\pi_-\circ F_P\circ\pi_-^{-1})(z)&=\pi_-^{-1}\pi_+\left(\frac{1}{\overline{z}^n}(a_0+a_1\overline{z}+\cdots+a_n\overline{z}^n)\right)\\&=\frac{z^n}{\overline{a_0}+\overline{a_1}z+\cdots+\overline{a_n}z^n}\end{aligned}$$

となる．また $z=0$ のとき，$\pi_-^{-1}(z)=(0,0,1)$ より，F_P の後半の定義を適用して

$$F_P(\pi_-^{-1}(0))=(0,0,1)$$

これは π_- の定義域に入り，$(\pi_-\circ F_P\circ\pi_-^{-1})(0)=0$. 以上から，$a_0+a_1\overline{z}+\cdots+a_n\overline{z}^n\neq0$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して

$$(\pi_-\circ F_P\circ\pi_-^{-1})(z)=\frac{z^n}{\overline{a_0}+\overline{a_1}z+\cdots+\overline{a_n}z^n}$$

問題 9 $M_1\subset\mathbb{R}^{N_1}$ が開集合のとき，M_1 の恒等写像 $\mathrm{id}_{M_1}\colon M_1\to M_1$ がパラメータ付けを与え，$T_pM_1=\mathrm{Im}((D\,\mathrm{id}_{M_1})_p)=\mathbb{R}^{N_1}$ となる．定義より $dF_p\circ(D\,\mathrm{id}_{M_1})_p$ は $F=F\circ\mathrm{id}_{M_1}$ の方向微分に等しい．つまり，dF_p は方向微分 DF_p と等しい．

問題 10 前問より，$c\colon(a,b)\to M$ の微分は c の方向微分に等しく，それは $1\in\mathbb{R}=T_t(a,b)$ を $\frac{dc}{dt}(t)$ に写す．

任意の接ベクトル $v\in T_pM$ をとる．p の周りのパラメータ付け $\phi\colon V\to M$, $x_0\in V$, $\phi(x_0)=p$ をとる．ここで V は $\mathbb{R}^m$ の開集合である．接空間の定義により，ある $(w_1,\ldots,w_m)\in\mathbb{R}^m$ が存在して，$v=D\phi_{x_0}(w_1,\ldots,w_m)$ の形に書くことができる．曲

線 $c\colon (-\epsilon,\epsilon)\to M$ を $c(t)=\phi(a+t(w_1,\dots,w_m))$ とおく．ϵ が十分小さければ $c(t)$ は定義されており，C^∞ 級である．合成関数の微分法より，

$$\frac{dc}{dt}(0)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x_0)w_i=D\phi_{x_0}(w_1,\dots,w_m)=v$$

以上より示された．

問題 11 m 次元多様体 M の各点 $p\in M$ に対して，p の開近傍 $W\subset\mathbb{R}^N$ と W 上の C^∞ 級関数 $f\colon U\to\mathbb{R}^{N-m}$ が存在して $M\cap W=\{x\in W\mid f(x)=0\}$ かつ $Df_p\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N-m}$ は全射となる．必要なら W を小さく取り直して任意の $x\in W$ に対して Df_x が全射であると仮定してよい（何故か？）．このとき，任意の $x\in M\cap W$ に対して

$$T_xM=\mathrm{Ker}(Df_x\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N-m})$$

となる．従って

$$TM\cap(W\times\mathbb{R}^N)=\{(x,v)\in W\times\mathbb{R}^N\mid F(x,v)=0\}$$

となる．ここで $F\colon W\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N-m}\times\mathbb{R}^{N-m}$ を $F(x,v)=(f(x),Df_x(v))$ とおいた．F のヤコビ行列は

$$(JF)_{(x,v)}=\begin{pmatrix}(Jf)_x & 0\\ * & (Jf)_x\end{pmatrix}$$

の形をしており，$(Jf)_x$ のランクは $N-m$ であるから，このランクは $2(N-m)$ となる．従って $DF_{(x,v)}\colon\mathbb{R}^{2N}\to\mathbb{R}^{2(N-m)}$ は全射であり，TM は $2m$ 次元の多様体であることが分かる．

問題 12 まず次の補題から始める．

補題：線形写像 $F_1\colon W\to V_1$, $F_2\colon W\to V_2$ は全射で $\mathrm{Ker}(F_1)+\mathrm{Ker}(F_2)=W$ なら，

$$(F_1,F_2)\colon W\to V_1\oplus V_2,\quad w\mapsto(F_1(w),F_2(w))$$

も全射である．

(補題の証明)：任意の $(v_1,v_2)\in V_1\oplus V_2$ をとる．F_i は全射なので，ある $w_i\in W$ が存在して，$F_i(w_i)=v_i$ が満たされる．ここで $w_1-w_2\in W=\mathrm{Ker}(F_1)+\mathrm{Ker}(F_2)$ より，$w_1-w_2=u_1-u_2$ を満たす $u_i\in\mathrm{Ker}(F_i)$ が存在する．ここで $w:=w_1-u_1=w_2-u_2$ とおくとき，

$$F_1(w)=F_1(w_1-u_1)=F_1(w_1)=v_1,\quad F_2(w)=F_2(w_2-u_2)=F_2(w_2)=v_2$$

が成り立つ．従って $(F_1,F_2)(w)=(v_1,v_2)$ である．

以下，問題の解答に入る．$M_1,M_2\subset\mathbb{R}^N$ は多様体であるから，任意の点 $p\in M_1\cap M_2$ に対して p の開近傍 $U\subset\mathbb{R}^N$ 及び C^∞ 級関数 $f_i\colon U\to\mathbb{R}^{N-m_i}$, $i=1,2$ が存在して，$M_i\cap U=\{x\in U\mid f_i(x)=0\}$ および $d_pf_i\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N-m_i}$ は全射，が成立する．こ

のとき，$T_pM_i = \mathrm{Ker}((Df_i)_p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m_i})$ である．$f = (f_1, f_2)\colon U \to \mathbb{R}^{2N-m_1-m_2}$ と定義すると，

$$M_1 \cap M_2 \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

であり，$Df_p = ((Df_1)_p, (Df_2)_p)$，$\mathrm{Ker}(Df_1)_p + \mathrm{Ker}(Df_2)_p = T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^N$ ゆえ，補題から $Df_p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{2N-m_1-m_2}$ は全射．従って $M_1 \cap M_2$ は $m_1 + m_2 - N$ 次元多様体である．

問題 13 M に属する行列の Jordan 標準形は全て

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

であることは容易に分かる．

$$M = \{N \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(N^2) = \cdots = \mathrm{tr}(N^n) = 0, N^{n-1} \neq 0\}$$

であることを示そう．M の元の Jordan 標準形が N_0 であり，トレースは共役で変わらないことから，M の元が右辺に含まれることは明らかである．一方，右辺の元 N に対して，N の固有多項式を $\prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ とするとき，N の三角化を行うことにより，$0 = \mathrm{tr}(N^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$, $1 \leq k \leq n$ であることが分かる．従って $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の基本対象式も全て消えており，固有多項式は x^n．つまり N の固有値は 0 のみ．条件 $N^{n-1} \neq 0$ から N の Jordan 標準形は N_0 であり，N は M に属する．

$M_n(\mathbb{R})$ の開集合を $U = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^{n-1} \neq 0\}$ と定める．ここで $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ を $f(X) = (\mathrm{tr}(X), \ldots, \mathrm{tr}(X^n))$ と定める．$M = \{X \in U \mid f(X) = 0\}$ である．M が多様体であることを示すには，$X \in M$ に対して Df_X が全射であることを示せば十分である．直接計算より

$$Df_X(V) = (\mathrm{tr}(V), 2\,\mathrm{tr}(XV), \ldots, n\,\mathrm{tr}(X^{n-1}V))$$

であることが分かる．$M_n(\mathbb{R})$ 上の 2 次形式

$$(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$$

は正定値内積であって，$Df_X(V)$ は $I_n, 2 \cdot {}^tX, \ldots, n \cdot {}^t(X^{n-1})$ と V との内積として与えられる．従ってこれらの行列が $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せば十分である．X は Jordan 標準形 N_0 と共役であるから，$I_n, 2 \cdot {}^tN_0, \ldots, n \cdot {}^t(N_0^{n-1})$ が 1 次独立であることを示せば十分である．しかしこれは明らか．以上により M は $n^2 - n$ 次元多様体であることが分かった．

最後に $T_{N_0}M = \mathrm{Ker}(Df_{N_0})$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
T_{N_0}M &= \{V \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(V) = \mathrm{tr}(VN_0) = \cdots = \mathrm{tr}(VN_0^{n-1}) = 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} v_{11} & * & * & \cdots & * \\ v_{21} & v_{22} & * & & * \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & & v_{nn} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} v_{11} + v_{22} + \cdots + v_{nn} = 0, \\ v_{21} + v_{32} + \cdots + v_{n,n-1} = 0, \\ \vdots \\ v_{n1} = 0 \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

となる．

幾何学入門演習　No.12　(2024 年 1 月 17 日)

以下の問題を解いて，授業終了時に演習用紙を提出してください．問題が解けないときは，授業内容のまとめや復習，授業や問題についての質問を書いてもかまいません．本演習の TA が採点と添削を行います．真面目に取り組んでいると判断できる場合は点数（1 点）をつけます．また，授業中に黒板で解答を発表することもできます．$(\star)$ は基本的な問題です．

問題 1 $(\star)$ 多様体 $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ に対して $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ も多様体である（演習問題 No.10 の問題 11）．点 $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ での接空間は $T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2 \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ に等しいことを示せ．

問題 2 $(\star)$ $M \subset \mathbb{R}^N$ を多様体とする．包含写像 $i\colon M \to \mathbb{R}^N$ は C^∞ 級写像であることを示し，任意の点 $p \in M$ に対して，$di_p\colon T_pM \to T_p\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$ も包含写像であることを示せ.（この授業では T_pM は $\mathbb{R}^N$ の部分ベクトル空間として定義されていた.）

問題 3 $(\star)$ 2 次元球面 S^2 の点 $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ での接ベクトル (u, v, w) に対して C^∞ 級曲線 $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S^2$ で $c(0) = p$, $\frac{dc}{dt}(0) = (u, v, w)$ となるものを一つ与えよ．

問題 4 $(\star)$ $S^1 \subset \mathbb{C}$ を絶対値 1 の複素数全体の集合とする．これは多様体である．写像 $F\colon S^1 \to S^1$ を $F(z) = z^m$ と定義する．$\mathbb{C}$ の部分空間として $T_1S^1 = i\mathbb{R}$ であることを示し，写像 $dF_1\colon T_1S^1 \to T_1S^1$ を求めよ．

問題 5 $(\star)$ C^∞ 級多様体の間の写像 $F\colon M_1 \to M_2$ が C^∞ 級微分同相（diffeomorphism）であるとは，F が C^∞ 級写像であって，全単射であり，$F^{-1}\colon M_2 \to M_1$ も C^∞ 級であることをいう．F が微分同相であれば，$dF_p\colon T_pM_1 \to T_{F(p)}M_2$ は同型であることを示せ．このことから微分同相な多様体の次元が等しいことを導け．

問題 6 **(多様体に対する逆関数定理** $\star$**)** 多様体の間の写像 $F\colon M_1 \to M_2$ が点 $p \in M_1$ の近傍で C^∞ 級であり，$dF_p\colon M_1 \to M_2$ が同型であるとする．このとき点 p の開近傍 $U \subset M_1$ と点 $F(p)$ の開近傍 $V \subset M_2$ が存在して，$F(U) \subset V$ であり，写像 $F|_U\colon U \to V$ は微分同相写像となることを示せ．

問題 7 $(\star)$ $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の関数 $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z^2$ の臨界点を全て求めよ．

問題 8 $(\star)$ $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の関数 $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$ の臨界点を全て求めよ．

問題 9 $(\star)$ $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ を多様体とする．$F\colon M_1 \to M_2$ を C^∞ 級写像とする．点 $p \in M_1$ の $\mathbb{R}^{N_1}$ における開近傍 U 上で $F|_{U \cap M_1}$ が C^∞ 級写像 $\widetilde{F}\colon U \to \mathbb{R}^{N_2}$ に拡張されるとする（C^∞ 級写像の定義によりそのような拡張が十分小さな U 上で存在する）．このとき $dF_p = D\widetilde{F}_p|_{T_pM_1}$ を示せ．

問題 10 $(\star)$ $A \in O_3(\mathbb{R})$ を 3 次直交行列とする．A の定める写像 $f_A\colon S^2 \to S^2$, $f_A(x) = Ax$ の点 $p \in S^2$ での微分 $(df_A)_p\colon T_pS^2 \to T_{f_A(p)}S^2$ を求めよ．

問題 11 ($\star$) 写像 $F\colon S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}^3$ を $F(x,y) = x \times y$ と定める．ここで $\times$ は 3 次元ベクトルの外積である．この写像の臨界値を全て求めよ．

問題 12 直交群 $O_n(\mathbb{R})$ 上の関数 $f(A) = \mathrm{tr}(A)$ は C^∞ 級であることを示し，その臨界点を全て求めよ．

問題 13 ($\star$) 多様体 M 上の C^∞ 級関数の臨界点の集合は（M の相対位相に関して）閉集合であることを示せ．

問題 14 ($\star$) C^∞ 級写像 $S^2 \to \mathbb{R}^2$ は必ず臨界点を持つことを示せ．

問題 15 M_1, M_2 を m 次元コンパクト多様体，$F\colon M_1 \to M_2$ を C^∞ 級写像とする．F の正則値の集合を $U \subset M_2$ とする．U は M_2 の開集合であって，$F|_{F^{-1}(U)}\colon F^{-1}(U) \to U$ は被覆写像であることを示せ．

問題 16 (代数学の基本定理) $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[z]$ を複素数係数の多項式，$n \geq 2$, $a_0 \neq 0$ とする．演習 No.11 の問題 8 より，P は C^∞ 級写像 $F_P\colon S^2 \to S^2$ を定める．F_P の正則値の集合を $U \subset S^2$ とする．

(a) F_P の臨界点の集合を決定し，それが有限集合であることを示せ．

(b) $q \in U$ に対して $F_P^{-1}(q)$ は有限集合であり，その個数は q によらないことを示せ（前問の結果を用いる）．

(c) $P(z) = 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ が存在することを示せ．

問題 17 (正則値定理 $\star$) $F\colon M_1 \to M_2$ を C^∞ 級多様体の間の C^∞ 級写像とし，$q \in M_2$ を F の正則値とする．$F^{-1}(q)$ は空でなければ $m_1 - m_2$ 次元の多様体であることを示せ．ここで m_i は M_i の次元である．

問題 18 $M \subset \mathbb{R}^N$ を C^∞ 級多様体とする．Sard の定理を用いて，ほとんどすべての $a \in \mathbb{R}^N$ に対して $M \cap \{x \in \mathbb{R}^N \mid a \cdot x = 0\}$ は多様体であることを示せ．

幾何学入門演習　No.12 解答例

問題 1 $\phi_i\colon V_i \xrightarrow{\cong} U_i \subset M_i$ を点 $p_i \in M_i$ の周りのパラメータ付けとする．ここで V_i は $\mathbb{R}^{m_i}$ の開集合で，$\phi_i(x_i) = p_i$ とする．このとき $\phi := \phi_1 \times \phi_2\colon V_1 \times V_2 \to U_1 \times U_2 \subset M_1 \times M_2$ は $M_1 \times M_2$ のパラメータ付けを与える.（このことは簡単に証明できるためここでは省略する．$\phi_1 \times \phi_2$ とその逆写像が C^∞ 級であることを示せばよい.）従って

$$\begin{aligned} T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) &= \mathrm{Im}(D\phi_{(x_1,x_2)}\colon \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}) \\ &= \mathrm{Im}((D\phi_1)_{x_1} \times (D\phi_2)_{x_2}\colon \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}) \\ &= T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2. \end{aligned}$$

問題 2 $i\colon M \to \mathbb{R}^N$ は C^∞ 級写像 $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の M への制限であるから C^∞ 級である．

$\phi\colon V \to M$ を $\phi(x_0) = p$ を満たすパラメータ付けとする．ここで $x_0 \in V$ であり，V は $\mathbb{R}^m$ の開集合．di_p は次の可換図式によって定義されていた．

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "di_p"] & T_p\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N \\ \mathbb{R}^m \arrow[u, "D\phi_{x_0}"] \arrow[ur, "D(i\circ\phi)_{x_0}"'] & \end{tikzcd}$$

ここで $i \circ \phi = \phi$ であるから，明らかに $D\phi_{x_0}(v) = D(i \circ \phi)_{x_0}(v),\ \forall v \in \mathbb{R}^m$ である．$D\phi_{x_0}\colon \mathbb{R}^m \to T_pM$ は同型写像なので，$di_p\colon T_pM \to \mathbb{R}^N$ は包含写像である．

問題 3 点 $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in S^2$ の近傍のパラメータ付けを $\phi(y,z) = (\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)$ で定めよう．曲線 $c(t)$ を

$$c(t) = \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + vt, wt\right)$$

と定める．十分小さい $\epsilon > 0$ に対して，$c(t)$ は $(-\epsilon, \epsilon)$ 上で well-defined であり，C^∞ 級曲線を定める．また $c(0) = p$ は明らかであり，

$$\frac{dc}{dt}(0) = (v, v, w)$$

となる．また (u,v,w) は点 $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ での接ベクトルであるから，$p \perp (u,v,w)$．従って $u = v$ であり，上のベクトルは (u,v,w) に等しい．

問題 4 $1 \in S^1$ の周りでのパラメータ付けを $\phi\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S^1,\ \phi(\theta) = e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$ で定める．パラメータ付けの微分は

$$D\phi_\theta(v) = v\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ive^{i\theta}$$

で与えられる．従って $D\phi_0(v) = iv$ であり，$T_1S^1 = \mathrm{Im}(D\phi_0) = i\mathbb{R}$ であることが分かる．また，$F(z) = z^m$ の座標表示は $\theta = 0$ の近くで定義され，

$$\widehat{F}(\theta) = \phi^{-1} \circ F \circ \phi(\theta) = m\theta$$

で与えられる．この写像の方向微分は $D\widehat{F}_\theta(v) = mv$ で与えられる．可換図式

$$\begin{tikzcd} T_1S^1 \arrow[r, "dF_1"] & T_1S^1 \\ \mathbb{R} \arrow[u, "D\phi_0", "\cong"'] \arrow[r, "D\widehat{F}_0"] & \mathbb{R} \arrow[u, "\cong", "D\phi_0"'] \end{tikzcd}$$

および $D\phi_0(v) = iv$ より，$dF_1(iv) = imv$ となることが分かる．

問題 5 多様体の間の写像に関する chain rule より，

$$dF_p \circ d(F^{-1})_{F(p)} = d(F \circ F^{-1})_{F(p)} = \mathrm{id}$$
$$d(F^{-1})_{F(p)} \circ dF_p = d(F^{-1} \circ F)_p = \mathrm{id}$$

つまり $d(F^{-1})_{F(p)} : T_{F(p)}M_2 \to T_pM_1$ は $dF_p\colon T_pM_1 \to T_{F(p)}M_2$ の逆写像である．従って $dF_p\colon T_pM_1 \to T_{F(p)}M_2$ は同型であり，ベクトル空間 $T_pM_1, T_{F(p)}M_2$ は同じ次元を持つ．よって $\dim M_1 = \dim T_pM_1 = \dim T_{F(p)}M_2 = \dim M_2$.

問題 6 点 p と $F(p)$ の周りのパラメータ付け $\phi_1\colon V_1 \xrightarrow{\cong} U_1 \subset M_1$, $\phi_2\colon V_2 \xrightarrow{\cong} U_2 \subset M_2$ をとる．ここで，$a_1 \in V_1$ に対して $\phi_1(a_1) = p$，$a_2 \in V_2$ に対して $\phi_2(a_2) = F(p)$ とする．F は点 p の近傍で C^∞ 級であるから，必要なら p の近傍 U_1 を小さく取り直して $F(U_1) \subset U_2$ であり，$\widehat{F} = \phi_2^{-1} \circ F \circ \phi_1\colon V_1 \to V_2$ は C^∞ 級としてよい．$dF_p\colon M_1 \to M_2$ が同型であるから，

$$D\widehat{F}_{a_1}\colon \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$$

も同型である．逆写像定理より点 a_1 の開近傍 $V_1' \subset V_1$ と点 a_2 の開近傍 $V_2' \subset V_2$ が存在して，$\widehat{F}(V_1') = V_2'$ かつ $\widehat{F}\colon V_1' \to V_2'$ は微分同相写像となる．$U = \phi_1(V_1'), V = \phi_2(V_2')$ とすればこれらは各々 M_1, M_2 の開集合であって，$F|_U\colon U \to V$ は微分同相写像の合成

$$F|_U = (\phi_2|_{V_2'}) \circ (\widehat{F}|_{V_1'}) \circ (\phi_1|_{V_1'})^{-1}$$

で与えられるため，微分同相写像である．

問題 7 $p = (x, y, z) \in S^2$ をとる．$z > 0$ なら，p の周りのパラメータ付け $\phi\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \to S^2$，$f(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ を考える．

$$f \circ \phi(x, y) = 1 - x^2 - y^2, \quad J(f \circ \phi)_{(x,y)} = (-2x, -2y)$$

であり，$\mathrm{rank}(J(f \circ \phi)_{(x,y)}) = 0$ なら $x = y = 0$ となる．従って $z > 0$ の範囲で f の臨界点は $(0, 0, 1)$ だけである．$z < 0$ のときも同じ計算により臨界点は $(0, 0, -1)$ だけであることが分かる．

次に $z = 0$ の場合を考える．$x > 0$ と仮定する．p の周りのパラメータ付けを $\phi\colon \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\} \to S^2$，$\phi(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$ とする．このとき

$$f \circ \phi(y, z) = z^2, \quad J(f \circ \phi)_{(y,z)} = (0, 2z)$$

であるから，$z=0$ のとき $\mathrm{rank}(J(f\circ\phi)_{(y,z)})=0$．つまりすべての点 $(x,y,0)\in S^2$, $x>0$ は f の臨界点である．$x<0,\ y>0,\ y<0$ の場合も同じ計算をすればすべての点 $(x,y,0)\in S^2$ は f の臨界点である．よって f の臨界点全体は $\{(x,y,0)\in S^2\}\cup\{(0,0,1),(0,0,-1)\}$

（別解） 立体射影の逆写像 $\pi_{\pm}^{-1}\colon\mathbb{R}^2\to S^2$ を S^2 のパラメーター付けとする．ここで

$$\pi_{\pm}^{-1}(x,y)=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},\pm\frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right)$$

であった．$f(x,y,z)=z^2$ の $S^2\backslash\{(0,0,1)\}$ における臨界点を探す．これは，$g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ g(x,y)=f\circ\pi_{+}^{-1}(x,y)=\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)^2$ の臨界点を探すことに等しい．つまり臨界点は

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{8x(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^3}=0,\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{8y(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^3}=0$$

を解いて得られる．これを満たす (x,y) は $(x,y)=(0,0)$ および $x^2+y^2=1$ となる点である．これを π_{+} で引き戻すと，臨界点は $(0,0,-1)$ および赤道 $z=0$.

$S^2\backslash\{(0,0,-1)\}$ でも同様に考えて，f の臨界点は $(0,0,1),(0,0,-1),\{(x,y,z)\in S^2\mid z=0\}$ である．

問題 8 $S^2\cap\{z>0\}$ のパラメータ付け $\phi\colon\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\}\to S^2$, $\phi(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ をとる．$f\circ\phi(x,y)=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$ の臨界点を求める．方程式

$$\frac{\partial(f\circ\phi)}{\partial x}=\frac{y(1-2x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=0,\quad \frac{\partial(f\circ\phi)}{\partial y}=\frac{x(1-x^2-2y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=0$$

を $x^2+y^2<1$ の範囲で解いて $(x,y)=(0,0),(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3})$ を得る．これらは S^2 上の臨界点 $(0,0,1)$, $(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ を与える．他のチャートでも同様に考えると，f の臨界点全体は $\{(0,0,\pm1),(0,\pm1,0),(\pm1,0,0),(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3})\}$（複号任意）となることが分かる．

（別解）関数 $f\colon S^2\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^3$ 上の関数 $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ F(x,y,z)=xyz$ に拡張される．$i\colon S^2\to\mathbb{R}^3$ を包含写像とするとき，$f=F\circ i$ であるから，各点 $p\in S^2$ について $df_p=dF_p\circ di_p$．ここで $di_p\colon T_pS^2\to\mathbb{R}^3$ は包含写像であったから，$df_p=dF_p|_{T_pS^2}$ であることが分かる．また F はユークリッド空間上の関数なので $dF_p=DF_p$ であることにも注意しておく．従って，$p=(x,y,z)\in S^2$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(df_p)&=(\mathrm{Ker}\,DF_p)\cap T_pS^2\\&=\mathrm{Ker}((yz,zx,xy)\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R})\cap p^{\perp}\\&=\mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}yz&zx&xy\\x&y&z\end{pmatrix}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\right)\end{aligned}$$

途中で $T_pS^2 = p^\perp$ であることを用いた．従って

$$
\begin{aligned}
p \text{ は } f \text{ の臨界点} &\iff \mathrm{rank}(df_p) < 1 \\
&\iff \dim \mathrm{Ker}(df_p) > 1 \\
&\iff \dim \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} yz & zx & xy \\ x & y & z \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\right) > 1 \\
&\iff \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} yz & zx & xy \\ x & y & z \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\right) < 2 \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{s.t. } (yz, zx, xy) = \lambda(x, y, z).
\end{aligned}
$$

これが成り立つとき，$\lambda x^2 = \lambda y^2 = \lambda z^2 = xyz$ である．$\lambda \neq 0$ ならば $x^2 = y^2 = z^2$．$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ より $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}$ であり，$(x, y, z) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3})$（複号任意）のいずれかとなる（またこの時 $\lambda = xyz/x^2 = xyz/y^2 = xyz/z^2$ に対して上の条件が成り立つ）．また $\lambda = 0$ のとき，$xy = yz = zx = 0$ である．$x \neq 0$ ならば $y = z = 0$ より $(x, y, z) = (\pm 1, 0, 0)$．同様に $y \neq 0$ ならば $(x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$，$z \neq 0$ ならば $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$．以上により臨界点の集合は $\{(0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0), (\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3})\}$（複号任意）となる．

（注意）上の計算は $xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)/2$ の臨界点を求めること（Lagrange の未定乗数法）と同じである．

問題 9 $\phi_i \colon V_i \overset{\cong}{\to} U_i \subset M_i$ を $p \in U_1$, $F(p) \in U_2$ を満たすパラメータ付けとする．ここで V_i は $\mathbb{R}^{m_i}$ の開集合である．$\phi_1(x_1) = p$, $\phi_2(x_2) = F(p)$ としておく．微分 $dF_p \colon T_pM_1 \to T_{F(p)}M_2$ は次の図式を可換にするただ一つの写像として定義された．

$$
\begin{array}{ccc}
T_pM_1 & \xrightarrow{dF_p} & T_{F(p)}M_2 \\
{\scriptstyle (D\phi_1)_{x_1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (D\phi_2)_{x_2}} \\
\mathbb{R}^{m_1} & \xrightarrow{D\widehat{F}_{x_1}} & \mathbb{R}^{m_2}
\end{array}
$$

ただし，$\widehat{F} = \phi_2^{-1} \circ F \circ \phi_1$ は $x_1 \in V_1$ の開近傍で定義される F の座標表示である．ここで

$$\widetilde{F} \circ \phi_1 = F \circ \phi_1 = \phi_2 \circ (\phi_2^{-1} \circ F \circ \phi_1) = \phi_2 \circ \widehat{F}$$

であることに注意すると，chain rule から

$$D\widetilde{F}_p \circ (D\phi_1)_{x_1} = (D\phi_2)_{x_2} \circ D\widehat{F}_{x_1}$$

が分かる.（ここで $\widetilde{F}$ がユークリッド空間の開集合上定義される関数であることを使って，方向微分に対する従来の chain rule を用いた.）従って，可換図式

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{N_1} & \xrightarrow{D\widetilde{F}_p} & \mathbb{R}^{N_2} \\
{\scriptstyle (D\phi_1)_{x_1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (D\phi_2)_{x_2}} \\
\mathbb{R}^{m_1} & \xrightarrow{D\widehat{F}_{x_1}} & \mathbb{R}^{m_2}
\end{array}
$$

が成立している．このことから $dF_p = D\widetilde{F}_p|_{T_pM_1}$ が従う．

（別解）$i\colon M_1 \to \mathbb{R}^{N_1}$ を包含写像とする．等式

$$\widetilde{F} \circ i = F$$

が M_1 の開集合 $U \cap M_1$ 上成り立つことから,（多様体の間の写像の微分の）chain rule により

$$d\widetilde{F}_p \circ di_p = dF_p$$

$di_p\colon T_pM_1 \to \mathbb{R}^{N_1}$ は包含写像と一致する（問題 2）から，これは $d\widetilde{F}_p = dF_p|_{T_pM_1}$ を意味する．また $d\widetilde{F}_p = D\widetilde{F}_p$ であることは以前に見た（演習 No.11 問題 9）．よって $D\widetilde{F}_p = dF_p|_{T_pM_1}$ である．

問題 10 写像 $\tilde{f}_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\tilde{f}_A(x) = Ax$ で定めると，これは f_A の拡張になっている．$\tilde{f}_A$ は線形写像であるから，$D\tilde{f}_A = \tilde{f}_A$ である．問題 9 より，

$$(df_A)_p(v) = (D\tilde{f}_A)_p(v) = \tilde{f}_A(v) = Av.$$

問題 11 写像 F は $\tilde{F}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{F}(x,y) = x \times y$ の制限であることに注意すると，問題 1 と問題 9 より $dF_{(p_1,p_2)} = D\tilde{F}_{(p_1,p_2)}|_{T_{(p_1,p_2)}(S^2 \times S^2)} = D\tilde{F}_{(p_1,p_2)}|_{T_{p_1}S^2 \times T_{p_2}S^2}$ である．また $u, v \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$D\tilde{F}_{(p_1,p_2)}(u,v) = u \times p_2 + p_1 \times v$$

であることは容易に分かる．従って $(u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ と $p = (p_1,p_2) \in S^2 \times S^2$ に対して

$$\begin{aligned}(u,v) \in \mathrm{Ker}(dF_p) &\Longleftrightarrow u \in T_{p_1}S^2,\ v \in T_{p_2}S^2,\ D\tilde{F}_{(p_1,p_2)}(u,v) = 0 \\ &\Longleftrightarrow u \perp p_1,\ v \perp p_2,\ u \times p_2 + p_1 \times v = 0\end{aligned}$$

である．$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 e_1, e_2, e_3 を $e_1 = p_1$, $p_2 = ae_1 + be_2$, $e_3 = e_1 \times e_2$ となるように取る（ここで $a^2 + b^2 = 1$）．このとき上の式から $(u,v) \in \mathrm{Ker}(dF_p)$ に対して

$$u = \lambda e_2 + \mu e_3, \quad v = \rho(-be_1 + ae_2) + \delta e_3$$

を満たす実数 $\lambda, \mu, \rho, \delta$ が存在して，

$$0 = u \times p_2 + p_1 \times v = -b\mu e_1 + (a\mu - \delta)e_2 + a(\rho - \lambda)e_3$$

従って $b\mu = 0, \delta = a\mu, a(\rho - \lambda) = 0$ となる．以上から

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(dF_p) &= \begin{cases}\{(\lambda e_2, \lambda(-be_1 + ae_2)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} & a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ のとき} \\ \{(\lambda e_2, \rho(-be_1 + ae_2)) \mid \lambda, \rho \in \mathbb{R}\} & a = 0,\ b \neq 0 \text{ のとき} \\ \{(\lambda e_2 + \mu e_3, \lambda(-be_1 + ae_2) + a\mu e_3) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} & a \neq 0,\ b = 0 \text{ のとき}\end{cases} \\ &= \begin{cases}\{\lambda(e_2, -be_1 + ae_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} & a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ のとき} \\ \{(\lambda e_2, \rho e_1) \mid \lambda, \rho \in \mathbb{R}\} & a = 0,\ b \neq 0 \text{ のとき} \\ \{(\lambda e_2 + \mu e_3, a(\lambda e_2 + \mu e_3)) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} & a \neq 0,\ b = 0 \text{ のとき}\end{cases}\end{aligned}$$

と計算できる．dF_p は 4 次元空間から 3 次元空間への線形写像であるから，これが全射であることと $\operatorname{Ker} dF_p$ の次元が 1 であることは同値．従って

$$dF_p \text{ が全射でない} \iff p_1, p_2 \text{ は平行あるいは直交する．}$$

そのような点 $p = (p_1, p_2)$ の F による像は $S^2 \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ となる．これが臨界値の集合である．

問題 12 $f\colon O_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は線形関数 $\operatorname{tr}\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ と包含写像 $i\colon O_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ の合成 $\operatorname{tr} \circ i$ であるから C^∞ 級である．$A \in O(n, \mathbb{R})$ について A が f の臨界点であることは，$df_A = 0$ と同値である．$df_A = d\operatorname{tr}_A \circ di_A = \operatorname{tr} \circ di_A$ であるから（ここで tr は線形写像なので $d\operatorname{tr}_A = \operatorname{tr}$ であることを用いた），これは $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) \supset \operatorname{Im} di_A = T_A O_n(\mathbb{R})$ と同値．$O_n(\mathbb{R})$ の A での接空間は授業で見たように（演習 No.10 の問題 16 も見よ）

$$T_A O_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{T}} A + A^{\mathrm{T}} X = 0\}$$

で与えられる[1]．$X \in T_A O(n, \mathbb{R})$ に対して $Y = A^{-1} X = A^{\mathrm{T}} X$ とおくと，$Y^{\mathrm{T}} + Y = X^{\mathrm{T}} A + A^{\mathrm{T}} X = 0$ であるから，Y は反対称行列である． 逆に反対称行列 Y に対して $X = AY$ とおくと $X^{\mathrm{T}} A + A^{\mathrm{T}} X = 0$ を満たすこともわかるから，

$$T_A O_n(\mathbb{R}) = \{AY \mid Y^{\mathrm{T}} + Y = 0\}$$

つまり A が f の臨界点 $\Leftrightarrow$ 任意の反対称行列 Y に対して $\operatorname{tr}(AY) = 0$．反対称行列の空間の基底（$(i,j)$ 成分が 1, (j,i) 成分が -1，それ以外の成分はゼロ）

$$Y_{i,j} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

を考える．$A = (a_{i,j})$ とおくとき $\operatorname{tr}(AY_{i,j}) = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$ ゆえ，A が臨界点であることと A が対称行列であることとは同値．このとき $A^2 = AA^{\mathrm{T}} = I_n$ であるから，A の固有値は ± 1 のみ．A は（対称行列なので）$\mathbb{R}$ 上対角化可能で，固有値 ± 1 の固有空間 $W_\pm$ は互いに直交補空間となる．以上より臨界点は次のような記述を持つ．

$$\begin{aligned}\{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid A = A^{\mathrm{T}}\} &= \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = I_n\} \\ &\cong \bigsqcup_{k=0}^{n} \{W_+ \subset \mathbb{R}^n \mid \dim W_+ = k\}\end{aligned}$$

問題 13 $F\colon M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．F の臨界点の集合を $C \subset M$ とする．C の補集合が（相対位相に関して）開集合であることを示そう．そのためには任意のパラメータ付け $f\colon V \to M$（ここで V は $\mathbb{R}^m$ の開集合）に対して，$f(V) \setminus C$ が開集合であること，つまり $f^{-1}(M \setminus C)$ が開集合であることを示せばよい．ここで

$$f^{-1}(M \setminus C) = \left\{ x \in V \;\middle|\; \left(\frac{\partial (F \circ f)}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial (F \circ f)}{\partial x_n}(x) \right) \neq 0 \right\}$$

であるからこれは V の開集合である．

[1] ここでは行列 X の転置行列を X^{T} という記号で表している．

問題 14 $F\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級関数とする．F の成分を (F_1, F_2) と書くとき，$F_i\colon S^2 \to \mathbb{R}$ は連続関数である．S^2 のコンパクト性から F_1 はある点 $p \in S^2$ で最大値を持つ．このとき p の周りのパラメータ付け $f\colon V \to S^2$ に対して $f(a) = p$ とすると，

$$J(F \circ f)_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

の形をしているから，$p = f(a)$ は F の臨界点である．

問題 15 M_1 はコンパクト，M_2 はハウスドルフであるから，連続写像 $F\colon M_1 \to M_2$ は固有 (proper) である．実際，任意のコンパクト集合 $K \subset M_2$ は閉であり，$F^{-1}(K)$ は M_1 の閉集合，従ってコンパクトである．

またF の臨界点の集合 $C \subset M_1$ は閉であることが問題 13 と同様の議論により分かる（詳細は略する）．従って $C \subset M_1$ はコンパクトであり，その像 $F(C)$ はコンパクト．M_2 のハウスドルフ性から $F(C)$ は閉である．従って正則値の集合 $U = M_2 \setminus F(C)$ は開集合である．

固有写像 F を $F^{-1}(U)$ に制限した写像 $F|_{F^{-1}(U)}\colon F^{-1}(U) \to U$ は固有である．演習 No.5 の問題 6 から,（多様体は局所コンパクトハウスドルフ空間であるから）F が局所同相であることが分かればよい．任意の点 $x \in F^{-1}(U)$ において，$\dim M_1 = \dim M_2$ であるから，微分 $dF_x\colon T_xM_1 \to T_{F(x)}M_2$ は同型写像である．従って逆関数定理（問題 6）から F は x の開近傍 U と $F(x)$ の開近傍 V の間の微分同相写像を導く．特に F は局所同相写像である．

問題 16 演習 No.11 の問題 8 にある通り立体射影 $\pi_\pm\colon S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ を定める．

(a) F_P の $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ 上での座標表示は $P(z) = (\pi_+ \circ F_P \circ \pi_+^{-1})(z)$ で与えられる．従って $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ 上での F_P の臨界点は $P(z)$ の臨界点の π_+^{-1} による像となる．また $(0,0,1)$ の周りの座標表示は

$$(\pi_- \circ F_P \circ \pi_-^{-1})(z) = \frac{z^n}{\overline{a_0} + \overline{a_1}z + \cdots + \overline{a_n}z^n}$$

で与えられた．$n \geq 2$, $a_0 \neq 0$ より，この関数の $z = 0$ での微分は 0 であるから，対応する点 $\pi_-^{-1}(0) = (0,0,1)$ は臨界点となる．以上より臨界点は

$$C = \{\pi_+^{-1}(z) \mid P'(z) = 0\} \cup \{(0,0,1)\}$$

となり有限集合である.（$P'(z) = 0$ を満たす z が有限個，という事実の証明には代数学の基本定理は必要ない.）

(b) $F_P\colon S^2 \to S^2$ はコンパクト多様体の間の C^∞ 級写像であり，問題 15 より，F_P を $F_P^{-1}(U)$ に制限した写像 $F_P|_{F_P^{-1}(U)}\colon F_P^{-1}(U) \to U$ は固有な被覆写像である．特に $q \in U$ に対して $F_P^{-1}(q)$ は（コンパクト離散位相空間なので）有限集合である．(a) から臨界値の集合も有限であるため，U は S^2 から有限個の点を除いた集合である．従って U は連結であり，演習 No.5 の問題 8 より，$F_P^{-1}(q)$ の個数は $q \in U$ の取り方によらない．

(c) もし $\pi_+^{-1}(0) = (0,0,-1) \in S^2$ が F_P の臨界値であれば，臨界値の定義により $P(z) = 0$ を満たす z が存在する．$q_0 = \pi_+^{-1}(0)$ が正則値であるとする．$F_P^{-1}(q_0) \neq \varnothing$ を示せばよい．もし $F_P^{-1}(q_0) = \varnothing$ であれば，(b) で示したことから任意の $q \in U$ について $F_P^{-1}(q) = \varnothing$ でなければならない．このとき F_P の像は全て臨界値であるから，有限集合となる．S^2 は連結なので $F_P(S^2)$ は 1 点集合となり，従って P は定数関数となる．これは $n \geq 2$, $a_0 \neq 0$ という仮定に反している．

問題 17 $q \in M_2$ を $F\colon M_1 \to M_2$ の正則値とする．任意の点 $p \in F^{-1}(q)$ に対して p の開近傍 $U \subset F^{-1}(q)$ であって $\mathbb{R}^{m_1-m_2}$ の開近傍と微分同相であるものが存在することを示せばよい．p の周りのパラメータ付け $\phi_1\colon V_1 \xrightarrow{\cong} U_1 \subset M_1$, q の周りのパラメータ付け $\phi_2\colon V_2 \xrightarrow{\cong} U_2 \subset M_2$ をとる．ここで $p \in U_1$, $q \in U_2$ である．また $\phi_1(x_1) = p$, $\phi_2(x_2) = q$ とする．必要なら U_1 を小さく取り直して $F(U_1) \subset U_2$ と仮定してよい．このとき F の座標表示は

$$\widehat{F} = \phi_2^{-1} \circ F \circ \phi_1\colon V_1 \to V_2$$

によって与えられる．このとき F の微分の定義から，$x_2 \in V_2$ は $\widehat{F}$ の正則値である．ヤコビ判定法により，$\widehat{F}^{-1}(x_2)$ は $m_1 - m_2$ 次元多様体である．また

$$\phi_1|_{\widehat{F}^{-1}(x_2)}\colon \widehat{F}^{-1}(x_2) \to F^{-1}(q) \cap U_1$$

は全単射であって，微分同相写像の制限であるから微分同相写像となる．特に $p \in F^{-1}(q) \cap U_1$ の開近傍であって $\mathbb{R}^{m_1-m_2}$ の開近傍と微分同相であるものが存在する．従って $F^{-1}(q)$ は多様体である．

問題 18 (略解) まず $0 \notin M$ のときを考える．$N = \{(x,a) \in M \times \mathbb{R}^N \mid x \cdot a = 0\}$ とおくと，これが多様体になることはヤコビ判定法から容易にチェックできる．第 2 成分への射影 $\pi_2\colon N \to \mathbb{R}^N$, $\pi_2(x,a) = a$ の正則値 a をとればよい．

次に $0 \in M$ のときは，$N' = \{(x,a) \in M \times (\mathbb{R}^N \setminus T_0M^\perp) \mid x \cdot a = 0\}$ を考え，$\pi_2\colon N' \to \mathbb{R}^N \setminus T_0M^\perp$ の正則値をとればよい．