幾何学入門演習　No.1　(2022 年 10 月 5 日)

問題 1 2 次元トーラスを $\mathbb{R}^3$ 内の曲面として表す式を与えよ．二人乗りの浮き輪（種数 2 の曲面）を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面として表す式は存在するか．

問題 2 X を位相空間，$A \subset X$ を部分集合とする．A に相対位相を入れる．

(1) 包含写像 $i\colon A \to X,\ i(a) = a$ は連続であることを示せ．

(2) X がハウスドルフ空間なら A もハウスドルフ空間であることを示せ．

(3) A の閉集合は X の閉集合か．(答えは一般には否．反例を与えよ．但し，A がコンパクトで X がハウスドルフ空間の時はどうなるか．)

問題 3 (X, d) を距離空間とする．距離から定まる位相について X はハウスドルフであることを示せ．

問題 4 $\mathbb{R}^n$ 上のユークリッド距離 $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ を考え，$\mathbb{R}^n$ にはこの距離 d に付随する位相を入れる．積位相空間の定義を復習し，$n, m \geq 0$ に対して，位相空間 $\mathbb{R}^{n+m}$ は $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の積位相空間であることを証明せよ．

問題 5 $f_i\colon X_i \to Y_i,\ i = 1, 2$ を連続写像とする．写像 $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ を $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ と定める．$f_1 \times f_2$ は連続写像であることを示せ．

問題 6 X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続写像とし，$A \subset X$ と $B \subset Y$ を部分集合であって $f(A) \subset B$ が成り立つものとする．A, B に相対位相を入れるとき，f を A に制限して得られる写像 $f|_A\colon A \to B$ は連続であることを示せ．

問題 7 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について，次は同値であることを示せ．

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ such that $\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$

(2) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ について $f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合

問題 8 複素平面 $\mathbb{C}$ と開円盤 $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ は同相か．閉円盤 $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ の場合はどうなるか．

問題 9 三角形 $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ の境界 $\partial\Delta$ と $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ とは同相か．

問題 10 次のアルファベットの文字のペアは互いに同相か．但し，文字は太さを持たない 1 次元のグラフと考える．

(1) L と M，(2) A と R，(3) O と D，(4) X と Y, (5) L と Y, (6) A と O

問題 11 写像 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$，$f(x, y) = (x, y)$ を包含写像とする．f は定値写像 $g\colon S^1 \to \mathbb{R}^2, g(x, y) = (1, 0)$ とホモトピックであることを示せ．

問題 12 上の問題で $f, g\colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とみなすと f と g はホモトピックではなくなることを観察せよ.

問題 13 任意の連続写像 $f\colon S^1 \to S^2$ は定値写像とホモトピックである．この理由を考えよ.（ヒント：もし f が全射でなければ，あまり難しくはない．ただしペアノ曲線のように f は全射になることもあり得る.）

問題 14 (レポート問題 10 月 11 日 17:00 締め切り) 授業で紹介した次の補題を証明せよ．X, Y を位相空間，A, B を X の閉部分集合で，$X = A \cup B$ とする．写像 $f\colon X \to Y$ について次は同値であることを示せ.

(1) f は連続である.

(2) $f|_A\colon A \to Y$, $f|_B\colon B \to Y$ は共に連続である.（ただし，A, B には相対位相が入っているものとする.）

また，$X = A \cup B$ は満たすが，A, B が閉部分集合とは限らない場合に，同値性の反例を与えよ.

幾何学入門演習　No.1 解答例

問題 1 (2 次元トーラスのパラメータ表示) $R > r > 0$ とする．2 次元トーラス T^2 は $\mathbb{R}^3$ の中で, 実パラメータ θ, ψ を用いて

$$x = (R + r\cos\psi)\cos\theta, \quad y = (R + r\cos\psi)\sin\theta, \quad z = r\sin\psi$$

とパラメータ表示できる．これは (x, z) 平面の $(R, 0)$ を中心とする半径 r の円を z 軸を回転軸として回転させて得られる．

(陰関数による方法) 上記のパラメータ表示を閉じた式に直すことができる．

$$x^2 + y^2 = (R + r\cos\psi)^2$$

より

$$r\cos\psi = \sqrt{x^2 + y^2} - R$$

これと $z = r\sin\psi$ を合わせて

$$z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 = r^2$$

(種数 2 の曲面を表す式の例[1])

$$(y^2 + x(x-1)^2(x-2))^2 + z^2 = 0.01$$

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} = 6$$

問題 2 (1) X の任意の開集合 O に対し, $i^{-1}(O) = A \cap O$ は A の開集合なので, 包含写像 i は連続.

(2) A の異なる 2 点 a と b を任意に取る．X はハウスドルフなので, X の開集合 U と V が存在し, $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たす．そこで, $U' = U \cap A$, $V' = V \cap A$ とおけば, U' と V' は A の開集合であり, $a \in U'$, $b \in V'$, $U' \cap V' = \emptyset$ を満たす．従って, A もハウスドルフである．

(3) $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ とする．このとき, $[1/2, 1) \subset A$ は A の閉集合であるが, X の閉集合ではない．また, A がコンパクトかつ X がハウスドルフのとき, A の閉集合 F はコンパクトなので, 連続写像 $i : A \to X$ による像 $i(F)$ はコンパクト．X はハウスドルフなので, $i(F)$ は X の中で閉集合となる．

別の反例：$X = \mathbb{R}, A = [0, 2)$ にすると，$A_0 = [1, 2)$ は A の閉集合であるが，X の閉集合ではない．

A コンパクト，X ハウスドルフの時の別解：A の閉集合は X の閉集合 F を用いて $A \cap F$ と表せる．ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉であるため，A は X の閉部分集合．したがって $A \cap F$ も X の閉部分集合となる．

[1] 1 つ目の式は TA の Tian Minjie さんによるもの.

問題 3 X の任意の異なる 2 点 a と b に対し, $d_0 := d(a,b) \neq 0$ であるので, a を中心とする半径 $d_0/2$ の開球体 $B_{d_0/2}(a)$ と b を中心とする半径 $d_0/2$ の開球体 $B_{d_0/2}(b)$ を取れば, 互いに交わらない X の開集合となる．従って, X はハウスドルフ.

問題 4 定義によって $\mathbb{R}^{n+m}$ の位相は開基

$$B_r((x,y)) = \{p \in \mathbb{R}^{n+m} \mid d(p,(x,y)) < r\}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, r > 0$$

により生成されており，$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の位相は開基

$$U \times V, \qquad U \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の開集合，} V \text{ は } \mathbb{R}^m \text{ の開集合}$$

により生成されている．任意の開集合は開基の（任意個の）和集合として書くことができるので，一方の開基が他方の開基の和集合で表されることを示せば十分である．$\mathbb{R}^{n+m}$ の開基 $B_r((x,y))$ については,

$$B_r((x,y)) = \bigcup_{(a,b) \in B_r((x,y))} B_{\delta(a,b,r)}(a) \times B_{\delta(a,b,r)}(b)$$

ただし，$\delta(a,b,r) = \frac{1}{2}(r - d((x,y),(a,b)))$ とおいた．また，$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の開基 $U \times V$ については

$$U \times V = \bigcup_{(a,b) \in U \times V} B_{\epsilon(a,b)}((a,b))$$

と表せる．ただし，$e = \epsilon(a,b)$ は $B_e(a) \subset U$, $B_e(b) \subset V$ を同時に満たす正の実数である（各 $(a,b) \in U \times V$ に対してそのような実数 $\epsilon(a,b)$ を選んでおく.）

問題 5 $Y_1 \times Y_2$ の開集合は, Y_1 の開集合の族 $\{O_1^i\}_i$ と Y_2 の開集合の族 $\{O_2^i\}_i$ を用いて, $O = \bigcup_i (O_1^i \times O_2^i)$ と書ける．$(f_1 \times f_2)^{-1}(O) = \bigcup_i \left(f_1^{-1}(O_1^i) \times f_2^{-1}(O_2^i)\right)$ であり, f_1 と f_2 は連続なので, $f_1^{-1}(O_1^i) \times f_2^{-1}(O_2^i)$ は $X_1 \times X_2$ の開集合．従って, $f_1 \times f_2$ は連続である.

別解：任意の点 $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ と $(y_1,y_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ の開近傍 U に対して，積空間の位相より，Y_1 の開集合 U_1 と Y_2 の開集合 U_2 が存在して，$(y_1,y_2) \in U_1 \times U_2 \subset U$ を満たす．$V_i = f_i^{-1}(U_i), i = 1,2$ とすると，V_1, V_2 は X_1, X_2 の開集合, さらに $(f_1 \times f_2)(V_1 \times V_2) \subset U_1 \times U_2 \subset U$．故に $f_1 \times f_2$ は (x_1,x_2) 点で連続，(x_1,x_2) の任意性より $f_1 \times f_2$ は連続.

問題 6 B の任意の開集合 O に対し, Y の開集合 $\widetilde{O}$ であって, $\widetilde{O} \cap B = O$ なるものが存在する．f は連続なので, $f^{-1}(\widetilde{O})$ は X の開集合．従って, $f|_A^{-1}(O) = f^{-1}(\widetilde{O} \cap B) \cap A = f^{-1}(\widetilde{O}) \cap f^{-1}(B) \cap A = f^{-1}(\widetilde{O}) \cap A$ は A の開集合となり, $f|_A$ は連続.

問題 7 [(1) $\Rightarrow$ (2)] 任意の点 $x \in f^{-1}(U)$ をとる．U は $\mathbb{R}^m$ の開集合で $f(x) \in U$ より，$B_\epsilon(f(x)) \subset U$ を満たす $\epsilon > 0$ が存在する．(1) より $\delta > 0$ があって $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ を満たす．したがって $f(B_\delta(x)) \subset U$．故に x 中心の開球体 $B_\delta(x)$ は $f^{-1}(U)$ に含まれる．x の任意性より $f^{-1}(U)$ は開集合.

[(2) $\Rightarrow$ (1)] 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と任意の正の数 ϵ に対し, (2) から, $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合で x を含む．従ってある $\delta > 0$ が存在し, $\|x - y\| < \delta$ ならば $y \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$. つまり $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ を満たす.

問題 8 $f\colon \mathbb{C} \to B$ を

$$f(z) = \frac{z}{|z|+1}$$

とおく．f は連続である.（実際，f を実部と虚部に分けると

$$f(x+iy) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}+1} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+1}$$

と書け，各成分は連続関数になっている.）さらに f の逆写像は

$$g(w) = \frac{w}{1-|w|}$$

で与えられ，f は全単射であること，また f の逆写像 $f^{-1} = g$ も連続であることが分かる．実際,

$$(f \circ g)(w) = f\left(\frac{w}{1-|w|}\right) = \frac{\frac{w}{1-|w|}}{\left|\frac{w}{1-|w|}\right|+1} = \frac{\frac{w}{1-|w|}}{\frac{1}{1-|w|}} = w$$

$$(g \circ f)(z) = g\left(\frac{z}{1+|z|}\right) = \frac{\frac{z}{1+|z|}}{1-\left|\frac{z}{1+|z|}\right|} = \frac{\frac{z}{1+|z|}}{\frac{1}{1+|z|}} = z$$

と計算でき $f \circ g = \mathrm{id}_B$, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ であることがわかる．以上より，$\mathbb{C}$ と B は同相である．

$\overline{B}$ は $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の有界閉集合であるから，位相空間としてコンパクトである．一方 $\mathbb{C}$ はコンパクトではない．したがって $\overline{B}$ と $\mathbb{C}$ は同相ではない．

問題 9 $\partial\Delta$ と S^1 は同相である．同相写像は次のように構成できる．$\partial\Delta$ を 3 つの区間 I_1, I_2, I_3 に分けて

$$\partial\Delta = I_1 \cup I_2 \cup I_3,$$
$$I_1 = \{(x,0) \mid 0 \le x \le 1\},\ I_2 = \{(1-y,y) \mid 0 \le y \le 1\},\ I_3 = \{(0,1-t) \mid 0 \le t \le 1\}$$

と書く．また，$S^1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ であった．このとき $f\colon \partial\Delta \to S^1$ を次のように定める．

$$\begin{aligned} f|_{I_1}(x,0) &= (\cos(\pi x/2), \sin(\pi x/2)) && 0 \le x \le 1 \\ f|_{I_2}(1-y,y) &= (\cos(\pi(y+1)/2), \sin(\pi(y+1)/2)) && 0 \le y \le 1 \\ f|_{I_3}(0,1-t) &= (\cos(\pi(1+t)), \sin(\pi(1+t))) && 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

この定義は二つの区間の重なり $I_i \cap I_j$ 上では一致していることに注意する．また各 $i = 1,2,3$ について $f|_{I_i}$ は連続である．従って授業で紹介した補題（問題 14) から f は連続写像である．また f が全単射であることは容易に分かる．f はコンパクト空間 $\partial\Delta$ （これは有界閉集合であるからコンパクト）からハウスドルフ空間 S^1 への全単射連続写像であるから，同相写像である.（逆写像を具体的に作って確かめてもよい.）

問題 10 この問題では文字 A, M, R 等の数学的定義を与えていないため，正確な証明はできないが，以下の解答では，同相か否かと，その大体の理由を与える．

(1) L と M は同相．どちらも単位区間 $I = [0, 1]$ と同相である．

(2) A と R は同相．どちらも S^1 に二つの単位区間を付けた図形

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) \mid -2 \leq x \leq -1\} \cup \{(x, 0) \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

と同相になる．

(3) O と D は同相．どちらも S^1 と同相である．

(4) X と Y は同相でない．X の中心の点 c（二つの斜線が交わる点）を X から取り除くと，X $\setminus \{c\}$ は 4 つの連結成分に分かれる．一方，Y からどの点を取り除いても 3 つ以上の連結成分に分かれることはない．従って X と Y は同相ではない.（より正確には，背理法を使って議論する．もし X と Y の間に同相写像 $f\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ があったと仮定すれば，f は同相写像 $f|_{\mathsf{X}\setminus\{c\}}\colon \mathsf{X} \setminus \{c\} \to \mathsf{Y} \setminus \{f(c)\}$ を導くはずである．連結成分の数を比較して矛盾を導く．）

(5) L と Y は同相ではない．実際，Y の中心の点 c（三叉路の交点）を Y から取り除くと，Y $\setminus \{c\}$ は 3 つの連結成分に分かれる．一方，L からどの点を取り除いても 3 つ以上の連結成分に分かれることはない.

(6) A と O は同相でない．理由は上と同様で，A からある 1 点を取り除くとき， A は非連結になることがあるが，O からどの点を取り除いても非連結になることはないことから.

問題 11 円の族 $(x-r)^2+y^2 = (1-r)^2$（r は 0 から 1 まで動く）に沿って f から g へのホモトピーを構成する．すなわち，$h\colon S^1\times[0, 1] \to \mathbb{R}^2$ を $h(x, y, t) = (t+(1-t)x, (1-t)y)$ とすれば h は連続で，$h(x, y, 0) = f(x, y), h(x, y, 1) = g(x, y)$ である．

別解： $h : S^1 \to \mathbb{R}^2,\ h(x, y) = (0, 0)$ とする。h は g と明らかにホモトピックなので f と h がホモトピックであることを示せばよい． 写像 $F : S^1 \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ を

$$F((x, y), t) = (tx, ty)$$

で定めるとこれは $S^1 \times [0, 1]$ から $\mathbb{R}^2$ への連続写像で，$F|_{t=0} = h,\ F|_{t=1} = f$ であるから主張が従う.

問題 12 （雰囲気による説明）原点を囲む円を 1 点に縮めようとすると原点で引っかかってしまう.

完全な証明はここでは与えないが，後で授業で紹介する予定の被覆空間の性質を使った証明の概要を与える．連続写像 $H\colon S^1 \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ で，$H((x, y), 0) = (1, 0) = g(x, y)$ を満たすものが与えられたとする．このとき，H の「偏角」を与える連続写像 $\theta\colon S^1 \times I \to \mathbb{R}$ が取れることが示せる．つまり，

$$\frac{H(p, t)}{\|H(p, t)\|} = (\cos(\theta(p, t)), \sin(\theta(p, t)))$$

および $\theta(p, 0) = 0$ を満たす連続写像 θ が取れることが分かる.（ここで p は S^1 の点を表す.）このような写像 θ の存在は，$\mathbb{R} \to S^1$, $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ が被覆写像である

ことから分かる（授業で後述する予定）．もし，$H((x,y),1)=(x,y)=f(x,y)$ が成立したとすると，任意の $p\in S^1$ について $(\cos\theta(p,1),\sin\theta(p,1))=p$ が成り立つので，$p=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ とおくとき，

$$\theta((\cos\varphi,\sin\varphi),1)-\varphi\in 2\pi\mathbb{Z}$$

でなければならない．左辺は φ の連続関数であるから，ある決まった整数 $n\in\mathbb{Z}$ が存在して

$$\theta((\cos\varphi,\sin\varphi),1)=\varphi+2\pi n$$

がすべての $\varphi\in\mathbb{R}$ について成立する．$\varphi=0$ と $\varphi=2\pi$ で左辺の値は等しくないといけないが，右辺の値は異なるため矛盾．従って f と g の間のホモトピーは存在しない．

問題 13 まず，f が全射でない場合について示す．$y\in S^2\setminus f(S^1)$ をとる．$S^2\setminus\{y\}$ は $\mathbb{R}^2$ と同相であり，$\mathbb{R}^2$ 内の任意のループは 1 点に縮めることが出来るため，定値写像とホモトピックである．($S^2\setminus 1$ 点が $\mathbb{R}^2$ と同相であることは，後で授業でも示す．また，任意の連続写像 $f\colon S^1\to\mathbb{R}^2$ はホモトピー $H(p,t)=tf(p)$ によって原点への定値写像とホモトピックである．)

次に f が全射の場合について示す[2]．まず S^1 を $[0,1]/0\sim 1$ と同一視する．勝手な点 $y\in S^2\setminus f(0)$ をとり，$f(0)$ を含まない y の開近傍 $D\subset S^2$ をとる．D は S^2 と y 中心の開球体 $B_\epsilon(y)$ との交わりと仮定してよい． $f^{-1}(D)$ は $[0,1]$ に含まれる互いに交わらない開区間の（無限個かもしれない）和集合となる．一つの開区間を (α,β) とする．このとき $f(\alpha),f(\beta)\in\partial D=\overline{D}\setminus D$ である．$f(\alpha)$ と $f(\beta)$ とつなぐ $\overline{D}$ 内の道 $f|_{[\alpha,\beta]}$ をホモトピーで動かすことで $f([\alpha,\beta])\cap D=\varnothing$ と変形できる．実際，$\overline{D}$ を 2 次元閉円盤と同一視するとき，$\overline{D}$ 内の任意の 2 点は直線で結べることから，$f|_{[\alpha,\beta]}$ は，$f(\alpha)$ と $f(\beta)$ を ∂D 内でつなぐ任意の道 $g\colon[\alpha,\beta]\to\partial D$, $g(\alpha)=f(\alpha)$, $g(\beta)=f(\beta)$ にホモトピックになる．(ホモトピーとして $h(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$, $(x,t)\in[\alpha,\beta]\times[0,1]$ を取ればよい.)

$f^{-1}(D)$ が有限個の開区間からなる場合は，これを繰り返すことで f が全射でない場合に帰着出来る．

$f^{-1}(D)$ が無限個の開区間からなる場合，$f^{-1}(y)$ は $[0,1]$ の閉集合でコンパクトであり，$f^{-1}(D)$ の開区間が $f^{-1}(y)$ の開被覆となっている．コンパクトの定義から有限個の開区間を選んで $f^{-1}(y)$ を被覆できる．これら有限個の開区間に対して先ほどのホモトピーによる変形をすればよい．

別解：授業では後でファン・カンペンの定理を紹介する予定である．この問題はそれを使っても示すことができる．あるいは，任意の連続写像 $f\colon S^1\to S^2$ は滑らかな写像 $g\colon S^1\to S^2$ とホモトピックであることを使ってもよい．滑らかな写像は Sard の定理（おそらく授業で後述する）より正則値を持ち，従って全射でないことがわかる．

[2]以下の証明の方針は TA の久保田肇さんによるもの．

問題 14 (1)⇒(2): 任意の開部分集合 $U \subset Y$ に対し，$f|_A{}^{-1}(U)$ が A の開集合であることを示す．f は連続より，$f^{-1}(U)$ は X の開集合．相対位相の定義から，$f|_A{}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$ は A の開集合である．よって $f|_A$ は連続である．$f|_B$ も同様.

(2)⇒(1): 任意の閉部分集合 $V \subset Y$ に対し，$f^{-1}(V)$ が X の閉集合であることを示せばよい．$f|_A$ は連続より $f|_A{}^{-1}(V)$ は A の閉集合である．相対位相の定義から，X の閉集合 U_A が存在して $U_A \cap A = f|_A{}^{-1}(V)$ と書ける．同様に X の閉集合 U_B が存在して $U_B \cap B = f|_B{}^{-1}(V)$ と書ける．ここで $U_A \cap A$ および $U_B \cap B$ は X の閉集合でもあることに注意する．$f^{-1}(V) = f|_A{}^{-1}(V) \cup f|_B{}^{-1}(V) = (U_A \cap A) \cup (U_B \cap B)$ より，$f^{-1}(V)$ は X の閉集合である．したがって f は連続である．

反例 1：$X = Y = [0, 2], A = [0, 1], B = (1, 2]$ とし，$x \in A$ のとき $f(x) = 0$，$x \in B$ のとき $f(x) = 1$ とすると，(2) は満たすが (1) は満たさない.

反例 2：関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ (x \leq 0) \\ 1 \ (0 < x) \end{cases}$$

で定める。また $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$，$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ とすると $A \cup B = \mathbb{R}$ であり，f は A, B それぞれで連続であるが $\mathbb{R}$ 全体では連続でない。

採点基準

配点：(1) ⇒ (2) が 3 点，(2) ⇒ (1) が 4 点，反例が 3 点．計 10 点満点でつける．各項目について，配点は全部与えるか 0 点かのどちらかで採点.

（TA の方へ：ある程度甘めにみて，本質的な点を押さえている解答には点数を与えてください．解答で不十分な点があるときは，なるべく丁寧なコメントをつけていただくようお願いします.）

幾何学入門演習　No.2　(2022年10月12日)[1]

問題 1 $f, g\colon X \to Y$ をホモトピックな連続写像とする．任意の連続写像 $k\colon Y \to Z$ に対して，$k \circ f \simeq k \circ g$ を示せ．また任意の連続写像 $h\colon W \to X$ に対して，$f \circ h \simeq g \circ h$ を示せ．

問題 2 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して，連続写像 $g\colon Y \to X$ で $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ を満たすものが存在するとき，f をホモトピー同値写像，g を f のホモトピー逆写像と呼んだ．与えられた f に対して，f のホモトピー逆写像 g はホモトピーを除いて一意であることを示せ.（つまり，2つのホモトピー逆写像 $g_1, g_2\colon Y \to X$ があるとき，$g_1 \simeq g_2$ であることを示せ．）

問題 3 $I = [0, 1]$ は可縮，つまり，1点空間とホモトピー同値であることを示せ.

問題 4 $\mathbb{R}^n$ は可縮，つまり，1点空間とホモトピー同値であることを示せ.

問題 5 X を可縮な空間とする．このとき，任意の連続写像 $f\colon Y \to X$ は定値写像とホモトピックであることを示せ.

問題 6 密着位相空間は可縮であることを示せ.

問題 7 ($\star$) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ はその部分集合

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

とホモトピー同値か？（ホモトピーを作れるか？まずは図を書いて考えよう.）

問題 8 問題7の位相空間 X は2つの S^1 の1点和 $S^1 \vee S^1$ と同相であることを示せ．ただし，$S^1 \vee S^1$ は2つの S^1 の非交和 $S^1 \sqcup S^1 = S^1 \times \{0, 1\}$ に対して，$((1, 0), 0)$ と $((1, 0), 1)$ を同一視して得られる商位相空間 $S^1 \sqcup S^1/\sim$ である．(問題17, 18の結果を使う．)

問題 9 授業で説明したように立体射影によって写像 $f\colon S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2$ を定める．f が次の形で与えられることを確認せよ.

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

また f の逆写像が

$$g(x, y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

で与えられることを示し，f, g が共に連続であることを観察して，f が $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ と $\mathbb{R}^2$ の間の同相写像を与えることを示せ.

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的.

問題 10 前問の結果を一般化して，S^2 の任意の点 P に対して，$S^2 \setminus \{P\}$ は $\mathbb{R}^2$ と同相であることを示せるか．より一般に，S^n から 1 点を除いた空間は $\mathbb{R}^n$ と同相か．

問題 11 S^2 から 2 点を除いた空間 $S^2 \setminus \{P, Q\}$ は S^1 とホモトピー同値か．

問題 12 (レポート問題 10 月 18 日 17:00 締め切り) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と S^{n-1} はホモトピー同値であることを示せ．

問題 13 ($\star$) $\mathbb{R}^3$ から 2 点を除いた空間は $S^2 \vee S^2$ とホモトピー同値か．

問題 14 ($\star$) 2 次元トーラス T^2 から 1 点を除いた空間が $S^1 \vee S^1$ とホモトピー同値であることを観察せよ．ホモトピーを具体的に構成できるか？

問題 15 位相空間 X, Y に対して $[X, Y]$ を X から Y への連続写像のホモトピー類のなす集合とする．Y_1 と Y_2 がホモトピー同値であるとき，$[X, Y_1]$ と $[X, Y_2]$ の間に一対一対応（集合の全単射）が存在することを示せ．

問題 16 ($\star$) 二つの離散位相空間 X, Y がホモトピー同値であるとき，X の濃度と Y の濃度は等しいことを示せ．

問題 17 (レポート問題 10 月 18 日 17:00 締め切り) 授業で説明した次の補題を証明せよ．X, Y を位相空間，$\sim$ を位相空間 X 上の同値関係，$\pi\colon X \to X/\!\sim$ を自然な射影とする．写像 $f\colon X/\!\sim\; \to Y$ に対して次は同値である．

(1) f は連続である．

(2) $f \circ \pi$ は連続である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ X/\!\sim \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

問題 18 X をコンパクト位相空間，Y をハウスドルフ位相空間とする．連続な全単射 $f\colon X \to Y$ は同相写像であることを示せ．

問題 19 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は $[0, 1]$ の端点 $0, 1$ を同一視した空間 $[0, 1]/0\!\sim\!1$ と同相であることを示せ．($[0, 1]/0\!\sim\!1$ には $[0, 1]$ の商位相が入っている．)

問題 20 ($\star$) I^n の境界 ∂I^n を 1 点につぶして得られる位相空間 $I^n/\partial I^n$ は S^n と同相であることを示せ．$I^n/\partial I^n$ とは，I^n 上の同値関係

$$p \sim q \iff p = q \text{ または } p, q \in \partial I^n$$

によって I^n を割った商位相空間を表す．($I^n/\partial I^n$ も S^n も共に $\mathbb{R}^n$ の 1 点コンパクト化であることに注意.)

問題 21 ($\bigstar$) S^1 が可縮ではない理由を考えよ．($\mathrm{id}_{S^1}\colon S^1 \to S^1$ は定値写像とホモトピックか？もしホモトピックにならないとしたら何故か？)

問題 22 ($\bigstar$) 有限次元球面 S^n は可縮ではないが，無限次元球面 $S^\infty = \bigcup S^n$ は可縮であることが知られている．S^∞ には帰納的極限の位相を入れる，つまり $U \subset S^\infty$ が開 $\iff$ すべての n について $U \cap S^n$ が開．何故か．(座標を一つずらしてみよ．)

幾何学入門演習　No.2 解答例

問題 1 f と g の間のホモトピーを $F : X \times I \to Y$ とする．ただし, $I = [0,1]$ である．このとき, $H = k \circ F : X \times I \to Z$ は $k \circ f$ と $k \circ g$ の間のホモトピーとなる．従って, $k \circ f \simeq k \circ g$．また, $G = F \circ (h \times \mathrm{id}_I) : W \times I \to Y$ は $f \circ h$ と $g \circ h$ の間のホモトピーとなる．従って, $f \circ h \simeq g \circ h$.

問題 2 $g_1, g_2 \colon Y \to X$ を f のホモトピー逆写像とすると,

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1 \circ \mathrm{id}_Y \\ &\simeq g_1 \circ (f \circ g_2) \\ &= (g_1 \circ f) \circ g_2 \\ &\simeq \mathrm{id}_X \circ g_2 = g_2 \end{aligned}$$

となるので, ホモトピー逆写像はホモトピーを除いて一意.

問題 3 $f \colon I \to \mathrm{pt}$ を定値写像, $g \colon \mathrm{pt} \to I$ を $\mathrm{pt} \mapsto 0 \in I$ で定める． このとき, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{pt}}$．$F \colon I \times I \to I$ を $F(x,t) = tx$ で定義すると, $g \circ f$ から id_I へのホモトピーとなるので, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_I$．従って, I は可縮.

問題 4 $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{pt}$ を定値写像, $g \colon \mathrm{pt} \to \mathbb{R}^n$ を $\mathrm{pt} \mapsto 0 \in \mathbb{R}^n$ で定める．このとき, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{pt}}$．$F \colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ を $F(x,t) = tx$ で定義すると, $g \circ f$ から $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ へのホモトピーとなるので, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$．従って, $\mathbb{R}^n$ は可縮.

問題 5 X は可縮なので, id_X と定値写像 $e : X \to \{x_0\} \subset X$ の間のホモトピー $F \colon X \times I \to X$ が存在する．そこで, $H = F \circ (f \times \mathrm{id}_I) : Y \times I \to X$ とすると, これは f と定値写像 $e \circ f$ の間のホモトピー.

問題 6 X を密着位相空間とする．このとき, 任意の写像 $F \colon X \times I \to X$ は連続写像となる．そこで, X の点 x_0 を一つ取り, 写像 $F \colon X \times I \to X$ を $(x,0) \mapsto f(x)$, $t \neq 0$ に対し, $(x,t) \mapsto x_0$ で定義すれば, これは f と定値写像の間のホモトピーとなる．従って, X は可縮.

問題 7 $\mathbb{R}^2 \backslash \{(-1,0),(1,0)\}$ と X はホモトピー同値である．連続写像 $r \colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(-1,0),(1,0)\} \to X$ を以下で定義する．

$$r(x,y) = \begin{cases} (1,0) + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}(x-1,y) & 0 < (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ または } x \geq 1 \text{ のとき} \\ (x, \sqrt{2|x| - x^2}) & |x| \leq 1,\ (|x|-1)^2 + y^2 \geq 1,\ y \geq 0 \text{ のとき} \\ (x, -\sqrt{2|x| - x^2}) & |x| \leq 1,\ (|x|-1)^2 + y^2 \geq 1,\ y \leq 0 \text{ のとき} \\ (-1,0) + \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}(x+1,y) & 0 < (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ または } x \leq -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$i \colon X \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$ を包含写像とする． このとき, $r \circ i = \mathrm{id}_X$ である． $i \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}}$ を与えるホモトピー

$$H \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\} \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$$

は以下のようにして作れる.

$$H(x,y,t)=\begin{cases}(1,0)+((1-t)+\frac{t}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}})(x-1,y) & 0<(x-1)^2+y^2\leq 1 \text{ または } x\geq 1\\ (x,(1-t)y+t\sqrt{2|x|-x^2}) & |x|\leq 1,\ (|x|-1)^2+y^2\geq 1,\ y\geq 0\\ (x,(1-t)y-t\sqrt{2|x|-x^2}) & |x|\leq 1,\ (|x|-1)^2+y^2\geq 1,\ y\leq 0\\ (-1,0)+((1-t)+\frac{t}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}})(x+1,y) & 0<(x+1)^2+y^2\leq 1 \text{ または } x\leq -1\end{cases}$$

別解：$r\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(1,0),(-1,0)\}\to X$ を次で定義する.

$$r(x,y)=\begin{cases}(1,0)+\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}(x-1,y) & (x-1)^2+y^2\leq 1 \text{ のとき}\\ (\frac{2x^2}{x^2+y^2},\frac{2xy}{x^2+y^2}) & (x-1)^2+y^2\geq 1,\ x>0 \text{ のとき}\\ (0,0) & x=0 \text{ のとき}\\ -(\frac{2x^2}{x^2+y^2},\frac{2xy}{x^2+y^2}) & (x+1)^2+y^2\geq 1,\ x<0 \text{ のとき}\\ (-1,0)+\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}(x+1,y) & (x+1)^2+y^2\leq 1 \text{ のとき}\end{cases}$$

$i\colon X\to\mathbb{R}^2\setminus\{(-1,0),(1,0)\}$ を包含写像とする．このとき $r\circ i=\mathrm{id}_X$ を満たす．$i\circ r$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2\setminus\{(-1,0),(1,0)\}}$ とのホモトピーは次で与えられる.

$$H(x,y,t)=\begin{cases}(1,0)+((1-t)+\frac{t}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}})(x-1,y) & 0<(x-1)^2+y^2\leq 1 \text{ のとき}\\ (1-t)(x,y)+t(\frac{2x^2}{x^2+y^2},\frac{2xy}{x^2+y^2}) & (x-1)^2+y^2\geq 1,\ x>0 \text{ のとき}\\ (0,(1-t)y) & x=0 \text{ のとき}\\ (1-t)(x,y)-t(\frac{2x^2}{x^2+y^2},\frac{2xy}{x^2+y^2}) & (x+1)^2+y^2\geq 1,\ x<0 \text{ のとき}\\ (-1,0)+((1-t)+\frac{t}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}})(x+1,y) & 0<(x+1)^2+y^2\leq 1 \text{ のとき}\end{cases}$$

別解のように r,H を定義した場合は，連続性のチェックがやや非自明である.（本解答では省略.）

問題 8 写像 $f\colon S^1\sqcup S^1=S^1\times\{0,1\}\to X$ を次で定義する.

$$f((x,y),i)=\begin{cases}(x-1,y) & i=0\\ (-x+1,y) & i=1\end{cases}$$

これは連続であって，S^1 の基点 $((1,0),i)$, $i=0,1$ を同じ点 $(0,0)$ に写す．従って問題 17 の結果より，連続写像 $\overline{f}\colon S^1\sqcup S^1/\sim\to X$ を誘導する．$\overline{f}$ は明らかに全単射である．位相空間 $S^1\sqcup S^1/\sim$ はコンパクト位相空間 $S^1\sqcup S^1$ の商位相空間であるからコンパクトであり，X は $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間であるからハウスドルフである．コンパクト位相空間からハウスドルフ位相空間への連続全単射は同相（問題１８）であることを使うと $\tilde{f}$ は同相である.

問題 9 この問題は No.3 で扱う.

問題 10 この問題は No.3 で扱う.

問題 11 この問題は No.3 で扱う.

問題 12 写像 $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ を

$$r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}\,(x_1, \ldots, x_n)$$

とし，$i\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を包含写像とする．このとき，$r \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ である．$i \circ r$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ との間のホモトピーを構成する．$H\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = (1 - t + \frac{t}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}})(x_1, \ldots, x_n)$$

と定義すると，H は連続で，$H(x,0) = x$, $H(x,1) = (i \circ r)(x)$ である．したがって $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と S^{n-1} はホモトピー同値.

問題 13 (略解) $\mathbb{R}^3$ から 2 点を除いた空間は $\mathbb{R}^3$ の線形変換により $\mathbb{R}^3 \setminus \{(-1,0,0),(1,0,0)\}$ と同相であることがわかる．問題 7 と同様に $\mathbb{R}^3 \setminus \{(-1,0,0),(1,0,0)\}$ と

$$\{(x,y,z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ または } (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とがホモトピー同値であることを示すことができる.

問題 14 (略解) T^2 は $I^2 = [0,1]^2$ に次で生成される同値関係を入れたときの商位相空間である.

$$(x,0) \sim (x,1), \qquad (0,y) \sim (1,y), \qquad x, y \in I.$$

このとき，∂I^2 にも同値関係 $\sim$ が誘導され，$\partial I^2/\!\sim$ は $S^1 \vee S^1$ と同相である.

平行移動により，T^2 から抜く 1 点を $(1/2,1/2)$ の像としてよい．$I^2 \setminus \{(1/2,1/2)\}$ は ∂I^2 にホモトピー同値である．実際，包含写像 $i\colon \partial I^2 \to I^2 \setminus \{(1/2,1/2)\}$ とレトラクション $r\colon I^2 \setminus \{(1/2,1/2)\} \to \partial I^2$

$$r(x,y) = (x,y) \text{ と } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ を結ぶ直線と } \partial I^2 \text{ の交点のうち，} (x,y) \text{ 側にある点}$$

が互いにホモトピー逆写像を与えている．$r \circ i = \mathrm{id}_{\partial I^2}$ であり，

$$\begin{aligned} &H\colon (I^2 \setminus \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}) \times I \to I^2 \setminus \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\} \\ &H(x,y,t) = (1-t)r(x,y) + t(x,y) \end{aligned}$$

が $i \circ r$ と $\mathrm{id}_{I^2 \setminus \{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}}$ の間のホモトピーを与える.

i, r は連続写像

$$\begin{aligned} &\bar{i}\colon S^1 \vee S^1 \cong \partial I^2/\!\sim\; \hookrightarrow I^2/\!\sim\; \cong T^2 \\ &\bar{r}\colon (T^2 \setminus \mathrm{pt}) \cong (I^2 \setminus \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\})/\!\sim\; \longrightarrow S^1 \vee S^1 \cong \partial I^2/\!\sim \end{aligned}$$

を誘導する．さらにホモトピー H も連続写像

$$\overline{H}\colon (T^2 \setminus \mathrm{pt}) \times I \longrightarrow T^2 \setminus \mathrm{pt}$$

を誘導することがわかり，$\overline{r} \circ \overline{i}$ と $\mathrm{id}_{S^1 \vee S^1}$ とのホモトピーを与える．従って $T^2 \setminus \mathrm{pt}$ と $S^1 \vee S^1$ はホモトピー同値.

注意：写像 $\overline{i}, \overline{r}$ が連続であることを示すには問題 17 を使う．$\overline{H}$ が連続であることを示すには，問題 17 および次の事実を使う必要がある：

$(T^2 \setminus \mathrm{pt}) \times I$ は $(I^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}) \times I$ の商位相空間である．

一般に，全射 $\pi\colon X \to \overline{X}$ が商写像，すなわち「$U \subset \overline{X}$ が開集合 $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(U) \subset X$ が開集合」が成り立つとき，$\pi \times \mathrm{id}\colon X \times Y \to \overline{X} \times Y$ が商写像であるとは限らない．（今はこのことを示す必要がある.）ただし次の有用な命題が知られており，現在の状況に適用できる．

命題：全射 $\pi\colon X \to \overline{X}$ が商写像で Y が局所コンパクト空間なら $\pi \times \mathrm{id}\colon X \times Y \to \overline{X} \times Y$ は商写像となる．

命題の証明：任意の部分集合 $U \subset \overline{X} \times Y$ について，$(\pi \times \mathrm{id})^{-1}(U)$ が開集合なら U は開集合であることを示せばよい.（逆は $\pi \times \mathrm{id}$ の連続性からわかる.）$(\overline{x}, y) \in U$ をとり，$\pi(x) = \overline{x}$ とする．$\widetilde{U} = (\pi \times \mathrm{id})^{-1}(U)$ は (x, y) の近傍であるから，x の開近傍 A と y の開近傍 B が存在して $A \times B \subset \widetilde{U}$. Y は局所コンパクトなので，ある y のコンパクトな近傍 K で $K \subset B$ なるものが存在する．このとき $A \times K \subset \widetilde{U}$ である．ここで次の集合を考える．

$$V = \bigcup_{O \times K \subset \widetilde{U},\ O \text{ は } X \text{ の open}} O$$

明らかに，V は x を含む開集合であり（$A \subset V$ であることに注意），$V \times K \subset \widetilde{U}$. また，$x_1 \in V$ であり，$\pi(x_1) = \pi(x_2)$ であれば，$x_2 \in V$ であることを示そう．実際, $\{x_1\} \times K \subset \widetilde{U}$ ゆえ，$\{\pi(x_1)\} \times K \subset U$．$\pi(x_1) = \pi(x_2)$ であるから，$\{x_2\} \times K \subset \widetilde{U}$ である．K のコンパクト性から x_2 の開近傍 O が存在して $O \times K \subset \widetilde{U}$．従って $x_2 \in O \subset V$ である．以上より，$V = \pi^{-1}(\pi(V))$ であることがわかる．$\overline{X}$ には商位相が入っているから，$\pi(V)$ は $\overline{x}$ を含む開集合．このとき $\pi(V) \times K$ は $(\overline{x}, y)$ の近傍であり，U に含まれる．従って U は開集合である．

問題 15 この問題は No.3 で扱う．

問題 16 離散位相空間 X と Y がホモトピー同値とする．前問から $[\mathrm{pt}, X]$ と $[\mathrm{pt}, Y]$ の間に全単射が存在する．従って，離散位相空間 X について，$[\mathrm{pt}, X]$ と X の間に全単射が存在することを言えばよい．X の点 x_0 に対して $\{x_0\}$ を像とする写像 $\mathrm{pt} \to X$ のホモトピー類を対応させる写像 $X \to [\mathrm{pt}, X]$ を考える．これが全射であることは明らか．単射性を示す．$x_0 \neq x_1$ とするとき，x_0 を像に持つ写像 $f_0\colon \mathrm{pt} \to X$ と x_1 を像に持つ写像 $f_1\colon \mathrm{pt} \to X$ がホモトピックではないことを示そう．もしホモトピー $H\colon I \to X$, $H(0) = x_0$, $H(1) = x_1$ が存在したとすると，$I = H^{-1}(x_0) \sqcup H^{-1}(x_1)$, $H^{-1}(x_i)$ は I の空でない開集合となる．これは I の連結性に反する．

問題 17 (1) $\Rightarrow$ (2): 商写像 $\pi\colon X \to X/\sim$ は連続であるから，f が連続なら π との合成写像 $f \circ \pi$ も連続である．

(2) $\Rightarrow$ (1): $f\circ\pi$ が連続であるとする．Y の任意の開集合 U に対して，$(f\circ\pi)^{-1}(U)$ は X の開集合である．$(f\circ\pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$ であるから，商位相の定義から $f^{-1}(U) \subset (X/\sim)$ は $X/\sim$ の開集合である．従って f は連続写像である．

問題 18 $f\colon X \to Y$ の逆写像が連続写像であることを言えばよい．そのためには $f = (f^{-1})^{-1}$ が閉集合を閉集合に移すことを示せばよい．$F \subset X$ を閉集合とする．X はコンパクトであるから，F はコンパクトである．f は連続であるから，$f(F)$ は Y のコンパクト部分集合である．Y はハウスドルフであるから，$f(F)$ は Y の閉集合である．以上より，f^{-1} は連続である．

問題 19 写像 $f\colon [0,1] \to S^1$ を $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ で定める．この写像 f は $f(0) = f(1)$ を満たす連続写像である．従って写像 $\overline{f}\colon [0,1]/0\sim 1 \to S^1$ を誘導し，問題 17 より $\overline{f}$ は連続である．さらに，$\overline{f}$ は全単射であることは明らか．$[0,1]/0\sim 1$ はコンパクト集合 $[0,1]$ の連続写像による像であるから，コンパクト．S^1 はハウスドルフ空間 $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間であるから，ハウスドルフ．従って問題 18 より $\overline{f}$ は同相写像である．

問題 20 まず，I^n の内部 $I^n \setminus \partial I^n = (0,1)^n$ と $\mathbb{R}^n$ が同相であることを示す．このことは，$(0,1)$ と $\mathbb{R}$ は同相であることからわかる．$(0,1)$ と $\mathbb{R}$ との同相写像は，例えば，

$$f(x) = \log(x/(1-x))$$

で与えられる．$\phi\colon (0,1)^n \to \mathbb{R}^n$ を同相写像とする．また $\mathbb{R}^n$ と $S^n\setminus\{(0,\ldots,0,1)\}$ は同相であることに注意しておく.（問題 10）この同相写像を $\psi\colon \mathbb{R}^n \cong S^n\setminus\{(0,\ldots,0,1)\}$ とする．写像 $\Phi\colon I^n/\partial I^n \to S^n$ を

$$\Phi([x]) = \begin{cases} \psi(\phi(x)) & x \in (0,1)^n \\ (0,\ldots,0,1) & x \in \partial I^n \end{cases}$$

で定める．これは明らかに well-defined である．Φ が連続であることを示すには，$\Phi\circ\pi$ が連続であることを示せばよい．ただし $\pi\colon I^n \to I^n/\partial I^n$ は射影．$\Phi\circ\pi|_{(0,1)^n}$ は明らかに連続．$\Phi\circ\pi$ が ∂I^n の各点で連続であることを示そう．そのためには $(0,\ldots,0,1)$ の任意の開近傍 U に対して，$\pi^{-1}\Phi^{-1}(U)$ が I^n の開集合であることを示せばよい．S^n はコンパクトであるから U の補集合 U^c はコンパクト集合であり，

$$(\pi^{-1}\Phi^{-1}(U))^c = \pi^{-1}\Phi^{-1}(U^c)$$

は $\Phi^{-1}|_{S^n\setminus\{(0,\ldots,0,1)\}} = \phi^{-1}\circ\psi^{-1}$ の連続性からコンパクトである．従ってこれは $[0,1]^n$ のハウスドルフ性より閉集合であって，$\pi^{-1}\Phi^{-1}(U)$ は開集合であることがわかる．以上より Φ は連続．Φ は全単射であることは明らかであって，$I^n/\partial I^n$ はコンパクト，S^n はハウスドルフ位相空間であるから，問題 18 より Φ は同相写像である．

注意：以上の証明は $I^n/\partial I^n$, S^n がどちらも $\mathbb{R}^n$ の一点コンパクト化である，ということを示していることにほぼ対応する．

問題 21 授業でやる予定.

問題 22 (ヒント) $\sigma\colon S^\infty \to S^\infty, (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ という写像と恒等写像がホモトピックであることを示す．次に，σ が $(1, 0, 0, \dots)$ に値を持つ定値写像 c とホモトピックであることを示す.

$\boxed{\text{問題 12，問題 17 の採点基準}}$ 配点：問題 12 は 4 点，問題 17 の (1)⇒(2) は 3 点，(2)⇒(1) は 3 点とする．計 10 点．配点の各部分について，これより細かい部分点はつけない.

（TA の方へ：ある程度甘めにみて，本質的な点を押さえている解答には点数を与えてください．解答で不十分な点があるときは，なるべく丁寧なコメントをつけていただくようお願いします.）

幾何学入門演習　No.3　(2022 年 10 月 19 日)[1]

問題 1 (再掲) 授業で説明したように立体射影によって写像 $f\colon S^2\setminus\{(0,0,1)\}\to\mathbb{R}^2$ を定める．f が次の形で与えられることを確認せよ．

$$f(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$$

また f の逆写像が

$$g(x,y)=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

で与えられることを示し，f,g が共に連続であることを観察して，f が $S^2\setminus\{(0,0,1)\}$ と $\mathbb{R}^2$ の間の同相写像を与えることを示せ．

問題 2 (再掲) 前問の結果を一般化して，S^2 の任意の点 P に対して，$S^2\setminus\{P\}$ は $\mathbb{R}^2$ と同相であることを示せるか．より一般に，S^n から 1 点を除いた空間は $\mathbb{R}^n$ と同相か．

問題 3 (再掲) S^2 から 2 点を除いた空間 $S^2\setminus\{P,Q\}$ は S^1 とホモトピー同値か．

問題 4 (再掲) 位相空間 X,Y に対して $[X,Y]$ を X から Y への連続写像のホモトピー類のなす集合とする．Y_1 と Y_2 がホモトピー同値であるとき，$[X,Y_1]$ と $[X,Y_2]$ の間に一対一対応（集合の全単射）が存在することを示せ．

問題 5 X,Y を位相空間，$A\subset X$ を部分集合とする．連続写像 $f,g\colon X\to Y$ が $f|_A=g|_A$ を満たすとする．f と g が A をとめてホモトピックである ($f\simeq g\ \mathrm{rel}\,A$) とは連続写像 $H\colon X\times I\to Y$ が存在して $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$, $H(a,t)=f(a)=g(a)$ がすべての $x\in X$, $a\in A$, $t\in I$ について成立することである．この関係が同値関係であることを示せ．

問題 6 $\pi_1(X,x_0)$ が群になることの証明で，授業で省略した部分を補うこと．（あるいは授業で与えたのとは別のホモトピーを使って再証明してもよい．）

問題 7 X を位相空間とする．$x,y\in X$ に対して，集合 $\Pi(x,y)$ を次で定義する．

$$\Pi(x,y)=\{x\text{ から }y\text{ への道 }p\colon I\to X\}/\text{端点をとめてホモトピック}$$

基本群の定義と同様にして 2 項演算 $\Pi(x,y)\times\Pi(y,z)\to\Pi(x,z)$, $([p_1],[p_2])\mapsto[p_1\cdot p_2]$ が道の合成により定まることを観察せよ．(ここで $p_1\cdot p_2(s)$ は $0\le s\le 1/2$ のとき $p_1(2s)$, $1/2\le s\le 1$ のとき $p_2(2s-1)$ と定める.）この演算が群と同様の次の性質を満たすことを示せ．

---
[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的．

(1) $x \in X$ に対して $e_x \in \Pi(x,x)$ がただ一つ存在して，任意の $p \in \Pi(x,y)$ と $q \in \Pi(z,x)$ について $e_x \cdot p = p$, $q \cdot e_x = q$ が成り立つ．

(2) $p \in \Pi(x,y)$ に対して次を満たす $p^{-1} \in \Pi(y,x)$ がただ一つ存在する．$p \cdot p^{-1} = e_x$, $p^{-1} \cdot p = e_y$.

(3) $p \in \Pi(x,y)$, $q \in \Pi(y,z)$, $r \in \Pi(z,w)$ に対して $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.

以上の演算が与えられた集合の集まり $\{\Pi(x,y)\}_{x,y \in X}$ を基本亜群 (fundamental groupoid) という．($\Pi(x,x) = \pi_1(X,x)$ であることに注意.)

問題 8 ($\star$) $x_0 = (0,0,1)$ を S^2 の基点とする．$\pi_1(S^2,x_0) = \{e\}$ であることを示せ．(No.1 の問題 13 を参照)

問題 9 (レポート問題 10 月 25 日 17:00 締め切り) $\gamma_n\colon [0,1] \to S^1$ を $\gamma_n(x) = e^{2\pi i n x}$ で定める．ここで S^1 を絶対値 1 の複素数の集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と同一視している．基本群 $\pi_1(S^1,1)$ において $[\gamma_n] \cdot [\gamma_m] = [\gamma_{n+m}]$ であることを示せ．ただし $n, m \in \mathbb{Z}$ とする．

問題 10 $f\colon X \to Y$ を連続写像，$f(x_0) = y_0$ とする．x_0 を基点とするループ $\gamma\colon I \to X$ に対して y_0 を基点とするループ $f \circ \gamma\colon I \to Y$ を対応させる写像は，基本群の間の準同型 $f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ を誘導することを示せ．

問題 11 $f, g\colon X \to Y$ を連続写像，$f(x_0) = g(x_0) = y_0$ とする．$f \simeq g \ \mathrm{rel}\, x_0$ のとき，f と g は基本群に同じ写像を誘導する $f_* = g_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ ことを示せ．

問題 12 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ に対して，群としての同型 $\pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \cong \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$ を示せ．

問題 13 ($\star$) 任意の連続写像 $f\colon [0,1] \to S^1$, $f(0) = e^{2\pi i \theta_0}$ に対して，連続写像 $\theta\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ であって $f(x) = e^{2\pi i \theta(x)}$，$\theta(0) = \theta_0$ を満たすものが一意に存在することを示せ．

問題 14 ($\bigstar$) 連続写像 $f\colon X \to S^1$ に対して $f(x) = e^{2\pi i \theta(x)}$ を満たす連続写像 $\theta\colon X \to \mathbb{R}$ と，$H(x,0) = f(x)$ を満たす連続写像 $H\colon X \times [0,1] \to S^1$ が与えられたとする．このとき，連続写像 $\Theta\colon X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ であって，$H(x,t) = e^{2\pi i \Theta(x,t)}$ かつ $\Theta(x,0) = \theta(x)$ を満たすものが一意に存在することを示せ．

問題 15 ($\star$) 前問の結果を用いて次を示せ．$1 \in S^1$ を基点とする 2 つのループ $f_1, f_2\colon [0,1] \to S^1$ が端点をとめてホモトピックであり，$f_j(x) = e^{2\pi i \theta_j(x)}$,　$\theta_j(0) = 0$ を満たす連続写像 $\theta_j\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $j = 1,2$ が与えられたとする．　このとき $\theta_1(1) = \theta_2(1)$.

問題 16 位相空間 X の 2 点 x_0 と x_1 を結ぶ道 $p\colon [0,1] \to X$, $p(0) = x_0$, $p(1) = x_1$ に対して，写像 $p_\#\colon \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$, $\gamma \mapsto [p^{-1}] \cdot \gamma \cdot [p]$ は同型写像であることを示せ．ここで $p^{-1}\colon [0,1] \to X$ は $p^{-1}(x) = p(1-x)$ で定義される逆の道であり，$\cdot$ は基本亜群での積である．道 p を別のものに取り換えたとき $p_\#$ はどのように変化するか．

幾何学入門演習　No.3 解答例

問題 1 まず，g と f が互いに逆写像であることを証明する．

$$
\begin{aligned}
f\circ g(x,y) &= \left(\frac{\frac{2x}{1+x^2+y^2}}{1-\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}, \frac{\frac{2y}{1+x^2+y^2}}{1-\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}\right)\\
&= (x,y)\\
g\circ f(x,y,z) &= \left(\frac{\frac{2x}{1-z}}{1+\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}}, \frac{\frac{2y}{1-z}}{1+\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}}, \frac{-1+\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}}{1+\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}}\right)\\
&= \left(\frac{2x}{1-z+\frac{1-z^2}{(1-z)}}, \frac{2y}{1-z+\frac{1-z^2}{(1-z)}}, \frac{-(1-z)^2+1-z^2}{(1-z)^2+1-z^2}\right)\\
&= (x,y,z)
\end{aligned}
$$

よって，f と g は互いに逆写像である．

次に，f と g は連続写像であることを示そう．写像 $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^3\setminus\{z\neq 1\}\to\mathbb{R}^2$ を f と同じ式

$$
\tilde{f}(x,y) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)
$$

で定めるとき，$\tilde{f}$ は各成分が連続写像であるから連続である．f は $\tilde{f}$ を $S^2\setminus\{(0,0,1)\}$ に制限して得られる写像であるから（演習問題 No.1 問題 6 の結果より）連続である．g についても同じ式で定義される写像 $\tilde{g}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ から誘導される写像であることから連続性がわかる．

以上より，f は $S^2\setminus\{(0,0,1)\}$ と $\mathbb{R}^2$ の間の同相写像である．

問題 2 任意の点 $P=(p_1,p_2,p_3)\in S^2$ に対して第 3 列が $(p_1,p_2,p_3)^{\mathrm{T}}$ で与えられる直交行列

$$
A = \begin{pmatrix} q_1 & r_1 & p_1\\ q_2 & r_2 & p_2\\ q_3 & r_3 & p_3\end{pmatrix}\in O(3)
$$

が存在する． A を（縦ベクトルに）左から掛ける写像 $\phi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $x\mapsto Ax$ は同相写像であり，S^2 に制限すると，$e_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ を P に写す同相写像

$$
\phi|_{S^2}\colon S^2\to S^2,\qquad \phi(e_3)=P
$$

を誘導する．従って $S^2\setminus\{(0,0,1)\}$ と $S^2\setminus\{P\}$ は同相である．前問より $S^2\setminus\{P\}$ は $\mathbb{R}^2$ と同相である．

S^n の場合も直交変換により同相 $S^n\setminus\{P\}\cong S^n\setminus\{(0,\dots,0,1)\}$ が構成できるため，$P=(0,\dots,0,1)$ と仮定してよい．写像 $f\colon S^n\setminus\{(0,0,\dots,0,1)\}\to\mathbb{R}^n$ と逆写像 g が次のように定義できる．

$$
f(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)
$$

$$g(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left(\frac{2x_1}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2},\frac{2x_2}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2},\dots,\frac{2x_n}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\frac{-1+\sum_{i=1}^n x_i^2}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

問題1と同じ計算により f は同相であることが分かる．よって S^n から1点を除いた空間は $\mathbb{R}^n$ と同相.

問題 3 問題2より $S^2\setminus\{Q\}$ は $\mathbb{R}^2$ と同相．さらに1点を除いて $S^2\setminus\{P,Q\}$ は $\mathbb{R}^2\setminus\{P'\}$ と同相になる．ただし P' は P の同相写像 $S^2\setminus\{Q\}\cong\mathbb{R}^2$ による像である．平行移動により $\mathbb{R}^2\setminus P'$ と $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ は同相．$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ と S^1 は演習 No.2 の問題 12 よりホモトピー同値.

問題 4 $\phi\colon Y_1\to Y_2$ をホモトピー同値写像とし, ϕ のホモトピー逆写像を $\psi\colon Y_2\to Y_1$ とする．このとき写像 $\Phi\colon [X,Y_1]\to[X,Y_2]$ を以下で定義する．$[f]\in[X,Y_1]$ に対し, $\Phi([f])=[\phi\circ f]$ とすると, $f\simeq f'$ ならば $\phi\circ f\simeq\phi\circ f'$ なので, Φ は well-defined．同様にして, 写像 $\Psi\colon[X,Y_2]\to[X,Y_1]$ を $[g]\in[X,Y_2]$ に対し, $\Psi([g])=[\psi\circ g]$ で定義する．すると, ϕ と ψ はホモトピー逆写像なので,

$$\Phi\circ\Psi([g])=[\phi\circ\psi\circ g]=[g],\quad \Psi\circ\Phi([f])=[\psi\circ\phi\circ f]=[f]$$

より, Φ と Ψ は逆写像となり, $[X,Y_1]$ と $[X,Y_2]$ の間の全単射が作れた.

問題 5 (反射律) $H\colon X\times I\to X$ を $H(x,t)=f(x)$ で定めると $f\simeq f$ rel A となる.

(対称律) $f\simeq g$ rel A とすると, $H\colon X\times I\to Y$ が存在し,

$$H(x,0)=f(x),\quad H(x,1)=g(x),\quad H(a,t)=f(a)=g(a)$$

を満たす．そこで, $H'\colon X\times I\to Y$ を $H'(x,t)=H(x,1-t)$ で定めると, H' は g と f の間の A を固定するホモトピーを与える．従って $g\simeq f$ rel A が成り立つ.

(推移律) $f\simeq g$ rel A かつ $g\simeq h$ rel A とする． f から g への A を固定するホモトピー $H_1\colon X\times I\to Y$ と, g から h への A を固定するホモトピー $H_2\colon X\times I\to Y$ が存在する．このとき, $H\colon X\times I\to Y$ を

$$H(x,t)=\begin{cases}H_1(x,2t) & (0\le t\le 1/2)\\ H_2(x,2t-1) & (1/2\le t\le 1)\end{cases}$$

で定めると，$H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=h(x)$, $H(a,t)=f(a)=g(a)=h(a)$ が成り立っており，$f\simeq h$ rel A となる.

問題 6 $\pi_1(X,x_0)$ の積の定義（とそれが well-defined であること）は授業で行ったため，以下では結合性，単位元の存在，逆元の存在（のうち，授業で完全に示さなかった部分）を扱う.

(結合性の証明) $f,g,h\colon[0,1]\to X$ を x_0 を基点とするループとする．$\pi_1(X,x_0)$ での等式 $([f]\cdot[g])\cdot[h]=[f]\cdot([g]\cdot[h])$ を示すには，$(f\cdot g)\cdot h$ と $f\cdot(g\cdot h)$ の間の端点を止めたホモトピーを作ればよい．ホモトピー $H\colon I\times I\to X$ は

$$H(x,t)=\begin{cases}f(\frac{4x}{t+1}) & 0\le x\le\frac{t+1}{4}\\ g(4x-(t+1)) & \frac{t+1}{4}\le x\le\frac{t+2}{4}\\ h(\frac{4}{2-t}(x-\frac{t+2}{4})) & \frac{t+2}{4}\le x\le 1\end{cases}$$

で与えられる．H は $x=\frac{t+1}{4}$, $x=\frac{t+2}{4}$ で連続であること，また，$H(0,t)=H(1,t)=x_0$, $H(x,0)=((f\cdot g)\cdot h)(x)$, $H(x,1)=(f\cdot(g\cdot h))(x)$ に注意せよ．

(単位元の存在) $e\colon I\to X$ を定値ループ $e(x)=x_0$ とする．x_0 を基点とするループ $f\colon I\to X$ について，$e\cdot f\simeq_0 f\cdot e\simeq_0 f$ を示せばよい．このうち，$f\cdot e\simeq_0 f$ は授業で説明したので，$e\cdot f\simeq_0 f$ を示す．ホモトピーは次で定めるとよい．

$$H(x,t)=\begin{cases} x_0 & 0\le x\le \frac{1-t}{2} \\ f(\frac{2}{1+t}(x-\frac{1-t}{2})) & \frac{1-t}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

このとき $H(x,0)=(e\cdot f)(x)$, $H(x,1)=f(x)$ である．

(逆元の存在) x_0 を基点とするループ $f\colon I\to X$ に対して逆の道 ${}^{-1}\colon I\to X$ を $f^{-1}(x)=f(1-x)$ と定義する．(f^{-1} は逆写像ではないことに注意する．) $f\cdot f^{-1}\simeq_0$ $f^{-1}\cdot f\simeq_0 e$ を示せばよい．f と f^{-1} の役割は対称なので，$f\cdot f^{-1}\simeq_0 e$ を示せば十分である．ホモトピー $H\colon I\times I\to X$ を

$$H(x,t)=\begin{cases} f(2(1-t)x) & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ f(2(1-t)(1-x)) & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

と定める．$H(x,t)$ は $x=\frac{1}{2}$ で連続になっていることに注意する．また $H(x,0)=(f\cdot f^{-1})(x)$, $H(x,1)=e(x)$，$H(0,t)=H(1,t)=x_0$ であることがチェックできる．従って $f\cdot f^{-1}\simeq_0 e$ である．

問題 7 No.4 の演習で扱う．

問題 8 任意の x_0 を基点とするループ $f\colon I\to S^2$ が x_0 への定値ループ e と端点をとめてホモトピックであることを示せばよい．演習 No.1，問題 13 の解答の方法により，$y_0\in S^2\setminus\{x_0\}$ に対して，f は y_0 を像に含まないループ $\tilde{f}\colon I\to S^2$ と端点をとめてホモトピックになることが示せる．問題 2 より $S^2\setminus\{y_0\}\cong\mathbb{R}^2$ であり，$\mathbb{R}^2$ 内の任意のループは定値ループと（端点をとめて）ホモトピックであるから，$\tilde{f}$ は x_0 への定値ループと端点をとめてホモトピックである．

(別解）授業で後述する予定の Van Kampen の定理を使うと次のようにも解ける．$U=S^2\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x>-1/2\}$, $V=S^2\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x<1/2\}$ とすると，$U\cup V=S^2$ であり, U と V は開円板と同相なので可縮. $i_U\colon\pi_1(U\cap V,x_0)\to\pi_1(U,x_0)$, $i_V\colon\pi_1(U\cap V,x_0)\to\pi_1(V,x_0)$ を包含写像が誘導する準同型とする．Van Kampen の定理から,

$$\pi_1(S^2,x_0)\cong\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)/\{i_U(\omega)i_V(\omega)^{-1}\mid\omega\in\pi_1(U\cap V,x_0)\}\cong\{e\}.$$

問題 9 $\gamma_n\cdot\gamma_m$ と γ_{m+n} の間の基点を固定するホモトピーを作ればいい. まず，$\gamma_n\cdot\gamma_m$ は次で与えられることに注意する．

$$(\gamma_n\cdot\gamma_m)(x)=\begin{cases} e^{2\pi i2nx} & 0\le x\le 1/2 \\ e^{2\pi im(2x-1)} & 1/2\le x\le 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} e^{2\pi i2nx} & 0\le x\le 1/2 \\ e^{2\pi i(n+m(2x-1))} & 1/2\le x\le 1 \end{cases}$$

ここで，2 番目の表式では，$x = 1/2$ での偏角が一致するように $1/2 \le x \le 1$ での表式に $1 = e^{2\pi i n}$ を掛けている．従って $\gamma_n \cdot \gamma_m$ は次のように書き直せる．

$$(\gamma_n \cdot \gamma_m)(x) = e^{2\pi i f(x)}$$

ただし，$f\colon I \to \mathbb{R}$ は次で与えられる連続関数

$$f(x) = \begin{cases} 2nx & 0 \le x \le 1/2 \\ (n + m(2x-1)) & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

また，$g\colon I \to \mathbb{R}$ を $g(x) = (n+m)x$ とおくとき，

$$\gamma_{n+m} = e^{2\pi i g(x)}$$

と書くことができる．ここで $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = n+m$ に注意する．$\gamma_n \cdot \gamma_m$ と γ_{n+m} の間のホモトピー $H\colon I \times I \to S^1$ は偏角を与える関数 $f(x)$ と $g(x)$ を連続に補完することにより得られる．

$$H(x,t) = e^{2\pi i((1-t)f(x)+tg(x))}$$

このとき $H(x,0) = (\gamma_n \cdot \gamma_m)(x)$, $H(x,1) = \gamma_{n+m}(x)$ であり，$H(0,t) = H(1,t) = 1$ が成り立っている．従って H は $\gamma_n \cdot \gamma_m$ と γ_{n+m} の間のホモトピーを与える．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 10 点．正しくホモトピーを与えているかどうか．部分点なし．
TA の方へ：この問題の文脈は次の通りです．授業では $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ を示しました．任意の x_0 を基点とするループはただ一つの γ_n と基点を保ってホモトピックであることを（幾つかの非自明な事実を認めて）説明しました．ただし，授業では，$[\gamma_n \cdot \gamma_m] = [\gamma_{n+m}]$ については証明せず，演習問題として残していました．

問題 10 γ_0 と γ_1 が x_0 を基点とするループで端点をとめてホモトピックと仮定する．このとき $f \circ \gamma_0$ と $f \circ \gamma_1$ もホモトピックになる．実際，$H\colon I \times I \to X$ を γ_1 と γ_2 の間のホモトピーとすると，$f \circ H\colon I \times I \to Y$ は $f \circ \gamma_1$ と $f \circ \gamma_2$ の間のホモトピーとなる．よって $f_*[\gamma_0] = [f \circ \gamma_0] = [f \circ \gamma_1] = f_*[\gamma_1]$ であり，f_* は well-defined.
また定義から明らかに，$f \circ (\gamma_0 \cdot \gamma_1) = (f \circ \gamma_0) \cdot (f \circ \gamma_1)$．実際，

$$\begin{aligned}(f \circ (\gamma_0 \cdot \gamma_1))(x) &= \begin{cases} f(\gamma_0(2x)) & 0 \le x \le 1/2 \\ f(\gamma_1(2x-1)) & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \\ &= ((f \circ \gamma_0) \cdot (f \circ \gamma_1))(x)\end{aligned}$$

よって $f_*[\gamma_0 \cdot \gamma_1] = f_*[\gamma_0] \cdot f_*[\gamma_1]$．従って f_* は準同型になる。

問題 11 $f \simeq g \ \mathrm{rel}\, x_0$ のホモトピー写像を $H(x,t)$ と書く．ただし $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x), H(x_0,t) = x_0$ を満たす．$\pi_1(X, x_0)$ の任意の元 $[\gamma]$ に対し，$f \circ \gamma \simeq_0 g \circ \gamma$ を証明すればよい．ホモトピー $K\colon I \times I \to Y$ を

$$K(x,t) = H(\gamma(x), t)$$

と定義すると，$K(x,0) = f(\gamma(x))$, $K(x,1) = g(\gamma(x))$ である．さらに $K(0,t) = K(1,t) = x_0$ が成り立っている．よって $g \circ \gamma$ と $f \circ \gamma$ は端点をとめてホモトピックなループである．

問題 12 積位相の性質によって，任意の位相空間 Z について

$$\begin{aligned}&\text{写像 } f\colon Z \to X \times Y \text{ が連続}\\ &\quad \Longleftrightarrow f_X = p_X \circ f\colon Z \to X \text{ と } f_Y = p_Y \circ f\colon Z \to Y \text{ が共に連続.}\end{aligned}$$

ここで $p_X\colon X \times Y \to X$, $p_Y\colon X \times Y \to Y$ は射影である．よって次の一対一対応が得られる．

$$\begin{aligned}&\{X \times Y \text{ 内の } (x_0, y_0) \text{ を基点とするループ } f\}\\ &\quad \cong \{X \text{ 内の } x_0 \text{ を基点とするループ } f_X\} \times \{Y \text{ 内の } y_0 \text{ を基点とするループ } f_Y\}\end{aligned}$$

さらにループの間のホモトピーは $I \times I$ からの写像であることに注意すると，この対応の下で，

$$f \simeq_0 g \Longleftrightarrow f_X \simeq_0 g_X \text{ かつ } f_Y \simeq_0 g_Y$$

であることも分かる．以上より全単射 $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, $[f] \mapsto ([f_X], [f_Y])$ が得られる．これが群準同型であることは容易なので省略する．

問題 13 (θ の存在) 連続写像 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ を $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ で定める．$\mathbb{R}$ の開区間 $W_0 = (0,1)$, $W_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ を考え，$V_i = p(W_i)$ とおく．$V_i = S^1 \setminus \{(-1)^i\}$ であり，これは S^1 の開集合である．まず，$p|_{W_i}\colon W_i \to V_i$, $i = 0, 1$ は同相写像であることを示そう．演習 No.2 の問題 19 の解答でみたように，p は同相写像 $[0,1]/0 \sim 1 \cong S^1$ を誘導する．ここから 1 点を除いて同相写像 $p|_{W_0}\colon W_0 = (0,1) \to V_0$ を得る．同様の議論を $p\colon [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \to S^1$ に適用して $p|_{W_1}\colon W_1 \to V_1$ も同相であることが分かる．

S^1 の開被覆 $\{V_0, V_1\}$ を連続写像 $f\colon [0,1] \to S^1$ で引き戻して，$[0,1]$ の開被覆 $\{f^{-1}(V_0), f^{-1}(V_1)\}$ を得る．$[0,1]$ はコンパクト距離空間であることから，次を満たす正数 $\epsilon > 0$（ルベーグ数という）が存在する．$[0,1]$ 内の任意の長さ ϵ の閉区間は，どれかの $f^{-1}(V_i)$ に含まれる．$1/N < \epsilon$ を満たす自然数 N をとり，$p \circ \theta_k = f$ および $\theta_k(0) = \theta_0$ を満たす連続写像 $\theta_k\colon [0, k/N] \to \mathbb{R}$ を k について帰納的に定義する．$k = 0$ のときは $\theta_0(0) = \theta_0$ と定める．θ_{k-1} まで定義されているとする．N の取り方から，$[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]$ を含む $f^{-1}(V_i)$ をとることができる．このとき $f([\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]) \subset V_i$. $p(\theta_{k-1}(\frac{k-1}{N})) = f(\frac{k-1}{N}) \in V_i$ より，ある整数 n が存在して $\theta_{k-1}(\frac{k-1}{N}) \in n + W_i$．ここで $\theta_k\colon [0, \frac{k}{N}] \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$\theta_k(x) = \begin{cases} \theta_{k-1}(x) & 0 \le x \le \frac{k-1}{N} \\ (p|_{W_i})^{-1}(f(x)) + n & \frac{k-1}{N} \le x \le \frac{k}{N} \end{cases}$$

$x = \frac{k-1}{N}$ のときに二つの定義が一致することに注意されたい．また定義から明らかに $p \circ \theta_k = f$ である．$\theta = \theta_N$ が求めるものである．

(θ の一意性) $\theta_1, \theta_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ は条件を満たすと仮定する．このとき $e^{2\pi i\theta_1(x)} = f(x) = e^{2\pi i\theta_2(x)}$ であるから，$\delta(x) := \theta_1(x) - \theta_2(x) \in \mathbb{Z}$．$\delta(x)$ は $\mathbb{Z}$ に値をとる連続関数で $\delta(0) = 0$．ここで，$\delta^{-1}(0) = \delta^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ は $[0,1]$ の閉集合かつ開集合．$[0,1]$ の連結性から $\delta^{-1}(0) = [0,1]$．すなわち $\delta(x) = 0$ であり，$\theta_1(x) = \theta_2(x)$．

問題 14 問題 13 から，点 $x \in X$ を固定したとき，連続写像 $\Theta_x \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ であって，$\Theta_x(0) = \theta(x)$, $e^{2\pi i\Theta_x(t)} = H(x,t)$ を満たすものがただ一つ存在する．あとはこのようにして定まる関数 $\Theta(x,t) = \Theta_x(t)$ が $X \times I$ 上の連続関数であることを示せばよい．

$\Theta(x,t)$ がある点 $(x_0, t_0) \in X \times I$ で不連続であると仮定する．$t_1 = \inf\{t \in [0,1] \mid \Theta$ は (x_0, t) で不連続 $\}$ とおく．問題 13 の解答の記号を使って，$H(x_0, t_1) \in V_i$ を満たす $i \in \{0,1\}$ をとる．また $U \times J \subset H^{-1}(V_i)$ を満たす x_0 の開近傍 U と t_1 の $[0,1]$ における連結開近傍 J（区間）をとる．このとき $U_i \times J$ 上の連続関数 Θ' が次で定義できる．

$$\Theta'(x,t) = (p|_{W_i})^{-1}(H(x,t))$$

ここで p, W_i は問題 13 の解答で定義されたものである．Θ' と Θ は $p(\Theta(x,t)) = p(\Theta'(x,t))$ を満たし，$x \in U$ を固定したとき連続であるから，J の連結性から

$$\Theta(x,t) = \Theta'(x,t) + n_x \qquad (x,t) \in U \times J$$

を満たす t に依存しない整数 n_x が存在する．x_0 のある開近傍 U' 上で，n_x が x によらないことを示そう．$t_1 > 0$ のときは，$t_1 > t_2$ かつ $t_2 \in J$ なる実数 t_2 をとると，Θ は (x_0, t_2) で連続である．従って $n_x = \Theta(x, t_2) - \Theta'(x, t_2)$ も $x = x_0$ で連続な整数値関数であって，x_0 の開近傍 $U' \subset U$ 上で定数である．$t_1 = 0$ のときは，$\Theta(x, 0) = \theta(x)$ であるから，$n_x = \Theta(x,0) - \Theta'(x,0) = \theta(x) - \Theta'(x,0)$ は x の整数値連続関数であり，x_0 の開近傍 $U' \subset U$ 上で定数．従って

$$\Theta(x,t) = \Theta'(x,t) + n_{x_0} \qquad (x,t) \in U' \times J$$

が成立する．右辺は $U' \times J$ の連続関数であるが，左辺は $U' \times J$ に不連続点を持つ．これは矛盾．従って Θ' は不連続点を持たない．

問題 15 $H \colon I \times I \to S^1$ を $H(x,0) = f_1(x)$, $H(x,1) = f_2(x)$，$H(0,t) = H(1,t) = 1$ をみたすホモトピーとする．前問（問題 14）の結果より，$\Theta \colon I \times I \to \mathbb{R}$ であって $H(x,t) = e^{2\pi i\Theta(x,t)}$, $\Theta(x,0) = \theta_1(x)$ を満たす連続写像がただ一つ存在する．$i = 0,1$ に対して，$H(i,t) = 1$ であることから $\Theta(i,t) \in \mathbb{Z}$ である．連続性と I の連結性から $\Theta(i,t)$ は $t \in I$ の定数関数で（問題 13 の解答参照），$\Theta(0,0) = \theta_1(0) = 0$ より $\Theta(0,t)$ は恒等的にゼロである．また $\Theta(1,t) = \Theta(1,0) = \theta_1(1)$．$\Theta(x,1)$ は $\Theta(0,1) = 0$ および $e^{2\pi i\Theta(x,1)} = H(x,1) = f_2(x)$ を満たす連続関数なので，$\Theta(x,1) = \theta_2(x)$．以上より $\theta_2(1) = \Theta(1,1) = \theta_1(1)$ が従う．

問題 16 $p_\#$ が準同型であることを示す．任意の $a, b \in \pi_1(X, x_0)$ について，基本亜群における積 $\cdot$ を使って

$$
\begin{aligned}
p_\#(a \cdot b) &= [p^{-1}] \cdot a \cdot b \cdot [p] \\
&= [p^{-1}] \cdot a \cdot [p] \cdot [p^{-1}] \cdot b \cdot [p] \\
&= p_\#([f]) \cdot p_\#([g])
\end{aligned}
$$

より，$p_\#$ は準同型である．ここで $[p] \cdot [p^{-1}] = e_{x_0} \in \pi_1(X, x_0)$ を用いた．(途中に現れる積がすべて well-defined であることに注意する．）次に $p_\#$ が全単射であることを示す．逆の道 $p^{-1}(x) = p(1-x)$ の定義する写像

$$
(p^{-1})_\# \colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), \quad \gamma \mapsto [p] \cdot \gamma \cdot [p^{-1}]
$$

を考える．このとき，$(p^{-1})_\#(p_\#(\gamma)) = \gamma$, $p_\#((p^{-1})_\#(\gamma)) = \gamma$ は容易に確かめられる．従って $p_\#$ は全単射である．

幾何学入門演習　No.4　(2022年10月26日)[1]

問題 1 (再掲) X を位相空間とする．$x, y \in X$ に対して，集合 $\Pi(x,y)$ を次で定義する．

$$\Pi(x,y) = \{x \text{ から } y \text{ への道 } p\colon I \to X\}/\text{端点をとめてホモトピック}$$

基本群の定義と同様にして2項演算 $\Pi(x,y)\times\Pi(y,z) \to \Pi(x,z)$, $([p_1],[p_2]) \mapsto [p_1\cdot p_2]$ が道の合成により定まることを観察せよ．(ここで $p_1\cdot p_2(s)$ は $0 \le s \le 1/2$ のとき $p_1(2s)$, $1/2 \le s \le 1$ のとき $p_2(2s-1)$ と定める．) この演算が群と同様の次の性質を満たすことを示せ．

(1) $x \in X$ に対して $e_x \in \Pi(x,x)$ がただ一つ存在して，任意の $p \in \Pi(x,y)$ と $q \in \Pi(z,x)$ について $e_x \cdot p = p$, $q \cdot e_x = q$ が成り立つ．

(2) $p \in \Pi(x,y)$ に対して次を満たす $p^{-1} \in \Pi(y,x)$ がただ一つ存在する．$p\cdot p^{-1} = e_x$, $p^{-1}\cdot p = e_y$.

(3) $p \in \Pi(x,y)$, $q \in \Pi(y,z)$, $r \in \Pi(z,w)$ に対して $(p\cdot q)\cdot r = p\cdot(q\cdot r)$.

以上の演算が与えられた集合の集まり $\{\Pi(x,y)\}_{x,y\in X}$ を基本亜群 (fundamental groupoid) という．($\Pi(x,x) = \pi_1(X,x)$ であることに注意.)

問題 2 ($\star$) 授業で紹介した次の補題を証明せよ．$h\colon X \to X$ を連続写像で id_X とホモトピックなものとする．このとき任意の $x_0 \in X$ について $h_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,h(x_0))$ は同型である．($h(x_0)$ から x_0 への道 p を適切にとり，h_* と $p_\#\colon \pi_1(X,h(x_0)) \cong \pi_1(X,x_0)$ を合成した写像を考える．)

問題 3 $x, y \in X$ とし，x から y への道 $p\colon I \to X$, $p(0) = x$, $p(1) = y$ があるとする．$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき次の図式が可換であること，すなわち，$(f\circ p)_\# \circ f_* = f_* \circ p_\#$ が成り立つこと，を示せ．

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "p_\#"] & \pi_1(Y,f(x)) \arrow[d, "(f\circ p)_\#"] \\
\pi_1(X,y) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(Y,f(y))
\end{tikzcd}$$

ここで $p_\#$, $(f\circ p)_\#$ は演習 No.3 の問題 16 で定義した群の同型写像である．

問題 4 S を集合とする．S の各元 $s \in S$ について s^{-1} という記号を準備し，$S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$ と書く．S^{-1} は S のコピーである．また $s \in S$ に対して，$(s^{-1})^{-1} = s$ と定める．S 上の語 (word) とは $S \sqcup S^{-1}$ の元からなる有限列

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \qquad \text{但し } s_1, \ldots, s_n \in S \sqcup S^{-1}$$

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的.

のことである．空の列 ()（$n=0$ のとき）も語とみなし，空語とよぶ．S 上の語全体の集合を $W(S)$ と表す．$W(S)$ には語の連結によって積 $W(S)\times W(S)\to W(S)$ が入る．

$$(s_1,s_2,\dots,s_n)\cdot(t_1,t_2,\dots,t_m)=(s_1,s_2,\dots,s_n,t_1,t_2,\dots,t_m)$$

$W(S)$ に次の関係で生成される同値関係 $\sim$ を入れる．

$$(a_1,\dots,a_n,x,x^{-1},b_1,\dots,b_m)\sim(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)$$

ここで $a_i,b_i,x\in S\sqcup S^{-1}$ である．$F(S)=W(S)/\sim$ を W の同値関係 $\sim$ による商集合とする．$W(S)$ の積は $F(S)$ の積 $F(S)\times F(S)\to F(S)$ を誘導することを示せ．空語 $()\in W(S)$ の $F(S)$ における像を 1 と書くと，$F(S)$ は 1 を単位元とする群の構造を持つことを示せ．

$F(S)$ を S **の生成する自由群**という．$n=|S|$ のとき，$F(S)=F_n$ と書く．

問題 5 (レポート問題 11 月 1 日 17:00 締め切り) S 上の語 $(s_1,\dots,s_n)\in W(S)$ が簡約 (reduced) であるとは $s_{i+1}\neq s_i^{-1}$ がすべての $i=1,\dots,n-1$ について成り立つことである．ただし，空語は簡約とみなす．任意の語 $w=(s_1,\dots,s_n)\in W(S)$ に対して簡約語 $r(w)\in W(S)$ を定義しよう．語の列 $w_1,\dots,w_n$ を帰納的に次のように定める．$w_1=(s_1)$ とし，$w_{i-1}=(a_1,\dots,a_k)$ であるとき，

$$w_i=\begin{cases}(a_1,\dots,a_{k-1}) & a_k=s_i^{-1}\ \text{のとき}\\ (a_1,\dots,a_k,s_i) & a_k\neq s_i^{-1}\ \text{のとき}\end{cases}$$

と定める．最後に $r(w)=w_n$ と定める．空語については $r(())=()$ とする．$r(w)$ が簡約であることは定義から明らか．問題 4 にある同値関係 $\sim$ について，次を示せ．

(1) $v,w\in W(S)$ が $v\sim w$ を満たすとき，$r(v)=r(w)$．

(2) $W(S)$ の $\sim$ に関する同値類は簡約語をただ一つ含む．

従って $F(S)$ は簡約語全体の集合と同一視できる．

問題 6 $F(S)$ を S の生成する自由群とする．$i\colon S\to F(S)$ を自然な写像とする．G を任意の群とする．任意の写像 $f\colon S\to G$ に対して，群準同型 $\varphi\colon F(S)\to G$ であって $\varphi\circ i=f$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ．

問題 7 ($\star$) 自然数 n,m について，$F_n\cong F_m$ なら $n=m$ を示せ．(もっと一般に，$F(S)\cong F(S')$ なら S と S' の濃度は等しい．)

問題 8 ($\star$) X を弧状連結空間，$x_0\in X$ を基点とする．x_0 を基点とするループ $f\colon I\to X$ は連続写像 $\overline{f}\colon S^1\cong I/(0\sim 1)\to X$ を定める．写像 $p\colon \pi_1(X,x_0)\to[S^1,X]$, $[f]\mapsto[\overline{f}]$ は全射であって，$\gamma_1,\gamma_2\in\pi_1(X,x_0)$ に対して

$$p(\gamma_1)=p(\gamma_2)\iff \exists g\in\pi_1(X,x_0)\ \text{s.t.}\ \gamma_1=g\gamma_2g^{-1}$$

が成り立つことを示せ．(つまり，p は共役による商写像と同一視される．)

問題 9 X を弧状連結空間とする．X が単連結であることと，$[S^1,X]$ が 1 点集合であることとは同値であることを示せ．

幾何学入門演習　No.4 解答例

問題 1 以下では $P(x,y)=\{f\colon I\to X \mid x$ から y への道$\}$ とおく．道の合成は写像 $P(x,y)\times P(y,z)\to P(x,z)$ を定める．定義より

$$\Pi(x,y)=P(x,y)/\text{端点をとめてホモトピック}$$

である．

(二項演算が定まること) $([p_1],[p_2])\mapsto[p_1\cdot p_2]$ が well-defined であることをみればよい．$p_1'\in P(x,y)$, $p_2'\in P(y,z)$ で $[p_1]=[p_1']$, $[p_2]=[p_2']$ となるものをとり，$[p_1\cdot p_2]=[p_1'\cdot p_2']$ を示す．p_1 と p_1' はホモトピックなので $H_1\colon I\times I\to X$ で $H_1(s,0)=p_1(s)$, $H_1(s,1)=p_1'(s)$ をみたす連続写像 H_1 がとれ，p_2 と p_2' についても同様に H_2 をとる．このとき $H\colon I\times I\to X$ を

$$H(s,t)=\begin{cases}H_1(2s,t) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ H_2(2s-1,t) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

とすればこれは連続で $H(s,0)=p_1\cdot p_2$, $H(s,1)=p_1'\cdot p_2'$ となる連続写像 H を得るので主張が従う．

(1) まず存在を示す．$e_x\in P(x,x)$ を定値ループ $e_x(s)=x$ $(0\le s\le 1)$ と定める．このとき，$p\in P(x,y), q\in P(y,x)$ に対して，$e_x\cdot p\simeq_0 p$ および $q\cdot e_x\simeq_0 q$ を示せばよい．$e_x\cdot p$ と p の間のホモトピーは次で与えられる．

$$H(s,t)=\begin{cases}x & 0\le s\le\frac{1-t}{2}\\ p(\frac{2}{1+t}(s-\frac{1-t}{2})) & \frac{1-t}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

このとき $H(s,0)=(e_x\cdot p)(s)$, $H(s,1)=p(s)$ であり，$H(0,t)=x$, $H(1,t)=y$ を満たす．従って $e_x\cdot p\simeq_0 p$．同様に $q\cdot e_x\simeq_0 q$ も示せる．

次に一意性を示す．もし (1) の性質を満たす $\Pi(x,x)$ の元（単位元）が 2 つあるとし，$e_x,e_x'\in\Pi(x,x)$ とする．このとき，$e_x'=e_x\cdot e_x'=e_x$ である．

(2) $p\in P(x,y)$ に対し，$p^{-1}\in P(y,x)$ を $p^{-1}(s)=p(1-s)$ で定める．$e_x\simeq_0 p\cdot p^{-1}$ を示す．$H\colon I\times I\to X$ を

$$H(s,t)=\begin{cases}p(2st) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ p(2(1-s)t) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

とすると $H(s,0)=e_x$, $H(s,1)=(p\cdot p^{-1})(s)$ となる連続写像であり，$H(0,t)=x$, $H(1,t)=x$ が成立する．したがって $e_x\simeq_0 p\cdot p^{-1}$ が成り立つ．$e_y\simeq_0 p^{-1}\cdot p$ も同様.

(3) $p\in P(x,y)$, $q\in P(y,z)$, $r\in P(z,w)$ に対して，$(p\cdot q)\cdot r\simeq_0 p\cdot(q\cdot r)$ を示せばよい.

$$((p\cdot q)\cdot r)(s)=\begin{cases}p(4s) & 0\le s\le 1/4\\ q(4s-1) & 1/4\le s\le 1/2\\ r(2s-1) & 1/2\le s\le 1\end{cases}$$

であり，

$$(p\cdot(q\cdot r))(s)=\begin{cases}p(2s) & 0\le s\le 1/2\\ q(4s-2) & 1/2\le s\le 3/4\\ r(4s-3) & 3/4\le s\le 1\end{cases}$$

であることに注意．ここで $H\colon I\times I\to X$ を

$$H(s,t)=\begin{cases}p(\frac{4s}{t+1}) & 0\le s\le \frac{t+1}{4}\\ q(4s-(t+1)) & \frac{t+1}{4}\le s\le \frac{t+2}{4}\\ r(\frac{4}{2-t}(s-\frac{t+2}{4})) & \frac{t+2}{4}\le s\le 1\end{cases}$$

とすると，H は連続で，$H(s,0)=((p\cdot q)\cdot r)(s)$，$H(s,1)=(p\cdot(q\cdot r))(s)$ である．また $H(0,t)=x$, $H(1,t)=w$ である．従って H は $(p\cdot q)\cdot r$ と $p\cdot(q\cdot r)$ の端点をとめたホモトピーを与える．

問題 2 写像 $h\colon X\to X$ と id_X の間のホモトピーを $H\colon X\times I\to X$ とする．H は $H(x,0)=h(x), H(x,1)=\mathrm{id}_X$ を満たす連続写像である．ここで $p\colon I\to X$ を $p(t)=H(x_0,t)$ とすると，p は連続写像で $p(0)=h(x_0), p(1)=x_0$ となり，これは $h(x_0)$ から x_0 への道である．

前回の演習問題 No.3 より，h は群の準同型 $h_*\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,h(x_0))$ を誘導する．$p_\#\colon\pi_1(X,h(x_0))\to\pi_1(X,x_0)$ は同型であるから，$p_\#\circ h_*$ が同型写像であることを示せばよい．以下では $p_\#\circ h_*$ が恒等写像であることを示す．任意の $[\gamma]\in\pi_1(X,x_0)$ について，$p_\#\circ h_*([\gamma])=p_\#([h\circ\gamma])=[p^{-1}]\cdot[h\circ\gamma]\cdot[p]$ である．$[p^{-1}]\cdot[h\circ\gamma]\cdot[p]$ は次のループ c で代表される．

$$c(s)=\begin{cases}p(1-4t) & (0\leqq t\leqq \frac{1}{4})\\ h\circ\gamma(4t-1) & (\frac{1}{4}\leqq t\leqq\frac{1}{2})\\ p(2t-1) & (\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1)\end{cases}$$

$c\simeq_0\gamma$ を示せばよい．そこで $K\colon I\times I\to X$ を

$$K(s,t)=\begin{cases}p(1-4s) & (0\leqq s\leqq\frac{1}{4}t)\\ H(\gamma(\frac{4s-t}{4-3t}),1-t) & (\frac{1}{4}t\leqq s\leqq 1-\frac{1}{2}t)\\ p(2s-1) & (1-\frac{t}{2}\leqq s\leqq 1)\end{cases}$$

と定める．$K(\cdot,t)$ は $x_0=p(1)$ から $p(1-t)$ まで p^{-1} にそって進み，次に $p(1-t)$ を基点とするループ $H(\gamma(\cdot),1-t)$ を進み，最後に $p(1-t)$ から $p(1)$ に p に沿って戻る道である．$K(s,0)=\gamma(s)$, $K(s,1)=c(s)$，$K(0,t)=K(1,t)=p(1)=x_0$ より，K は γ と c の間の端点を止めたホモトピーを与える．

問題 3 任意の $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ に対し,

$$\begin{aligned}((f \circ p)_\# \circ f_*)([\gamma]) &= (f \circ p)_\#([f \circ \gamma]) \\ &= [((f \circ p)^{-1} \cdot (f \circ \gamma)) \cdot (f \circ p)] \\ &= [((f \circ p^{-1}) \cdot (f \circ \gamma)) \cdot (f \circ p)] \\ &= [f \circ ((p^{-1} \cdot \gamma) \cdot p)] \\ &= f_*([(p \cdot \gamma) \cdot p^{-1}]) = f_* \circ p_\#([\gamma])\end{aligned}$$

より従う.

問題 4 同値関係 $\sim$ は関係

$$(a_1, \ldots, a_n, x, x^{-1}, b_1, \ldots, b_m) \approx (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$$

で「生成される」関係として定義された. つまり $w \sim w'$ とは $W(S)$ の元の有限列 $w_1, \ldots, w_n$ が存在して $w_1 = w$, $w_n = w'$ が成り立ち, 各 $i = 1, \ldots, n-1$ に対して $w_i \approx w_{i+1}$ あるいは $w_{i+1} \approx w_i$ あるいは $w_i = w_{i+1}$ が成り立つことである. 語の積 $W(S) \times W(S) \to W(S)$ が商空間 $F(S) = W(S)/\sim$ の積を誘導することをいうには, 次を示せば十分である.

$$\begin{aligned} w_1 \approx w_1' &\implies w_1 \cdot w_2 \sim w_1' \cdot w_2 \\ w_2 \approx w_2' &\implies w_1 \cdot w_2 \sim w_1 \cdot w_2' \end{aligned}$$

このことは定義から明らかである. よって $W(S)$ の積から誘導された $F(S)$ の積 $[w_1] \cdot [w_2] := [w_1 \cdot w_2]$ は well-defined.

任意の元 $[w] \in F(S)$, $w = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ をとる. このとき

$$[w] \cdot 1 = [(a_1, \ldots, a_n) \cdot ()] = [(a_1, \ldots, a_n)] = w = [() \cdot (a_1, \ldots, a_n)] = 1 \cdot [w]$$

より $1 = [()]$ は単位元. また $[w]^{-1} = [(a_n^{-1}, \ldots, a_1^{-1})]$ と定義すれば, 同値関係を使うことにより

$$\begin{aligned}[w] \cdot [w]^{-1} &= [(a_1, \ldots, a_n, a_n^{-1}, \ldots, a_1^{-1})] \\ &= [(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n-1}^{-1}, \ldots, a_1)] \\ &\vdots \\ &= [(a_1, a_1^{-1})] = [()] = 1\end{aligned}$$

が言える. 同様にして $[w]^{-1} \cdot [w] = 1$. また語の積は明らかに結合法則を満たすので, $F(S)$ の積も結合法則を満たす. 従って $F(S)$ は 1 を単位元とする群の構造を持つ.

問題 5 (1) 前問の解答と同じく同値関係ではない $W(S)$ 上の関係 $\approx$ を

$$(a_1, \ldots, a_n, x, x^{-1}, b_1, \ldots, b_m) \approx (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$$

により定めることとする．$\sim$ は $\approx$ で生成される同値関係である．$w \approx w'$ のときに $r(w) = r(w')$ を示せば十分である．

$$w = (a_1, \ldots, a_n, x, x^{-1}, b_1, \ldots, b_m), \qquad w' = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$$

とおく．問題文に従って列 $w_1, \ldots, w_{n+m+2}$ および列 $w'_1, \ldots, w'_{n+m}$ を定める．このとき明らかに $w_i = w'_i$, $i = 1, \ldots, n$ が成立する．$w_n = w'_n = (s_1, \ldots, s_l)$ とする．次の 2 つの場合に分かれる．

Case 1: $s_l = x^{-1}$ のとき．$w_{n+1} = (s_1, \ldots, s_{l-1})$ である．また列の作り方から w_n は簡約であって，特に $s_{l-1} \neq s_l^{-1}$．すなわち $s_{l-1} \neq x$ であり，$w_{n+2} = (s_1, \ldots, s_{l-1}, x^{-1}) = (s_1, \ldots, s_{l-1}, s_l) = w_n$ となる．

Case 2: $s_l \neq x^{-1}$ のとき．$w_{n+1} = (s_1, \ldots, s_l, x)$, $w_{n+2} = (s_1, \ldots, s_l)$ となる．

以上よりいずれの場合も $w_{n+2} = w_n = w'_n$．従って $w_{n+2+j} = w'_{n+j}$ が $j = 0, \ldots, m$ で成立し，$r(w) = r(w')$ が従う．

(2) まず，任意の語 w について $w \sim r(w)$ を示そう．$w = (s_1, \ldots, s_n)$ に対して $w_i \sim (s_1, \ldots, s_i)$ であることを i に関する帰納法で示す．$i = 1$ の時は明らか．$w_i \sim (s_1, \ldots, s_i)$ が正しいと仮定する．問題 4 で示したことから，$(s_1, \ldots, s_{i+1}) = (s_1, \ldots, s_i) \cdot (s_{i+1}) \sim w_i \cdot (s_{i+1})$．ここで w_{i+1} の定義より

$$w_i \cdot (s_{i+1}) \approx w_{i+1} \quad \text{あるいは} \quad w_i \cdot (s_{i+1}) = w_{i+1}$$

が成り立つ．従って $w_{i+1} \sim (s_1, \ldots, s_{i+1})$．以上により帰納法が完成し，$r(w) = w_n \sim (s_1, \ldots, s_n) = w$ が示された．

$W(S)$ の同値類 $[w]$ をとる．$w \sim r(w)$ であるから，$[w]$ は少なくとも一つの簡約語 $r(w)$ を含む．もし $[w]$ が 2 つの簡約語 v, v' を含んだとする．このとき $v \sim v'$ ゆえ $r(v) = r(v')$．簡約語 v, v' については定義より $v = r(v), v' = r(v')$ であることが分かるから，$v = r(v) = r(v') = v'$．従って $[w]$ はただ一つの簡約語を含む．

採点基準　(1) 5 点，(2) 5 点で採点．部分点はなし．

(1) $w = (a_1, \ldots, a_n, x, x^{-1}, b_1, \ldots, b_m), w' = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ に対して $r(w) = r(w')$ が成り立つ，という問題に還元して考えているかどうか（その証明の詳細までは問わない）.

(2) 同値類が高々1 つしか簡約語を含まないこと，を (1) を使って（あるいは他の方法でもよいがその場合は正しく）議論している．(同値類が少なくとも一つの簡約語を含むこと，については問わない.)

TA の皆様へ：点数とは関係なく説明不足と感じられた答案にはコメントをお願いします.

問題 6 $\varphi\colon F(S) \to G$ を次で定める．$F(S)$ の元を一つ取り，その同値類の代表元を $(s_1, \ldots s_n)$, $(s_1, \ldots s_n \in S \sqcup S^{-1})$ とする．このとき，$\varphi(s_1, \ldots, s_n) = f(s_1) \cdots f(s_n)$ と定める．ただし $s_i \in S^{-1}$ の時は $f(s_i) = f(s_i^{-1})^{-1}$ とする．つまり任意の $s \in S \sqcup S^{-1}$ に対して $f(s^{-1}) = f(s)^{-1}$ が成り立つ．

まずこの写像が well-defined であることは

$$\begin{aligned}\varphi(s_1,\dots s_k,x,x^{-1},s_{k+1},\dots,s_n)&=f(s_1)\cdots f(s_k)f(x)f(x)^{-1}f(s_{k+1})\cdots f(s_n)\\&=f(s_1)\cdots f(s_n)=\varphi(s_1,\dots s_n)\end{aligned}$$

より従う．さらに $\varphi\circ i=f$ も作り方からわかる．

最後に一意性を確認する．準同型 $\varphi'\colon F(S)\to G$ で $\varphi'\circ i=f$ となるものをとるとき，$\varphi'\circ i=f$ から全ての $s\in S$ に対して $\varphi'(s)=f(s)$．さらに $s\in S$ に対して $\varphi'(s^{-1})=\varphi'(s)^{-1}=f(s)^{-1}=f(s^{-1})$ が成り立つ[1]．つまり任意の $s\in S\sqcup S^{-1}$ に対して $\varphi(s)=f(s)$．$F(S)$ の任意の元は $S\sqcup S^{-1}$ の元の積で表されるから，準同型の性質より $\varphi'=\varphi$ でなければならない．

問題 7 F_n を $\{x_1,\dots,x_n\}$ で生成される自由群とする．問題6より，F_n から自由アーベル群 $\mathbb{Z}^k$ への準同型は $x_1,\dots,x_n$ の像を定めることで与えられる．もし準同型が全射であるとすれば，$\mathbb{Z}^k$ は $x_1,\dots,x_n$ の像で生成される．$\mathbb{Z}^k$ の生成元の個数は k 以上であることが知られている[2]から，このとき $n\geq k$ である．従って

$$n\geq\max\{k\mid \text{全射準同型}\,\varphi\colon F_n\to\mathbb{Z}^k\,\text{が存在する}\}$$

一方で F_n から $\mathbb{Z}^n$ への全射準同型は存在する ($x_1,\dots,x_n$ を $\mathbb{Z}^n$ の基底に写すものを考えればよい) から，実際には

$$n=\max\{k\mid \text{全射準同型}\,\varphi\colon F_n\to\mathbb{Z}^k\,\text{が存在する}\}$$

となる．従って $F_n\cong F_m$ なら $n=m$ である．

注意 一般に群 G に対して群 G の可換化 $G/[G,G]$ が定義される．ここで $[G,G]$ は交換子群と呼ばれ，$aba^{-1}b^{-1}(a,b\in G)$ の形の元で生成される部分群であり，G の正規部分群である．$G/[G,G]$ はアーベル群であり，G の商として得られるアーベル群の中で「最も大きい」ものである．自由群 F_n の可換化 $F_n/[F_n,F_n]$ は $\mathbb{Z}^n$ であることが容易にわかるので，そのことを用いてもよい．

問題 8 (略解) 以下では $S^1=[0,1]/0\sim1$ とみなし，S^1 からの連続写像を I からの連続写像で端点で一致しているものと同一視する．

写像 $p\colon\pi_1(X,x_0)\to[S^1,X]$ が全射であること．任意の連続写像 $c\colon I/(0\sim1)\to X$ をとる．$c(0)=x_1$ とする．X は弧状連結であるから，x_0 から x_1 への道 $f\colon I\to X$ が存在する．このとき x_0 を基点とするループ $(f\cdot c)\cdot f^{-1}$ は c と（端点をとめずに）ホモトピックであることを示せばよい．ホモトピー $H\colon I\times I\to X$ を

$$H(x,t)=\begin{cases}f(1-t+4x) & 0\leq x\leq t/4\\ c(\frac{4x-t}{4-3t}) & t/4\leq x\leq 1-t/2\\ f(3-2x-t) & 1-t/2\leq x\leq 1\end{cases}$$

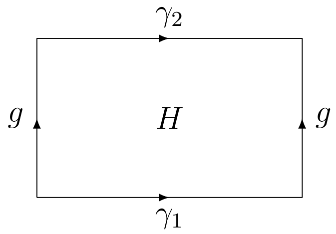
[1]群準同型 $\varphi\colon G\to H$ に対して $\varphi(1)=1$, $\varphi(g^{-1})=\varphi(g)^{-1}$ が成り立つ．まず $\varphi(1)^2=\varphi(1^2)=\varphi(1)$ に $\varphi(1)^{-1}$ を左から掛けて $\varphi(1)=1$ を得る．次に $\varphi(g^{-1})\varphi(g)=\varphi(g^{-1}\cdot g)=\varphi(1)=1$．よって $\varphi(g)$ の逆元を右からかけて $\varphi(g^{-1})=\varphi(g)^{-1}$．

[2]$\mathbb{Z}^k$ の生成元 $z_1,\dots,z_m$ は，$\mathbb{R}$ 上，ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ も生成する．線形代数で $\mathbb{R}^k$ の生成元の個数が k 以上であることはよく知られているので，$m\geq k$ である．

で定めると，H は $H(0,t)=H(1,t)=f(1-t)$ を満たすため，$S^1\times I\to X$ とみなすことができる．このとき $H(x,1)=((f\cdot c)\cdot f^{-1})(x)$，$H(x,0)=c(x)$ ゆえ c と $(f\cdot c)\cdot f^{-1}$ は（端点をとめずに）ホモトピックとなる．

次に x_0 を基点とするループ γ, g に対して，$p([g]\cdot[\gamma]\cdot[g]^{-1})=p([\gamma])$ を示そう．先ほどの議論と同様に，$(g\cdot\gamma)\cdot g^{-1}$ と γ は基点をとめずにホモトピックである．このことから示したいことが直ちに従う．

最後に $p([\gamma_1])=p([\gamma_2])$ ならば $[\gamma_1]$ と $[\gamma_2]$ が基本群で共役であることを示そう．仮定から，ホモトピー $H\colon I\times I\to X$ で $H(x,0)=\gamma_1(x)$, $H(x,1)=\gamma_2(x)$, $H(0,t)=H(1,t)$ を満たすものが存在する．ここで x_0 を基点とするループ $g\colon I\to X$ を $g(x)=H(0,x)=H(1,x)$ と定義するとき，$\gamma_1\simeq_0(g\cdot\gamma_2)\cdot g^{-1}$ であることが示せる（図参照）．



問題 9 問題 8 より，$[S^1,X]\cong\pi_1(X,x_0)/$共役 である．もし X が単連結であれば，$\pi_1(X,x_0)=\{1\}$ であるから，明らかに $[S^1,X]$ は 1 点集合である．逆に $[S^1,X]$ が 1 点集合とする．このとき $\pi_1(X,x_0)$ の任意の 2 元は互いに共役．従って任意の $g\in\pi_1(X,x_0)$ は単位元 1 と共役であり，1 と共役な元は 1 しかないので，$g=1$．従って $\pi_1(X,x_0)=\{1\}$ である．

幾何学入門演習　No.5　(2022 年 11 月 2 日)[1]

定義　写像 $p\colon X \to Y$ が被覆写像であるとは，任意の $y \in Y$ に対して y の開近傍 U と X の互いに交わらない開集合の族 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在して $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha\in A} V_\alpha$ かつ $p|_{V_\alpha}\colon V_\alpha \to U$ がすべての $\alpha \in A$ について同相写像となること．

問題 1 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とみなす．$p\colon \mathbb{R} \to S^1$ を $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ と定める．

(1) (a, b) を実数の開区間で長さ $b-a$ が 1 より小さいものとする．このとき，$p((a, b))$ は S^1 の開集合で，$p|_{(a,b)}\colon (a, b) \to p((a, b))$ は同相写像であることを示せ.

(2) p は被覆写像であることを示せ.

(3) $q\colon S^1 \to S^1$ を $q(z) = z^2$ で定める．q は被覆写像であることを示せ.

問題 2 $p\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $p(z) = z^n$ と定める．p は n 次の被覆写像であることを示せ.

問題 3 (レポート問題 2022 年 11 月 8 日 17:00 締め切り) 被覆写像は局所同相写像 (local homemorphism) であることを示せ．ただし $p\colon X \to Y$ が局所同相写像であるとは，任意の $x \in X$ に対して x のある開近傍 U が存在して $p(U)$ は Y の開集合であり $p|_U\colon U \to p(U)$ は同相写像となることをいう.

問題 4 $p\colon X \to Y$ を被覆写像（あるいはより一般に局所同相写像）とする．任意の $y \in Y$ に対して $p^{-1}(y)$ は（X からの相対位相について）離散位相空間であることを示せ.

問題 5 $p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．Y がハウスドルフなら X もハウスドルフであることを示せ．(これは p が局所同相であるだけでは反例がある．)

問題 6 ($\star$) X, Y を局所コンパクトハウスドルフ空間，$p\colon X \to Y$ を局所同相とする．p が固有 (proper) であれば，p は被覆写像であることを示せ.

問題 7 問題 1 の写像を開区間 $(0, 2)$ に制限した写像 $p|_{(0,2)}\colon (0, 2) \to S^1$ は局所同相写像であるが，被覆写像ではないことを示せ.

問題 8 $p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．Y が連結であれば，$p^{-1}(y)$ の濃度は点 $y \in Y$ の取り方によらないことを示せ.

問題 9 ($\star$) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を整数行列で，$\det(A) \neq 0$ を満たすものとする．$T^2 = S^1 \times S^1$ とし，S^1 を絶対値 1 の複素数全体とみなす．写像 $p\colon T^2 \to T^2$ を $p(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ と定める．p は次数 $|\det(A)|$ の被覆写像であることを示せ.

[1] $\star$ はやや難，$\bigstar$ は難しい．それ以外は易しい or 標準的.

問題 10 (⋆) 自由群 F_2 の（生成系 $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$ に関する）Cayley graph Γ を定義し，それが $S^1 \vee S^1$ の被覆空間になっていることを観察せよ．さらに Γ は可縮であることを示せ.

問題 11 K をコンパクト距離空間，$\{U_\alpha\}$ を K の開被覆とする．このとき次を満たす正数 $\epsilon > 0$ が存在することを示せ．任意の $x \in K$ に対して x 中心の ϵ 開球体 $B_\epsilon(x) = \{y \in K \mid d(x, y) < \epsilon\}$ はどれかの U_α に含まれる.

問題 12 Z を連結位相空間，$p\colon X \to Y$ を局所同相写像，X をハウスドルフ空間とする．連続写像 $f\colon Z \to Y$ の持ち上げ $\hat{f}\colon Z \to X$（$p \circ \hat{f} = f$ を満たす連続写像）であって $\hat{f}(z_0) = x_0$ を満たすものは存在すれば一意であることを示せ．ただし $x_0 \in X$, $z_0 \in Z$ は $f(z_0) = p(x_0)$ を満たす点.

問題 13 (⋆) X を Hausdorff 位相空間，$p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．$Z = I$（あるいは，より一般の位相空間でもよい）とする．$f\colon Z \to Y$ を連続写像とし，$\hat{f}\colon Z \to X$ を f の持ち上げ（つまり $p \circ \hat{f} = f$ を満たす連続写像）とする．$H\colon Z \times I \to Y$ を $H(z, 0) = f(z)$ を満たす連続写像（f のホモトピー）とするとき，次を満たす連続写像 $\hat{H}\colon Z \times I \to X$ が一意に存在することを示せ.

$$p \circ \hat{H} = H, \qquad \hat{H}(z, 0) = \hat{f}(z)$$

$$\begin{tikzcd}
Z \times \{0\} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\hat{H}"] & Y
\end{tikzcd}$$

問題 14 (レポート問題 2022 年 11 月 8 日 17:00 締め切り) X をハウスドルフ位相空間，$p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．連続写像 $f\colon I \to Y$ を $y_0 = f(0)$ から $y_1 = f(1)$ への道とする．授業で示したように，点 $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ に対して道 $\hat{f}\colon I \to X$ であって $\hat{f}(0) = x_0$, $p \circ \hat{f} = f$ を満たすものがただ一つ存在する．$\hat{f}$ の始点 $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ に対して終点 $x_1 = \hat{f}(1) \in p^{-1}(y_1)$ を対応させる写像を $\Pi_f\colon p^{-1}(y_0) \to p^{-1}(y_1)$ とする（道 f に沿った平行移動という）．問題 13 の結果を用いて，Π_f は f の端点をとめたホモトピー類のみに依存することを示せ．つまり，$f \simeq_0 f'$（端点をとめてホモトピック）ならば $\Pi_f = \Pi_{f'}$ であることを示せ.

ヒント：$f \simeq_0 f'$ とし，$H\colon I \times I \to Y$ を $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = f'(x)$, $H(0, t) = y_0$, $H(1, t) = y_1$ を満たす端点をとめたホモトピーとする．f の持ち上げ $\hat{f}$ を決めると，問題 13 より H の持ち上げ $\hat{H}\colon I \times I \to X$, $p \circ \hat{H} = H$, $\hat{H}(x, 0) = \hat{f}(x)$ が決まる．2 つの道 $t \mapsto \hat{H}(0, t)$, $t \mapsto \hat{H}(1, t)$ がどの道の持ち上げになっているかを考察し，道の持ち上げの一意性を用いよ.

問題 15 X をハウスドルフ空間，$p\colon X \to Y$ を被覆写像とする．点 $x_0 \in X$ をとり，$y_0 = p(x_0) \in Y$ とおく．このとき $p_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ は単射であることを示せ.

問題 16 $p\colon X \to Y$ を被覆写像とし，X を空でないハウスドルフ弧状連結空間，Y を弧状連結かつ単連結な空間とする．p は同相写像であることを示せ.

幾何学入門演習　No.5 解答例

問題 1 (1) 仮定より $a < b < a+1$ である．閉区間 $[b, a+1]$ はコンパクトであり，その像 $p([b, a+1])$ もコンパクトである．S^1 はハウスドルフなので $p([b, a+1])$ は閉集合である．$p((a, b)) = S^1 \setminus p([b, a+1])$ は従って S^1 の開集合である．

次に $p|_{(a,b)} \colon (a, b) \to p((a, b))$ が同相写像であることを示す．p は連続全単射であるから，p^{-1} が連続であること，すなわち，(a, b) に含まれる任意の開集合 U について $p(U)$ が開集合であることを示せばよい．U は（長さが 1 より小さい）開区間の和集合として表され，既にみたように長さが 1 より小さい開区間の p による像は開集合であるから $p(U)$ も開集合である．(注意：この証明は $b - a = 1$ のときも同じく成立している.）

(2) 任意の $e^{2\pi i\theta_0} \in S^1$ に対してそれを含む開近傍 $U = p((\theta_0 - \frac{1}{3}, \theta_0 + \frac{1}{3}))$ をとる．

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n, \quad V_n = (\theta_0 - \tfrac{1}{3} + n, \theta_0 + \tfrac{1}{3} + n)$$

であり，(1) で示したように $p|_{V_n} \colon V_n \to U$ は同相写像である．

(3) 任意の $e^{2\pi i\theta_0} \in S^1$ に対してそれを含む開近傍 $U = p((\theta_0 - \frac{1}{3}, \theta_0 + \frac{1}{3}))$ をとる．このとき，

$$q^{-1}(U) = p((\tfrac{\theta_0}{2} - \tfrac{1}{6}, \tfrac{\theta_0}{2} + \tfrac{1}{6})) \sqcup p((\tfrac{\theta_0}{2} + \tfrac{5}{6}, \tfrac{\theta_0}{2} + \tfrac{7}{6}))$$

であり，$p((\frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{6}))$ および $p((\frac{\theta_0}{2} + \frac{5}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{7}{6}))$ は (1) より開集合．さらに次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
p((\frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{6})) \arrow[r, "q"] & U \\
(\frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{6}) \arrow[u, "p"', "\cong"] \arrow[r, "x\mapsto 2x", "\cong"'] & (\theta_0 - \frac{1}{3}, \theta_0 + \frac{1}{3}) \arrow[u, "p"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

が成立することから，$q|_{p((\frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{6}))}$ は像 U への同相写像である．$q|_{p(\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{6}, \frac{\theta_0}{2} + \frac{7}{6})}$ についても同様.

問題 2 $\mathbb{C}^\times$ と $\mathbb{R} \times S^1$ の間の同相写像 f を次のように与える．

$$f(z) = \left(\log|z|, \frac{z}{|z|}\right)$$

f は明らかに連続で，その逆写像は $(x, w) \mapsto e^x w$ で与えられるため連続．f によって $\mathbb{C}^\times$ と $\mathbb{R} \times S^1$ を同一視するとき，$p \colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ は

$$f \circ p \circ f^{-1} \colon \mathbb{R} \times S^1 \to \mathbb{R} \times S^1, \qquad (x, w) \mapsto (nx, w^n)$$

に対応する．この写像が被覆写像であることを示せばよい．$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto nx$ は同相写像なので，$q \colon S^1 \to S^1,\ w \mapsto w^n$ が被覆写像であることを示せば十分である．任意の点 $w \in S^1$ をとり，それを含む開集合 $U = S^1 \setminus \{-w\}$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}
q^{-1}(U) &= S^1 \setminus \{e^{2\pi i\theta_0}, \dots, e^{2\pi i\theta_{n-1}}\}) \\
&= \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})\}
\end{aligned}$$

ここで，$-w = e^{2\pi i\alpha}$として，$\theta_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n}$とおいた．問題1より$\{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})\}$は$S^1$の開集合である．最後に

$$q|_{\{e^{2\pi i\theta}|\theta\in(\theta_k,\theta_{k+1})\}} \colon \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})\} \to U$$

が同相写像であることを示せばよい．この写像は

$$\{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in (\theta_k, \theta_{k+1})\} \cong (\theta_k, \theta_{k+1}) \xrightarrow{x\mapsto nx-k} (\alpha, \alpha+1) \cong S^1 \setminus \{-w\}$$

と分解できるため同相である（ここで問題1の(1)を使った）．

問題 3 任意の$x \in X$をとる．pは被覆写像だから，$p(x)$の開近傍$U \subset Y$とXの互いに交わらない開集合の族$\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$が存在して$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha\in A} V_\alpha$かつ$p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$がすべての$\alpha \in A$について同相写像となる．ここで$x \in V_{\alpha_0}$となる$\alpha_0 \in A$をとると，$V_{\alpha_0}$は$x$の開近傍で$p|_{V_{\alpha_0}} \colon V_{\alpha_0} \to U$は同相写像．(特にその像$p(V_{\alpha_0}) = U$は開集合.）従って$p$は局所同相写像である．

問題 4 一般にpが局所同相写像であるときに示す．$p^{-1}(y)$の各点xについて，$\{x\}$が$p^{-1}(y)$の開集合であることを示せばよい．xのある開近傍Uが存在して$p|_U \colon U \to p(U)$は同相写像である．従って$p^{-1}(y) \cap U = \{x\}$．これは$\{x\}$が$p^{-1}(y)$の開集合であることを示している．

問題 5 異なる2点$x_1, x_2 \in X$を任意に取る．

$p(x_1) = p(x_2)$のとき，pは被覆写像だから，$p(x_1)$の開近傍UとXの互いに交わらない開集合の族$\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$が存在して$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha\in A} V_\alpha$かつ$p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$がすべての$\alpha \in A$について同相写像となる．族$\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$は互いに交わらないから，ある元$\alpha_1, \alpha_2 \in A$がそれぞれただ1つ存在して$x_1 \in V_{\alpha_1}$，$x_2 \in V_{\alpha_2}$を満たす．ここで$\alpha_1 = \alpha_2$と仮定する．$p|_{V_{\alpha_1}}$は同相写像だが，$p(x_1) = p(x_2)$より$p$が単射でなくなり矛盾．よって$\alpha_1 \neq \alpha_2$である．よって$V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}$が$x_1, x_2 \in X$を分離する開集合である．

$p(x_1) \neq p(x_2)$のとき，Yはハウスドルフより$p(x_1), (x_2)$を分離するたがいに交わらない開集合W_1, W_2が存在する．このとき$p^{-1}(W_1)$と$p^{-1}(W_2)$はx_1, x_2を分離する開集合となる．

問題 6 連続写像$f \colon X \to Y$が固有(proper)であるとは，Yの任意のコンパクト部分集合Kに対して$f^{-1}(K)$がコンパクトになることである．以下の証明では，局所コンパクトハウスドルフ空間の間の固有写像が閉写像である（閉集合の像が閉），という有名な事実を用いる．

点$y \in Y$をとる．$p^{-1}(y)$は問題4より離散位相空間である．また$\{y\}$はコンパクトでpはproperなので$p^{-1}(y)$はコンパクトでもある．従って$p^{-1}(y)$は有限集合である（$p^{-1}(y)$の1点部分集合による開被覆を考えよ）．$p^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$とする．$p$は局所同相写像であるから，$x_i$の開近傍$U_i$が存在して$p(U_i)$は開集合であり，$p|_{U_i} \colon U_i \to p(U_i)$は同相写像である．$X$はハウスドルフなので，必要ならば$U_i$を小

さく取り直して，U_i が互いに交わらないとしてよい[1]．ここで，$X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$ は X の閉集合なので，
$$F = p(X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n))$$
は Y の閉集合．$y \notin F$ であることに注意しよう．このとき
$$V := (p(U_1) \cap \cdots \cap p(U_n)) \setminus F$$
は y の開近傍である．$p^{-1}(V)$ は $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ に含まれることに注意しよう．(実際，そうでなければ，$p(x) \in V$, $x \notin U_1 \cup \cdots \cup U_n$ となる点 $x \in X$ が存在するが，後者から $p(x) \in F$ となり $p(x) \in V$ と矛盾する．) 従って，U_i が互いに交わらないことを思い出すと，
$$p^{-1}(V) = (U_1 \cap p^{-1}(V)) \sqcup \cdots \sqcup (U_n \cap p^{-1}(V))$$
である．ここで $p(U_i \cap p^{-1}(V)) = V$ である．(実際，$\subset$ は明らか．逆に任意の $y \in V$ は $y = p(x)$, $x \in U_i$ の形で書ける．このとき $x \in U_i \cap p^{-1}(V)$．従って $y = p(x) \in p(U_i \cap p^{-1}(V))$．よって $p(U_i \cap p^{-1}(V)) \supset V$．) $p|_{U_i} \colon U_i \to p(U_i)$ は同相写像であったから，それを開部分集合に制限した $p|_{U_i \cap p^{-1}(V)} \colon U_i \cap p^{-1}(V) \to V$ も同相写像である．

問題 7 p は被覆写像であるから，問題 3 より局所同相写像である．従ってそれを $(0,2)$ に制限した写像 $p|_{(0,2)} \colon (0,2) \to S^1$ も局所同相写像である．

写像 $q := p|_{(0,2)}$ の点 $1 \in S^1$ でのファイバー $q^{-1}(1)$ は 1 点 $1 \in \mathbb{R}$ からなる．一方で任意の $z \in S^1 \setminus \{1\}$ に対して z のファイバー $q^{-1}(z)$ はちょうど 2 点ある．もし q が被覆写像であるとすると，$1 \in S^1$ の開近傍 U と $(0,2)$ のたがいに交わらない開集合の族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在して，$q^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$ は同相，となる．このとき点 $z \in U$ での q のファイバーの濃度は一定で $|A|$ に等しい．$1 \in U$ でのファイバーの濃度（個数）は 1 であるから，$|A| = 1$．U は 1 以外の点を含むため，矛盾が生じる．

問題 8 $y_0 \in Y$ をとり，Y を次の二つの部分集合に分ける．
$$Y_0 = \{y \in Y \mid p^{-1}(y) \text{ と } p^{-1}(y_0) \text{ の間に集合の全単射が存在する}\}$$
$$Y_1 = \{y \in Y \mid p^{-1}(y) \text{ と } p^{-1}(y_0) \text{ の間に集合の全単射が存在しない}\}$$
明らかに $Y = Y_0 \sqcup Y_1$．被覆空間の定義により，任意の $y \in Y$ について，y の開近傍 U と X のたがいに交わらない開集合の族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在して，$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$ は同相，となる．このとき $y' \in U$ について $p^{-1}(y') \subset p^{-1}(U)$ は各 V_α と 1 点でのみ交わり，従って $p^{-1}(y')$ と A の間に集合の全単射が存在する．このことから，$i = 0, 1$ について，$y \in Y_i$ ならば $V \subset Y_i$ であることが分かる．従って Y_i は開集合．Y は連結で $Y_0 \neq \emptyset$ より，$Y = Y_0$ でなければならない．

[1] $i \neq j$ なる全てのペア (i,j) に対して，x_i と x_j を分離する開集合 $W_{i,j}, W_{j,i}$ をとり，$W_i = \bigcap_{j \neq i} W_{i,j}$ とおくと，$W_1, \ldots, W_n$ は互いに交わらない開集合で $x_i \in W_i$．

問題 9 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して写像 $\Phi_A \colon T^2 \to T^2$ を $\Phi_A(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ と定める．このとき $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$ であることは容易に確かめられる．行列式が ± 1 の整数行列

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を（左および右から）かける操作は（行および列）基本変形に対応する．整数係数正方行列に基本変形を繰り返して対角行列にすることができることはよく知られている．従って整数行列 P, Q で $|\det P| = |\det Q| = 1$ を満たし，

$$PAQ = D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

を満たす行列が存在する．このとき $\Phi_P \circ \Phi_D \circ \Phi_Q = \Phi_A$ であり，Φ_P と Φ_Q は同相写像（実際，P^{-1} は整数行列であり，$\Phi_{P^{-1}} \circ \Phi_P = \Phi_P \circ \Phi_{P^{-1}} = \mathrm{id}$ となるので $\Phi_{P^{-1}}$ が連続な逆写像を与える）．また $|\det A| = |\det D|$．従って Φ_D が $|\det D|$ 次の被覆写像であることを示せば十分である．

$$\Phi_D(z,w) = (z^{d_1}, w^{d_2})$$

である．これが $|d_1 d_2|$ 次の被覆であることは，$S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$ が k 次の被覆であることから容易にわかる（詳細略）．

問題 10 略

問題 11 (解１) もしそのような $\epsilon > 0$ が存在しなかったとする．このとき各 $n \in \mathbb{N}$ に対してある点 $x_n \in K$ が存在して $B_{1/n}(x_n)$ はどの U_α にも含まれない．K はコンパクト集合だから $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ を持つ．$x_\infty = \lim_{j\to\infty} x_{n_j}$ とおく．x_∞ を含む開集合 U_α が存在する．U_α は開集合なので，$B_\epsilon(x_\infty) \subset U_\alpha$ を満たす $\epsilon > 0$ が存在する．十分大きい j に対して $x_{n_j} \in B_{\epsilon/2}(x_\infty)$ かつ $1/n_j < \epsilon/2$ が成立する．このとき $B_{1/n_j}(x_{n_j}) \subset B_\epsilon(x_\infty) \subset U_\alpha$ となり，仮定に矛盾する．

(解２) この解では非空な集合 F からの距離関数 $d(x,F) = \inf_{y\in F} d(x,y)$ が x の連続関数であることを使う．K のコンパクト性より，$\{U_\alpha\}$ から有限部分開被覆 $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ が取れる．関数 $f \colon K \to \mathbb{R}$ を次で定義する

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, K \setminus U_i).$$

f はコンパクト空間 K 上の連続関数であるので，最小値 ϵ が存在する．任意の $x_0 \in K$ に対して，$f(x_0) \geq \epsilon$ より，少なくとも一つの $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $d(x_0, K \setminus U_{i_0}) \geq \epsilon$．すなわち $B_\epsilon(x_0) \subset U_{i_0}$．

問題 12 $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \colon Z \to X$ は条件を満たす持ち上げと仮定する．$T = \{z \in Z \mid \hat{f}_1(z) = \hat{f}_2(z)\}$ とおく．$z_0 \in T$ より T は空集合ではない．T が閉集合かつ開集合であることを示せば，Z の連結性から $T = Z$ であることが従う．

X はハウスドルフ空間であるから対角集合 $\Delta = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ は $X \times X$ の閉集合である．従って，連続写像 $\hat{f}_1 \times \hat{f}_2 \colon Z \to X \times X$ による Δ の引き戻し $T = (\hat{f}_1 \times \hat{f}_2)^{-1}(\Delta)$ は Z の閉集合である．

次に $z \in T$ とする．p は局所同相であるから，$x = \hat{f}_1(z) = \hat{f}_2(z)$ の開近傍 V が存在して $p|_V \colon V \to p(V)$ は単射である．このとき

$$p|_V \circ \hat{f}_1 = f = p|_V \circ \hat{f}_2$$

が $U = \hat{f}_1^{-1}(V) \cap \hat{f}_2^{-1}(V)$ 上で成立する．$p|_V$ の単射性から $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ が z の開近傍 U 上で成立する．従って $U \subset T$ であり，T は開集合である．

問題 13 $z \in Z$ を固定するとき，$t \mapsto H(z,t)$ は Y 内の道で，点 $H(z,0) = f(z)$ のリフト $\hat{f}(z)$ が与えられている．授業で説明した道の持ち上げに関する定理から，X 内の道 $t \mapsto \hat{H}(z,t)$ であって $p(\hat{H}(z,t)) = H(z,t)$, $\hat{H}(z,0) = \hat{f}(z)$ を満たすものがただ一つ存在する．このように定義された $\hat{H}(z,t)$ が連続であることを示す．

$p \colon X \to Y$ は被覆であるので，Y の開被覆 $\{U_\alpha\}$ および V の開集合の族 $\{V_{\alpha,\beta}\}$ が存在して，$p^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{\beta \in B_\alpha} V_{\alpha,\beta}$, $p|_{V_{\alpha,\beta}} \colon V_{\alpha,\beta} \to U_\alpha$ が同相，を満たす．$z_0 \in Z$ を固定する．I のコンパクト性より（詳細は授業でやった方法より），ある自然数 N が存在して，$k = 0, 1, \ldots, N-1$ に対して $H(\{z_0\} \times [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}])$ はある U_{α_k} に含まれる．$[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ のコンパクト性から，z_0 の開近傍 W_k が存在して $H(W_k \times [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]) \subset U_{\alpha_k}$ であることも従う．さらに $W = \bigcap_{k=0}^{N-1} W_k$ とおくと，$H(W \times [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]) \subset U_{\alpha_k}$.

この状況では，授業でやった道の持ち上げの構成と同様にして $H|_{W \times I}$ の連続な持ち上げ $\tilde{H} \colon W \times I \to Y$ で $\tilde{H}(z,0) = \hat{f}(z)$ を満たすものが構成できる．実際，k について帰納的に連続写像 $\tilde{H} \colon W \times [0, \frac{k}{N}] \to Y$ で $p \circ \tilde{H} = H$, $\tilde{H}(z,0) = \hat{f}(z)$ を満たすものを構成する．$k = 0$ のときは自明．$k-1$ まで構成されたとする．$\tilde{H}(z, \frac{k-1}{N}) \in p^{-1}(U_{\alpha_k}) = \bigsqcup_{\beta \in B_{\alpha_k}} V_{\alpha_k,\beta}$ に注意しよう．同相写像

$$\Phi \colon \bigsqcup_{\beta \in B_{\alpha_k}} V_{\alpha_k,\beta} \cong U_{\alpha_k} \times B_{\alpha_k}$$

を $V_{\alpha_k,\beta}$ の元 x を $(p(x), \beta)$ に写すことで定義する．Φ の第 2 成分を φ で表すことにする．ここで添字集合 B_{α_k} には離散位相が入っているものと考える．$t \in [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]$ に対して $\tilde{H}$ を次の式で拡張する．

$$\tilde{H}(z,t) = \Phi^{-1}\left(H(z,t), \varphi(\tilde{H}(z, \tfrac{k-1}{N}))\right)$$

$t = \frac{k-1}{N}$ の時には既に定義されたものと一致し，従って $\tilde{H}(z,t)$ は $W \times [0, \frac{k}{N}]$ 上の連続写像に拡張された．

以上から $W \times I$ 上での連続なリフト $\tilde{H}$ が構成された．持ち上げた道 $t \mapsto \tilde{H}(z,t)$ の一意性から，$\tilde{H} = \hat{H}|_{W \times I}$ である．従って $\hat{H}$ は連続であることがわかる．

問題 14 ヒントに従って，$f \simeq_0 f'$ とし，$H\colon I\times I \to Y$ を $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=f'(x)$, $H(0,t)=y_0$, $H(1,t)=y_1$ を満たす端点をとめたホモトピーとする．$x_0 \in p^{-1}(y_0)$ をとる．平行移動の定義より，f の持ち上げ $\hat{f}$ で $\hat{f}(0)=x_0$ を満たすものをとると，$\Pi_f(x_0)=x_1 := \hat{f}(1)$ である．この $\hat{f}$ に対して，問題 13 より H の持ち上げ $\hat{H}\colon I\times I \to X$, $p\circ \hat{H}=H$, $\hat{H}(x,0)=\hat{f}(x)$ が存在する．ここで道 $t\mapsto \hat{H}(0,t)$, $t\mapsto \hat{H}(1,t)$ は各々，定値の道 $t\mapsto H(0,t)=y_0$, $t\mapsto H(1,t)=y_1$ の持ち上げであり，始点は $\hat{H}(0,0)=\hat{f}(0)=x_0$, $\hat{H}(1,0)=\hat{f}(1)=x_1$ である．一方，定値の道 $t\mapsto x_0$, $t\mapsto x_1$ も同じ条件を満たす $t\mapsto H(0,t)$, $t\mapsto H(1,t)$ の持ち上げになっているから，持ち上げの一意性により $\hat{H}(0,t)=x_0$, $\hat{H}(1,t)=x_1$ であることが分かる．従って $x\mapsto \hat{H}(x,1)$ は x_0 から x_1 への道であり，f' の持ち上げになっている．よって $\Pi_{f'}(x_0)=x_1=\Pi_f(x_0)$．すなわち $\Pi_f=\Pi_{f'}$.

問題 15 $[\gamma]\in\pi_1(X,x_0)$ に対して $p_*([\gamma])=1$ ならば $[\gamma]=1$ を示せばよい．e_{y_0} を y_0 を値にとる定値ループとする．$\overline{\gamma}=p\circ\gamma$ とおくと，$\overline{\gamma}\simeq_0 e_{y_0}$ である．$H\colon I\times I\to Y$ を $\overline{\gamma}$ と e_{y_0} の間のホモトピーとする．つまり $H(x,0)=\overline{\gamma}(x)$, $H(x,1)=y_0$, $H(0,t)=H(1,t)=y_0$. 問題 *13* より H のリフト $\hat{H}\colon I\times I\to X$ であって $\hat{H}(x,0)=\gamma(x)$ であるものが存在する．道のリフトの一意性を用いて（X がハウスドルフであることを用いる），$\hat{H}(0,t)=\hat{H}(1,t)=x_0$ でなければならないことが前問と同様にわかる．従って $x\mapsto\hat{H}(x,1)$ は x_0 を基点とするループで，e_{y_0} のリフトになっている．再び道のリフトの一意性から，$\hat{H}(x,1)=x_0$ である．よって $\hat{H}$ は γ と e_{x_0} の間の端点を止めたホモトピーを与え，$[\gamma]=1$ がわかる．

問題 16 p が単射であることを示そう．$y_0=p(x_1)=p(x_2)$ とする．X は弧状連結であるから，x_1 と x_2 を結ぶ道 γ が存在する．γ は $\overline{\gamma}=p\circ\gamma$ のリフトになっており，Y は単連結なので $\overline{\gamma}\simeq_0 e_{y_0}$ である．従って x_2 は $\overline{\gamma}$ に沿った x_1 の平行移動であるが，平行移動は問題 14 より道のホモトピー類にのみよるため，定値の道 e_{y_0} に沿った平行移動とも一致する．これは $x_1=x_2$ を意味する．

次に p が全単射を示そう．問題 8 より $p^{-1}(y)$ の濃度は y によらない．単射性から $|p^{-1}(y)|\le 1$ であり，X が空でないことから $|p^{-1}(y_0)|\ge 1$ となる点 y_0 が存在する．従って全ての y に対して $|p^{-1}(y)|=1$.

p は局所同相写像であるから，特に開写像である．従って p^{-1} も連続であり，p は同相写像である．

採点基準 配点：問題 3 は 5 点，問題 14 は 5 点（部分点なし）．問題 3 については，$x\in X$ から出発して，$p(x)\in Y$ に対して定義の条件を満たす開集合を見つけているかどうか．問題 14 については，$\hat{H}(0,t)$, $\hat{H}(1,t)$ が定値になっていることが分かっているかどうか．細かい点の説明不足については甘めに見てよい．

幾何学入門演習　No.6　(2022 年 11 月 9 日)[1]

定義　X が局所弧状連結 (または局所単連結) であるとは，任意の $x \in X$ および x の任意の開近傍 U に対して，x の弧状連結な開近傍 V(または弧状連結かつ単連結な開近傍 V) で $V \subset U$ となるものが存在すること.

問題 1 局所弧状連結空間において，連結であることと弧状連結であることは同値であることを示せ.

問題 2 上の局所弧状連結の定義において，V を「弧状連結な開近傍」ではなく「弧状連結な近傍」としても定義は同値になることを示せ.

以下の問題 3-8 では $X \neq \varnothing$ を弧状連結かつ局所単連結なハウスドルフ空間とし，X は普遍被覆 $Y \to X$（空でない弧状連結かつ単連結な被覆空間）を持つことを示す．$x_0 \in X$ を基点とし，集合 Y を

$$Y = \{(x, \ell) \mid x \in X, \ell \in \Pi(x_0, x)\}$$

と定める．$p\colon Y \to X$ を第 1 成分への射影とする．ここで $\Pi(x_0, x)$ は x_0 から x への道の端点を止めたホモトピー類の集合である．以下では，単に「単連結」といえば弧状連結であることも仮定する.

問題 3 U を単連結空間とする．$x_1, x_2 \in U$ に対して $\Pi(x_1, x_2)$ は 1 点集合である.

問題 4 $x \in X$, $\ell \in \Pi(x_0, x)$ および x の単連結な開近傍 U に対して，Y の部分集合を $\tilde{U}_{x,\ell} = \{(x', \ell \cdot \gamma_{x,x'}) \mid x' \in U\}$ とおく．ここで $\gamma_{x,x'}$ は x から x' への U 内の道のホモトピー類である（問題 3 よりホモトピー類は一意）．このようにして得られる集合 $\tilde{U}_{x,\ell}$ たちを開基とする位相が Y に定まることを示せ.（一般に Y の部分集合族 $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ がある位相の開基となるための必要十分条件は $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha = Y$ であり，任意の $y \in S_\alpha \cap S_\beta$ に対して $y \in S_\gamma \subset S_\alpha \cap S_\beta$ を満たす $\gamma \in A$ が存在することである.）

問題 5 $p\colon Y \to X$ は連続であることを示せ.

問題 6 $x \in X$，U を x の単連結開近傍とする．$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\ell \in \Pi(x_0, x)} \tilde{U}_{x,\ell}$ を示せ．さらに，$p|_{\tilde{U}_{x,\ell}}\colon \tilde{U}_{x,\ell} \to U$ は同相写像であることを示せ．以上により p が被覆写像であることが分かる.

問題 7 $y_0 = (x_0, e_{x_0}) \in Y$ を Y の基点とする．y_0 から始まる道 $f\colon I \to Y$ に対して X 内の x_0 から始まる道 $x\colon I \to X$ が存在して $f(s) = (x(s), [x_s])$ となることを示せ．ただし，$x_s\colon I \to X$ は $x_s(t) = x(st)$ で定められる X 内の道である.

問題 8 Y は弧状連結であることを示せ．さらに Y は単連結であることを示せ.

---

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的.

定義　被覆写像 $p\colon Y \to X$ に対し，$\mathrm{Aut}(Y/X) := \{\,$同相写像 $\phi\colon Y \to Y \mid p \circ \phi = p\}$ は合成に関して群をなす．$\mathrm{Aut}(Y/X)$ を被覆変換群，その元を被覆変換という．

問題 9 (レポート問題 2022 年 11 月 15 日 17:00 締め切り) $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ を $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ で定めるとき，$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}/S^1) \cong \mathbb{Z}$ であることを示せ．

問題 10 X を弧状連結かつ局所弧状連結なハウスドルフ位相空間とする．$p_1\colon Y_1 \to X$, $p_2\colon Y_2 \to X$ を X の普遍被覆とする．$x_0 \in X$, $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ を $p_1(y_1) = x_0 = p_2(y_2)$ を満たす点とする．このとき同相写像 $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ で $p_2 \circ \phi = p_1$ かつ $\phi(y_1) = y_2$ を満たすものがただ一つ存在することを示したい．

(1) ϕ を次のように構成する．$y \in Y_1$ に対して y_1 から y への Y_1 内の道 γ_1 をとり，X 内の道 $\gamma = p \circ \gamma_1$ を考える．このとき，$\phi(y)$ を γ に沿った $y_2 \in Y_2$ の平行移動として定める．ϕ が連続写像であることを示せ．

(2) $p_2 \circ \phi = p_1$ かつ $\phi(y_1) = y_2$ を満たす連続写像 $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ は一意であることを示せ．

(3) (1) で構成した ϕ は連続な逆写像を持つことを示せ．

問題 11　X を弧状連結かつ局所弧状連結なハウスドルフ空間．$p\colon Y \to X$ を普遍被覆とする．$p(y_0) = x_0$ を満たす $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ を固定する．

(1) $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して，γ に沿った y_0 の平行移動を対応させる写像 $\pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ は全単射であることを示せ．

(2) $y \in p^{-1}(x_0)$ に対して，問題 10 により $\phi(y_0) = y$ を満たす被覆変換 $\phi \in \mathrm{Aut}(Y/X)$ がただ一つ存在する．この対応 $y \mapsto \phi$ は全単射 $p^{-1}(x_0) \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ を与えることを示せ．

(3)* 上の全単射の合成 $\pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ は群の同型であることを示せ．以上より，$\pi_1(X, x_0)$ は Y に被覆変換として自由に作用する．この作用は $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ の取り方に依存することに注意する．

問題 12 (★) X を弧状連結かつ局所弧状連結なハウスドルフ空間，$p\colon Y \to X$ を X の普遍被覆とする．$p(y_0) = x_0$ を満たす $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ をとる．

(1) X の弧状連結で非空な被覆空間 $q\colon Z \to X$ と $z_0 \in q^{-1}(x_0)$ に対して，被覆写像 $\psi\colon Y \to Z$ であって $q \circ \psi = p$，$\psi(y_0) = z_0$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ．

(2) 問題 11 より，$\pi_1(X, x_0)$ の Y への自由な作用が定まる．$q_*\colon \pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(X, x_0)$ により $\pi_1(Z, z_0)$ を $\pi_1(X, x_0)$ の部分群とみなす．ψ は $\pi_1(Z, z_0)$ の Y への作用に関する商写像である，すなわち，$\psi(y_1) = \psi(y_2) \Leftrightarrow \exists g \in \pi_1(Z, z_0)$ s.t. $g \cdot y_1 = y_2$ を示せ．従って，$Z \cong \pi_1(Z, z_0)\backslash Y$ である．

(3) 逆に任意の部分群 $H < \pi_1(X, x_0)$ に対して弧状連結な被覆空間 $Z \to X$ と $z_0 \in Z$ が存在して $\pi_1(Z, z_0)$ の $\pi_1(X, x_0)$ での像は H と同一視されることを示せ．また，このとき $\mathrm{Aut}(Z/X)$ を求めよ．

幾何学入門演習　No.6 解答例

問題 1 一般に，位相空間は弧状連結ならば連結である．逆に X が X が連結であると仮定する．$x \in X$ に対し，X の部分集合 $C(x)$ を，

$$C(x) = \{x' \in X \mid x \text{ と } x' \text{ を結ぶ道が存在する }\}$$

と定める．このとき X は $C(x)$ たちの和集合であり，$x, x' \in X$ に対して $C(x) = C(x')$ または $C(x) \cap C(x') = \varnothing$ のいずれかが成り立つ．

x の選び方によらず $C(x)$ は開集合であることを示す．任意の $x' \in C(x)$ に対し，X は局所弧状連結より x' を含む弧状連結な開近傍 V が存在する．V は弧状連結より $V \subset C(x')$ となり，$C(x')$ に含まれる x' の開近傍が取れる．従って $C(x)$ は開集合である．

$x \in X$ に対して $X = C(x) \sqcup (X \setminus C(x))$ であるが，$X \setminus C(x)$ も $C(x')$ の形の集合の和集合となることから，開集合である．X の連結性から $X = C(x)$ であることがわかり，従って X は弧状連結である．

問題 2 以下の二つの定義を考える．

(A): X が局所弧状連結であるとは，任意の $x \in X$ および x の任意の開近傍 U に対して，x の弧状連結な**開近傍** V で $V \subset U$ となるものが存在すること．

(B): X が局所弧状連結であるとは，任意の $x \in X$ および x の任意の開近傍 U に対して，x の弧状連結な**近傍** V で $V \subset U$ となるものが存在すること．

X が (A) の意味で局所弧状連結なら (B) の意味でも局所弧状連結であることは明らか．従って (B) の意味で局所弧状連結なら (A) の意味でも局所弧状連結であることを示す．X が (B) の意味で局所弧状連結な位相空間とする．任意の $x \in X$ および任意の x の開近傍 U をとる．このとき，U の x を含む弧状連結成分

$$U' = \{x' \in U \mid x \text{ と } x' \text{ は } U \text{ 内の道で結べる }\}$$

を考える．U' が開集合であることを示せば十分である．$y \in U'$ に対して (B) の定義を適用することにより，y の弧状連結な近傍 V で $V \subset U$ なるものが存在する．このとき U' の定義から $V \subset U'$ である．従って任意の U' の点は U' の内点であるから，U' は開集合である．

問題 3 演習 4 の問題 1 で定義した基本亜群の積構造を思い出す．$\alpha, \beta \colon I \to U$ を x_1 から x_2 への道とする．U は単連結だから，$[\alpha] \cdot [\beta^{-1}] = e_1$ である．ここで e_1 は $\pi_1(U, x_1)$ の単位元である．よって，

$$[\alpha] = [\alpha] \cdot ([\beta^{-1}] \cdot [\beta]) = ([\alpha] \cdot [\beta^{-1}]) \cdot [\beta] = [\beta]$$

となり，$\Pi(x_1, x_2)$ は 1 点集合である．

問題 4 Y の部分集合族

$$\{\widetilde{U}_{x,\ell} \mid x \in X,\, \ell \in \Pi(x_0, x),\, U \text{ は } x \text{ の単連結開近傍}\}$$

が Y 全体を覆うことをみよう．X は局所単連結なので，任意の点 x と $\ell \in \Pi(x_0, x)$ に対して，ある x の単連結開近傍 U が存在する．このとき $(x, \ell) \in \widetilde{U}_{x,\ell}$ である．

U を x_1 の単連結開近傍，V を x_2 の単連結開近傍，$\ell_i \in \Pi(x_0, x_i)$ とする．$(x, \ell) \in \widetilde{U}_{x_1,\ell_1} \cap \widetilde{V}_{x_2,\ell_2}$ をとる．X は局所単連結なので，x の単連結開近傍 W が存在して $W \subset U \cap V$ となる．このとき

$$\widetilde{W}_{x,\ell} \subset \widetilde{U}_{x_1,\ell_1} \cap \widetilde{V}_{x_2,\ell}$$

であることを示せばよい．$\widetilde{W}_{x,\ell}$ の点は $y = (x', \ell \cdot \gamma^W_{x,x'})$，$x' \in W$，但し $\gamma^W_{x,x'}$ は W 内の x から x' への道のホモトピー類，という形で表される．$(x, \ell) \in \widetilde{U}_{x_1,\ell_1}$ ゆえ，$\ell = \ell_1 \cdot \gamma^U_{x_1,x}$ ($\gamma^U_{x_1,x}$ は U 内の x_1 から x' への道のホモトピー類) と書くことができる．従って

$$y = (x', \ell \cdot \gamma^W_{x,x'}) = (x', \ell_1 \cdot \gamma^U_{x_1,x} \cdot \gamma^W_{x,x'})$$

であるが，$\gamma^U_{x_1,x} \cdot \gamma^W_{x,x'}$ は x_1 から x' を結ぶ U 内の道で代表されるため $\gamma^U_{x_1,x'}$ に等しい．従って $y \in \widetilde{U}_{x_1,\ell_1}$．同様に $y \in \widetilde{V}_{x_2,\ell_2}$ も言える．

問題 5 任意の $y = (x, \ell) \in Y$ と $x = p(y)$ の開近傍 $U \subset X$ に対して，$p^{-1}(U)$ が y の近傍であることを示せばよい．X は局所単連結であるから，x の単連結開近傍 $V \subset U$ が存在する．問題 4 より $\widetilde{V}_{x,\ell}$ は y を含む開集合であり，$p(\widetilde{V}_{x,\ell}) = V \subset U$．すなわち $\widetilde{V}_{x,\ell} \subset p^{-1}(U)$．よって $p^{-1}(U)$ は y の近傍である．

問題 6 任意の $x' \in U$ に対して $\Pi(x_0, x) \to \Pi(x_0, x')$, $\ell \mapsto \ell \cdot \gamma_{x,x'}$ は全単射である．（実際，逆写像は $\ell' \mapsto \ell' \cdot \gamma^{-1}_{x,x'}$ で与えられる．）このことから

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &= \{(x', \ell') \mid x' \in U, \ell' \in \Pi(x_0, x')\} \\ &= \{(x', \ell \cdot \gamma_{x,x'}) \mid x' \in U, \ell \in \Pi(x_0, x)\} = \bigsqcup_{\ell \in \Pi(x_0,x)} \widetilde{U}_{x,\ell} \end{aligned}$$

次に，$p|_{\widetilde{U}_{x,\ell}} \colon \widetilde{U}_{x,\ell} \to U$ が同相写像であることを示す．全単射であることは明らかであり，連続であることは既に示したので，p が開写像であることを示せばよい．開基の像が開であることを示せばよい．実際，任意の開基の元 $\widetilde{U'}_{x',\ell'}$ に対して（ここで $x' \in X$, U' は x' の単連結開近傍, $\ell' \in \Pi(x_0, x')$)，$p(\widetilde{U'}_{x',\ell'}) = U'$ は開集合である．

問題 7 $x(s) = p(f(s))$ とし，$g(s) = (x(s), [x_s])$ とおく．$x_s \colon I \to X$ は x_0 から $x(s)$ までの道であるから $(x(s), [x_s]) \in Y$ であることに注意しよう．$g \colon I \to Y$ が連続であることを示そう．$s_0 \in I$ に対して，$x(s_0)$ を含む単連結開近傍 U をとり，$g(s_0)$ の開近傍 $\widetilde{U}_{x(s_0),[x_{s_0}]}$ を考える．$x(s)$ の連続性から s_0 の開近傍 $(s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$ が存在して $x((s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)) \subset U$ である．ここで $\epsilon > 0$．このとき $s \in (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$ に対して

$$g(s) = (x(s), [x_s]) = (x(s), [x_{s_0}] \cdot [\gamma])$$

が成立する．ここで γ は $\gamma(u) = x(s_0 + (s - s_0)u)$ で定義される U 内の道である．γ は $x(s_0)$ と $x(s)$ を結ぶ U 内の道であるから，$g(s) \in \widetilde{U}_{x(s_0),[x_{s_0}]}$．従って g は連続である．

以上より f と g は $s \mapsto x(s)$ のリフトであり，$f(0) = g(0) = (x_0, e_{x_0}) = y_0$ である．リフトの一意性から $f = g$ である．(X はハウスドルフ空間で Y は X の被覆であることは既に示したので Y もハウスドルフである．授業では，リフトの一意性の証明で Y がハウスドルフであることを使った．実は被覆写像に対するリフトの一意性を示すのにハウスドルフ性は必要ない．)

問題 8 任意の点 $y = (x, \ell) \in Y$ に対して，ℓ は基点 x_0 から x の道 $\gamma\colon I \to X$ のホモトピー類である．$\tilde{\gamma}(s) = (\gamma(s), [\gamma_s])$ とすると，前問で示したことから，$\tilde{\gamma}\colon I \to Y$ は $y_0 = (x_0, e_{x_0})$ から y までの Y の中の道．y は任意だから Y は弧状連結である．

y_0 を基点をする Y 内の任意のループが定値ループ e_{y_0} とホモトピックであることを示せばよい．前問の結果より，$f(s) = (x(s), [x_s])$ と表示することができる．ここで $x\colon I \to X$ は X 内の x_0 を基点とするループ．$f(1) = y_0$ より $[x] = [x_1] = e_{x_0}$．すなわち x は定値ループ e_{x_0} とホモトピックである．ホモトピー持ち上げ性質より f も定値ループ e_{y_0} とホモトピックになる．(詳しくは演習 No.5 の問題 15 の議論を参照せよ．)

問題 9 $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}/S^1)$ をとる．被覆変換群の定義より，

$$e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i T(\theta)}$$

が成り立つ．従って $\theta \mapsto T(\theta) - \theta$ は整数に値をとる連続関数．従って，$T(\theta) - \theta$ は定数 $m \in \mathbb{Z}$ でなければならない (詳しくはここで I の連結性を使っている)．

以上より $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}/S^1)$ の元はある整数 m を用いて

$$T_m(\theta) = \theta + m$$

の形に書くことができる．任意の整数 m について $T_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が被覆変換であることは明らか．明らかに $T_m \circ T_n = T_{m+n}$ であり，群の同型写像 $\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}/S^1)$, $m \mapsto T_m$ が定まる．

採点基準　被覆変換の定義 $p \circ T = p$ を使って，任意の被覆変換 T が整数 m を用いて $T(\theta) = \theta + m$ の形にかけることが示されていれば 10 点とする．(理由としては $T(\theta) - \theta$ が整数値であることに注意していれば十分とする．) 部分点はなし．

問題 10 (1) ϕ の構成をもう少し詳しく述べると次の通り．$y \in Y_1$ に対して y_1 から y への道 $\gamma_1\colon I \to Y_1$ をとる．このとき，$\gamma = p_1 \circ \gamma_1$ は x_0 から始まる X 内の道である．γ の Y_2 への持ち上げ $\gamma_2\colon I \to Y_2$ であって $\gamma_2(0) = y_2$ なるものがただ一つ存在する．このとき，$\phi(y) = \gamma_2(1)$ と定める．

$\phi(y)$ は γ_1 のとり方によらない．実際，Y_1 は単連結であることから問題 3 より，y_1 と y を結ぶ道は端点を止めるホモトピーを除いて一意である．従って道 γ_1 とその p

による像の道 γ は端点をとめるホモトピーを除いて一意である．$\phi(y)$ は γ に沿った y_2 の平行移動 $\Pi_\gamma(y_2)$ であるが，Π_γ は γ の端点をとめたホモトピー類のみによる（演習 No.5 の問題 14 の記号と結果を使った）．従って $\phi(y)$ は γ_1 のとり方によらない．

このように定めた ϕ に対して $p_2(\phi(y)) = \gamma(1) = p_1(\gamma_1(1)) = p_1(y)$ が成り立つため，$p_1 = p_2 \circ \phi$ である．

ϕ が連続であることを示そう．$y \in Y_1$ を任意にとる．p_1 は局所同相写像であるから y の開近傍 V_1 が存在して $U_1 = p_1(V_1)$ は X の開集合であり，$p_1|_{V_1}\colon V_1 \to U_1$ は同相写像．同様に $\phi(y)$ の開近傍 V_2 が存在して $U_2 = p_2(V_2)$ は X の開近傍であり，$p_2|_{V_2}\colon V_2 \to U_2$ は同相写像．U_1, U_2 はどちらも $p_1(y) = p_2(\phi(y))$ の開近傍である．X は局所弧状連結なので，$U_1 \cap U_2$ に含まれる $p_1(y)$ の弧状連結な開近傍 U が存在する．$i = 1, 2$ に対して $V_i' = (p_i|_{V_i})^{-1}(U)$ とおくと，$p_i|_{V_i'}\colon V_i' \to U$ は同相写像である．$y' \in V_1'$ に対して

$$\phi(y') = (p_2|_{V_2'})^{-1}(p_1(y'))$$

であることを示そう．このことが示されれば，$(p_2|_{V_2'})^{-1} \circ p_1|_{V_1'}$ の連続性から，ϕ が V_1' 上で連続であることがわかる．y_1 から y への Y_1 内の道を γ_1，その X での像を $\gamma = p \circ \gamma$, $\gamma_2\colon I \to Y_2$ を γ のリフトで $\gamma_2(0) = y_2$ を満たすものとする．このとき $\phi(y) = \gamma_2(1)$．V_1' は弧状連結であるから，y から y' への V_1' 内の道 g が存在する．このとき，$(p_2|_{V_2'})^{-1} \circ p_1 \circ g$ は V_2' 内の $\phi(y)$ から始まる道であって $p_1 \circ g$ の持ち上げである．従って，$\gamma_1 \cdot g$ は y_1 から y' への道であり，その p_1 による像は $\gamma \cdot (p_1 \circ g)$ であり，また $\gamma \cdot (p_1 \circ g)$ の y_2 から始まる Y_2 への持ち上げは $\gamma_2 \cdot ((p_2|_{V_2'})^{-1} \circ p_1 \circ g)$ で与えられる．以上より，$\phi(y')$ は道 $(p_2|_{V_2'})^{-1} \circ p_1 \circ g$ の終点である $(p_2|_{V_2'})^{-1}(p_1(y'))$ と等しい．

(2) $p_2 \circ \phi = p_1$, $\phi(y_1) = y_2$ を満たす連続写像 ϕ をとる．y_1 から y を結ぶ道 γ_1 をとり，$\gamma_2 = \phi \circ \gamma_1$ とおく．γ_2 は y_2 と $\phi(y)$ を結ぶ道であって，X 上の道 $p_2 \circ \gamma_2 = p_2 \circ \phi \circ \gamma_1 = p_1 \circ \gamma_1$ の持ち上げになっている．従って ϕ は (1) で構成したものと一致する．

(3) Y_1 と Y_2 の役割を入れ替えて，連続写像 $\psi\colon Y_2 \to Y_1$ であって $p_1 \circ \psi = p_2$, $\psi(y_2) = y_1$ を満たすものがただ一つ存在することが言える．ここで $\theta = \psi \circ \phi\colon Y_1 \to Y_1$ は $p_1 \circ \theta = p_1$ および $\theta(y_1) = y_1$ を満たす連続写像である．$Y_1 = Y_2$ のときに (2) を適用すればそのような θ はただ一つしかない．一方，$\mathrm{id}_{Y_1}\colon Y_1 \to Y_1$ も同じ条件を満たすため，$\theta = \mathrm{id}_{Y_1}$ でなければならない．同様にして $\xi = \phi \circ \psi\colon Y_2 \to Y_2$ は $p_2 \circ \xi = p_2$, $\xi(y_2) = y_2$ を満たす連続写像であり，従って $\xi = \mathrm{id}_{Y_2}$ でなければならない．以上より ϕ と ψ は互いに逆写像であるから，ϕ は同相写像である．

問題 11 (1) $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して γ に沿った y_0 の平行移動を y_γ と書く．まず単射性を示す．x_0 を基点とするループ γ_1, γ_2 に対して，$y = y_{\gamma_1} = y_{\gamma_2}$ とする．このとき y_0 と y を結ぶ道 g_1, g_2 が存在して，$p \circ g_1 = \gamma_1$, $p \circ g_2 = \gamma_2$ である．Y は単連結であるから，問題 3 の結果より，$g_1 \simeq_0 g_2$．従って $\gamma_1 \simeq_0 \gamma_2$ である．次に全射性を示す．Y は弧状連結であるから，任意の $y \in p^{-1}(x_0)$ に対して y_0 から y への道 g が存在する．このとき g は $\gamma := p \circ g$ の持ち上げであるから，$y = y_\gamma$ である．

(2) 問題 10 より被覆変換 ϕ は $\phi(y_0) \in p^{-1}(x_0)$ と一対一に対応する．

(3) (1),(2) の対応を $[\gamma] \mapsto y_\gamma \mapsto \phi_\gamma$ と表す．ここで $\phi_\gamma \in \mathrm{Aut}(Y/X)$ は $\phi_\gamma(y_0) = y_\gamma$ を満たす被覆変換である．普遍被覆 Y の点は X の点 x と x_0 から x への道のホモトピー類 $\ell \in \Pi(x_0, x)$ の組 (x, ℓ) と一対一に対応することをまず見よう．

$$Y \cong \{(x, \ell) \mid x \in X,\ \ell \in \Pi(x_0, x)\}$$

そのような組 (x, ℓ) に対して，ℓ に沿った平行移動 $\Pi_\ell \colon p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x)$ が定まり，$y = \Pi_\ell(y_0)$ を対応させることができる．逆に $y \in Y$ に対して y_0 と y を結ぶ道 γ は (問題 3 より) ホモトピーを除いて一意に定まり，X の点 $x = p(y)$ およびホモトピー類 $\ell = p_*[\gamma]$ を定める．これらが互いに逆の対応であることは明らか．

Y を上の式の右辺の集合と同一視することにする．$\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ に対して

$$\phi_\gamma((x, \ell)) = (x, \gamma \cdot \ell)$$

であることを示そう．これが示されれば，$\gamma \mapsto \phi_\gamma$ が群準同型であることは明らかである．(x, ℓ) に対応する Y の点を y とする．y は ℓ に沿った y_0 の平行移動 $\Pi_\ell(y_0)$ であるから，y_0 から y への道 γ であって $p_*[\gamma] = \ell$ なるものが存在する．ϕ_γ の構成（問題 10(1)) から $\phi_\gamma(y)$ は ℓ に沿った y_γ の平行移動 $\Pi_\ell(y_\gamma)$ である．また y_γ は γ に沿った y_0 の平行移動 $\Pi_\gamma(y_0)$ であったから，

$$\phi_\gamma(y) = \Pi_\ell(y_\gamma) = \Pi_\ell(\Pi_\gamma(y_0))$$

平行移動の構成から，$\Pi_\ell \circ \Pi_\gamma = \Pi_{\gamma \cdot \ell}$ であることは明らか．すなわち，$\phi_\gamma(y) = \Pi_{\gamma \cdot \ell}(y_0)$ であり，$\phi_\gamma(y)$ は $(x, \gamma \cdot \ell)$ に対応する点である．

問題 12 (略解) (1) ψ の構成は問題 10 における ϕ の構成とほぼ同じである．つまり，$y \in Y$ に対して，y_0 から y への道 γ をとり，$p \circ \gamma$ の $q \colon Z \to X$ に関する持ち上げ $g \colon I \to Z$ であって $g(0) = z_0$ を満たすものをとるとき，$\psi(y) = g(1)$ で与えられる．ψ の連続性，一意性の証明も同様．

ψ が被覆写像になること：$z \in Z$ をとる．$p \colon Y \to X$, $q \colon Z \to X$ が被覆写像であることと，X が局所弧状連結であることから，$q(z)$ の弧状連結な開近傍 U，たがいに交わらない Y の開集合族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$, 互いに交わらない Z の開集合族 $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$ が存在して，$q^{-1}(U) = \bigsqcup_{\beta \in B} W_\beta$, $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $q|_{W_\beta} \colon W_\beta \to U$ は同相，$p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$ は同相，とすることができる．このとき $q \circ \psi = p$ より，$\psi(V_\alpha) \subset \bigsqcup_{\beta \in B} W_\beta$ である．$V_\alpha \cong U$ は弧状連結であるから，$\alpha \in A$ に対してただ一つ $\beta = \beta(\alpha)$ が存在して $\psi(V_\alpha) \subset W_{\beta(\alpha)}$ となる．$z \in W_{\beta_0}$ を満たす β_0 をとるとき，

$$\psi^{-1}(W_{\beta_0}) = \bigsqcup_{\alpha : \beta(\alpha) = \beta_0} V_\alpha$$

また $\beta(\alpha) = \beta_0$ であるとき，$q|_{W_{\beta_0}} \circ \psi|_{V_\alpha} = p|_{V_\alpha}$ であって，$q|_{W_{\beta_0}} \colon W_{\beta_0} \to U$, $p|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to U$ は共に同型より，$\psi|_{V_\alpha} \colon V_\alpha \to W_{\beta_0}$ は同型である．

(2) 問題 11 で行ったように Y と $\{(x, \ell) \mid x \in X, \ell \in \Pi(x_0, x)\}$ とを同一視する．$\psi((x, \ell))$ は被覆 $q \colon Z \to X$ に関する ℓ に沿った z_0 の平行移動 $\Pi_\ell(z_0)$ として与えられ

る．$\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ の Y への作用は $(x, \ell) \mapsto (x, \gamma \cdot \ell)$ で与えられていたことを思い出そう．

まず，$\gamma \in q_*(\pi_1(Z, z_0))$ に対して $\psi((x, \gamma \cdot \ell)) = \psi((x, \ell))$ を示す．$\psi((x, \gamma \cdot \ell)) = \Pi_{\gamma \cdot \ell}(z_0) = \Pi_\ell(\Pi_\gamma(z_0))$ であるが，γ は q_* の像であるから，Z の z_0 を基点とするループに持ち上がる．従って $\Pi_\gamma(z_0) = z_0$ であり，$\psi((x, \gamma \cdot \ell)) = \Pi_\ell(z_0) = \psi((x, \ell))$.

次に $\psi((x, \ell_1)) = \psi((x, \ell_2))$ とする．このとき $\Pi_{\ell_2}(\Pi_{\ell_1 \ell_2^{-1}}(z_0)) = \Pi_{\ell_1}(z_0) = \Pi_{\ell_2}(z_0)$ である．Π_{ℓ_2} は全単射だから $\Pi_{\ell_1 \ell_2^{-1}}(z_0) = z_0$ が分かる．これは x_0 を基点とするループ $\ell_1 \ell_2^{-1}$ は z_0 を基点とするループに持ち上がることを示しており，$\ell_1 \ell_2^{-1} \in q_*(\pi_1(Z, z_0))$ である．

(3) 部分群 $H < \pi_1(X, x_0)$ に対して $Z = H \backslash Y$ とおけばよい．また $\mathrm{Aut}(Z/X) \cong N(H)/H$．ここで $N(H) = \{g \in \pi_1(X, x_0) \mid g^{-1} H g = H\}$ は H の正規化群．詳細は略.

幾何学入門演習　No.7　(2022 年 11 月 16 日)[1]

問題 1 G, H, K を群とし，表示 $G = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $H = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$, $K = \langle S_3 \mid R_3 \rangle$ を持つとする．さらに $i \colon K \to G$, $j \colon K \to H$ を群準同型とする．K の生成元 $k \in S_3$ に対して $i(k)$ の持ち上げ $\widetilde{i(k)} \in F(S_1)$ および $j(k)$ の持ち上げ $\widetilde{j(k)} \in F(S_2)$ を固定しておく．このとき融合積 $G *_K H$ を

$$G *_K H = \left\langle S_1 \sqcup S_2 \,\middle|\, R_1 \cup R_2 \cup \{\widetilde{i(k)} \cdot \widetilde{j(k)}^{-1} \mid k \in S_3\} \right\rangle$$

と定める．G の元 g を $S_1 \cup S_1^{-1}$ の元の積で表してその像をとることにより自然な準同型 $i_G \colon G \to G *_K H$ が定まる．同様に $i_H \colon H \to G *_K H$ が定まる．$G *_K H$ は次の universal property を満たすことを示せ．

　任意の群 L と準同型 $\varphi \colon G \to L$, $\psi \colon H \to L$ に対して，$\varphi \circ i = \psi \circ j$ が成り立つならば，群準同型 $f \colon G *_K H \to L$ であって $f \circ i_G = \varphi$, $f \circ i_H = \psi$ を満たすものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & G *_K H \arrow[r, dashed, "f"] & L \\
 & H \arrow[u, "i_H"'] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

問題 2 問題 1 の universal property を用いて，$G *_K H$ が G, H, K の表示の取り方，および持ち上げ $\widetilde{i(k)}$, $\widetilde{j(k)}$ のとり方によらないことを示せ．

問題 3 問題 1 の設定において，$K = \{1\}$ のとき，i_G, i_H は単射であることを示せ．このとき $G *_K H$ を $G * H$ と書き，G と H の自由積という．

問題 4 問題 1 の設定で考える．$k \in K$ に対して，$i(k)j(k)^{-1}$ を自由積 $G * H$ の元とみなし，$\{i(k)j(k)^{-1} \mid k \in K\}$ の生成する正規部分群を N とする．$G *_K H \cong G * H / N$ であることを示せ．

問題 5 $(*)$ 自由積 $G * H$ の元 $x \neq 1$ は次の形に一意に表示できることを示せ．

$$x = g_1 g_2 \cdots g_k$$

ただし，$g_i \neq 1$ は $G \sqcup H$ の元であり，全ての $i = 1, \ldots, k-1$ について $g_i \in G$ ならば $g_{i+1} \in H$ を満たし，$g_i \in H$ ならば $g_{i+1} \in G$ を満たす．

問題 6 $\mathbb{Z}^2 \cong \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ を示せ．

問題 7 $U \subset \mathbb{R}^3$ を弧状連結な開集合とする．Van Kampen の定理を使って，$x \in U$ に対して $\pi_1(U \setminus \{x\}) \cong \pi_1(U)$ を示せ．

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的．

問題 8 Klein の壺 K は $[0,1]^2$ を次の関係 $\sim$ で生成される同値関係で割ったものである．

$$(0,y) \sim (1,y), \quad (x,0) \sim (1-x,1)$$

Van Kampen の定理を使って $\pi_1(K)$ の表示を求めよ．

問題 9 (レポート問題 2022 年 11 月 22 日 17:00 期限) $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とし，一つ固定した正の整数 n に対して D^2 上の同値関係 $\sim$ を次で定める．

$$z_1 \sim z_2 \iff z_1 = z_2 \quad \text{または} \quad |z_1| = |z_2| = 1, z_1^n = z_2^n$$

Van Kampen の定理を使って，商位相空間 $D^2/\sim$ の基本群を求めよ．

問題 10 $\mathbb{R}^3 \setminus (\{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\})$ の基本群を求めよ．

問題 11 種数 2 の曲面は 8 角形の辺を 2 つずつ対にして (適当な向きで) 同一視することにより得られることを観察し，その基本群の表示を求めよ．

問題 12 (*) 次の空間はどちらも $S^1 \vee S^2$ とホモトピー同値であることを観察し，基本群を求めよ．

(1) $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(2) $Y = \{(x,y,z) \mid (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 < 1\} \setminus \{(2,0,0)\}$. これはソリッドトーラス（中身の詰まったドーナツ）から内部の点 1 点を除いた空間である．

問題 13 (★) $\pi_1(SO(3,\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示せ．(ヒント：1 列目をとる写像 $SO(3,\mathbb{R}) \to S^2$ を考え，S^2 を二つの開集合で覆う．あるいは二重被覆 $S^3 \to SO(3,\mathbb{R})$ を作る．)

問題 14 Van Kampen の定理を次の手順で証明せよ．U, V を $X = U \cup V$ を満たす弧状連結な開集合で，$U \cap V$ は弧状連結で非空とする．$x_0 \in U \cap V$ をとる．$G = \pi_1(U, x_0)$, $H = \pi_1(V, x_0)$, $K = \pi_1(U \cap V, x_0)$ とする．包含写像が定める準同型 $K \to G$, $K \to H$ に関して融合積 $G *_K H$ を考える．

(1) 包含写像の定める準同型 $G \to \pi_1(X, x_0)$, $H \to \pi_1(X, x_0)$ は準同型 $G *_K H \to \pi_1(X, x_0)$ を誘導することを示せ．

(2) x_0 を基点とする任意のループ $\gamma \colon I \to X$ について，十分大きい $N > 0$ をとれば，各 $k = 0, \ldots, N-1$ について $\gamma([\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}])$ は U または V に含まれることを観察せよ．このことから $G *_K H \to \pi_1(X, x_0)$ は全射であることを結論せよ．

(3)* 次に単射性を示す．$x = g_1 g_2 \cdots g_k \in G *_K H$ の $\pi_1(X, x_0)$ での像が単位元であるとする．ここで $g_i \in G \sqcup H$ である．g_i を代表する (U または V 内の) ループを γ_i とするとき，x の像は，$[0,1]$ を k 等分し，区間 $[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$ 上で $s \mapsto \gamma_i(ks - i)$ で与えられるループ γ で代表できる．仮定からホモトピー $H \colon I \times I \to X$ であって $H(s,0) = \gamma(s)$, $H(s,1) = x_0$, $H(0,t) = H(1,t) = x_0$ を満たすものが存在する．k で割れる十分大きい自然数 $N > 0$ をとれば，各小区域 $[\frac{a}{N}, \frac{a+1}{N}] \times [\frac{b}{N}, \frac{b+1}{N}]$ の H による像が U または V のどちらかに含まれるようにすることができる．このホモトピーと $G *_K H$ での関係式を用いて $x = 1$ であることを結論せよ．

幾何学入門演習　No.7 解答例

問題 1 群 $G, H, G*_K H$ の表示から定まる射影をそれぞれ $\pi_G\colon F(S_1) \twoheadrightarrow G$, $\pi_H\colon F(S_2) \twoheadrightarrow H$, $\pi_{G*_K H}\colon F(S_1 \sqcup S_2) \twoheadrightarrow G *_K H$ とする．

任意の群 L と群準同型 $\varphi\colon G \to L$, $\psi\colon H \to L$ をとる．演習 No.4 の問題 6 より，自由群 $F(S_1 \sqcup S_2)$ から L への群準同型は生成元 $s \in S_1 \sqcup S_2$ たちの行き先を決めることにより一意に定まるから，群準同型 $f'\colon F(S_1 \sqcup S_2) \to L$ であって

$$f'(s) = \begin{cases} \varphi(\pi_G(s)) & \text{if } s \in S_1 \\ \psi(\pi_H(s)) & \text{if } s \in S_2 \end{cases}$$

を満たすものがただ一つ存在する．任意の元 $x = s_1^{k_1} \cdots s_n^{k_n} \in F(S_1)$（ただし $s_i \in S_1$, $k_i \in \mathbb{Z}$）に対して

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(s_1)^{k_1} \cdots f'(s_n)^{k_n} \\ &= (\varphi(\pi_G(s_1)))^{k_1} \cdots (\varphi(\pi_G(s_n)))^{k_n} \\ &= \varphi(\pi_G(s_1^{k_1} \cdots s_n^{k_n})) \\ &= \varphi(\pi_G(x)) \end{aligned}$$

が成り立つ．同様にして，任意の $x \in F(S_2)$ について

$$f'(x) = \psi(\pi_H(x))$$

が成り立つ．従って $r_1 \in R_1$ に対し，$\pi_G(r_1) = 1 \in G$ ゆえ，$f'(r_1) = \varphi(\pi_G(r_1)) = 1$. 同様に $r_2 \in R_2$ に対し，$f'(r_2) = \psi(\pi_H(r_2)) = 1$ である．また，$k \in S_3$ に対し，

$$\begin{aligned} f'\left(\widetilde{i(k)} \cdot \widetilde{j(k)}^{-1}\right) &= \varphi\left(\pi_G\left(\widetilde{i(k)}\right)\right) \cdot \psi\left(\pi_H\left(\widetilde{j(k)}^{-1}\right)\right) \\ &= \varphi(i(k)) \cdot \psi\left(j(k)^{-1}\right) \quad \left(\because \pi_G\left(\widetilde{i(k)}\right) = i(k),\ \pi_H\left(\widetilde{j(k)}\right) = j(k)\right) \\ &= (\varphi \circ i)(k) \cdot (\psi \circ j)(k^{-1}) \\ &= (\varphi \circ i)(k) \cdot (\varphi \circ i)(k^{-1}) \qquad (\because \psi \circ j = \varphi \circ i) \\ &= (\varphi \circ i)(kk^{-1}) = 1. \end{aligned}$$

以上より，f' は R_1, R_2, $\left\{\widetilde{i(k)} \cdot \widetilde{j(k)}^{-1} \mid k \in S_3\right\}$ 上で 1 であり，特にそれらの生成する正規部分群上で 1 の値をとる．従って，f' は群準同型

$$f\colon G *_K H \to L$$

を誘導する．$f' = f \circ \pi_{G*_K H}$ なので，任意の元 $g \in G$ に対し，$\pi_G(\tilde{g}) = g$ を満たす $\tilde{g} \in F(S_1)$ をとるとき

$$\begin{aligned} (f \circ i_G)(g) &= (f \circ i_G)(\pi_G(\tilde{g})) \\ &= f(\pi_{G*_K H}(\tilde{g})) \quad (\because i_G \text{ の定義より}) \\ &= f'(\tilde{g}) \\ &= \varphi(\pi_G(\widetilde{g})) = \varphi(g). \end{aligned}$$

となり，$f \circ i_G = \varphi$ が従う．同様にして，$f \circ i_H = \psi$．

最後に，$f \circ i_G = \varphi$ と $f \circ i_H = \psi$ を満たす準同型 $f\colon G *_K H \to L$ は一意であることを示そう．$G *_K H$ の元は定義により $S_1 \cup S_1^{-1}$ と $S_2 \cup S_2^{-1}$ の元たちの積で表されるから，特に i_G の像と i_H の像の元たちの積で表される．従って準同型 f は f の $i_G(G)$ 上での値と $i_H(H)$ 上での値から一意に定まる．従って $f \circ i_G = \varphi$, $f \circ i_H = \psi$ を満たす準同型 f は存在すればただ一つしかない．

問題 2 まず問題 1 での融合積 $G *_K H$ の定義より，$i_G \circ i = i_H \circ j\colon K \to G *_K H$ が成り立つことに注意する．実際，$k \in S_3$ に対して

$$\begin{aligned}
i_G(i(k)) &= \pi_{G *_K H}\left(\widetilde{i(k)}\right) \\
&= \pi_{G *_K H}\left(\widetilde{i(k)}\,\widetilde{j(k)}^{-1}\,\widetilde{j(k)}\right) \\
&= \pi_{G *_K H}\left(\widetilde{j(k)}\right) \qquad \left(\because \pi_{G *_K H}\left(\widetilde{i(k)}\,\widetilde{j(k)}^{-1}\right) = 1\right) \\
&= i_H(j(k))
\end{aligned}$$

であり，K の元は $S_3 \cup S_3^{-1}$ の元の積で表されることから，任意の $k \in K$ について $i_G(i(k)) = i_H(j(k))$ が言える．

G, H, K の表示の取り方と持ち上げ $\widetilde{i(k)}, \widetilde{j(k)}$ の取り方を変えて，融合積 L_1, L_2 が得られたとする．問題 1 での自然な準同型をそれぞれ $i_G^1\colon G \to L_1$, $i_H^1\colon H \to L_1$, $i_G^2\colon G \to L_2$, $i_H^2\colon H \to L_2$ とおく．

L_1 は universal property を満たすので，準同型 $f\colon L_1 \to L_2$ であって $f \circ i_G^1 = i_G^2$, $f \circ i_H^1 = i_H^2$ を満たすものが存在する．

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, "i_G^1"] \arrow[dr, "i_G^2"] & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & L_1 \arrow[r, dashed, "f"] & L_2 \\
& H \arrow[u, "i_H^1"'] \arrow[ur, "i_H^2"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで $i_G^2 \circ i = i_H^2 \circ j$ であることを使った．

また，L_2 も universal property を満たすので，準同型 $g\colon L_2 \to L_1$ であって $g \circ i_G^2 = i_G^1$, $g \circ i_H^2 = i_H^1$ を満たすものが存在する．

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, "i_G^2"] \arrow[dr, "i_G^1"] & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & L_2 \arrow[r, dashed, "g"] & L_1 \\
& H \arrow[u, "i_H^2"'] \arrow[ur, "i_H^1"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで $i_G^1 \circ i = i_H^1 \circ j$ であることを使った．

上記二つの可換図式を合わせて次を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G^2"] \arrow[dr, "i_G^1"] \arrow[drr, bend left, "i_G^2"] & & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & L_2 \arrow[r, "g"] & L_1 \arrow[r, "f"] & L_2 \\
 & H \arrow[u, "i_H^2"'] \arrow[ur, "i_H^1"'] \arrow[urr, bend right, "i_G^2"'] & &
\end{tikzcd}$$

すなわち，$f \circ g$ は次の可換図式を満たしている．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G^2"] \arrow[dr, "i_G^2"] & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & L_2 \arrow[r, "f \circ g"] & L_2 \\
 & H \arrow[u, "i_H^2"'] \arrow[ur, "i_H^2"'] &
\end{tikzcd}$$

一方，$\mathrm{id}_{L_2}\colon L_2 \to L_2$ も同じ可換図式を満たしている．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G^2"] \arrow[dr, "i_G^2"] & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & L_2 \arrow[r, "\mathrm{id}_{L_2}"] & L_2 \\
 & H \arrow[u, "i_H^2"'] \arrow[ur, "i_H^2"'] &
\end{tikzcd}$$

L_2 に対する universal property における一意性から，$f \circ g = \mathrm{id}_{L_2}$ でなければならない．同様の議論により，$g \circ f = \mathrm{id}_{L_1}$ が成り立つから，L_1 と L_2 は同型になる．よって融合積は G, H, K の表示の取り方と持ち上げ $\widetilde{i(k)}, \widetilde{j(k)}$ の取り方によらない．

問題 3 問題 1 において $K = \{1\}$ とする．$G *_K H$ の universal property を $L = G$, $\varphi = \mathrm{id}_G\colon G \to G$, $\psi\colon H \to G$ が $\psi(g) \equiv 1$ なる場合に適用すると，

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_G"] & \\
\{1\} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & G *_{\{1\}} H \arrow[r, dashed, "f"] & G \\
 & H \arrow[u, "i_H"'] \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}$$

を可換にする準同型 $f\colon G *_{\{1\}} H \to G$ が存在する．ここで $f \circ i_G = \mathrm{id}_G$ ゆえ，i_G は単射でなければならない．i_H の単射性も同様である．

問題 4 $G * H/N$ が問題 1 の融合積 $G *_K H$ と同じ universal property を満たすことを示せばよい．自然な写像 $i_G\colon G \to G * H$, $i_H\colon H \to G * H$ は準同型 $\bar{i}_G\colon G \to G * H/N$,

$\bar{i}_H\colon H \to G * H/N$ を誘導する．L を任意の群，$\varphi\colon G \to L$, $\psi\colon H \to L$ を準同型で $\varphi \circ i = \psi \circ j$ を満たすものとする．自由積 $G * H$ に対する universal property より，次の図式を可換にする準同型 $f\colon G * H \to L$ がただ一つ存在する．

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G"] \arrow[drr, "\varphi"] & & \\
\{1\} \arrow[ur] \arrow[dr] & G * H \arrow[rr, dashed, "f"] & & L \\
 & H \arrow[u, "i_H"'] \arrow[urr, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

$k \in K$ に対して $i(k)j(k)^{-1} \in G * H$ は正確に書けば $i_G(i(k))i_H(j(k))^{-1}$ のことであるが，

$$
\begin{aligned}
f(i_G(i(k))i_H(j(k))^{-1}) &= f(i_G(i(k)))f(i_H(j(k^{-1}))) \\
&= \varphi(i(k))\psi(j(k^{-1})) \quad (\because f \circ i_G = \varphi, f \circ i_H = j) \\
&= \varphi(i(k))\varphi(i(k^{-1})) \quad (\because \varphi \circ i = \psi \circ j) \\
&= \varphi(i(k \cdot k^{-1})) = 1
\end{aligned}
$$

より f は $i(k)j(k)^{-1}$ で 1 の値をとる．従って $i(k)j(k)^{-1}$ の生成する正規部分群 N 上で 1 の値をとるため，f は $\overline{f}\colon G * H/N \to L$ で次の図式を可換にするものを誘導する．

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "\bar{i}_G"] \arrow[drr, "\varphi"] & & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & G * H/N \arrow[rr, dashed, "\overline{f}"] & & L \\
 & H \arrow[u, "\bar{i}_H"'] \arrow[urr, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}
$$

逆に準同型 $\overline{f}\colon G*H/N \to L$ で上の図式を可換にするものがあれば，$G*H \to G*H/N$ と $\overline{f}$ を合成して得られる写像 $G * H \to L$ は最初の図式 (1) を可換にするため上の f と等しくなくてはならない．これは $\overline{f}$ の一意性を示している．

問題 5 集合 W を $(G \setminus \{1\}) \sqcup (H \setminus \{1\})$ の元からなる有限列 $(g_1, \ldots, g_k)$ であって $g_i \in G$ なら $g_{i+1} \in H$ であり，$g_i \in H$ なら $g_{i+1} \in G$ を満たすもの全体の集合とする．空の列 $()$ も W の元とみなす．$G * H$ の W への左作用を次のように定めよう．$1 \neq g \in G$ に対して $\psi_g\colon W \to W$ を

$$
\psi_g(g_1, \ldots, g_k) = \begin{cases} (gg_1, g_2, \ldots, g_k) & \text{if } g_1 \in G \text{ and } gg_1 \neq 1 \\ (g_2, \ldots, g_k) & \text{if } g = g_1^{-1} \\ (g, g_1, g_2, \ldots, g_k) & \text{if } g_1 \notin G \end{cases}
$$

と定め，$1 \neq h \in H$ に対して $\psi_h\colon W \to W$ を

$$\psi_h(g_1, \dots, g_k) = \begin{cases} (hg_1, g_2, \dots, g_k) & \text{if } g_1 \in H \text{ and } hg_1 \neq 1 \\ (g_2, \dots, g_k) & \text{if } h = g_1^{-1} \\ (h, g_1, g_2, \dots, g_k) & \text{if } g_1 \notin H \end{cases}$$

とする．また $\psi_1 = \mathrm{id}_W$ と定める．このとき $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$ に対して

$$\psi_{g_1} \circ \psi_{g_2} = \psi_{g_1 g_2}, \quad \psi_{h_1} \circ \psi_{h_2} = \psi_{h_1 h_2}$$

であることは容易に確かめられる．$\mathrm{Aut}(W)$ を W から W への全単射全体の集合とし，これを合成に関して群とみなす．$g \mapsto \psi_g$ は G から $\mathrm{Aut}(W)$ への準同型写像であり，$h \mapsto \psi_h$ も H から $\mathrm{Aut}(W)$ への準同型写像である．自由積の universal property から $G * H \to \mathrm{Aut}(W), x \mapsto \psi_x$ であって，G 上では $g \mapsto \psi_g$ と一致し，H 上では $h \mapsto \psi_h$ と一致するものがただ一つ存在する．これは $G * H$ の W への左作用を定める．写像 $\theta\colon G * H \to W$ を空列 $()$ への作用を使って，

$$\theta(x) = \psi_x()$$

で定める．また，$\tau\colon W \to G * H$ を $\tau(g_1, \dots, g_k) = g_1 \cdots g_k$ で定める．但し，空列の τ による像は 1 と定める．θ と τ が互いに逆写像であることを示そう．$(g_1, \dots, g_k) \in W$ に対して，

$$(\theta \circ \tau)(g_1, \dots, g_k) = \psi_{g_1 \cdots g_k}() = \psi_{g_1}\psi_{g_2} \cdots \psi_{g_k}() = (g_1, g_2, \dots, g_k)$$

より $\theta \circ \tau = \mathrm{id}_W$．従って τ は単射である．また，$G * H$ の元は G の元と H の元の積で表されるから，τ は全射であることも容易に分かる．従って τ は全単射（で θ は τ の逆写像）．これは題意の成立を意味する．

問題 6 群 $G := \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ は x, y の生成する自由群 $F_2 = \langle x, y \mid \rangle$ を $xyx^{-1}y^{-1}$ の生成する正規部分群 N で割ったものである．まず準同型

$$\theta\colon F_2 \to \mathbb{Z}^2$$

を $\theta(x) = (1, 0)$, $\theta(y) = (0, 1)$ で定める.（演習 No.4 の問題 6 よりこのような群準同型が一意に定まる.）この準同型は

$$\theta(xyx^{-1}y^{-1}) = (1, 0) + (0, 1) - (1, 0) - (0, 1) = (0, 0)$$

を満たす．従って $\theta(N) = (0, 0)$ である．従って θ は準同型 $\overline{\theta}\colon G = F_2/N \to \mathbb{Z}^2$ であって $\overline{\theta}(x) = (1, 0)$, $\overline{\theta}(y) = (0, 1)$ なるものを誘導する．$\overline{\theta}(x^n y^m) = (n, m)$ ゆえ，$\overline{\theta}$ は全射である．

次に写像 $\varphi\colon \mathbb{Z}^2 \to G$ を $\varphi(n, m) = x^n y^m$ で定める．これは群準同型になる．実際 G において関係式 $xy = yx$ を用いると（x, x^{-1}, y, y^{-1} は全て互いに交換するから），

$$\varphi((n, m) + (k, l)) = x^{n+k} y^{m+l} = x^n x^k y^m y^l = x^n y^m x^k y^l = \varphi(n, m)\varphi(k, l)$$

また $(\varphi \circ \overline{\theta})(x) = \varphi(1, 0) = x$, $(\varphi \circ \overline{\theta})(y) = \varphi(0, 1) = y$ である．G が x, y で生成される群であることから，任意の $g \in G$ に対して $(\varphi \circ \overline{\theta})(g) = g$．従って $\varphi \circ \overline{\theta} = \mathrm{id}_G$ であり，$\overline{\theta}$ は単射でもある．以上より $G \cong \mathbb{Z}^2$ である．

問題 7 $\varepsilon > 0$ は十分小として $V := B_\varepsilon(x) \subset U$ とする．明らかに $(U \setminus \{x\}) \cup V = U$ である．V は 1 点にホモトピー同値であり，$(U \setminus \{x\}) \cap V = B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ は S^2 にホモトピー同値である．したがって V, $(U \setminus \{x\}) \cap V$ のどちらも単連結である．Van Kampen の定理から，

$$\pi_1(U) \cong \pi_1(U \setminus \{x\}) *_{\pi_1((U\setminus\{x\})\cap V)} \pi_1(V) \cong \pi_1(U \setminus \{x\}) *_{\{1\}} \{1\}$$

一般に群 G に対して $G *_{\{1\}} \{1\} \cong G$ を示そう．$G \cong \langle S \mid R \rangle$ を G の表示とする．$\{1\}$ は生成元の集合が空集合，関係式の集合が空集合であるような表示を持つ．従って問題 1 で与えた定義より

$$G *_{\{1\}} \{1\} \cong \langle S \mid R \rangle \cong G.$$

以上より，$\pi_1(U) \cong \pi_1(U \setminus \{x\})$.

問題 8 $K = [0,1]^2/\sim$ を次の二つの開集合で覆う．

$$U = (0,1)^2, \qquad V = ([0,1]^2 \setminus [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}]^2)/\sim$$

ここで U は可縮，V は $S^1 \vee S^1$ とホモトピー同値であり，$U \cap V \cong (0,1)^2 \setminus [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^2$ は S^1 とホモトピー同値である．包含写像から基本群の間に誘導される写像

$$\pi_1(U) \xleftarrow{i} \pi_1(U \cap V) \xrightarrow{j} \pi_1(V)$$

を調べよう．$\pi_1(U) = \{1\}$ より，i は自明である．$\pi_1(U \cap V) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を z，$\pi_1(V) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1) \cong F_2$ の生成元を a, b とする．絵を描くと

$$j(z) = aba^{-1}b$$

であることが分かる．従って

$$\pi_1(K) \cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$$

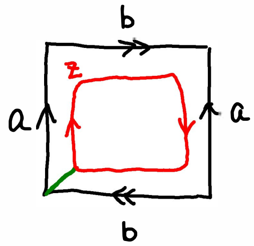


図 1: $\pi_1(U \cap V)$ の生成元 z と $\pi_1(V)$ の生成元 a, b. ループ z の基点 x_0 は正方形の内部にあり，ループ a, b の基点 x_1 は正方形の頂点（4 つの頂点は全て 1 つの点に同一視される）．2 つの基点を緑の道で結ぶことで，$\pi_1(V, x_0)$ と $\pi_1(V, x_1)$ とを同一視している．この同一視の下で z は $aba^{-1}b$ に対応することが見て取れる．

問題 9 $D^2/\sim$ を次の二つの開集合で覆う.

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad V = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}/\sim$$

ここで U は可縮，V は S^1 とホモトピー同値（ホモトピー同値写像は $\phi\colon V \to S^1$, $[z] \mapsto z^n/|z|^n$），また $U \cap V \cong \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ は S^1 とホモトピー同値である．特にこれらは全て弧状連結であり，Van Kampen の定理の条件を満たしている．包含写像の誘導する準同型

$$\pi_1(U) \xleftarrow{i} \pi_1(U \cap V) \xrightarrow{j} \pi_1(V)$$

を計算しよう．$\pi_1(U) = \{1\}$ より i は自明な写像である．$\pi_1(U \cap V) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を a, $\pi_1(V) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を b とするとき，

$$j(a) = b^n$$

である．実際，a はループ $[0,1] \ni \theta \mapsto \frac{1}{2}e^{2\pi i\theta} \in U \cap V$ で代表されるが，これをホモトピー同値写像 $\phi\colon V \to S^1$ で送ると，ループ $[0,1] \ni \theta \mapsto e^{2\pi in\theta} \in S^1$ となり，これは $\pi_1(S^1)$ の生成元の n 乗を代表する.（別の考え方は以下の図をみよ.）従って Van Kampen の定理から，

$$\pi_1(D^2/\sim) \cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U\cap V)} \pi_1(V) \cong \{1\} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \langle b \mid b^n \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

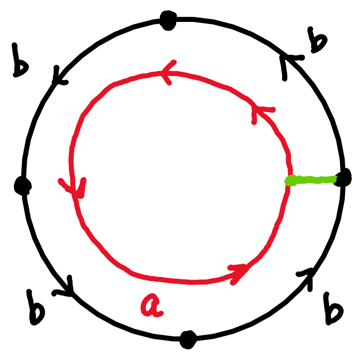


図 2: 空間 $D^2/\sim$ は円盤 D^2 の境界を n 個の円弧に等分し，n 個の円弧を同じ向きに同一視して得られる.（図は $n = 4$ の場合.）この図からわかるように $U \cap V$ 内のループ a の j による像は V 内のループ b^n に対応している.（問題 8 の解答でみたように，基点を結ぶ緑の道により，異なる基点に関する基本群を同一視する必要がある）.

写像 $\phi\colon V \to S^1$, $\phi([z]) = z^n/|z|^n$ がホモトピー同値写像であること.

連続写像 $\hat{\phi}\colon D^2 \setminus \{0\} \to S^1$, $\hat{\phi}(z) = z^n/|z|^n$ を考える．$z_1, z_2 \in D^2 \setminus \{0\}$ について $z_1 \sim z_2$ ならば $\hat{\phi}(z_1) = \hat{\phi}(z_2)$ であるから，$\hat{\phi}$ は連続写像 $\phi\colon V \to S^1$ を誘導する.

V の部分集合 $S^1/\sim$ には V からの相対位相と，S^1 からの商位相が定まるが，両者は一致することに注意する．ϕ を $S^1/\sim$ に制限した写像 $\phi|_{S^1/\sim}\colon S^1/\sim \to S^1$ は全単射連続写像であり，$S^1/\sim$ はコンパクトで S^1 はハウスドルフであるから，$\phi|_{S^1/\sim}$

は同相写像である．この逆写像と包含写像 $S^1/\sim\hookrightarrow V$ の合成写像を $\psi\colon S^1\to V$ とする．

ψ が ϕ のホモトピー逆写像であることを示そう．定義から $\phi\circ\psi=\mathrm{id}_{S^1}$ は明らか．$\psi\circ\phi$ と id_V の間のホモトピーを次のように構成する．まず写像 $\hat{H}\colon (D^2\setminus\{0\})\times I\to D^2\setminus\{0\}$ を次のように定める．

$$\hat{H}(z,t)=(t+\frac{1-t}{|z|})z$$

この写像は明らかに連続で，$\hat{H}(z,0)=z/|z|$，$\hat{H}(z,1)=z$ を満たす．また $z_1\sim z_2$ のとき $\hat{H}(z_1,t)\sim\hat{H}(z_2,t)$ である．演習 No.2 の問題 14 の解答で「命題」として述べたことより，$V\times I$ の位相は自然な写像 $(D^2\setminus\{0\})\times I\to V\times I$ に関する商位相と一致する．従って $\hat{H}$ は連続写像 $H\colon V\times I\to V$ を誘導する．ϕ と ψ の定義から $H(z,0)=(\psi\circ\phi)(z)$, $H(z,1)=z$ であることは容易に確かめられる．

補足：問題の位相空間 $D^2/\sim$ は S^1 に円盤 D^2 の境界を n 重巻きに貼り付けて得られる位相空間である．($n=2$ の時は，実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ としても知られている．) S^1 は基本群の生成元 b を与え，貼り付ける円盤 D^2 はその関係式 $b^n=1$ を与えている．この構成を次のように一般化できる．k 個の S^1 の 1 点和 $S^1\vee\cdots\vee S^1$ に l 個の円盤 D^2 を（境界に沿って）貼り付けることで，任意の有限表示群 $\langle b_1,\ldots,b_k\mid r_1,\ldots,r_l\rangle$ を基本群として持つ位相空間を作ることができる．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 完全な証明を付けるのは大変なので，議論の厳密さは評価に入れず，van Kampen の定理が正しく使えているかどうかで点数をつける．van Kampen の定理の条件を満たす二つの開集合で覆い，van Kampen の定理の主張 $\pi_1(D^2/\sim)\cong\pi_1(U)*_{\pi_1(U\cap V)}\pi_1(V)$ を述べている解答は 5 点を与える．さらに $\pi_1(U)$, $\pi_1(U\cap V)$, $\pi_1(V)$ とそれらの間の準同型が正しく（理由は無くてもよい）計算され，正解にたどり着いている解答は 5 点を与える．(計 10 点)

問題 10 $X=\mathbb{R}^3\setminus(\{(x,0,0)\mid x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y,0)\mid y\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\})$ とおく．X は S^2 から 6 点を除いた集合とホモトピー同値である．実際,

$$S^2\cap X=S^2\setminus\{(\pm1,0,0),(0,\pm1,0),(0,0,\pm1)\}$$

であり包含写像 $S^2\cap X\hookrightarrow X$ と写像 $\phi\colon X\to S^2\cap X, (x,y,z)\mapsto(x,y,z)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ は互いにホモトピー逆写像となる（詳細は略）．S^2 から 6 点を除いた集合は $\mathbb{R}^2$ から 5 点除いた集合と同相で，S^1 の 5 つの 1 点和 $\bigvee^5 S^1=S^1\vee S^1\vee S^1\vee S^1\vee S^1$ とホモトピー同値．Van Kampen の定理を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}\pi_1(\bigvee^5 S^1)&\cong\pi_1(\bigvee^4 S^1)*\pi_1(S^1)\\&\cong\pi_1(\bigvee^3 S^1)*\pi_1(S^1)*\pi_1(S^1)\\&\vdots\\&\cong\pi_1(S^1)*\pi_1(S^1)*\pi_1(S^1)*\pi_1(S^1)*\pi_1(S^1)\\&\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}\cong F_5\end{aligned}$$

問題 11 Σ_2 を種数 2 の曲面とすると，$\pi_1(\Sigma_2) \cong \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle$ なる表示がある．詳細は略．以下の図を参照．

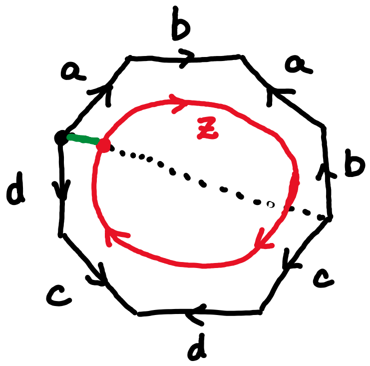


図 3: 種数 2 の曲面の展開図．同じラベルがついた辺同士を同一視する．点線の上側がトーラスから円盤を除いたものと同相．点線の下側も同様．8 角形の境界の近傍と，8 角形の内部に分けて van Kampen の定理を適用する．z は 8 角形の境界に沿ったループ $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ とホモトピック．

問題 12 略

問題 13 数学的な解答は略．$SO(3)$ の基本群が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることは腕を使って体験してみることができる．$SO(3)$ の元は 3 次元空間の 3 つの正規直交するベクトルの組 (v_1, v_2, v_3) で「正の向き」をなしているもの，つまり，$v_3 = v_1 \times v_2$ となるもの，と一対一に対応している．従って $SO(3)$ の元は 3 次元空間内に広げた右手の手のひらの向きと対応すると考えられる．(例えば，親指の方向と小指の方向が v_1, v_2 であり，手のひらの向いている方向が v_3 である.）右腕を水平に伸ばして手のひらを上に向け，手のひらを上向きにしたまま（二の腕の下をくぐらせて）腕を左回りに 360 度回転してみると，手のひらは同じ向きに戻るが，手はねじれる．さらに（今度は二の腕の上をくぐって）左回りに 360 度回転させると手は元の状態に戻る．360 度回転では手はねじれるが，それを 2 回繰り返すことによりねじれが解消されており，これは $\pi_1(SO(3))$ の 2 乗して初めて 1 になる元に対応する．

問題 14 (1) 包含写像が定める基本群の間の準同型を以下の図式の通りとする．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dr, "\varphi"] & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & \pi_1(X, x_0) \\
 & H \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで 2 つの合成 $\varphi \circ i\colon K \to \pi_1(X, x_0)$，$\psi \circ j\colon K \to \pi_1(X, x_0)$ はどちらも包含写像 $U \cap V \to X$ から誘導されているものであるから一致し，上の図式は可換である．

従って融合積の universal property (問題 1) より準同型 $\theta\colon G *_K H \to \pi_1(X, x_0)$ であって，$\theta \circ i_G = \varphi$ および $\theta \circ i_H = \psi$ を満たすものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "i_G"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
K \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & G *_K H \arrow[r, dashed, "\theta"] & \pi_1(X, x_0) \\
 & H \arrow[u, "i_H"'] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) I のコンパクト性より，十分大きい N をとれば，$k = 0, \dots, N-1$ に対して $\gamma([\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}])$ は U または V に含まれる．(より正確には，開被覆 $I = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ に関するルベーグ数（演習 No.5，問題 11 参照）より小さい $1/N$ をとればよい．) 各 $k \in \{0, \dots, N\}$ に対して，x_0 から $\gamma(k/N)$ への道 $\alpha_k\colon I \to X$ であって $\gamma(k/N) \in U$ ならば U に含まれ，$\gamma(k/N) \in V$ ならば V に含まれるものをとる．(特に，$\gamma(k/N) \in U \cap V$ ならば α_k は $U \cap V$ に含まれる道である．) これは U, V, $U \cap V$ が各々弧状連結であることから可能である．ここで α_0, α_N は x_0 への定値の道 e_{x_0} としておく．$k = 0, \dots, N-1$ に対して道 $\gamma_k\colon I \to X$ を $\gamma_k(s) = \gamma(\frac{k+s}{N})$ で定める．このとき基本亜群における積を用いて，

$$\begin{aligned}
[\gamma] &= [\gamma_1][\gamma_2] \cdots [\gamma_{N-1}] \\
&= ([\alpha_0][\gamma_1][\alpha_1^{-1}])([\alpha_1][\gamma_2][\alpha_2^{-1}])([\alpha_2][\gamma_3][\alpha_3^{-1}]) \cdots ([\alpha_{N-1}][\gamma_{N-1}][\alpha_N^{-1}])
\end{aligned}$$

となる．ここで $[\alpha_i][\gamma_{i+1}][\alpha_{i+1}^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$ であって U または V に完全に含まれるループで代表される．すなわち，$[\alpha_i][\gamma_{i+1}][\alpha_{i+1}^{-1}]$ は $G \to \pi_1(X, x_0)$ の像または $H \to \pi_1(X, x_0)$ の像に含まれる．従って任意の $\pi_1(X, x_0)$ の元は $\varphi(G)$ と $\psi(H)$ の元の積で表すことができ，$\theta\colon G *_K H \to \pi_1(X, x_0)$ は全射である．

(3) 難しくないが長くなるのでここでは省略する．Hatcher の Algebraic Topology や，https://www.youtube.com/watch?v=lOaY1OXfo48 などに解説がある．

幾何学入門演習　No.8　(2022 年 11 月 30 日)[1]

問題 1 S^2 を地球の表面と考え，その「座標」を経度・緯度を使って導入することを考える．経度を θ，緯度を φ とするとき，対応する S^2 上の点は

$$f(\theta,\varphi)=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi)$$

で与えられることを観察せよ．f を座標として用いるのに適切でない点，すなわち，その点のどんな小さな開近傍に制限しても，f が単射にならない点はどこか．

問題 2 $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された関数 $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ について，次の条件 (1), (2), (3) を考える．含意関係 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) を示せ．

(1) f は C^1 級である．すなわち，$f(x_1,\dots,x_n)=(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$ とおいたとき，全ての i,j について偏導関数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n)$ が存在して，U 上の関数として連続である．

(2) f は U の各点 x で全微分可能である．すなわち，

$$\lim_{v\to 0}\frac{|f(x+v)-f(x)-D_xv|}{|v|}=0$$

を満たす線形写像 $D_x\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が存在する．

(3) f は U 上の連続関数である．

定義 開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ について，点 $a\in U$ でのベクトル $v\in\mathbb{R}^n$ に沿った方向微分を次で定義する．

$$d_af(v):=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

d_af のことを $(df)_a$, $(Df)_a$, $(\nabla f)_a$ などと書くこともある．

問題 3 $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき，任意の点 $a\in\mathbb{R}^n$ について $d_af=f$ であることを示せ．

問題 4 ($\star$) $U\subset\mathbb{R}^n$ を開集合とする．授業では $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ が C^1 級ならば $d_af\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ は線形写像であることを示した．方向微分 $d_af(v)$ が任意の $v\in\mathbb{R}^n$ について存在するが v について線形写像にならない関数 f と点 a の例を与えよ．また，任意の点 $a\in U$ と任意の $v\in\mathbb{R}^n$ に沿っての方向微分 $d_af(v)$ が存在するが，f は連続とはならない例を与えよ．

問題 5 問題 1 の写像 $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ について，その微分 $d_{(\theta,\varphi)}f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を表現する行列 $(Jf)_{(\theta,\varphi)}$（Jacobi 行列という）を求めよ．また，$d_{(\theta,\varphi)}f$ が単射でない点を全て求め，その結果を問題 1 と比べよ．

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的．

問題 6 極座標 (r,θ) に対応する写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次で定義する．

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

F の微分 $d_{(r,\theta)}F$ を表現する行列 $(JF)_{(r,\theta)}$ を求め，$d_{(r,\theta)}F$ が同型でない点 (r,θ) を求めよ．また，そのような点の任意の開近傍 U に対して $F|_U$ は単射でないことを示せ．

問題 7 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と写像 $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x+iy \in \mathbb{C}$ によって同一視する．写像 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = z^n$ で定めるとき，$d_z f$ が同型とならない点は $z=0$ のみであることを示せ．このことと逆関数定理から $f|_{\mathbb{C}^\times}\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ は局所同相写像であることを結論せよ．

問題 8 (レポート問題 2022 年 12 月 6 日 17:00 期限) $M_2(\mathbb{R})$ を実の 2 次正方行列全体のなす空間とする．これは $\mathbb{R}^4$ と同一視される 4 次元実ベクトル空間である．写像 $F\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を $F(A) = A^2$ で定める．

(1) $V \in M_2(\mathbb{R})$ に沿った方向微分 $d_A F(V) = \lim_{t\to 0} \frac{F(A+tV)-F(A)}{t}$ を求めよ．$d_A F$ は線形写像 $M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を定める．

(2) $d_A F$ が同型 $\iff \det(A) \neq 0$ かつ $\mathrm{tr}(A) \neq 0$，を示せ．ここで $\mathrm{tr}(A)$ は A のトレースである．

注：逆関数定理から，単位行列に十分近い行列 A に対して単位行列に十分近い平方根 $A^{1/2}$ が（A の滑らかな関数として）定義できることが分かる．

問題 9 ($\star$) 逆関数定理を次の方法で示せ．U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$f\colon U \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級写像で点 $a \in U$ での微分 $d_a f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が同型なものとする．

(i) まず適当な座標変換によって $a = f(a) = 0 \in \mathbb{R}^n$，$d_a f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ の場合に問題を帰着させる．

(ii) $g_y(x) = y + x - f(x)$ とおく．$\epsilon > 0$ が存在して $|y| \leq \epsilon/2$ ならば g_y は半径 ϵ の閉球体 $\overline{B_\epsilon(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \epsilon\}$ で定義されて $g_y(\overline{B_\epsilon(0)}) \subset \overline{B_\epsilon(0)}$ が成り立つ．

(iii) さらに $\epsilon > 0$ を小さくとれば，$g_y\colon \overline{B_\epsilon(0)} \to \overline{B_\epsilon(0)}$ は縮小写像にとることができる．すなわち，定数 $0 < k < 1$ が存在して，任意の $x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}$ に対して $|g_y(x_1) - g_y(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$．縮小写像の原理を適用して，$y \in \overline{B_{\epsilon/2}(0)}$ の逆像 $f^{-1}(y)$ が $\overline{B_\epsilon(0)}$ 内に一意に定まることを示す．（ヒント：$g_y(x_1) - g_y(x_2) = \int_0^1 [\frac{d}{dt} g_y(tx_1 + (1-t)x_2)]dt$．）

(iv) $y \mapsto f^{-1}(y)$ が連続であることを示す．

(v) f^{-1} は全微分可能であることを示し，その微分 $d_y(f^{-1})$ を計算する．

(vi) f^{-1} が C^1 級であることを示す．さらに f が C^k 級ならば f^{-1} も C^k 級になることを示す．

注：この縮小写像の原理を利用した証明は無限次元の Banach 空間にも一般化できる．

幾何学入門演習　No.8 解答例

問題 1 前半は省略する．$\cos\varphi = 0$ となる点 (θ, φ)（S^2 上の北極と南極 $(0, 0, \pm 1)$ に対応する）では $f(\theta, \varphi)$ は θ の値によらないため，そのような点の任意の近傍に制限しても f は単射でない．

問題 2 (1) $\Rightarrow$ (2): $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ を固定し，十分小さい $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $x^i = (x_1 + v_1, \ldots, x_i + v_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ とおく．v が十分小さいとき，x^{i-1} と x^i を結ぶ線分は U に含まれる．平均値の定理より，x^{i-1} と x^i を結ぶ線分上の点 $\xi^{ji} = \xi^{ji}(v)$ が存在して，

$$\begin{aligned} f_j(x+v) - f_j(x) &= f_j(x^n) - f_j(x^{n-1}) + f_j(x^{n-1}) - f_j(x^{n-2}) + \cdots + f_j(x^1) - f_j(x) \\ &= \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\xi^{jn}) v_n + \frac{\partial f_j}{\partial x_{n-1}}(\xi^{j,n-1}) v_{n-1} + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\xi^{j1}) v_1 \end{aligned}$$

線形写像 $D_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を

$$D_x(v_1, \ldots, v_n) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) v_i, \ldots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) v_i \right)$$

と定義するとき，

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{|f(x+v) - f(x) - D_x v|}{|v|} &= \left(\sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi^{ji}) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right) \frac{v_i}{|v|} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi^{ji}) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right) \frac{v_i}{|v|} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi^{ji}) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right| \end{aligned}$$

導関数 $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ の連続性から，$|v| \to 0$ のとき，右辺はゼロに収束する．

(2) $\Rightarrow$ (3): (2) より

$$\lim_{v \to 0} (f(x+v) - f(x) - D_x v) = 0$$

また明らかに

$$\lim_{v \to 0} D_x v = 0$$

であるから，

$$\lim_{v \to 0} (f(x+v) - f(x)) = 0$$

これは f が点 $x \in U$ で連続であることを示している．

問題 3 f が線形写像であることに注意して，定義から，

$$\begin{aligned} d_a f(v) &:= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a)+f(tv)-f(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{tf(v)}{t} \\ &= f(v) \end{aligned}$$

問題 4 （前半の例）関数 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を

$$f(z)=\begin{cases} z^3/|z|^2 & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$$

で定める．このとき $v\neq 0$ に対して

$$d_0 f(v)=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv)}{t}=\frac{v^3}{|v|^2}$$

であるがこれは線形ではない．実際 $d_0 f(i)=-i$, $d_0 f(1)=1$ であるが，$d_0 f(1+i)=-2+2i$ である．

（後半の例）$f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(y-x^2)^2/(x^2+y^2)^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

と定める．$(x,y)\neq(0,0)$ では明らかにこの関数は C^∞ 級である．また $x\neq 0$ に対して $f(x,x^2)=1$ であるから，$\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=1\neq f(0,0)$．従って f は $(0,0)$ で連続ではない．f が $(0,0)$ において任意のベクトル (v_1,v_2) に沿って方向微分が存在することを示そう．$d_0 f(0,0)=0$ は定義から明らかである．$(v_1,v_2)\neq(0,0)$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{f(t(v_1,v_2))-f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0}\exp\left(-t^{-6}(v_2-tv_1^2)^2/(v_1^2+v_2^2)^4\right) \\ &= \begin{cases} 0 & v_2\neq 0 \\ \lim_{t\to 0}\exp(-t^{-4}v_1^{-4}) & v_2=0, v_1\neq 0 \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

以上より任意の $v\in\mathbb{R}^2$ に対して $d_0 f(v)=0$.

問題 5

$$(Jf)_{(\theta,\varphi)}=\begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

この行列のランクが 1 になるのは $\cos(\varphi)=0$ のときのみ．これは問題 1 と対応している．

問題 6

$$(JF)_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

この行列の行列式は r である．従って，$d_{(r,\theta)}F$ が同型でない点は $\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid r=0\}$ である．$r=0$ のとき，θ によらず $F(r,\theta)=(0,0)$ となるため，$r=0$ を満たす点の任意の開近傍 U に対して $F|_U$ は単射でない．

問題 7 $d_zf\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を求める．$v\in\mathbb{C}$ に対して，

$$\begin{aligned} d_zf(v) &= \lim_{t\to 0}\frac{(z+tv)^n - z^n}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(nz^{n-1}v + \binom{n}{2}z^{n-2}tv^2 + \cdots + t^{n-1}v^n\right) \\ &= nz^{n-1}v \end{aligned}$$

従って d_zf は複素数 nz^{n-1} を掛ける写像であり，これが同型でないのは $nz^{n-1}=0$，すなわち，$z=0$ のみ（ただし，$n\geq 2$ としている．）$f|_{\mathbb{C}^\times}\colon \mathbb{C}^\times\to\mathbb{C}^\times$ はすべての点 $z\in\mathbb{C}^\times$ で d_zf が同型であるから，逆関数定理より $f|_{\mathbb{C}^\times}$ は局所同相写像．

問題 8 (1) 方向微分を直接計算する．

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{F(A+tV)-F(A)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{(A+tV)^2 - A^2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}((AV+VA)+tV^2) = AV+VA \end{aligned}$$

従って $d_AF(V) = AV+VA$．

(2) 複素係数の 2 次正方行列 $A\in M_2(\mathbb{C})$ に対して $\mathbb{C}$ 上の線形写像 $f_A\colon M_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C})$ を $f_A(V)=AV+VA$ と定める．A が実数係数のときは，$f_A|_{M_2(\mathbb{R})} = d_AF$ であり，f_A が同型であることと，d_AF が同型であることとは同値である．

そこでより一般に，$A\in M_2(\mathbb{C})$ に対して f_A が同型 $\Leftrightarrow$ $\det A\neq 0$ かつ $\mathrm{tr}(A)\neq 0$，を示そう．

正則行列 $P\in M_2(\mathbb{C})$ に対して，線形同型写像 $\mathrm{Ad}_P\colon M_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C})$ を $\mathrm{Ad}_P(X) = P^{-1}XP$ と定める．このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_P(f_A(V)) &= P(AV+VA)P^{-1} \\ &= PAP^{-1}\cdot PVP^{-1} + PVP^{-1}\cdot PAP^{-1} = f_{\mathrm{Ad}_P(A)}(\mathrm{Ad}_P(V)) \end{aligned}$$

である．すなわち，$\mathrm{Ad}_P\circ f_A = f_{\mathrm{Ad}_P A}\circ\mathrm{Ad}_P$．従って

$$f_A \text{ が同型} \iff f_{\mathrm{Ad}_P A} \text{ が同型}$$

となる．また示すべき同値条件についても，

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\mathrm{Ad}_P A), \quad \det(A) = \det(\mathrm{Ad}_P A)$$

であるから，A が Jordan 標準形のときに主張を確かめれば十分である．

Case 1: A が対角行列のとき．$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ とおく．$V = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対して，

$$\begin{aligned} f_A(V) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\lambda x & (\lambda+\mu)y \\ (\lambda+\mu)z & 2\mu w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って f_A が正則 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f_A) = \{0\} \Leftrightarrow \lambda + \mu \neq 0, \lambda \neq 0, \mu \neq 0$. これは $\det(A) \neq 0$ かつ $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ と同値.

Case 2: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ のとき．$V = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対して，

$$\begin{aligned} f_A(V) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\lambda x + z & 2\lambda y + x + w \\ 2\lambda z & 2\lambda w + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\lambda \neq 0$ のとき，$V \in \mathrm{Ker}\, f_A$ とすると $2\lambda z = 0, 2\lambda x + z = 0, 2\lambda w + z = 0, 2\lambda y + x + w = 0$ より $z = 0$, $x = 0$, $w = 0$, $y = 0$．従って $\mathrm{Ker}\, f_A = 0$ がわかる．また $\lambda = 0$ のとき $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, f_A$ となる．従って f_A が同型 $\Leftrightarrow \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$, $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

注意　上で見たように $\mathrm{Ad}_P \circ f_A = f_{\mathrm{Ad}_P A} \circ \mathrm{Ad}_P$ であるが，この両辺の行列式をとって $\det f_A = \det f_{\mathrm{Ad}_P A}$ である．つまり $\det(f_A)$ は A の共役類のみに依存する関数である．A が対角行列のとき，Case 1 の計算から，

$$\det(f_A) = 4\lambda\mu(\lambda+\mu)^2 = 4\det(A)\,\mathrm{tr}(A)^2$$

である．両辺とも A の共役類のみに依存する関数なので，この等式は対角化可能な任意の行列 A に対して成立する．対角化可能な行列は $M_2(\mathbb{C})$ の稠密な部分集合をなしているから，上記の等式は全ての $A \in M_2(\mathbb{C})$ に対して成立する．

採点基準　(1) は 5 点，(2) は 5 点．これ以上の細かい部分点は付けない．計 10 点満点．(2) については正しく議論出来ているかも見る．ただし，軽微なミスは減点しない．

問題 9　(i) 座標の平行移動により $a = 0$, $f(a) = 0$ としてよい．また f を $(d_a f)^{-1} \circ f$ で置き換えて $d_a f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ と仮定できる．

(ii) ある $\delta > 0$ に対して $f(x)$ は $B_\delta(0)$ で定義されているとしてよい．全微分可能性から

$$f(x) = d_0 f(x) + o(|x|) = x + o(|x|)$$

であり，特にある $0<\epsilon<\delta$ が存在して $|f(x)-x| \leq \frac{1}{2}|x|$ が $\overline{B_\epsilon(0)}$ 上で成立する．$|y| \leq \frac{\epsilon}{2}$ とすると，$x \in \overline{B_\epsilon(0)}$ に対して $g_y(x)$ は定義され，

$$|g_y(x)| = |y - f(x) + x| \leq |y| + |x - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{|x|}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

つまり $g_y\colon \overline{B_\epsilon(0)} \to \overline{B_\epsilon(0)}$ を定める．

(iii) ヒントより

$$\begin{aligned}
|g_y(x_1) - g_y(x_2)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} g_y(tx_1 + (1-t)x_2) dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 (E_n - (Jf)_{tx_1+(1-t)x_2})(x_1 - x_2) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| (E_n - (Jf)_{tx_1+(1-t)x_2})(x_1 - x_2) \right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left\| (E_n - (Jf)_{tx_1+(1-t)x_2}) \right\| |x_1 - x_2| dt
\end{aligned}$$

ここで E_n は単位行列，$(Jf)_x$ は線形写像 $d_x f$ に対応する Jacobi 行列であり，正方行列 A に対して $\|A\| = \sup_{x\neq 0} |Ax|/|x|$ は作用素ノルムを表す．f は C^1 級で $(Jf)_0 = E_n$ だから，ϵ を小さく取り直せば $x \in \overline{B_\epsilon(0)}$ に対して

$$\|E_n - (Jf)_x\| \leq \frac{1}{2}$$

となる．ここで $x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}$ に対して上の計算から

$$|g_y(x_1) - g_y(x_2)| \leq \int_0^1 \frac{1}{2} |x_1 - x_2| dt = \frac{1}{2} |x_1 - x_2|.$$

すなわち g_y は縮小写像．縮小写像の原理から $|y| \leq \epsilon/2$ のとき，$g_y(x) = x$ を満たす $x \in \overline{B_\epsilon(0)}$ が一意に存在する．($\overline{B_\epsilon(0)}$ は完備距離空間であることを使った．)

注意：縮小写像の不動点は $x_0 = 0,\ x_{n+1} = g_y(x_n)$ で定まる点列 $\{x_n\}$ の極限として与えられることに注意する．これは Newton 法で $y = f(x)$ の解を求めることに対応する．

(iv) $y_1, y_2 \in \overline{B_{\epsilon/2}(0)}$ とし，$x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}$ を $x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
|y_1 - y_2| = |f(x_1) - f(x_2)| &\geq |x_1 - x_2| - |f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \\
&= |x_1 - x_2| - |g_0(x_1) - g_0(x_2)| \\
&\geq |x_1 - x_2| - \frac{1}{2}|x_1 - x_2| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|
\end{aligned}$$

ここで (iii) で得た評価を使った．これは f^{-1} が連続であることを示す．

(v) $y \in B_{\epsilon/2}(0)$ をとる．十分小さい $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $x = f^{-1}(y)$, $x + b(a) = f^{-1}(y+a)$ とおく．($x, x+b(a) \in \overline{B_\epsilon(0)}$．) ここで (iv) より $|b(a)| \le 2|a|$ であることに注意する．f は全微分可能なので，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$|b| < \delta$ のとき

$$|f(x+b) - f(x) - (Jf)_x b| \le \epsilon |b|$$

従って $b = b(a)$ とおけば，$|a| < \delta/2$ のとき $|b(a)| \le 2|a| < \delta$ であって，

$$|f(x+b(a)) - f(x) - (Jf)_x b(a)| \le \epsilon |b(a)| \le 2\epsilon |a|$$

すなわち，

$$|a - (Jf)_x (f^{-1}(y+a) - f^{-1}(y))| \le 2\epsilon |a|$$

がわかる．これを書き換えると

$$|f^{-1}(y+a) - f^{-1}(y) - ((Jf)_x)^{-1} a| \le 2\epsilon \|((Jf)_x)^{-1}\| \cdot |a|$$

これは f^{-1} は y で全微分可能であり，$(Jf^{-1})_y = ((Jf)_x)^{-1}$ であることを示す.

(vi) 逆関数を $h = f^{-1}$ とおく．n 次正則行列 A に対して A^{-1} の (j,k) 成分を $R_{jk}(A)$ と書くことにする．R_{jk} は A の n^2 個の成分の有理関数である．$(Jh)_y = ((Jf)_{h(y)})^{-1}$ より h の偏微分係数は

$$\frac{\partial h_j}{\partial y_k}(y) = R_{jk}\left((Jf)_{h(y)}\right)$$

の形に書けることが分かる．したがって h の偏微分係数は全て連続であり，h は C^1 級.

f が C^k 級であるとする．任意の $r \le k$ に対して，上の式から帰納的に，h は r 階偏微分可能で，その偏微分係数は f の r 階までの偏微分係数 $Jf, J^2 f, \ldots, J^r f$ と h の $r-1$ 階までの偏微分係数 $Jh, \ldots, J^{r-1}h$ の有理関数として表されることが示せる．

$$\frac{\partial^r h_j}{\partial y_{k_1} \cdots \partial y_{k_r}}(y) = R_{j,k_1,\ldots,k_r}(Jf(h(y)), \ldots, J^r f(h(y)), Jh(y), \ldots, J^{r-1}h(y))$$

従って $h = f^{-1}$ は C^k 級.

幾何学入門演習　No.9　(2022年12月7日)[1]

授業ではユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ に埋め込まれた多様体について，以下の二つの定義を与え，それらが同値であることを示した.

(パラメータ付けによる) 定義 I　$\mathbb{R}^N$ の部分集合 M が m 次元 C^∞ 級多様体（なめらかな多様体，可微分多様体ともいう）であるとは，M の各点 p に対して p の $\mathbb{R}^N$ における開近傍 $U \subset \mathbb{R}^N$，$\mathbb{R}^m$ の開集合 V，C^∞ 級写像 $f\colon V \to M \subset \mathbb{R}^N$ が存在して次を満たすこと.

(1) $f(V) = M \cap U$ であり，f は V と $M \cap U$ との同相写像を与える.（M には $\mathbb{R}^N$ からの相対位相を入れておく.）

(2) 任意の点 $x \in V$ に対して，$d_x f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ は単射.

このような f をパラメータ付け，あるいは座標[2]と呼ぶ.

($\mathbb{R}^N$ の座標系による) 定義 II　$\mathbb{R}^N$ の部分集合 M が m 次元 C^∞ 級多様体であるとは，M の各点 p に対して p の $\mathbb{R}^N$ における開近傍 U と C^∞ 級微分同相写像 $\phi\colon U \to W$，ただし W は $\mathbb{R}^N$ の開集合，が存在して，$\phi(M \cap U) = \{(x_1, \ldots, x_N) \in W \mid x_{m+1} = \cdots = x_N = 0\}$ を満たすこと.

問題 1 $\mathbb{R}^N$ の部分集合について，それが N 次元 C^∞ 級多様体であることと，$\mathbb{R}^N$ の開集合であることは同値である．このことを定義 I に基づいて示せ.

問題 2 S^2 に座標を次のように導入する．$V = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\}$ とし，

$$f\colon V \to S^2, \quad f(y,z) = (\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)$$

とおく．これが定義 I のパラメータ付けの性質を満たすことを示せ.（開集合 U は何か？また f は V と $S^2 \cap U$ の間の同相写像になっているか？f の微分は単射か？）

問題 3 S^2 の座標 (パラメータ付け) $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ を立体射影を用いて導入する．すなわち，$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(x,y)$ を $(x,y,0)$ と $(0,0,1)$ を結ぶ直線と S^2 の交わりとして定める．これが定義 I のパラメータ付けの性質を満たすことを示せ.

問題 4 S^2 が定義 II の意味での多様体であることを，定義に基づき直接確かめよ.

問題 5 多様体 $M \subset \mathbb{R}^N$ の（相対位相に関する）開部分集合は多様体であることを（定義 I あるいは II に基づいて）示せ.

問題 6 $V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とする．C^∞ 級写像 $f\colon V \to \mathbb{R}^N$ が単射であり，任意の点 $x \in V$ に対して $d_x f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ も単射であるとする．このとき $f(V)$ は多様体であるか？また，$\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ は多様体か？

---

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的.

[2] $f\colon V \to M \cap U$ の逆写像 $f^{-1}\colon M \cap U \to V$ を座標と呼ぶほうがむしろ通常かもしれないが本講義では混用する.

問題 7 S^2 の座標 (パラメータ付け) $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ を各々，北極 $(0,0,1)$ および南極 $(0,0,-1)$ からの立体射影を用いて導入する．つまり，$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$f(x,y)$ を $(x,y,0)$ と $(0,0,1)$ を結ぶ直線と S^2 の交わりとし，$g(x,y)$ を $(x,y,0)$ と $(0,0,-1)$ を結ぶ直線と S^2 の交わりとする．座標 f, g の間の座標変換 $g^{-1} \circ f\colon f^{-1}(f(\mathbb{R}^2) \cap g(\mathbb{R}^2)) \to g^{-1}(f(\mathbb{R}^2) \cap g(\mathbb{R}^2))$ を具体的に計算し，それが C^∞ 級であることを確かめよ．

陰関数定理　W を $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の開集合，$f\colon W \to \mathbb{R}^m$ を C^∞ 級写像とする．$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の座標を $(x,y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ で表し，写像 f を $f(x,y) = (f_1(x,y), \dots, f_m(x,y))$ と書く．ある点 $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ において，変数 y に関する Jacobi 行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x^0, y^0)\right)_{1 \le i,j \le m}$$

が正則行列であるとし，$z^0 = f(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^m$ とおく．このとき，x^0 の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^n$，y^0 の開近傍 $V \subset \mathbb{R}^m$，C^∞ 級写像 $g\colon U \to V$ が存在して，$U \times V \subset W$ および

$$\{(x,y) \in U \times V \mid f(x,y) = z^0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$$

が成立する．

問題 8 (レポート問題 2022 年 12 月 13 日 17:00 期限) 逆関数定理から上記の陰関数定理を次のようにして導け．

(1) 写像 $F\colon W \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ を $F(x,y) = (x, f(x,y))$ とおく．F の点 (x^0, y^0) での Jacobi 行列 $(JF)_{(x^0,y^0)}$ が正則であることを示せ．

(2) 逆関数定理から $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の開集合 $U' \times V \subset W$（ただし，$U' \subset \mathbb{R}^n$ は x^0 の開近傍，$V \subset \mathbb{R}^m$ は y^0 の開近傍）が存在して，$D = F(U' \times V)$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の開集合であり，$F|_{U' \times V}\colon U' \times V \to D$ は微分同相写像となる．ここで

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, z^0) \in D\}$$

とおいて $x \in U$ に対して $g(x) \in V$ を

$$g(x) := (F|_{U' \times V})^{-1}(x, z^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \text{ の } \mathbb{R}^m \text{ 成分}$$

とおけば，陰関数定理の主張が成り立つことを確かめよ．

問題 9 $\mathbb{R}^N$ の部分集合 A で定義された関数 $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ が C^∞ 級であるとは，任意の $a \in A$ に対して，a の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^N$ と C^∞ 級関数 $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^m$ が存在して $\tilde{f}|_{A \cap U} = f|_{A \cap U}$ が成り立つことである．次を示せ．

(1) $A \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^m$ を部分集合とする．$f\colon A \to \mathbb{R}^m$, $g\colon B \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級関数で，$f(A) \subset B$ を満たすとする．このとき $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}^n$ は C^∞ 級関数である．

(2) 多様体のパラメータ付け $f\colon V \to M \cap U$ の逆写像 $f^{-1}\colon M \cap U \to V$ は C^∞ 級である．

(3) パラメータ付け $f_1\colon V_1 \to M$, $f_2\colon V_2 \to M$ が与えられたとし，$D = f_1(V_1) \cap f_2(V_2)$ は非空とする．座標変換 $f_1^{-1} \circ f_2\colon f_1^{-1}(D) \to f_2^{-1}(D)$ は C^∞ 級である．

幾何学入門演習　No.9 解答例

問題 1 $M \subset \mathbb{R}^N$ を定義 I の意味での N 次元多様体とする．このとき各点 $p \in M$ に対してパラメータ付け $f\colon V \to M$, $p \in f(V)$ が存在する．ここで V は $\mathbb{R}^N$ の開集合であり，$d_p f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ は単射である．従って $d_p f$ は同型であり，逆関数定理から p の開近傍 $V' \subset V$ が存在して $f(V')$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合であり，$f|_{V'}\colon V' \to f(V')$ は微分同相写像．特に，p を含む $\mathbb{R}^N$ の開集合 $f(V')$ で M に含まれるものが存在する．p は M の任意の点であるから，M は開集合である．

逆に $M \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とする．このとき，$V = M$ とし $\mathrm{id}\colon V \to M$ をパラメータ付けとすることで M は定義 I の多様体の条件を満たす.

問題 2 与えられた写像 $f\colon V \to S^2$ がパラメータ付けの条件を満たすことを示そう．まず $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$ とおく．このとき $f(V) \subset S^2 \cap U$ であることは明らか．$f\colon V \to S^2 \cap U$ が同相写像であることを示すため，逆写像 $g\colon S^2 \cap U \to V$ を

$$g(x, y, z) = (y, z)$$

と定める．g は明らかに連続であり，$f \circ g = \mathrm{id}_{S^2 \cap U}$, $g \circ f = \mathrm{id}_V$ は容易に確かめられる．最後に f の微分が単射であることを示そう．f の Jacobi 行列は

$$(Jf)_{(y,z)} = \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形をしており，ランクは 2．従って $d_{(y,z)} f$ は単射である.

問題 3 立体射影で定義されるパラメータ付け $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ は

$$f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 1\}$ とおくと，U は $\mathbb{R}^3$ の開集合で f の像は U に含まれる．$f\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \cap U$ が同相写像であることを示すため，逆写像 $g\colon S^2 \cap U \to \mathbb{R}^2$ を次で定義する．

$$g(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right)$$

f, g は明らかに連続であり，$f \circ g = \mathrm{id}_{S^2 \cap U}$, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ を満たしている．最後に f の微分が単射であることを示す．写像 $g\colon S^2 \cap U \to \mathbb{R}^2$ は（同じ式で定義することにより）C^∞ 級写像 $\tilde{g}\colon U \to \mathbb{R}^2$ に拡張される．このとき $\tilde{g} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ である．Chain rule から $d_{f(x,y)} \tilde{g} \circ d_{(x,y)} f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$．従って $d_{(x,y)} f$ は単射である.

別解: f のヤコビ行列を直接計算して

$$Jf_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{-2x^2+2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} & \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\ \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} & \frac{2x^2-2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} \\ \frac{4x}{(x^2+y^2+1)^2} & \frac{4y}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

これから $\mathrm{rank}(Jf_{(x,y)}) = 2$ を示してもよい.

問題 4 点 $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ をとる．$x_0 > 0$ と仮定する．点 p の近傍 $U = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 < 1, x > 0\}$ を考える．C^∞ 級写像 $\phi\colon U \to \mathbb{R}^3$ を

$$\phi(x, y, z) = (y, z, x - \sqrt{1 - y^2 - z^2})$$

と定める．ϕ の像は $W = \{(y, z, x) \mid y^2 + z^2 < 1, -\sqrt{1 - y^2 - z^2} < x\}$ で与えられる開集合であり，$\phi\colon U \to W$ は微分同相写像．(実際，逆写像は $\phi^{-1}(y, z, x) = (x + \sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$ で与えられこれは明らかに C^∞ 級である．) このとき，

$$\phi(S^2 \cap U) = \{(y, z, x) \in W \mid x = 0\}$$

である．

以上により $x_0 > 0$ の時は定義 II を満たす U, ϕ をとることができた．x_0, y_0, z_0 のうち少なくとも一つはゼロでないことから，$x_0 > 0$, $x_0 < 0$, $y_0 > 0$, $y_0 < 0$, $z_0 > 0$, $z_0 < 0$ のいずれかの場合に分かれ，各々の場合に同様に定義 II をみたす U, ϕ をとることができる．

問題 5 $M \subset \mathbb{R}^N$ を定義 I の意味での多様体とし，M の相対位相に関する開集合 M' をとる．M' の各点 p に対して，M が多様体であることから，p を像に含むパラメータ付け $f\colon V \to M$ がとれる．ここで $f(V)$ は M の相対位相に関する開集合であり，$f\colon V \to f(V)$ は同相写像．$V' := f^{-1}(M')$ は V の開集合である．f を V' に制限して得られる写像 $f|_{V'}\colon V' \to f(V')$ は同相写像であり，その像 $f(V') = f(V) \cap M'$ は M' の開集合である．このとき $f|_{V'}$ は p を像に含む M' のパラメータ付けを与える．

問題 6 (前半) 反例がある．$V = \{t \in \mathbb{R} \mid t \neq 1\}$ とおき，C^∞ 級写像 $f\colon V \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (1 - t^2, t - t^3)$ を考える．f が単射であることは容易に分かる．(ここで V から $t = 1$ が抜かれていることを使う．$f(1) = f(-1)$ である．) $d_t f(v) = (-2tv, (1 - 3t^2)v)$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ について単射．しかし $f(V)$ は多様体でない．まず，$f(V)$ の各点は孤立していないから，$f(V)$ は 0 次元多様体ではない．また $f(V)$ は開集合でないから $f(V)$ は 2 次元多様体でもない．$f(V)$ が 1 次元多様体であるとすると，ある開区間 $(-\epsilon, \epsilon)$ からのパラメータ付け $g\colon (-\epsilon, \epsilon) \to f(V)$ であって，$g(0) = (0, 0)$ を満たすものが存在する．このとき $(0, 0)$ の開近傍 $B \subset R^2$ が存在して $g\colon (-\epsilon, \epsilon) \to f(V) \cap B$ は同相写像である．特に $(-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$ と $(f(V) \cap B) \setminus \{(0, 0)\}$ は同相．ところが，$(-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$ は 2 つの連結成分を持つが，$(f(V) \cap B) \setminus \{(0, 0)\}$ は少なくとも 3 つ以上の連結成分を持つため，これは矛盾である．

(後半) 多様体である．写像 $f\colon \{x > 0\} \to \mathbb{R}^2$ を $f(x) = (x, \sin(1/x))$ とおけばパラメータ付けの条件を満たしている．

問題 7 $(0, 0, \pm 1)$ からの立体射影で定義されるパラメータ付け $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ は

$$f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right),$$

$$g(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{-x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1}\right).$$

で与えられる．g の逆写像は

$$g^{-1}(u,v,w)=\left(\frac{u}{w+1},\frac{v}{w+1}\right).$$

であるから，

$$g^{-1}\circ f(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

これは $f^{-1}(f(\mathbb{R}^2)\cap g(\mathbb{R}^2))=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ から $g^{-1}(f(\mathbb{R}^2)\cap g(\mathbb{R}^2))=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ への C^∞ 級写像を定めている．

問題 8 (1) F の Jacobi 行列はブロック三角行列

$$JF=\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & & & 0 & & 0\\
 & \ddots & & & \ddots & \\
 & & 1 & 0 & & 0\\ \hline
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\\
 & \ddots & & & \ddots & \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}
\end{array}\right)$$

で与えられる．与えられた条件から点 (x^0,y^0) において右下のブロック $(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x^0,y^0))$ は正則行列であるから，この行列は正則行列である．

(2) $x\in U$ に対して $(x,z^0)\in D$ であるから，ある $(x',y')\in U'\times V$ が存在して $F(x',y')=(x,z^0)$．すなわち $x'=x$, $z^0=f(x',y')$ である．従って $x=x'\in U'$．すなわち $U\subset U'$．従って $U\times V\subset U'\times V\subset W$ が言える．

次に，$(x,y)\in U\times V$ に対して，

$$\begin{aligned}
f(x,y)=z^0 &\Longleftrightarrow F(x,y)=(x,z^0)\\
&\Longleftrightarrow (x,y)=(F|_{U'\times V})^{-1}(x,z^0)\\
&\Longleftrightarrow y=g(x)
\end{aligned}$$

であるから，

$$\{(x,y)\in U\times V\mid f(x,y)=z^0\}=\{(x,g(x))\mid x\in U\}$$

が分かる．

$\boxed{\text{採点基準}}$ (1) 5 点 (2) 5 点で計 10 点．(1) については部分点はなし．(2) について，$U\times V\subset W$ を示すので 1 点，残りは 4 点とする．$U\times V\subset W$ については（もちろん示すべきだが）言及しているだけでも点は与える．残りの 4 点部分についても，多少ミスがあっても一番大事な部分が分かっていれば点数を与える．

問題 9 (1) $a\in A$ をとり，$b=f(a)\in B$ とする．条件から，b の開近傍 $V\subset\mathbb{R}^m$ と C^∞ 級関数 $\tilde{g}\colon V\to\mathbb{R}^n$ が存在して $g|_{V\cap B}=\tilde{g}|_{V\cap B}$．また a の開近傍 $U\subset\mathbb{R}^N$ と C^∞

級関数 $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^m$ が存在して $f_{U\cap A} = \tilde{f}|_{U\cap A}$．$W = \tilde{f}^{-1}(V) \cap U$ とおくと，W は a の開近傍であり，$\tilde{f}(W) \subset V$ を満たす．従って $\tilde{g} \circ (\tilde{f}|_W)\colon W \to \mathbb{R}^m$ は W 上の C^∞ 級関数である．$W \cap A \subset U \cap A$，$\tilde{f}(W \cap A) \subset V \cap B$ に注意すると，

$$g \circ f|_{W\cap A} = g \circ \tilde{f}|_{W\cap A} = \tilde{g} \circ \tilde{f}|_{W\cap A} = (\tilde{g} \circ (\tilde{f}|_W))|_{W\cap A}$$

従って $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}^n$ は C^∞ 級関数である．

(2) $f\colon V \to M$ をパラメータ付けとする．$x_0 \in V$ をとり $p = f(x_0)$ とする．仮定から $d_{x_0}f$ は単射であるから，授業中に示した定理より，x_0 の開近傍 $V' \subset V$ および p の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^N$, 微分同相写像 $\phi\colon U \to W \subset \mathbb{R}^N$ が存在して，$f(V') \subset U$ であり，$\phi(f(x_1, \ldots, x_m)) = (x_1, \ldots, x_m, 0 \ldots, 0)$ となる．$\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ を $\pi(x_1, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, x_m)$ と定める．$y \in f(V')$ に対して，$(x_1, \ldots, x_m) = f^{-1}(y) \in V'$ とおくと，

$$\phi(y) = \phi(f(x_1, \ldots, x_m)) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

従って

$$f^{-1}(y) = (x_1, \ldots, x_m) = \pi(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = \pi(\phi(y))$$

となる．$f(V')$ は M の開集合であるから，$\mathbb{R}^N$ のある開集合 U' を用いて $f(V') = M \cap U'$ と書くことができる．必要なら U' を $U \cap U'$ で置き換えて，$U' \subset U$ と仮定してよい．このとき，$\pi \circ \phi$ は U' 上で定義された C^∞ 級関数であって，$f^{-1}|_{M\cap U'} = \pi \circ \phi|_{M\cap U'}$ である．従って f^{-1} は C^∞ 級関数.

(3) $f_2|_{f_2^{-1}(D)}\colon f_2^{-1}(D) \to D$ および $f_1^{-1}\colon f_1(V_1) \to V_1$ は C^∞ 級関数であるから，その合成 $f_1^{-1} \circ f_2|_{f_2^{-1}(D)}$ は C^∞ 級である．

幾何学入門演習　No.10　(2022 年 12 月 14 日)[1]

　今日の授業ではユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ に埋め込まれた多様体の 3 番目の定義を与え，以前の定義 I, II と同値であることを示した．

(陰関数による) 定義 III　$\mathbb{R}^N$ の部分集合 M が$\underline{m \text{ 次元 } C^\infty \text{ 級多様体}}$であるとは，任意の点 $p \in M$ に対して p の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^N$ および C^∞ 級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}^{N-m}$ が存在して，$M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ かつ $d_pf\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m}$ が全射となること．

問題 1 次のユークリッド空間の部分集合は多様体かどうか判定せよ．

(1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y + 1/(xy) = 1\}$.

(2) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1, xz + yw = 0\}$.

(3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2(1 - x)\}$.

問題 2 $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級関数とする．ある点 $p \in f^{-1}(0)$ において $d_pf\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ が全射でないが，$f^{-1}(0)$ は $N - n$ 次元多様体であるような例を与えよ．

問題 3 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ は C^∞ 級多様体ではないことを示せ．

問題 4 $U \subset \mathbb{R}^m$ を開集合，$f\colon U \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級関数とする．f のグラフ $\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid x \in U\}$ は定義 I, II, III の意味での多様体であることを各々確かめよ．

問題 5 $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xy = zw, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ とおく．M が C^∞ 級多様体であることを示せ．

問題 6 (★) 問題 5 における M は $S^1 \times S^1$ と同相であることを示せ．

問題 7 定義 III における多様体はハウスドルフであり，第 2 可算公理を満たす（可算な開基をもつ）ことを示せ.（これらの条件は，幾何学 I で学ぶ抽象的な多様体について課される条件である.）

問題 8 多様体 M の連結成分は M の相対位相に関して開かつ閉であることを示せ．特に連結成分は多様体である．(演習問題 No.9 の問題 5 参照）

問題 9 多様体が連結であれば弧状連結であることを示せ．

問題 10 $M_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ を多様体とするとき，$M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ も多様体であることを示せ．

問題 11 $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ を各々開集合とし，$f\colon U \to V$ を C^∞ 級写像とする．また $n \geq m$ とする．もしある点 $p \in U$ において $d_pf\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が全射であれば，p の開近傍 $U' \subset U$ および U' と $\mathbb{R}^n$ の開集合 W の間の微分同相写像 $\phi\colon U' \to W \subset \mathbb{R}^n$ が存在して，$f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ が全ての $(x_1, \dots, x_n) \in W$ について成立することを示せ．

---

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的.

問題 12 (レポート問題 2022 年 12 月 20 日 17:00 締め切り) $\mathbb{R}^4$ の部分集合 M を $M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^3+y^3+z^3+w^3 = 0, x^2+y^2+z^2+w^2 = 1\}$ とおく.

(1) M は C^∞ 級多様体であることを示せ.

(2) 射影 $\pi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $\pi(x,y,z,w) = (x,y)$ と定める．点 $p = (0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \in M$ の (M の相対位相に関する) ある開近傍 $U \subset M$ 上で $\pi|_U$ は座標となることを示せ．つまり，次が成り立つことを示せ.（ヒント：陰関数定理を使う.）

(a) $V := \pi(U)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合.

(b) $\pi|_U\colon U \to V$ は同相写像.

(c) $(\pi|_U)^{-1}\colon V \to U \subset M$ は（定義 I の意味で[2]）点 p の周りのパラメータ付けを与える.

問題 13 (⋆) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid xy+zw = 0\}$ は C^∞ 級多様体ではないことを示せ. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$ はどうか.

問題 14 (⋆) $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とし，任意の点 $x \in \mathbb{R}^N$ に対して d_xf のランクがある一定の値 r に等しいとする．このとき，$f^{-1}(0)$ は $N-r$ 次元多様体であることを示せ.

問題 15 $M_n(\mathbb{R})$ を実数係数 n 次正方行列全体のなすベクトル空間とする．直交群 $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = I_n\}$ は C^∞ 級多様体であることを示し，その次元を求めよ.

問題 16 (⋆) n 次正方行列 B が正則行列であり，n 個の相異なる固有値を持つとする．このとき，$M = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = B\}$ は C^∞ 級多様体であることを示せ.

問題 17 (⋆) $0 \le r \le n$ とする．$\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rank} A = r\}$ は C^∞ 級多様体であることを示し，その次元を求めよ.

[2] 演習 No.9 に与えた定義を参照

幾何学入門演習　No.10 解答例

問題 1 (1) 与えられた集合は空集合である．実際，任意の $a, b, c > 0$ に対して成り立つ不等式 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ を用いると，$x, y > 0$ に対して $x+y+1/(xy) \geq 3$ ゆえ，$x+y+1/(xy) = 1$ となることはない．空集合は多様体の定義を自明に満たしている．

(2) $M_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2 = 1, xz+yw = 0\}$ とする．$f_2 \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f_2(x,y,z,w) = (x^2+y^2-1, xz+yw)$ とすると，$f_2^{-1}(0,0) = M_2$ で，Jacobi 行列 $(Jf_2)_{(x,y,z,w)}$ は

$$(Jf)_{(x,y,z,w)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ z & w & x & y \end{pmatrix}.$$

$(x,y,z,w) \in M_2$ ならば $x = y = 0$ となることはないので、この行列のランクは 2 である．よって M_2 は 2 次元 C^∞ 級多様体である．

(3) $f_3(x,y) = y^2 - x^2(1-x)$ とおくと，与えられた部分集合は $M_3 = \{(x,y) \mid f_3(x,y) = 0\}$ と表される．f_3 のヤコビ行列は

$$Jf_3 = (-2x+3x^2, 2y)$$

となり，ヤコビ行列が消えている M_3 の点は $x = y = 0$ のみであることが容易にわかる．従って原点を除くと M_3 は多様体になっている．一方，原点の近くで M_3 は $y = x\sqrt{1-x}$ と $y = -x\sqrt{1-x}$ のグラフの和となっており，多様体とはならない．正確な証明は次の通り．もし 1 次元多様体になったとすると，原点の開近傍 U および C^∞ 級関数 $F \colon U \to \mathbb{R}$ であって $U \cap M_3 = \{(x,y) \in U \mid F(x,y) = 0\}$ かつ $d_{(0,0)}F$ が全射，となるものが存在する．十分小さい x について $(x, \pm x\sqrt{1-x}) \in U \cap M_3$ であるから，$F(x, \pm x\sqrt{1-x}) = 0$.　これを x で微分して $x = 0$ とおくと，

$$F_x(0,0) + F_y(0,0) = 0, \quad F_x(0,0) - F_y(0,0) = 0$$

が成り立つ．これは $F_x(0,0) = F_y(0,0)$ を意味しており，$d_{(0,0)}F$ が全射であることに矛盾する．また M_3 の各点は孤立していないから，M_3 は 0 次元多様体にはならず，M_3 は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではないから 2 次元多様体にもならない．

注 M_3 は演習問題 No.9 の問題 6 の解答例でも現れている．この解答例では M_3 を $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (1-t^2, t-t^3)$ の像として与えた．

問題 2 $N = n = 1$ とし，$f(x) = x^2$ とする．このとき，$f^{-1}(0) = \{0\}$ は 0 次元多様体であるが，$d_0 f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 0 写像である．

問題 3 $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ とおく．M が 1 次元多様体でないことを示す．

位相的な証明：もし M が 1 次元多様体であったとすると，$(0,0)$ の周りのパラメータ付け $f \colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ がとれる．ここで $f(0) = (0,0)$ としてよい．$A := f(-\epsilon, \epsilon)$ は M の開集合であって，$f \colon (-\epsilon, \epsilon) \to A$ は同相写像である．従って $(-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$ と $A \setminus \{(0,0)\}$ は同相である．十分小さい $\delta > 0$ に対して，A は 4 点 $(\delta, 0)$, $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$,

$(0,-\delta)$ を含み，従って少なくとも 4 つの連結成分を持つ．ところが $(\epsilon,\epsilon)\setminus\{0\}$ は 2 つしか連結成分を持たない．これは矛盾である．

微分幾何的な証明：もし M が 1 次元多様体であったとすると，$(0,0)$ の開近傍 U と U 上の C^∞ 級関数 $f\colon U\to\mathbb{R}$ が存在して $M\cap U=\{(x,y)\in U\mid f(x,y)=0\}$ かつ $d_{(0,0)}f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は全射，となる．十分小さい x に対して，$f(x,0)=f(0,x)=0$ となるから，x で微分して $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ となる．これは $d_{(0,0)}f$ が全射であることに矛盾する．

問題 4 $M=\{(x,f(x))\mid x\in U\}\subset\mathbb{R}^{m+n}$ とおく．

定義 I の意味で多様体であること:パラメータ付けを $g\colon U\to\mathbb{R}^{m+n}$, $g(x)=(x,f(x))$ で定める．g はパラメータ付けの条件を満たしている．まず，g の像は M 全体であるから，M の開集合である．また $g\colon U\to M$ の逆写像は射影 $(x,y)\mapsto x$ で与えられるから連続であり，$g\colon U\to M$ は同相写像．さらに，g の微分はヤコビ行列

$$(Jg)_x=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ * & & * \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix}$$

で表現されるため，単射である．

定義 II の意味で多様体であること：写像 $\phi\colon U\times\mathbb{R}^n\to U\times\mathbb{R}^n$ を次で定義する．$\phi(x,y)=(x,y-g(x))$．これは C^∞ 級である．逆写像は $\phi^{-1}(x,y)=(x,y+g(x))$ で与えられ，これも C^∞ 級である．従って ϕ は微分同相写像．ここで $M\subset U\times\mathbb{R}^n$ であって，$\phi(M)=\{(x_1,\ldots,x_{m+n})\in U\times\mathbb{R}^n\mid x_{m+1}=\cdots=x_{m+n}=0\}$ であるから，M は定義 II の意味で多様体である．

定義 III の意味で多様体であること：写像 $F\colon\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^n$ を $F(x,y)=y-g(x)$ と定める．明らかに $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\mid F(x,y)=0\}$ であり，M の各点 (x,y) において F のヤコビ行列

$$(JF)_{(x,y)}=\begin{pmatrix} * & & * & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ * & & * & & & 1 \end{pmatrix}$$

のランクは n であるから，$d_{(x,y)}F\colon\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^n$ は全射である．

問題 5 $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ を $f_2(x,y,z,w)=(xy-zw,x^2+y^2+z^2+w^2-1)$ とすると，$f^{-1}(0,0)=M$ で，Jacobi 行列 $(Jf)_{(x,y,z,w)}$ は

$$(Jf)_{(x,y,z,w)}=\begin{pmatrix} y & x & -w & -z \\ 2x & 2y & 2z & 2w \end{pmatrix}$$

$(x,y,z,w) \in M$ のとき，この行列のランクは常に 2 である．実際，$x^2+y^2+z^2+w^2=1$ より，2 番目の行ベクトル $2(x,y,z,w) \neq 0$ である．もしランクが 1 以下とすると，$(y,x,-w,-z) = \lambda(x,y,z,w)$ を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する．このとき，$1 = x^2+y^2+z^2+w^2 = \lambda^2(y^2+x^2+(-w)^2+(-z)^2) = \lambda^2$ より，$\lambda = \pm 1$．$\lambda = 1$ ならば $x=y$, $z=-w$ であり，$xy-zw=0$ より $x^2+z^2=0$．従って $x=z=0$ であり，$x=y=z=w=0$．これは $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ を満たさない．$\lambda=-1$ のときも同様である．よって M は 2 次元 C^∞ 級多様体である．

問題 6 $(x,y,z,w) \in M$ とする．条件 $xy=zw, x^2+y^2+z^2+w^2=1$ は $(x+y)^2+(z-w)^2=(x-y)^2+(z+w)^2=1$ と同値である．そこで $\varphi\colon M \to S^1 \times S^1$ を

$$\varphi(x,y,z,w) = (x+y, z-w, x-y, z+w)$$

とする．ただし $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ と考えた．φ は明らかに連続である．逆写像 $\psi\colon S^1 \times S^1 \to M$ は

$$\psi(x,y,z,w) = \left(\frac{x+z}{2}, \frac{x-z}{2}, \frac{y+w}{2}, \frac{y-w}{2}\right)$$

で与えられることは容易に検証できる．従って φ は同相写像である．

問題 7 M はハウスドルフ空間 $\mathbb{R}^N$ の部分位相空間であるから，ハウスドルフである（演習 No.1 の問題 2 参照）．また $\mathbb{R}^N$ は第 2 可算公理を満たす．可算な開基は例えば,

$$\mathcal{B} = \{B_{1/n}(a) \mid a \in \mathbb{Q}^N, n \in \mathbb{N}\}$$

で与えられる．(ここで，$B_{1/n}(a)$ は a 中心の半径 $1/n$ の開球体.）従ってその部分位相空間である M も第 2 可算公理を満たす．実際，M の任意の開集合は $M \cap U$, $U \subset \mathbb{R}^N$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合，の形に書くことができるが，U は $\mathcal{B}$ の元の和集合としてあらわされる．従って M の任意の開集合は

$$\mathcal{B}_M = \{B \cap M \mid B \in \mathcal{B}\}$$

に属する開集合の和集合として表される．つまり $\mathcal{B}_M$ は M の可算開基をなし，M は第 2 可算公理を満たす.

問題 8 一般に，位相空間の連結成分（包含関係について極大な連結部分集合）は常に閉である.（連結成分 A に対して A の閉包 $\overline{A}$ も連結であることを示せばよい．詳細は略.）そこで多様体 M に対して M の連結成分 A が開集合であることを示そう．$a \in A$ をとるとき，多様体の定義 I によって，a の周りのパラメータ付け $f\colon V \to M$ が存在する．ここで $V \subset \mathbb{R}^m$ は開集合で，$f(V)$ は a の（M における）開近傍，また $f\colon V \to f(V)$ は同相写像である．$f(x_0)=a$ とする．必要なら V を x_0 を中心とする十分小さい開球体に置き換えて V は連結としてよい．この時 $f(V)$ は a を含む M の連結開集合である．従って $f(V) \subset A$．$a \in A$ は任意だから A は開集合であることが分かる．

問題 9 $x_0 \in M$ をとり，$A = \{x \in M \mid x_0$ と x は道で結べる $\}$ とおく．A が開かつ閉であることを示せば，(A は空集合ではないので) 連結性から $M = A$ であることが分かり，M は弧状連結であることが従う．

$a \in A$ に対して，前問と同様に，a の周りのパラメータ付け $f\colon V \to M$, $a \in f(V)$ であって，V は $\mathbb{R}^m$ の開球体となるものをとることができる．V は弧状連結より $f(V)$ も弧状連結．従って $f(V) \subset A$ である．a は任意であったから A は開集合．

$a \notin A$ に対しても同様に a の周りのパラメータ付け $f\colon V \to M$, $a \in f(V)$ であって，V は $\mathbb{R}^m$ の開球体となるものをとることができる．このときも $f(V)$ は弧状連結であって，$f(V) \cap A = \emptyset$.（もし交われば，x_0 と a が道で結べることになり矛盾する.）従って A の補集合は開集合.

問題 10 $M_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ を多様体とする．任意の $M_1 \times M_2$ の点 $p = (p_1, p_2)$ をとる．定義 III から点 $p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$ に対して p_1 の開近傍 $U_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$，$p_2$ の開近傍 $U_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ および C^∞ 級関数 $f_1\colon U_1 \to \mathbb{R}^{m_1-n_1}$, $f_2\colon U_2 \to \mathbb{R}^{m_2-n_2}$ が存在して，

$$M_1 \cap U_1 = \{x \in U_1 \mid f_1(x) = 0\}, \quad M_2 \cap U_2 = \{x \in U_2 \mid f_2(x) = 0\}$$
$$d_{p_1} f_1\colon \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_1-n_1},\ d_{p_2} f_2\colon \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{m_2-n_2} \text{ は全射}$$

となる．$U := U_1 \times U_2$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^{m_1+m_2-n_1-n_2}$ を $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ と定義すると，$d_{(p_1,p_2)} f\colon \mathbb{R}^{m_1+m_2} \to \mathbb{R}^{m_1+m_2-n_1-n_2}$ は

$$d_{(p_1,p_2)} f(u, v) = (d_{p_1}(u), d_{p_2}(v))$$

で与えられるため全射である．また明らかに

$$(M_1 \times M_2) \cap (U_1 \times U_2) = \{(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \mid f(x_1, x_2) = 0\}$$

よって $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{m_1+m_2}$ は多様体である．

問題 11 $d_p f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が全射であるため，ヤコビ行列 $(Jf)_p$ のランクは m である．$(Jf)_p$ の m 個の行ベクトルは一次独立であるから，それに $n - m$ 個の横ベクトル $v_1, \ldots, v_{n-m} \in \mathbb{R}^n$ を付け加えて $\mathbb{R}^n$ の基底とすることができる．C^∞ 級写像 $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ を

$$\phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x), v_1 \cdot x, \ldots, v_n \cdot x)$$

と定義する．ただし $v_i \cdot x$ は v_i と x の標準内積である．このとき，ϕ の点 p でのヤコビ行列

$$(J\phi)_p = \begin{pmatrix} - & (Jf)_p & - \\ \hline - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_{n-m} & - \end{pmatrix}$$

は正則行列である．従って，逆関数定義より p の開近傍 $U' \subset U$ および $\mathbb{R}^n$ の開集合 W が存在して $F(U') = W$ であり，$\phi\colon U' \to W$ は微分同相写像である．このとき，$(x_1, \ldots, x_n) \in W$ に対して $y = \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n)$ とおけば，

$$x_1 = f_1(y), \ldots, x_m = f_m(y)$$

であるから

$$f \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$$

が成立する．

問題 12 (1) $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $F(x,y,z,w) = (x^3+y^3+z^3+w^3, x^2+y^2+z^2+w^2-1)$ とおく．このとき $M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid F(x,y,z,w) = 0\}$ である．M の各点 $p = (x,y,z,w)$ において d_pF が全射，すなわち，Jacobi 行列 $(JF)_p$ のランクが 2 であることを示せばよい．

$$(JF)_p = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 & 3w^2 \\ 2x & 2y & 2z & 2w \end{pmatrix}$$

である．$x^2+y^2+z^2+w^2 = 1$ ゆえ，二つの行ベクトルはどちらもゼロではない．従ってもしランクが 2 でないとすると，

$$(x,y,z,w) = \lambda(x^2, y^2, z^2, w^2)$$

を満たす実数 $\lambda \neq 0$ が存在する．ここで

$$0 = x^3+y^3+z^3+w^3 = \lambda^3(x^6+y^6+z^6+w^6)$$

$\lambda \neq 0$ より，$x^6+y^6+z^6+w^6 = 0$．従って $x = y = z = w = 0$．これは $x^2+y^2+z^2+w^2 = 1$ に矛盾する．従って $(JF)_p$ のランクは 2 であり，M は多様体である．

(2) 点 $p = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ において F のヤコビ行列は

$$(JF)_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

特に後半の 2 列からなる部分行列

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(p) & \frac{\partial F_1}{\partial w}(p) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(p) & \frac{\partial F_2}{\partial w}(p) \end{pmatrix}$$

は正則行列である．陰関数定理により，$(0,0)$ の開近傍 $V \subset \mathbb{R}^2$ および $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ の開近傍 $W \subset \mathbb{R}^2$，C^∞ 級写像 $g\colon V \to W$ が存在して，

$$\{(v,w) \in V \times W \mid F(v,w) = 0\} = \{(v, g(v)) \mid v \in V\}$$

M の開集合を $U := M \cap (V \times W)$ とおく．上の等式より

$$U = \{(v, g(v)) \mid v \in V\}$$

であり，$\pi(U)=V$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合．さらに，$\pi|_U\colon U\to V$ の逆写像は

$$f(v):=(v,g(v))$$

で与えられる．この写像 f は明らかに連続であるから，$\pi|_U\colon U\to V$ は同相写像である．最後に，写像 $f\colon V\to U\subset\mathbb{R}^4$ は C^∞ 級であり，その Jacobi 行列は

$$(Jf)_v=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\ *&*\\ *&*\end{pmatrix}$$

の形をしている．従って d_vf は全ての $v\in V$ について単射である．

$\boxed{\text{採点基準}}$ (1) 4 点 (2) (a) 2 点 (b) 2 点 (c) 2 点．これ以上細かい部分点はつけない．軽微なミスについては減点しない（TA の方へ：特に (1) は細かい間違いがたくさんあると思いますが，ある程度は甘く見てください）．(2-a): 正しく設定ができていたらそうなるはず．(2-b): $\pi|_U\colon U\to V$ の逆写像が連続であることをチェックしているか．(2-c): $(\pi|_U)^{-1}$ の微分が単射であることをチェックしているか．

問題 13 $X=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\mid xy+zw=0\}$ とおく．もし X が C^∞ 級多様体であれば，原点の開近傍 $U\subset\mathbb{R}^4$ と関数 $f\colon U\to\mathbb{R}^l$ が存在して $U\cap X=\{x\mid f(x)=0\}$ かつ $d_0f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^l$ は全射となる．ここで全ての $t\in\mathbb{R}$ について $(t,0,0,0),(0,t,0,0),(0,0,t,0),(0,0,0,t)\in X$ より，十分 0 に近い実数 t に対して

$$f(t,0,0,0)=f(0,t,0,0)=f(0,0,t,0)=f(0,0,0,t)=0$$

従って t で微分することにより，

$$f_x(0,0,0,0)=f_y(0,0,0,0)=f_z(0,0,0,0)=f_w(0,0,0,0)=0$$

が分かる．d_0f は全射であるから，$l=0$ であり，$X\cap U=U$ でなければならない．十分小さい $\epsilon>0$ に対して $(\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\in U$ であるが，$(\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\notin X$ であるため矛盾．

次に, $Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2=y^3\}$ とおく．もし Y が C^∞ 級多様体であれば，原点の近傍 V と C^∞ 級関数 $g\colon V\to\mathbb{R}^m$ が存在して $V\cap Y=\{(x,y)\mid g(x,y)=0\}$ かつ $d_0g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^m$ は全射，となる．任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $(t^3,t^2)\in Y$ であるから，十分 0 に近い実数 t に対して

$$g(t^3,t^2)=0$$

これを t で微分して

$$3t^2g_x(t^3,t^2)+2tg_y(t^3,t^2)=0$$

$t\neq0$ のとき，$3tg_x(t^3,t^2)+2g_y(t^3,t^2)=0$．$t\to0$ として $g_y(0,0)=0$ が分かる．もし，さらに $g_x(0,0)=0$ であれば，d_0g は全射ゆえ，$m=0$ でなければならない．このとき $V\cap Y=V$ であるが，これは任意の $\epsilon>0$ に対して $(0,-\epsilon)\notin Y$ に矛盾する．従っ

て $g_x(0,0) \neq 0$．陰関数定理より，0 の開近傍 $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}$ と C^∞ 級関数 $h\colon W_2 \to W_1$ が存在して $W_1 \times W_2 \subset V$ であり，

$$\{(x,y) \in W_1 \times W_2 \mid g(x,y) = 0\} = \{(h(y), y) \mid y \in W_2\}$$

ここで左辺は $Y \cap (W_1 \times W_2)$ に等しい．十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $-\epsilon \in W_2$ であるから，$(h(-\epsilon), -\epsilon) \in Y$ となる．一方 Y の点 (x,y) は $y^3 = x^2 \geq 0$ ゆえ，$y \geq 0$ を満たす．$(h(-\epsilon), -\epsilon)$ の y 成分は負であり，これは矛盾である．

問題 14 $p \in f^{-1}(0)$ をとる．$d_pf\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ のランクが r であるから，必要なら $\mathbb{R}^N$ の座標 $(x_1, \ldots, x_N)$ および $f = (f_1, \ldots, f_n)$ の順番を入れ替えて，f の最初の r 個の成分と最初の r 個の座標 $(x_1, \ldots, x_r)$ に関する Jacobi 行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{1 \leq i,j \leq r}$$

のランクが r と仮定してよい．このとき，行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i,j \leq r}$$

は $x = p$ のある開近傍 U で正則である．(この行列の行列式は $x = p$ でゼロでなく，x の連続関数となるから．) ここで $F\colon U \to \mathbb{R}^r$ を

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x))$$

と定める．上の仮定から，任意の $x \in U$ に対して d_xF は全射である．従って

$$M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$$

は点 p を含む $N - r$ 次元多様体となる．$M \supset f^{-1}(0) \cap U$ であることは明らか．十分小さい p の開近傍 $U' \subset U$ に対して，$M \cap U' = f^{-1}(0) \cap U'$ であることを示せばよい．

M は多様体であるから，点 p の周りのパラメータ付け $g\colon V \to M$ が存在する．ここで $V \subset \mathbb{R}^{N-r}$ は 0 を中心とする開球体で，$g(0) = p$ と仮定してよい．$F \circ g = 0$ であるから，chain rule より $d_{g(x)}F \circ d_xg = 0$，つまり

$$\operatorname{Ker} d_{g(x)}F \supset \operatorname{Im} d_xg, \quad x \in V$$

また明らかに

$$\operatorname{Ker} d_{g(x)}F \supset \operatorname{Ker} d_{g(x)}f$$

である．$\operatorname{rank} d_{g(x)}f = \operatorname{rank} d_{g(x)}F = r$ であるから，$\operatorname{Ker} d_{g(x)}F$ と $\operatorname{Ker} d_{g(x)}f$ の次元は $N - r$ に等しい．従って

$$\operatorname{Ker} d_{g(x)}f = \operatorname{Ker} d_{g(x)}F \supset \operatorname{Im} d_xg$$

従って $d_x(f\circ g)=d_{g(x)}f\circ d_xg=0$．$V$ の連結性から $f\circ g$ は V 上の定数関数であり，$f(g(0))=f(p)=0$ であるから，V 上で $f\circ g=0$ である．従って $g(V)\subset f^{-1}(0)$．パラメータ付けの性質から $\mathbb{R}^N$ の開集合 $U'\subset U$ を用いて $g(V)=M\cap U'$ の形に書ける．ここで，

$$M\cap U'=g(V)\subset f^{-1}(0)\cap U'$$

逆向きの包含関係は明らかであるから，$M\cap U'=f^{-1}(0)\cap U'$．これが示すべきことであった．

問題 15 $S_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid {}^tA=A\}$ を n 次対称行列全体の集合とする．これは $n(n+1)/2$ 次元の実ベクトル空間である．関数 $F\colon M_n(\mathbb{R})\to S_n(\mathbb{R})$, $F(A)={}^tA\cdot A$ を考える．F は C^∞ 級写像で，その微分は

$$\begin{aligned}
d_AF(V)&=\lim_{t\to 0}\frac{{}^t(A+tV)\cdot(A+tV)-{}^tA\cdot A}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}({}^tA\cdot V+{}^tV\cdot A+t{}^tV\cdot V)\\
&={}^tA\cdot V+{}^tV\cdot A
\end{aligned}$$

で与えられる．ここで $V\in M_n(\mathbb{R})$．$A\in O(n,\mathbb{R})$ に対して微分 $d_AF\colon M_n(\mathbb{R})\to S_n(\mathbb{R})$ が全射であることを示そう．任意の対称行列 Y に対して，$V=\frac{1}{2}{}^tA^{-1}Y$ とおく．このとき

$$d_AF(V)={}^tA\cdot\frac{1}{2}{}^tA^{-1}Y+\frac{1}{2}{}^tYA^{-1}\cdot A=\frac{1}{2}Y+\frac{1}{2}{}^tY=Y$$

である．従って d_AF は全射であり，

$$O(n,\mathbb{R})=F^{-1}(I_n)$$

は $n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ 次元の多様体である．

問題 16 (略解) 演習 No.8 の問題 8 の解答と同様の方針により，$F\colon M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ を $F(A)=A^2$ と定めるとき，$d_AF(V)=AV+VA$ であり，また $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ を A の（重複度[1]を込めた）固有値とするとき，

$$\det d_AF=\prod_{i=1}^{n}(2\lambda_i)\cdot\prod_{i<j}(\lambda_i+\lambda_j)^2$$

であることが分かる．$A^2=B$ とするとき，A の（重複度を込めた）固有値が $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ であれば，B の（重複度を込めた）固有値は $\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2$ となる．従って，もし B が n 個の互いに異なるゼロでない固有値を持つならば，$i\neq j$ に対して $\lambda_i+\lambda_j\neq 0$ であり，全ての i について $\lambda_i\neq 0$ であるから， $\det d_AF\neq 0$ である．従って $\{A\in M_n(B)\mid A^2=B\}$ は 0 次元多様体（相対位相について離散位相空間となる部分集合）である．

[1] ここでの重複度は固有方程式における根の重複度を意味する

問題 17 $I=(i_1,\dots,i_r)$, $J=(j_1,\dots,j_r)$ を $1\le i_1<\cdots<i_r\le n$, $1\le j_1<\cdots<j_r\le n$ を満たす自然数列とする．このとき

$$U_{I,J}=\left\{A\in M_n(\mathbb{R})\;\middle|\;\begin{array}{l}A\text{ の }i_1,\dots,i_r\text{ 行，}j_1,\dots,j_r\text{ 列を}\\ \text{抜き出して得られる行列の行列式}\neq 0\end{array}\right\}$$

とおく．$U_{I,J}$ は明らかに $M_n(\mathbb{R})$ の開集合である．

$$M=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid \operatorname{rank}A=r\}$$

とおくとき，M の元はどれかの $U_{I,J}$ に属する．

$M\cap U_{I,J}$ のパラメータ付けを構成する．簡単のため $I=J=\{1,\dots,r\}$ とする．（それ以外の時も行・列の入れ替えにより同様に構成できる.）$M\cap U_{I,J}$ の元 A は

$$A=\begin{pmatrix}X & Y\\ BX & BY\end{pmatrix}$$

の形に書ける．ここで $X\in M_r(\mathbb{R})$ は r 次正則行列，$Y\in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$ は $(r,n-r)$ 行列，$B\in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ は $(n-r,r)$ 行列である．実際，$A\in U_{I,J}$ であるから，A から $1,\dots,r$ 行と $1,\dots,r$ 列を抜き出して得られる行列 X は正則である．また，A の $r+1$ 行から n 行までは 1 行から r 行までの一次結合として表されるから 1 行から r 行までの行列 (X,Y) に左から $(n-r,r)$ 行列 B を書けたものとして得られる．従って，$M\cap U_{I,J}$ のパラメータ付けが

$$f\colon GL_r(\mathbb{R})\times M_{r,n-r}(\mathbb{R})\times M_{n-r,r}(\mathbb{R})\to M\cap U_{I,J},\quad f(X,Y,B)=\begin{pmatrix}X & Y\\ BX & BY\end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで $V:=GL_r(\mathbb{R})\times M_{r,n-r}(\mathbb{R})\times M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ は $M_r(\mathbb{R})\times M_{r,n-r}(\mathbb{R})\times M_{n-r,r}(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{r^2+r(n-r)+(n-r)r}=\mathbb{R}^{r(2n-r)}$ の開部分集合である．f の逆写像は

$$f^{-1}\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & W\end{pmatrix}=(X,Y,ZX^{-1})$$

で与えられ，連続である．従って f は同相写像．f^{-1} は C^∞ 級写像 $g\colon U_{I,J}\to V$ の制限として得られていることに注意する．(g を f^{-1} と同じ式で定義すればよい．) $g\circ f=\mathrm{id}_V$ であることから，chain rule より $d_{f(x)}g\circ d_xf=\mathrm{id}$．従って d_xf は全ての $x\in V$ について単射．以上より $f\colon V\to M\cap U_{I,J}$ はパラメータ付けの条件を満たし，M は $r(2n-r)$ 次元多様体である．

幾何学入門演習　No.11　(2022年12月21日)[1]

今日の授業での重要な定義と命題を以下にまとめる．

定義　$M \subset \mathbb{R}^N$ を m 次元 C^∞ 級多様体．$p \in M$ に対して，p のまわりのパラメータ付け $f\colon V \to M$ をとる．ここで $V \subset \mathbb{R}^m$ は開集合で，$x_0 \in V$ が $f(x_0) = p$ を満たすとする．点 p での接空間 T_pM とは次で与えられる $\mathbb{R}^N$ の m 次元部分ベクトル空間である．

$$T_pM = \mathrm{Im}(d_{x_0}f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N)$$

命題　$M \subset \mathbb{R}^N$ を C^∞ 級多様体，$p \in M$ とする．p の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^N$ と U 上の C^∞ 級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}^{N-m}$ が存在して，$M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$, $d_pf\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m}$ は全射，となるとき，$T_pM = \mathrm{Ker}(d_pf\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m})$ である．

定義　$M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}, M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ を C^∞ 級多様体とする．写像 $F\colon M_1 \to M_2$ が点 $p \in M_1$ で C^∞ 級であるとは，p の周りのパラメータ付け $f\colon V \to M_1$（$V \subset \mathbb{R}^{m_1}$ は開集合）が存在して，$f(x_0) = p$ を満たす点 $x_0 \in V$ に対して合成写像 $F \circ f\colon V \to M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ が x_0 の近傍で C^∞ 級であること．（授業ではこの定義はパラメータ付けのとり方によらないことを示した.）

さらに $F\colon M_1 \to M_2$ が任意の点 $p \in M_1$ で C^∞ 級であるとき，F は C^∞ 級であるという．

定義　C^∞ 級写像 $F\colon M_1 \to M_2$ およびパラメータ付け $f_1\colon V_1 \to M_1$, $f_2\colon V_2 \to M_2$ が与えられたとする．このとき $f_2^{-1} \circ F \circ f_1\colon f_1^{-1}(F^{-1}(f_2(V_2))) \to V_2$ を F の座標表示という.（授業では F の座標表示は C^∞ 級であることを示した.）

問題 1 次の空間が多様体であることを示し，各点での接空間を求めよ．

(1) $X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \cos x + \cos y + \cos z = 0\}$.

(2) $X_2 = \{(y^3, xy^2, x^2y, x^3) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)\}$.

(3) $X_3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xyzw = 1, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 8\}$

問題 2 $M_n(\mathbb{R})$ を実数係数 n 次正方行列全体のなすベクトル空間とし，$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ とする．$GL_n(\mathbb{R})$ が多様体であることを示し，単位行列 $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ での接空間を求めよ．

問題 3 部分ベクトル空間 $V \subset \mathbb{R}^N$ は多様体であり，その任意の点での接空間は V と一致することを示せ．

問題 4 C^∞ 級関数 $F\colon \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$ および C^∞ 級多様体 $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ で $F(M_1) \subset M_2$ を満たすものが与えられたとする．このとき $F|_{M_1}\colon M_1 \to M_2$ は C^∞ 級写像であることを示せ．

---

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的.

問題 5 多様体の間の C^∞ 級写像は連続であることを示せ．

問題 6 写像 $F\colon S^2 \to \mathbb{R}^6$ を $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx)$ と定める．F の像 $M = F(S^2)$ は C^∞ 級多様体であることを示し，写像 $F\colon S^2 \to M$ は C^∞ 級写像であることを示せ．さらに点 $F(x,y,z) \in M$ での M の接空間を求めよ．

問題 7 問題 6 における M は $S^2/\sim$ と同相であることを示せ．ここで $\sim$ は S^2 上の同値関係で，$p \sim q \Leftrightarrow p = q$ または $p = -q$ である．

問題 8 直交群 $O(n,\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ の単位行列 $I_n \in O(n,\mathbb{R})$ での接空間を求めよ．(直交群が多様体であることは，演習問題 No.10 の問題 15 で示している．)

問題 9 任意の実 n 次正方行列 $V \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\det(I_n + tV) - 1}{t} = \mathrm{tr}(V)$$

を示せ．ここで I_n は単位行列.

問題 10 前問を用いて，$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ は多様体であることを示し，単位行列 $I_n \in SL(n,\mathbb{R})$ における接空間を求めよ．

問題 11 (レポート問題 2022 年 12 月 27 日 17:00 締め切り) $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[z]$ を複素数係数の多項式で，$n \geq 1, a_0 \neq 0$ とする．P を写像 $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ とみなす．$\pi_\pm\colon S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to \mathbb{C}$ を $(0,0,\pm 1)$ からの立体射影とする．つまり $\pi_\pm(x,y,z) = (x+iy)/(1 \mp z)$ と定める（複号同順）．ここで写像 $F_P\colon S^2 \to S^2$ を

$$F_P(x,y,z) = \begin{cases} (\pi_+^{-1} \circ P \circ \pi_+)(x,y,z) & (x,y,z) \neq (0,0,1) \text{ のとき} \\ (0,0,1) & (x,y,z) = (0,0,1) \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．F_P の $(0,0,1)$ の周りでの座標表示 $\pi_- \circ F_P \circ \pi_-^{-1}$ が

$$\{z \in \mathbb{C} \mid a_0 + a_1 \overline{z} + \cdots + a_n \overline{z}^n \neq 0\}$$

上で定義されることを確認し，$\pi_- \circ F_P \circ \pi_-^{-1}$ を具体的に計算せよ．

注：立体射影の逆写像 $\pi_+^{-1}, \pi_-^{-1}\colon \mathbb{C} \to S^2$ が S^2 のパラメータ付けを与えること（演習問題 No.9 の問題 3) とこの問題の計算により，$F_P\colon S^2 \to S^2$ は C^∞ 級写像であることが分かる．

問題 12 $i = 1,2,3$ について $M_i \subset \mathbb{R}^{N_i}$ を多様体とする. 写像 $F\colon M_1 \to M_2$, $G\colon M_2 \to M_3$ について，F は点 $p \in M_1$ で C^∞ 級であり，G は点 $q = F(p) \in M_2$ において C^∞ 級であるとする．このとき合成写像 $G \circ F\colon M_1 \to M_3$ は点 p において C^∞ 級であることを示せ.

問題 13 ($\star$) $M \subset \mathbb{R}^N$ を多様体とする. $TM = \{(p,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid p \in M, v \in T_pM\}$ は多様体であることを示せ．TM を接ベクトル束という．

問題 14 ($\star$) $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^N$ を多様体とする．任意の点 $p \in M_1 \cap M_2$ について $T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^N$ が成り立つとき，$M_1 \cap M_2$ は多様体であることを示せ．

問題 15 (★) $M = \{N \in M_n(\mathbb{R}) \mid N^{n-1} \neq 0, N^n = 0\}$ は多様体であることを示し，M に属する Jordan 標準形の行列 N_0（ただ一つある）での接空間を求めよ．

幾何学入門演習　No.11 解答例

問題 1 (1) $F(x,y,z) = \cos x + \cos y + \cos z$ とおくとき，$X_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\}$ である．多様体であることを示すには任意の $(x,y,z) \in X_1$ に対して $d_{(x,y,z)}F \neq 0$ を示せばよい．もし $d_{(x,y,z)}F = 0$ であれば，

$$(JF)_{(x,y,z)} = (-\sin x, -\sin y, -\sin z) = (0,0,0)$$

であるから，$x = n_1\pi, y = n_2\pi, z = n_3\pi$ を満たす $n_i \in \mathbb{Z}$ が存在する．このとき $F(x,y,z) = (-1)^{n_1} + (-1)^{n_2} + (-1)^{n_3}$ であり，これは奇数であるから 0 にはならない．従って $(x,y,z) \notin X_1$．以上より X_1 は多様体である．

$(x,y,z) \in X_1$ での接空間は $\mathrm{Ker}(d_{(x,y,z)}F)$ で与えられるから，

$$T_{(x,y,z)}X_1 = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u\sin x + v\sin y + w\sin z = 0\}$$

(2) 写像 $f\colon V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to X_2$ を $f(x,y) = (y^3, xy^2, x^2y, x^3)$ と定める．f がパラメータ付けの条件を満たすことを示そう．関数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := x^3$ は全単射であり，h は開区間 (a,b) を開区間 (a^3, b^3) に写すので，h は開写像である．従って h^{-1} も連続関数となる．写像 $g\colon X_2 \to V$ を $g(a_1,a_2,a_3,a_4) = (h^{-1}(a_4), h^{-1}(a_1))$ と定める．g は V に値を持つことに注意しよう．h^{-1} は連続なので g は連続であり，明らかに f の逆写像を定める．従って $f\colon V \to X_2$ は同相写像である．最後に f の微分を調べる．

$$(Jf)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 3y^2 \\ y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$x \neq 0$ のときは部分行列 $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$ が正則となり，$y \neq 0$ のときは部分行列 $\begin{pmatrix} 0 & 3y^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$ が正則となるため，$(Jf)_{(x,y)}$ のランクは常に 2 である．従って $d_{(x,y)}f$ は単射である．以上より f はパラメータ付けの条件を満たし，X_2 は多様体である．

$(y^3, xy^2, x^2y, x^3) \in X_2$ での接空間は $d_{(x,y)}f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ の像で与えられるから，

$$T_{(y^3,xy^2,x^2y,x^3)}X_2 = \left\{ a\begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \\ 2xy \\ 3x^2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3y^2 \\ 2xy \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

(3) $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $F(x,y,z,w) = (xyzw - 1, x^2+y^2+z^2+w^2-8)$ とおく．このとき $X_3 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid F(x,y,z,w) = 0\}$ である．$(x,y,z,w) \in X_3$ に対して $d_{(x,y,z,w)}F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ が全射であることを示せばよい．つまり，

$$(JF)_{(x,y,z,w)} = \begin{pmatrix} yzw & xzw & xyw & xyz \\ 2x & 2y & 2z & 2w \end{pmatrix}$$

のランクが 2 であることを示せばよい．$x^2+y^2+z^2+w^2=8$ より第 2 行はゼロではない．従ってもしランクが 1 以下であれば

$$(yzw, xzw, xyw, xyz) = \lambda(x, y, z, w)$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する．このとき

$$1 = xyzw = \lambda x^2 = \lambda y^2 = \lambda z^2 = \lambda w^2$$

であるから

$$8\lambda = \lambda(x^2+y^2+z^2+w^2) = 4$$

従って $\lambda = 1/2$．これから $x^2=y^2=z^2=w^2=2$．このとき，$1 = x^2y^2z^2w^2 = 2^4$ となって矛盾である．従って X_3 は多様体である．

点 $(x, y, z, w) \in X_3$ での接空間は $\operatorname{Ker} d_{(x,y,z,w)}F$ で与えられるから，

$$T_{(x,y,z,w)}X_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} yzw & xzw & xyw & xyz \\ 2x & 2y & 2z & 2w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 2 $GL(n,\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ 上の連続関数 $A \mapsto \det(A)$ が消えない点の集合であるから，$M_n(\mathbb{R})$ の開集合である．従って n^2 次元多様体である．実際，そのパラメータ付けは恒等写像 $\mathrm{id}\colon GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ で与えられる．また $I_n \in GL(n,\mathbb{R})$ での接空間は $d_{I_n}(\mathrm{id})\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ の像，すなわち $M_n(\mathbb{R})$ 全体である．

問題 3 $V \subset \mathbb{R}^N$ を m 次元部分ベクトル空間とする．$v_1, \ldots, v_m$ を V の基底とする．写像 $f\colon \mathbb{R}^m \to V$ を $f(x_1, \ldots, x_m) = x_1v_1 + \cdots + x_mv_m$ と定める．f がパラメータ付けの条件を満たすことを示そう．行列 $(v_1, \ldots, v_m)$ のランクは m なので，必要なら $\mathbb{R}^N$ の座標の順番を入れ替えて，この行列の最初の m 行からなる部分行列

$$A = \begin{pmatrix} v_{1,1} & & v_{m,1} \\ & \ddots & \\ v_{1,m} & & v_{m,m} \end{pmatrix}$$

は正則行列であるとしてよい．但し $v_i = {}^t(v_{i,1}, \ldots, v_{i,N})$ とした．f の逆写像 $f\colon V \to \mathbb{R}^m$ は

$$g(x_1, \ldots, x_N) = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

で与えられるため，連続である．従って $f\colon \mathbb{R}^m \to V$ は同相写像であることが分かる．また，f は線形写像であるから，f の微分は f に等しい．つまり $d_xf = f$．従って d_xf は単射である．以上より f はパラメータ付けの条件を満たし，V は多様体となる．最後に $p \in V$ での接空間は $f(x) = p$ となる $x \in \mathbb{R}^m$ をとるとき，

$$T_pV = \operatorname{Im}(d_xf\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N) = \operatorname{Im}(f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N) = V$$

で与えられる．

問題 4 写像 $F|_{M_1}\colon M_1 \to M_2$ を G と書く．任意の点 $p \in M_1$ に対して p の周りのパラメータ付け $f\colon V \to M_1$, $f(a) = p$ をとるとき（ここで $V \subset \mathbb{R}^{m_1}$ は開集合），$G \circ f = F \circ f$ であり，f および F は C^∞ 級写像であるから $F \circ f$ も C^∞ 級である．従って G は p で C^∞ 級である．p は任意の点だから G は C^∞ 級である．

問題 5 $F\colon M_1 \to M_2$ が点 p で C^∞ 級であれば，F は点 p の近傍で連続であることを示そう．定義によって，p の周りのパラメータ付け $f\colon V \to M_1$，$a \in V$, $f(a) = p$ が存在して，$F \circ f$ は点 a の近傍で C^∞ 級である．V を小さく取り直して $F \circ f\colon V \to M_2$ は C^∞ 級としてよい．このとき $F \circ f\colon V \to M_2$ は連続である．$f\colon V \to f(V) \subset M_1$ の逆写像を $g\colon f(V) \to V$ と書くとき，$f(V)$ 上で

$$F = (F \circ f) \circ g$$

が成立する．従って F は $f(V)$ 上で連続．$f(V)$ は p の開近傍であるから，F は p の開近傍で連続である．

問題 6 問題7の解答から先に与える．写像 $F\colon S^2 \to \mathbb{R}^6$ は $F(p) = F(-p)$ を満たすため，連続写像 $\overline{F}\colon S^2/\sim \to \mathbb{R}^6$ を誘導する．$\overline{F}$ は単射であることを示す．$F(x, y, z) = F(x', y', z')$ であるとする．$x^2 = x'^2$, $y^2 = y'^2$, $z^2 = z'^2$ より $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{-1, 1\}$ が存在して

$$x' = \epsilon_1 x, \quad y' = \epsilon_2 y, \quad z' = \epsilon_3 z.$$

$(x, y, z) \in S^2$ より x, y, z のうち少なくとも一つはゼロではない．もし $x \neq 0$ とすると，$xy = x'y'$, $xz = x'z'$ より $\epsilon_1\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_1\epsilon_3 = 1$ が分かる．従って $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ であり，$(x, y, z) \sim (x', y', z')$．$y \neq 0$, $z \neq 0$ のときも同様である．以上より $\overline{F}$ は単射であることが分かった．$\overline{F}\colon S^2/\sim \to M = F(S^2)$ は全単射連続写像であり，$S^2/\sim$ はコンパクト，$M = F(S^2)$ はハウスドルフであるから，同相写像である．

次に問題6の解答に移る．$\pi\colon S^2 \to S^2/\sim$ は開写像である．実際，任意の開集合 $U \subset S^2$ に対して $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U)$ は開集合なので $\pi(U)$ は開集合である．従って $F = \overline{F} \circ \pi$ も開写像となる．S^2 の座標（パラメータ付け）$f\colon V \to S^2$, $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $f(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ を考える．このとき $F \circ f\colon V \to M$ は $M = F(S^2)$ のパラメータ付けを与えることを示そう．f はパラメータ付け（$f(V) \subset S^2$ は開集合で，$f\colon V \to f(V)$ は同相），F は開写像であることから $F \circ f$ も開写像である．また $F \circ f$ は単射連続写像であることも明らか．従って $F(f(V)) \subset M$ は M の開集合で，$F \circ f\colon V \to F(f(V))$ は同相写像．さらに $F \circ f$ のヤコビ行列は

$$J(F \circ f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \\ -2x & -2y \\ y & x \\ -\frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{1-x^2-2y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{1-2x^2-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

で与えられる．$x \neq 0$ のときは部分行列 $\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ が正則であり，$y \neq 0$ のときは部分行列 $\begin{pmatrix} 0 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ が正則．また $(x, y) = (0, 0)$ のときは最後の 2 行からなる行列が正則になるため，この行列のランクは 2 である．以上によって $F \circ f$ はパラメータ付けを与える．同様に S^2 の他の座標 $g(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$, $h(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z)$ を考えることにより，パラメータ付け $F \circ g$, $F \circ h$ が得られる．これらのパラメータ付けは M を覆うため，M は C^∞ 級多様体である．$F\colon S^2 \to M$ が C^∞ 級写像であることは明らかである（問題 4 から分かる）．

最後に接空間を計算する．$(x, y, z) \in S^2$ とし，$z > 0$ とするとき，点 $F(x, y, z) = F(f(x, y))$ での接空間は $d_{(x,y)}(F \circ f)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ の像で与えられる．それは

$$(2xz, 0, -2xz, yz, -xy, z^2 - x^2), (0, 2yz, -2yz, xz, z^2 - y^2, -xy)$$

で張られる 2 次元部分空間である．このベクトル空間は

$$(2xy, -2xy, 0, y^2 - x^2, -xz, yz)$$

も含んでいる．一般の点 $(x, y, z) \in S^2$ に対しては，$F(x, y, z)$ での接空間はこれら 3 つのベクトルで生成される 2 次元部分空間となる（詳細略）．

問題 7 問題 6 の解答に与えた．

問題 8 $M_n(\mathbb{R})$ 上の関数 f を

$$f\colon M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = A^T \cdot A - I_n$$

と定義する．但し $S_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ は n 次対称行列のなすベクトル空間．f は C^∞ 級関数であり，$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid f(A) = 0\}$．$f$ の微分は

$$d_{I_n} f(V) = \lim_{t \to 0} \frac{(I_n + tV)^T \cdot (I_n + tV) - I_n^T \cdot I_n}{t} = V^T + V.$$

任意の $B \in S_n(\mathbb{R})$ に対して $d_{I_n} f(\frac{1}{2}B) = B$ ゆえ，$d_{I_n} f$ は全射．従って

$$T_{I_n} O(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(d_{I_n} f\colon M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})) = \{V \in M_n(\mathbb{R}) \mid V^T + V = 0\}$$

問題 9 $P^{-1}VP$ が上三角行列になる複素係数行列 $P \in GL(n, \mathbb{C})$ をとる．

$$P^{-1}VP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

このとき，

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\det(I_n+tV)-1}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\det(P^{-1}(I_n+tV)P)-1}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\det(I_n+tP^{-1}VP)-1}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1+\lambda_1 t)(1+\lambda_2 t)\cdots(1+\lambda_n t)-1}{t}\\
&= \lambda_1+\cdots+\lambda_n\\
&= \mathrm{tr}(P^{-1}VP)=\mathrm{tr}(V)
\end{aligned}
$$

問題 10 関数 $F\colon M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ を $F(A)=\det A-1$ とすると，F は C^∞ 級関数で $SL(n,\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid F(A)=0\}$．$A\in SL(n,\mathbb{R})$ に対して，

$$
F(A+tV)=\det(A+tV)=\det A\cdot\det(I_n+tA^{-1}V)=\det(I_n+tA^{-1}V)
$$

が成立する．これを t で微分することにより，前問の結果を用いると，

$$
d_AF(V)=\mathrm{tr}(A^{-1}V)
$$

が得られる．特に $dA_F(A)=n\neq 0$ より，d_AF は全射である．従って $SL(n,\mathbb{R})$ は多様体である．また I_n での接空間は $T_{I_n}SL(n,\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(d_{I_n}F)=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid \mathrm{tr}(A)=0\}$.

問題 11 $\pi_\pm\colon S^2\setminus\{(0,0,\pm 1)\}\to\mathbb{C}$ は全単射であり，その逆写像は

$$
\pi_\pm^{-1}(x+iy)=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},\pm\frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right)
$$

で与えられる．$\pi_\pm$ の間の座標変換は $z\neq 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\pi_+\pi_-^{-1}(z) &= \pi_+\left(\frac{2x}{1+|z|^2},\frac{2y}{1+|z|^2},\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)=\frac{x+iy}{|z|^2}=\frac{1}{\overline{z}}\\
\pi_-\pi_+^{-1}(z) &= \frac{1}{\overline{z}}
\end{aligned}
$$

となる．これらを使って問題の写像 $(\pi_-\circ F_P\circ\pi_-^{-1})(x+iy)$ を計算する．まず $z=x+iy\neq 0$ のとき，$\pi_-^{-1}(z)\neq(0,0,1)$ であるから F_P の定義の前半が適用できて，

$$
\begin{aligned}
F_P(\pi_-^{-1}(z)) &= (\pi_+^{-1}\circ P\circ\pi_+)(\pi_-^{-1}(z))\\
&= \pi_+^{-1}P(1/\overline{z})\\
&= \pi_+^{-1}\left(\frac{1}{\overline{z}^n}(a_0+a_1\overline{z}+\cdots+a_n\overline{z}^n)\right)
\end{aligned}
$$

となる．従って $a_0+a_1\overline{z}+\cdots+a_n\overline{z}^n\neq 0$ のとき，$F_P(\pi_-^{-1}(z))\neq(0,0,-1)$ であり，これは π_- の定義域に入る．このとき，

$$
\begin{aligned}
(\pi_-\circ F_P\circ\pi_-^{-1})(z) &= \pi_-^{-1}\pi_+\left(\frac{1}{\overline{z}^n}(a_0+a_1\overline{z}+\cdots+a_n\overline{z}^n)\right)\\
&= \frac{z^n}{\overline{a_0}+\overline{a_1}z+\cdots+\overline{a_n}z^n}
\end{aligned}
$$

となる．また $z=0$ のとき，$\pi_-^{-1}(z)=(0,0,1)$ より，F_P の後半の定義を適用して

$$F_P(\pi_-^{-1}(0))=(0,0,1)$$

これは π_- の定義域に入り，$(\pi_-\circ F_P\circ\pi_-^{-1})(0)=0$. 以上から，$a_0+a_1\overline{z}+\cdots+a_n\overline{z}^n\neq 0$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して

$$(\pi_-\circ F_P\circ\pi_-^{-1})(z)=\frac{z^n}{\overline{a_0}+\overline{a_1}z+\cdots+\overline{a_n}z^n}$$

$\boxed{\text{採点基準}}$ 10 点満点．次の配分で点数をつける．これ以上の細かい部分点はなし．

(1) 5 点：正しい表式が（ほとんど全ての z について正しいやり方で）得られている．この問題では C^∞ 級であることの証明までは要求していなかったので，$1/\overline{P(1/\overline{z})}=P(z/|z|^2)/|P(z/|z|^2)|^2$ などの表式でも認める.（問題の意図としては $z=0$ で C^∞ 級であることが明らかな表式まで変形してほしい.）

(2) 3 点：$a_0+a_1\overline{z}+\cdots+a_n\overline{z}^n\neq 0$ のときに $F_P(\pi_-^{-1}(z))$ が π_- の定義域に入ることをチェックしている (但し $z\neq 0$ のときだけでよい).「定義されることを確認し」という問題なので，ここはきっちり確かめてほしい.

(3) 2 点：$z=0$ のときには $\pi_-^{-1}(z)=(0,0,1)$ となるため F_P の後半の定義を適用しないといけないが，その計算を別個に実行している（答えのみで可）.

問題 12 F,G は C^∞ 級であるから，$p\in M_1$ のまわりのパラメータ付け $f_1\colon V_1\to M_1$ と $q\in M_2$ のまわりのパラメータ付け $f_2\colon V_2\to M_2$ が存在して，$f_1(x)=p,\ f_2(y)=q$ を満たす $x\in V_1,\ y\in V_2$ をとるとき，

$$F\circ f_1\colon V_1\to M_2\subset\mathbb{R}^{N_2} \text{ が } x \text{ の近傍で } C^\infty \text{ 級}$$
$$G\circ f_2\colon V_2\to M_3\subset\mathbb{R}^{N_3} \text{ が } y \text{ の近傍で } C^\infty \text{ 級}$$

となる．特に $F\circ f_1$ は x の近傍で連続であるから，必要なら V_1 を小さく取り換えて $F(f_1(V_1))\subset f_2(V_2)$ が成り立つとしてよい．このとき F の座標表示 $f_2^{-1}\circ F_1\circ f_1$ は V_1 上で定義され,（授業で示したことから）x の近傍で C^∞ 級写像となる．V_1 上で

$$G\circ F\circ f_1=(G\circ f_2)\circ(f_2^{-1}\circ F\circ f_1)$$

が成り立ち，$f_2^{-1}\circ F\circ f_1$ は x の近傍で C^∞ 級，$G\circ f_2$ は y の近傍で C^∞ 級であることから，$G\circ F\circ f_1$ は x の近傍で C^∞ 級である．以上より，合成写像 $G\circ F\colon M_1\to M_3$ は点 p において C^∞ 級である.

問題 13 M の各点 $p\in M$ に対して，p の開近傍 $U\subset\mathbb{R}^N$ と U 上の C^∞ 級関数 $f\colon U\to\mathbb{R}^{N-m}$ が存在して $M\cap U=\{x\in M\mid f(x)=0\}$ かつ $d_pf\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N-m}$ は全射となる．必要なら U を小さく取り直して任意の $x\in U$ に対して d_xf が全射であると仮定してよい（何故か？）．このとき，任意の $x\in U\cap M$ に対して

$$T_xM=\mathrm{Ker}(d_xf\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N-m})$$

となる．従って

$$TM \cap (U \times \mathbb{R}^N) = \{(x,v) \in U \times \mathbb{R}^N \mid F(x,v) = 0\}$$

となる．ここで $F\colon U \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m} \times \mathbb{R}^{N-m}$ を $F(x,v) = (f(x), d_x f(v))$ とおいた．F のヤコビ行列は

$$(JF)_{(x,v)} = \begin{pmatrix} (Jf)_x & 0 \\ * & (Jf)_x \end{pmatrix}$$

の形をしており，$(Jf)_x$ のランクは $N-m$ であるから，このランクは $2(N-m)$ となる．従って $d_{(x,v)}F\colon \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2(N-m)}$ は全射であり，TM は $2m$ 次元の多様体であることが分かる．

問題 14 まず次の補題から始める．

補題：線形写像 $F_1\colon W \to V_1$, $F_2\colon W \to V_2$ は全射で $\mathrm{Ker}(F_1) + \mathrm{Ker}(F_2) = W$ なら，

$$(F_1, F_2)\colon W \to V_1 \oplus V_2, \quad w \mapsto (F_1(w), F_2(w))$$

も全射である．

(補題の証明)：任意の $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ をとる．F_i は全射なので，ある $w_i \in W$ が存在して，$F_i(w_i) = v_i$ が満たされる．ここで $w_1 - w_2 \in W = \mathrm{Ker}(F_1) + \mathrm{Ker}(F_2)$ より，$w_1 - w_2 = u_1 - u_2$ を満たす $u_i \in \mathrm{Ker}(F_i)$ が存在する．ここで $w := w_1 - u_1 = w_2 - u_2$ とおくとき，

$$F_1(w) = F_1(w_1 - u_1) = F_1(w_1) = v_1, \quad F_2(w) = F_2(w_2 - u_2) = F_2(w_2) = v_2$$

が成り立つ．従って $(F_1, F_2)(w) = (v_1, v_2)$ である．

以下，問題の解答に入る．$M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^N$ は多様体であるから，任意の点 $p \in M_1 \cap M_2$ に対して p の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^N$ 及び C^∞ 級関数 $f_i\colon U \to \mathbb{R}^{N-m_i}$, $i = 1, 2$ が存在して，$M_i \cap U = \{x \in U \mid f_i(x) = 0\}$ および $d_p f_i\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m_i}$ は全射，が成立する．このとき，$T_pM_i = \mathrm{Ker}(d_p f_i\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m_i})$ である．$f = (f_1, f_2)\colon U \to \mathbb{R}^{2N-m_1-m_2}$ と定義すると，

$$M_1 \cap M_2 \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

であり，$d_p f = (d_p f_1, d_p f_2)$，$\mathrm{Ker}\, d_p f_1 + \mathrm{Ker}\, d_p f_2 = T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^N$ ゆえ，補題から $d_p f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{2N-m_1-m_2}$ は全射．従って $M_1 \cap M_2$ は $m_1 + m_2 - N$ 次元多様体である．

問題 15 M に属する行列の Jordan 標準形は全て

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

であることは容易に分かる．

$$M = \{N \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(N^2) = \cdots = \mathrm{tr}(N^n) = 0, N^{n-1} \neq 0\}$$

であることを示そう．M の元の Jordan 標準形が N_0 であり，トレースは共役で変わらないことから，M の元が右辺に含まれることは明らかである．一方，右辺の元 N に対して，N の固有多項式を $\prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ とするとき，N の三角化を行うことにより，$0 = \mathrm{tr}(N^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$, $1 \leq k \leq n$ であることが分かる．従って $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の基本対象式も全て消えており，固有多項式は x^n．つまり N の固有値は 0 のみ．条件 $N^{n-1} \neq 0$ から N の Jordan 標準形は N_0 であり，N は M に属する．

$M_n(\mathbb{R})$ の開集合を $U = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^{n-1} \neq 0\}$ と定める．ここで $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ を $f(X) = (\mathrm{tr}(X), \ldots, \mathrm{tr}(X^n))$ と定める．$M = \{X \in U \mid f(X) = 0\}$ である．M が多様体であることを示すには，$X \in M$ に対して $d_X f$ が全射であることを示せば十分である．直接計算より

$$d_X f(V) = (\mathrm{tr}(V), 2\,\mathrm{tr}(XV), \ldots, n\,\mathrm{tr}(X^{n-1}V))$$

であることが分かる．$M_n(\mathbb{R})$ 上の 2 次形式

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}} B)$$

は正定値内積であって，$d_X f(V)$ は $I_n, 2X^{\mathrm{T}}, \ldots, n(X^{n-1})^{\mathrm{T}}$ と V との内積として与えられる．従ってこれらの行列が $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せば十分である．X は Jordan 標準形 N_0 と共役であるから，$I_n, 2N_0^{\mathrm{T}}, \ldots, n(N_0^{n-1})^{\mathrm{T}}$ が 1 次独立であることを示せば十分である．しかしこれは明らか．以上により M は $n^2 - n$ 次元多様体であることが分かった．

最後に $T_{N_0} M = \mathrm{Ker}(d_{N_0} f)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
T_{N_0} M &= \{V \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(V) = \mathrm{tr}(VN_0) = \cdots = \mathrm{tr}(VN_0^{n-1}) = 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} v_{11} & * & * & \cdots & * \\ v_{21} & v_{22} & * & & * \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & & v_{nn} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} v_{11} + v_{22} + \cdots + v_{nn} = 0, \\ v_{21} + v_{32} + \cdots + v_{n,n-1} = 0, \\ \vdots \\ v_{n1} = 0 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

となる．

幾何学入門演習　No.12　(2022 年 12 月 28 日)[1]

定義　$M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ を C^∞ 級多様体とする．M_1 から M_2 への写像 $F\colon M_1 \to M_2$ が点 $p \in M_1$ で C^∞ 級であるとする.（C^∞ 級の定義については演習 No.11 を見よ.）このとき接写像（微分）$d_pF\colon T_pM_1 \to T_{F(p)}M_2$ を次のように定める．点 p の周りのパラメータ付け $f_1\colon V_1 \to M_1$，$a_1 \in V_1$, $f_1(a_1) = p$ と点 $F(p)$ の周りのパラメータ付け $f_2\colon V_2 \to M_2$, $a_2 \in V_2$, $f(a_2) = F(p)$ をとる．ここで V_i は $\mathbb{R}^{m_i}$ の開集合である．F は p の近傍で連続であるから，必要なら V_1 を小さく取り直して $F(f_1(V_1)) \subset f_2(V_2)$ と仮定してよい．このとき F の座標表示 $f_2^{-1} \circ F \circ f_1\colon V_1 \to V_2$ が定義され，a_1 の近傍で C^∞ 級となる．接写像 d_pF は次の図式を可換にする写像として定まる．

$$
\begin{tikzcd}
T_pM_1 \arrow[r, "d_pF"] & T_{F(p)}M_2 \\
\mathbb{R}^{m_1} \arrow[u, "d_{a_1}f_1", "\cong"'] \arrow[r, "d_{a_1}(f_2^{-1}\circ F\circ f_1)"'] & \mathbb{R}^{m_2} \arrow[u, "\cong", "d_{a_2}f_2"']
\end{tikzcd}
$$

ここで接空間の定義より，縦の写像 $d_{a_1}f_1\colon \mathbb{R}^{m_i} \cong T_pM_1$, $d_{a_2}f_2\colon \mathbb{R}^{m_2} \cong T_{F(p)}M_2$ は同型であることに注意する．言い換えれば d_pF は

$$d_pF = d_{a_2}f_2 \circ d_{a_1}(f_2^{-1} \circ F \circ f_1) \circ (d_{a_1}f_1)^{-1}$$

で与えられる．Chain rule を使うと,（$f_2 \circ (f_2^{-1} \circ F \circ f_1) = F \circ f_1$ ゆえ）

$$d_pF = d_{a_1}(F \circ f_1) \circ (d_{a_1}f_1)^{-1}$$

とも書き換えられることに注意しておく．授業では d_pF の定義がパラメータ付けの取り方によらないことを示した.

問題 1 $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ が開集合のとき，上記の d_pF の定義はユークリッド空間の開集合上で定義された C^∞ 級関数の方向微分と一致することを確かめよ.

問題 2 開区間 (a,b) から多様体 $M \subset \mathbb{R}^N$ への C^∞ 級写像 $c\colon (a,b) \to M$ を M 上の C^∞ 級曲線という．c の微分 $d_tc\colon \mathbb{R} = T_t(a,b) \to T_{c(t)}M$ による $1 \in \mathbb{R}$ の像は $\frac{dc}{dt}(t)$ に一致することを確かめよ．これを速度ベクトルという．さらに任意の接ベクトル $v \in T_pM$ は点 p を通る C^∞ 級曲線の速度ベクトルとして得られることを示せ．つまり，ある C^∞ 写像 $c_v\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ が存在して $c_v(0) = p$, $\frac{dc_v}{dt}(0) = v$ が成立する.

問題 3 $M \subset \mathbb{R}^N$ を多様体とする．包含写像 $i\colon M \to \mathbb{R}^N$ は C^∞ 級写像であることを示し，任意の点 $p \in M$ に対して，$d_pi\colon T_pM \to T_p\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$ も包含写像であることを示せ.（この授業では T_pM は $\mathbb{R}^N$ の部分ベクトル空間として定義されていた.）

問題 4 M_1, M_2, M_3 を多様体とする．写像 $F\colon M_1 \to M_2$ は点 $p \in M_1$ で C^∞ 級であり，写像 $G\colon M_2 \to M_3$ は点 $F(p) \in M_2$ で C^∞ 級であるとする．演習 No.11 の問題 12 より，$G \circ F\colon M_1 \to M_3$ は点 p で C^∞ 級である．このとき，chain rule $d_p(G \circ F) = d_{F(p)}G \circ d_pF$ が成り立つことを示せ.

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的.

問題 5 写像$F\colon M_1 \to M_2$は点$p \in M_1$でC^∞級であるとする．接ベクトル$v \in T_pM_1$がpを通るC^∞級曲線$c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$, $c(0) = p$の速度ベクトルとして与えられるとする．つまり，$v = \frac{dc}{dt}(0)$であるとする．このとき，$d_pF(v)$は曲線$F \circ c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M_2$（これも原点の十分小さい近傍で$C^\infty$級となる）の原点での速度ベクトル$\frac{d}{dt}(F \circ c)(0)$に等しいことを示せ．

問題 6 C^∞級多様体の間の写像$F\colon M_1 \to M_2$がC^∞級微分同相（diffeomorphism）であるとは，FがC^∞級写像であって，全単射であり，$F^{-1}\colon M_2 \to M_1$もC^∞級であることをいう．Fが微分同相であれば，$d_pF\colon T_pM_1 \to T_{F(p)}M_2$は同型であることを示せ．このことから微分同相な多様体の次元が等しいことを導け．

問題 7 (多様体に対する逆関数定理) 多様体の間の写像$F\colon M_1 \to M_2$が点$p \in M_1$でC^∞級であり，$d_pF\colon M_1 \to M_2$が同型であるとする．このとき点pの開近傍$U \subset M_1$と点$F(p)$の開近傍$V \subset M_2$が存在して，$F(U) \subset V$であり，写像$F|_U\colon U \to V$は微分同相写像となることを示せ．

問題 8 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$上の関数$f\colon S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z^2$の臨界点を全て求めよ．

問題 9 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$上の関数$f\colon S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$の臨界点を全て求めよ．

問題 10 $A \in O(3, \mathbb{R})$を3次直交行列とする．Aの定める写像$f_A\colon S^2 \to S^2$, $f_A(x) = Ax$の微分$d_pf_A\colon T_pS^2 \to T_{f_A(p)}S^2$を求めよ．

問題 11 ($\star$) 直交群$O(n, \mathbb{R})$上の関数$f(A) = \mathrm{tr}(A)$はC^∞級であることを示し，その臨界点を全て求めよ．

問題 12 多様体M上のC^∞級関数の臨界点の集合は（Mの相対位相に関して）閉集合であることを示せ．

問題 13 C^∞級写像$S^2 \to \mathbb{R}^2$は必ず臨界点を持つことを示せ．

問題 14 M_1, M_2をm次元コンパクト多様体，$F\colon M_1 \to M_2$をC^∞級写像とする．Fの正則値の集合を$U \subset M_2$とする．UはM_2の開集合であって，$F|_{F^{-1}(U)}\colon F^{-1}(U) \to U$は被覆写像であることを示せ．

問題 15 ($\star$) $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[z]$を複素数係数の多項式，$n \geq 2$, $a_0 \neq 0$とする．演習 No.11 の問題 11 より，PはC^∞級写像$F_P\colon S^2 \to S^2$を定める．F_Pの正則値の集合を$U \subset S^2$とする．代数学の基本定理を次のように示せ．

(a) F_Pの臨界点の集合を決定し，それが有限集合であることを示せ．

(b) $q \in U$に対して$F_P^{-1}(q)$は有限集合であり，その個数はqによらないことを示せ．

(c) $P(z) = 0$を満たす$z \in \mathbb{C}$が存在することを示せ．

問題 16 (正則値定理) $F\colon M_1 \to M_2$をC^∞級多様体の間のC^∞級写像とし，$q \in M_2$をFの正則値とする．$F^{-1}(q)$は空でなければ$m_1 - m_2$次元の多様体であることを示せ．ここでm_iはM_iの次元である．

問題 17 ($\star$) $M \subset \mathbb{R}^N$をC^∞級多様体とする．Sard の定理を用いて，ほとんどすべての$a \in \mathbb{R}^N$に対して$M \cap \{x \in \mathbb{R}^N \mid a \cdot x = 0\}$は多様体であることを示せ．

幾何学入門演習　No.12 解答例

問題 1 $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ が開集合のとき，M_1 の恒等写像 $\mathrm{id}_{M_1}\colon M_1 \to M_1$ がパラメータ付けを与え，$T_pM_1 = \mathrm{Im}(d_p\,\mathrm{id}_{M_1}) = \mathbb{R}^{N_1}$ となる．定義より $d_pF \circ d_p\,\mathrm{id}_{M_1}$ は $F = F\circ\mathrm{id}_{M_1}$ の方向微分に等しいので，d_pF は方向微分で与えられる．

問題 2 問題 1 より，$c\colon (a,b) \to M$ の微分は c の方向微分に等しく，それは $1 \in \mathbb{R} = T_t(a,b)$ を $\frac{dc}{dt}(t)$ に写す．

任意の接ベクトル $v \in T_pM$ をとる．p の周りのパラメータ付け $f\colon V \to M,\ a \in V,\ f(a) = p$ をとる．ここで V は $\mathbb{R}^m$ の開集合である．接空間の定義により，ある $(w_1,\ldots,w_m) \in \mathbb{R}^m$ が存在して，$v = d_af(w_1,\ldots,w_m)$ の形に書くことができる．曲線 $c\colon (-\epsilon,\epsilon) \to M$ を $c(t) = f(a + t(w_1,\ldots,w_m))$ とおく．ϵ が十分小さければ $c(t)$ は定義されており，C^∞ 級である．合成関数の微分法より，

$$\frac{dc}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)w_i = d_af(w_1,\ldots,w_m) = v$$

以上より示された．

問題 3　$f\colon V \to M$ を $f(a) = p$ を満たすパラメータ付けとする．ここで $a \in V$ であり，V は $\mathbb{R}^m$ の開集合．d_pi は次の可換図式によって定義されていた．

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "d_pi"] & T_p\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N \\ \mathbb{R}^m \arrow[u, "d_af"] \arrow[ur, "d_a(i\circ f)"'] & \end{tikzcd}$$

ここで $\mathbb{R}^m$ からの 2 つの写像 $d_af,\ d_a(i\circ f)$ について，明らかに $d_af(v) = d_a(i\circ f)(v)$ である．$d_af\colon \mathbb{R}^m \to T_pM$ は同型写像なので，$d_pi\colon T_pM \to \mathbb{R}^N$ は包含写像である．

問題 4 次の 3 つのパラメータ付けをとる．

p の周りのパラメータ付け $f_1\colon V_1 \to M_1,\ a_1 \in V_1,\ f_1(a_1) = p$
$F(p)$ の周りのパラメータ付け $f_2\colon V_2 \to M_2,\ a_2 \in V_2,\ f_2(a_2) = F(p)$
$G(F(p))$ の周りのパラメータ付け $f_3\colon V_3 \to M_3,\ a_3 \in V_3,\ f_3(a_3) = G(F(p))$

ここで $V_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ は開集合である．G は $F(p)$ の近傍で連続であるから，a_2 の近傍 V_2 を小さく取り直して $G(f_2(V_2)) \subset f_3(V_3)$ が成り立つとしてよい．また F は p の近傍で連続であるから，a_1 の近傍 V_1 を小さく取り直して $F(f_1(V_1)) \subset f_2(V_2)$ が成り立つとしてよい．このとき，座標表示 $f_2^{-1}\circ F\circ f_1\colon V_1 \to V_2,\ f_3^{-1}\circ G\circ f_2\colon V_2 \to V_3$ が定義され，各々 $a_1,\ a_2$ の近傍で C^∞ 級である．ここで次の可換図式が成り立っていることを観察する．

$$\begin{tikzcd} T_pM_1 \arrow[r, "d_pF"] & T_{F(p)}M_2 \arrow[r, "d_{F(p)}G"] & T_{G(F(p))}M_3 \\ \mathbb{R}^{m_1} \arrow[u, "d_{a_1}f_1"] \arrow[r, "d_{a_1}(f_2^{-1}\circ F\circ f_1)"'] & \mathbb{R}^{m_2} \arrow[u, "d_{a_2}f_2"] \arrow[r, "d_{a_2}(f_3^{-1}\circ G\circ f_2)"'] & \mathbb{R}^{m_3} \arrow[u, "d_{a_3}f_3"] \end{tikzcd}$$

ここで，ユークリッド空間の開集合上の C^∞ 級関数に対する chain rule から，下の行の合成は

$$d_{a_2}(f_3^{-1}\circ G\circ f_2)\circ d_{a_1}(f_2^{-1}\circ F\circ f_1)=d_{a_1}(f_3^{-1}\circ(G\circ F)\circ f_1)$$

で与えられる．以上より，以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
T_pM_1 \arrow[r, "d_{F(p)}G\circ d_pF"] & T_{G(F(p))}M_3 \\
\mathbb{R}^{m_1} \arrow[u, "d_{a_1}f_1"] \arrow[r, "d_{a_1}(f_3^{-1}\circ(G\circ F)\circ f_1)"'] & \mathbb{R}^{m_3} \arrow[u, "d_{a_3}f_3"']
\end{tikzcd}$$

従って $d_{F(p)}G\circ d_pF=d_p(G\circ F)$ である．

問題 5 問題 2 より $d_0c(1)=\frac{dc}{dt}(0)=v$ である．問題 4 の chain rule より

$$d_pF(v)=d_pF(d_0c(1))=d_0(F\circ c)=\frac{d(F\circ c)}{dt}(0)$$

これが示すべきことであった．

問題 6 問題 4 の chain rule より，

$$\begin{aligned}
d_p(F)\circ d_{F(p)}(F^{-1})&=d_{F(p)}(F\circ F^{-1})=\mathrm{id}\\
d_{F(p)}(F^{-1})\circ d_p(F)&=d_{(p)}(F^{-1}\circ F)=\mathrm{id}
\end{aligned}$$

つまり $d_{F(p)}(F^{-1}):T_{F(p)}M_2\to T_pM_1$ は $d_pF\colon T_pM_1\to T_{F(p)}M_2$ の逆写像である．従って $d_pF\colon T_pM_1\to T_{F(p)}M_2$ は同型であり，ベクトル空間 $T_pM_1, T_{F(p)}M_2$ は同じ次元を持つ．よって $\dim M_1=\dim T_pM_1=\dim T_{F(p)}M_2=\dim M_2$.

問題 7 点 p と $F(p)$ の周りのパラメータ付け $f_1\colon V_1\to M_1$, $f_2\colon V_2\to M_2$ をとる．ここで，$a_1\in V_1$ に対して $f_1(a_1)=p$，$a_2\in V_2$ に対して $f_2(a_2)=F(p)$ とする．F は点 p で C^∞ 級であるから，必要なら a_1 の近傍 V_1 を小さく取り直して $F(f_1(V_1))\subset f_2(V_2)$ であり，$f_2^{-1}\circ F\circ f_1\colon V_1\to V_2$ は C^∞ 級としてよい．$d_pF\colon M_1\to M_2$ が同型であるから，

$$d_{a_1}(f_2^{-1}\circ F\circ f_1)=(d_{a_2}f_2)^{-1}\circ d_pF\circ d_{a_1}f_1\colon\mathbb{R}^{m_1}\to\mathbb{R}^{m_2}$$

も同型である．逆写像定理より点 a_1 の開近傍 $U'\subset V_1$ と点 a_2 の開近傍 $V'\subset V_2$ が存在して，$(f_2^{-1}\circ F\circ f_1)(U')=V'$ かつ $f_2^{-1}\circ F\circ f_1\colon U'\to V'$ は微分同相写像となる．$U=f_1(U'), V=f_2^{-1}(V')$ とすれば $F|_U\colon U\to V$ も微分同相写像となる．実際，逆写像 $(F|_U)^{-1}$ の座標表示は

$$f_1^{-1}\circ(F|_U)^{-1}\circ f_2|_{V'}=(f_2^{-1}\circ F\circ f_1|_{U'})^{-1}$$

で与えられ，仮定から C^∞ 級である．

問題 8 $p=(x,y,z)\in S^2$ をとる．$z>0$ なら，p の周りのパラメータ付け $F\colon \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}\to S^2$，$f(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ を考える．

$$f\circ F(x,y)=1-x^2-y^2,\quad J_{(x,y)}(f\circ F)=(-2x,-2y)$$

であり，$\mathrm{rank}(J_{(x,y)}(f\circ F))=0$ なら $x=y=0$ となる．従って $z>0$ の範囲で f の臨界点は $(0,0,1)$ だけである．$z<0$ のときも同じ計算により臨界点は $(0,0,-1)$ だけであることが分かる．

次に $z=0$ の場合を考える．$x>0$ と仮定する．p の周りのパラメータ付けを $F\colon \{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2+z^2<1\}\to S^2$，$F(y,z)=(\sqrt{1-y^2-z^2},y,z)$ とする．このとき

$$f\circ F(y,z)=z^2,\quad J_{(y,z)}(f\circ F)=(0,2z)$$

であるから，$z=0$ のとき $\mathrm{rank}(J_{(y,z)}(f\circ F))=0$．つまりすべての点 $(x,y,0)\in S^2$, $x>0$ は f の臨界点である．$x<0$, $y>0$, $y<0$ の場合も同じ計算をすればすべての点 $(x,y,0)\in S^2$ は f の臨界点である．よって f の臨界点全体は $\{(x,y,0)\in S^2\}\cup\{(0,0,1),(0,0,-1)\}$

（別解） 立体射影の逆写像 $\pi_\pm^{-1}\colon\mathbb{R}^2\to S^2$ を S^2 のパラメーター付けとする．ここで

$$\pi_\pm^{-1}(x,y)=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},\pm\frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right)$$

であった．$f(x,y,z)=z^2$ の $S^2\backslash\{(0,0,1)\}$ における臨界点を探す．これは，$g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=f\circ\pi_+^{-1}(x,y)=\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)^2$ の臨界点を探すことに等しい．つまり臨界点は

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{8x(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^3}=0,\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{8y(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^3}=0$$

を解いて得られる．これを満たす (x,y) は $(x,y)=(0,0)$ および $x^2+y^2=1$ となる点である．これを π_+ で引き戻すと，臨界点は $(0,0,-1)$ および赤道 $z=0$.

$S^2\backslash\{(0,0,-1)\}$ でも同様に考えて，f の臨界点は $(0,0,1),(0,0,-1),\{(x,y,z)\in S^2 \mid z=0\}$ である．

問題 9 $S^2\cap\{z>0\}$ のパラメータ付け $F\colon\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}\to S^2$, $F(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ をとる．$f\circ F(x,y)=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$ の臨界点を求める．方程式

$$\frac{\partial(f\circ F)}{\partial x}=\frac{y(1-2x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=0,\quad \frac{\partial(f\circ F)}{\partial y}=\frac{x(1-x^2-2y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=0$$

を $x^2+y^2<1$ の範囲で解いて $(x,y)=(0,0),(\pm\frac{\sqrt3}{3},\pm\frac{\sqrt3}{3})$ を得る．これらは S^2 上の臨界点 $(0,0,1)$, $(\pm\frac{\sqrt3}{3},\pm\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3})$ を与える．他のチャートでも同様に考えると，f の臨界点全体は $\{(0,0,\pm1),(0,\pm1,0),(\pm1,0,0),(\pm\frac{\sqrt3}{3},\pm\frac{\sqrt3}{3},\pm\frac{\sqrt3}{3})\}$（複号任意）となることが分かる．

問題 10 写像 $\tilde{f}_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\tilde{f}_A(x) = Ax$ で定めると，

$$\tilde{f}_A \circ i = i \circ f_A$$

である．ここで $i\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ は包含写像．従って chain rule より

$$d_x\tilde{f}_A \circ d_x i = d_x i \circ d_x f_A$$

線形写像 $\tilde{f}_A$ の微分 $d_x\tilde{f}_A$ は $\tilde{f}_A$ に等しいことを使うと，

$$\tilde{f}_A \circ d_x i = d_x i \circ d_x f_A$$

$d_x i\colon T_xS^2 \to \mathbb{R}^3$ は包含写像であること（問題 3）から，任意の $v \in T_xS^2$ に対して

$$d_x f_A(v) = \tilde{f}_A(v) = Av.$$

問題 11 $f\colon O(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は線形関数 $\mathrm{tr}\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ と包含写像 $i\colon O(n,\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ の合成 $\mathrm{tr}\circ i$ であるから C^∞ 級である．$A \in O(n,\mathbb{R})$ について A が f の臨界点であることは，$d_Af = 0$ と同値である．$d_Af = d_A\,\mathrm{tr} \circ d_A i = \mathrm{tr} \circ d_A i$ であるから（ここで tr は線形写像なので $d_A\,\mathrm{tr} = \mathrm{tr}$ であることを用いた），これは $\mathrm{Ker(tr)} \supset \mathrm{Im}\, d_A i = T_AO(n,\mathbb{R})$ と同値．$O(n,\mathbb{R})$ の A での接空間は（演習 No.11 の問題 8，演習 No.10 の問題 15 と同様の議論により）

$$T_AO(n,\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}X = 0\}$$

で与えられる．$X \in T_AO(n,\mathbb{R})$ に対して $Y = A^{-1}X = A^{\mathrm{T}}X$ とおくと，$Y^{\mathrm{T}} + Y = X^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}X = 0$ であるから，Y は反対称行列である． 逆に反対称行列 Y に対して $X = AY$ とおくと $X^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}X = 0$ を満たすこともわかるから，

$$T_AO(n,\mathbb{R}) = \{AY \mid Y^{\mathrm{T}} + Y = 0\}$$

つまり A が f の臨界点 $\Leftrightarrow$ 任意の反対称行列 Y に対して $\mathrm{tr}(AY) = 0$．反対称行列の空間の基底（(i,j) 成分が 1, (j,i) 成分が -1，それ以外の成分はゼロ）

$$Y_{i,j} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

を考える．$A = (a_{i,j})$ とおくとき $\mathrm{tr}(AY_{i,j}) = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$ ゆえ，A が臨界点であることと A が対称行列であることとは同値．このとき $A^2 = AA^{\mathrm{T}} = I_n$ であるから，A の固有値は ± 1 のみ．A は（対称行列なので）$\mathbb{R}$ 上対角化可能で，固有値 ± 1 の固有空間 $W_\pm$ は互いに直行補空間となる．以上より臨界点は次のような記述を持つ．

$$\begin{aligned}\{A \in O(n,\mathbb{R}) \mid A = A^{\mathrm{T}}\} &= \{A \in O(n,\mathbb{R}) \mid A^2 = I_n\} \\ &\cong \bigsqcup_{k=0}^{n} \{W_+ \subset \mathbb{R}^n \mid \dim W_+ = k\}\end{aligned}$$

問題 12 $F\colon M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．F の臨界点の集合を $C \subset M$ とする．C の補集合が（相対位相に関して）開集合であることを示そう．そのためには任意のパラメータ付け $f\colon V \to M$（ここで V は $\mathbb{R}^m$ の開集合）に対して，$f(V) \setminus C$ が開集合であること，つまり $f^{-1}(M \setminus C)$ が開集合であることを示せばよい．ここで

$$f^{-1}(M \setminus C) = \left\{ x \in V \,\middle|\, \left(\frac{\partial(F \circ f)}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial(F \circ f)}{\partial x_n}(x) \right) \neq 0 \right\}$$

であるからこれは V の開集合である．

問題 13 $F\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級関数とする．F の成分を (F_1, F_2) と書くとき，$F_i\colon S^2 \to \mathbb{R}$ は連続関数である．S^2 のコンパクト性から F_1 はある点 $p \in S^2$ で最大値を持つ．このとき p の周りのパラメータ付け $f\colon V \to S^2$ に対して $f(a) = p$ とすると，

$$J(F \circ f)_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

の形をしているから，$p = f(a)$ は F の臨界点である．

問題 14 M_1 はコンパクト，M_2 はハウスドルフであるから，連続写像 $F\colon M_1 \to M_2$ は固有 (proper) である．実際，任意のコンパクト集合 $K \subset M_2$ は閉であり，$F^{-1}(K)$ は M_1 の閉集合，従ってコンパクトである．

またFの臨界点の集合 $C \subset M_1$ は閉であることが問題12と同様の議論により分かる（詳細は略する）．従って $C \subset M_1$ はコンパクトであり，その像 $F(C)$ はコンパクト．M_2 のハウスドルフ性から $F(C)$ は閉である．従って正則値の集合 $U = M_2 \setminus F(C)$ は開集合である．

固有写像 F を $F^{-1}(U)$ に制限した写像 $F|_{F^{-1}(U)}\colon F^{-1}(U) \to U$ は固有である．演習 No.5 の問題6から,（多様体は局所コンパクトハウスドルフ空間であるから）F が局所同相であることが分かればよい．任意の点 $x \in F^{-1}(U)$ において，$\dim M_1 = \dim M_2$ であるから，微分 $d_xF\colon T_xM_1 \to T_{F(x)}M_2$ は同型写像である．従って逆関数定理（問題7）から F は x の開近傍 U と $F(x)$ の開近傍 V の間の微分同相写像を導く．特に F は局所同相写像である．

問題 15 演習 No.11 の問題 11 にある通り立体射影 $\pi_\pm\colon S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ を定める．

(a) F_P の $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ 上での座標表示は $P(z) = (\pi_+ \circ F_P \circ \pi_+^{-1})(z)$ で与えられる．従って $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ 上での F_P の臨界点は $P(z)$ の臨界点の π_+^{-1} による像となる．また $(0,0,1)$ の周りの座標表示は

$$(\pi_- \circ F_P \circ \pi_-^{-1})(z) = \frac{z^n}{\overline{a_0} + \overline{a_1} z + \cdots + \overline{a_n} z^n}$$

で与えられた．$n \geq 2$, $a_0 \neq 0$ より，この関数の $z = 0$ での微分は 0 であるから，対応する点 $\pi_-^{-1}(0) = (0,0,1)$ は臨界点となる．以上より臨界点は

$$C = \{\pi_+^{-1}(z) \mid P'(z) = 0\} \cup \{(0,0,1)\}$$

となり有限集合である．（$P'(z)=0$ を満たす z が有限個，という事実の証明には代数学の基本定理は必要ない．）

(b) $F_P\colon S^2\to S^2$ はコンパクト多様体の間の C^∞ 級写像であり，問題 14 より，F_P を $F_P^{-1}(U)$ に制限した写像 $F_P|_{F_P^{-1}(U)}\colon F_P^{-1}(U)\to U$ は固有な被覆写像である．特に $q\in U$ に対して $F_P^{-1}(q)$ は（コンパクト離散位相空間なので）有限集合である．(a) から臨界値の集合も有限であるため，U は S^2 から有限個の点を除いた集合である．従って U は連結であり，演習 No.5 の問題 8 より，$F_P^{-1}(q)$ の個数は $q\in U$ の取り方によらない．

(c) もし $\pi_+^{-1}(0)=(0,0,-1)\in S^2$ が F_P の臨界値であれば，臨界値の定義により $P(z)=0$ を満たす z が存在する．$q_0=\pi_+^{-1}(0)$ が正則値であるとする．$F_P^{-1}(q_0)\neq\varnothing$ を示せばよい．もし $F_P^{-1}(q_0)=\varnothing$ であれば，(b) で示したことから任意の $q\in U$ について $F_P^{-1}(q)=\varnothing$ でなければならない．このとき F_P の像は全て臨界値であるから，有限集合となる．S^2 は連結なので $F_P(S^2)$ は 1 点集合となり，従って P は定数関数となる．これは $n\geq 2$, $a_0\neq 0$ という仮定に反している．

問題 16 略

問題 17 (略解) まず $0\notin M$ のときを考える．$N=\{(x,a)\in M\times\mathbb{R}^N\mid x\cdot a=0\}$ とおくと，これが多様体になることは容易にチェックできる．第 2 成分への射影 $\pi_2\colon N\to\mathbb{R}^N$, $\pi_2(x,a)=a$ の正則値 a をとればよい．

次に $0\in M$ のときは，$N'=\{(x,a)\in M\times(\mathbb{R}^N\setminus T_0M^\perp)\mid x\cdot a=0\}$ を考え，$\pi_2\colon N'\to\mathbb{R}^N\setminus T_0M^\perp$ の正則値をとればよい．

幾何学入門演習　No.13　(2023年1月11日)[1]

今回の演習では，M を $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた滑らかな曲面（2次元多様体）とする．

定義　C^∞ 級曲線 $c\colon [a,b] \to M$ の**長さ**を次で定義する．

$$L(c) = \int_a^b \left| \frac{dc}{dt}(t) \right| dt$$

ここで $|\frac{dc}{dt}(t)|$ はベクトル $\frac{dc}{dt}(t) \in \mathbb{R}^3$ のユークリッド内積に関する長さである．

定義　C^∞ 級曲線 $c\colon [a,b] \to M$ に沿った M 上のベクトル場とは，C^∞ 級関数 $X\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ であって，全ての $t \in [a,b]$ に対して $X(t) \in T_{c(t)}M$ を満たすもの．

定義　C^∞ 級曲線 $c(t)$ に沿ったベクトル場 $X(t)$ の**共変微分**を $\nabla_t X(t) = \left(\frac{d}{dt}X(t)\right)^{\parallel}$ で定める．ここで $v \in \mathbb{R}^3$ に対して，$v = v^{\parallel} + v^{\perp}$, $v^{\parallel} \in T_{c(t)}M$, $v^{\perp} \in (T_{c(t)}M)^{\perp}$ と書いた．$\nabla_t X(t)$ を $\nabla_{\frac{dc}{dt}} X(t)$ と書くこともある．

定義　滑らかな曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 上の曲線 $c\colon (a,b) \to M$ が**測地線**であるとは，$\nabla \frac{dc}{dt}(t) = 0$ を満たすこと．授業では測地線が長さ汎関数の極値を与えることを見た．

問題 1　平面 $\mathbb{R}^2$ 上の2点 p, q を結ぶ C^∞ 曲線 $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $c(0) = p$, $c(1) = q$ について常に $L(c) \geq |p - q|$ であることを示せ．

問題 2　前問で等号が成立するとき，$f(0) = 0$, $f(1) = 1$ を満たす単調増加 C^∞ 級関数 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ が存在して $c(t) = (1 - f(t))p + f(t)q$ の形に書けることを示せ．

問題 3　$c\colon (a,b) \to M$ を測地線とするとき，$|\frac{dc}{dt}(t)|$ は一定であることを示せ．

問題 4　$c\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ を弧長パラメータ表示された曲線，すなわち $|\frac{dc}{dt}(t)| = 1$ とする．$\frac{d^2c}{dt^2}(t) \neq 0$ であるとき，次の等式を満たすスカラー値関数 $\kappa = \kappa(t)$, $\tau = \tau(t)$ とベクトル値関数 $n = n(t)$ が存在することを示せ．

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \kappa n, \quad \kappa > 0, \quad |n| = 1, \quad \frac{dc}{dt} \cdot n = 0$$
$$\frac{dn}{dt} = -\kappa \frac{dc}{dt} + \tau \left(\frac{dc}{dt} \times n \right), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dc}{dt} \times n \right) = -\tau n$$

ここで $\frac{dc}{dt} \times n$ はベクトルの外積である．κ を**曲率**，τ を**捩率**という．

問題 5 ($\star$)　$c\colon (a,b) \to S^2$ を弧長パラメータ表示された曲線とする．$\frac{d^2c}{dt^2} \neq 0$ を示し，曲率 κ，捩率 τ が $\tau^2\kappa^2(\kappa^2 - 1) = (\frac{d\kappa}{dt})^2$ を満たすことを示せ．

問題 6　$c\colon (a,b) \to S^2$ を（定値でない）測地線とする．ベクトルの外積 $v = c \times \frac{dc}{dt}$ は t によらないこと，また $v \neq 0$ であることを示せ．このことを用いて c の像が大円の一部であることを示せ．(大円とは S^2 と原点を通る平面との交わりとして得られる S^2 上の円である．)

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的．

問題 7 (x,y) 平面内の $x>0$ の部分に含まれる 1 次元多様体 C を y 軸の周りに回転させて得られる曲面 M を考える．M は 2 次元多様体であることを示せ．また C を M の部分集合と見たとき，局所的には M 上の測地線（の像）になることを示せ．さらに $p\in C$ を回転させて得られる M 上の曲線が測地線になるための条件を求めよ．

問題 8 C^∞ 級曲線 $c\colon[a,b]\to M$ および接ベクトル $v\in T_{c(a)}M$ に対して，c に沿ったベクトル場 $X\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$ であって $X(a)=v$, $\nabla_t X(t)=0$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ．$v=X(a)\in T_{c(a)}M$ に対して $X(b)\in T_{c(b)}M$ を対応させる写像を c に沿った**平行移動**という．平行移動は内積を保つ直交変換であることを示せ．

問題 9 (レポート問題 2023 年 1 月 17 日 17:00 締め切り) S^2 上の曲線 $c_i\colon[0,\frac{\pi}{2}]\to S^2$, $i=1,2,3$ を次で定義する．

$$c_1(t)=(\cos t,\sin t,0),\quad c_2(t)=(0,\cos t,\sin t),\quad c_3(t)=(\sin t,0,\cos t)$$

(1) S^2 の点 $(1,0,0)=c_1(0)$ での接ベクトル $v_0=(0,a,b)$ の c_1 にそった平行移動 $v_1\in T_{(0,1,0)}S^2$ を求めよ.（平行移動の定義は前問を参照.）

(2) v_1 の c_2 に沿った平行移動を $v_2\in T_{(0,0,1)}S^2$ とし，v_2 の c_3 に沿った平行移動を $v_3\in T_{(1,0,0)}S^2$ とする．v_2,v_3 を求めよ．

問題 10 ($\star$) $V\subset\mathbb{R}^2$ を開集合，$f\colon V\to M$ を曲面 $M\subset\mathbb{R}^3$ のパラメータ付けとする．(x^1,x^2) を $V\subset\mathbb{R}^2$ の標準座標とする．$g_{i,j}(x)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\cdot\frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$ とおき，行列 $(g_{i,j}(x))$ の逆行列の成分を $g^{i,j}(x)$ と書く．また $\Gamma^k_{i,j}(x)=\frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$ とおく．$c(t)=f(x^1(t),x^2(t))$ と座標表示される曲線 c が測地線であることと，$x(t)=(x^1(t),x^2(t))$ が次を満たすことは同値であることを示せ.

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}(t)+\sum_{i,j}\Gamma^k_{i,j}(x(t))\frac{dx^i}{dt}(t)\frac{dx^j}{dt}(t)=0$$

問題 11 点 $p\in M$ とその点での接ベクトル $v\in T_pM$ を任意に与えるとき，ある $\epsilon>0$ と測地線 $c\colon(-\epsilon,\epsilon)\to M$ が存在して，$c(0)=p$, $\frac{dc}{dt}(0)=v$ を満たすことを示せ．さらに，そのような測地線が二つあったとすると，それらは定義域の共通部分で一致することを示せ.

問題 12 ($\star$) $M\subset\mathbb{R}^3$ をコンパクト曲面とする．M のある開近傍 $U\subset\mathbb{R}^3$ で次の性質をもつものが存在することを示せ．任意の $p\in U$ に対して $\min\{|p-q|\mid q\in M\}$ の最小値を達成する $q=:f(p)\in M$ がただ一つ存在する．さらに p に対して $f(p)\in M$ を対応させる写像 $f\colon U\to M$ は C^∞ 級である．M がコンパクトでないときはどうか.

問題 13 $c\colon[a,b]\to M$ を C^∞ 級曲線，$X\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$ を c に沿ったベクトル場で $X(a)=X(b)=0$ を満たすものとする．このときある $\epsilon>0$ と C^∞ 級写像 $\tilde{c}\colon[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)\to M$ であって，$\tilde{c}(t,0)=c(t)$, $\tilde{c}(a,s)=c(a)$, $\tilde{c}(b,s)=c(b)$, $\frac{\partial\tilde{c}}{\partial s}(t,0)=X(t)$ を満たすものが存在することを示せ.

問題 14 ($\star$) $\{x^2+y^2=z^2\}\setminus\{(0,0,0)\}$ 上の測地線を全て決定せよ.

幾何学入門演習　No.13 解答例

問題 1 平面 $\mathbb{R}^2$ の平行移動と原点中心の回転は等長変換なので，$p = (p_1, 0), q = (q_1, 0)$ として良い．このとき，

$$
\begin{aligned}
L(c) &= \int_0^1 \left| \frac{dc}{dt}(t) \right| dt = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dc_1}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dc_2}{dt}(t)\right)^2} dt \\
&\geq \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dc_1}{dt}(t)\right)^2} dt \\
&\geq \left| \int_0^1 \frac{dc_1}{dt}(t) dt \right| = |c_1(1) - c_1(0)| = |q - p|
\end{aligned}
$$

となる．

問題 2 問題 1 で等号が成立すると仮定する．問題 1 の解答例にあるように，$p = (p_1, 0)$, $q = (q_1, 0)$ と仮定してよい．さらに $q_1 \geq p_1$ と仮定することもできる．問題 1 の解答例の不等号は全て等号でなければならないから，

$$
\frac{dc_2}{dt} = 0, \quad \frac{dc_1}{dt} \text{ の符号は一定}
$$

つまり，$c_2(t) = 0$ で，$c_1(t)$ は広義単調増加あるいは広義単調減少のどちらかである．$c_1(0) = p_1 \leq q_1 = c_1(1)$ であるから，c_1 は広義単調増加関数である．$q_1 = p_1$ ならば $c_1(t)$ は定数より，$f(t) = t$ が題意を満たす．$q_1 > p_1$ ならば

$$
c(t) = (c_1(t), 0) = \left(1 - \frac{c_1(t) - p_1}{q_1 - p_1}\right) p + \frac{c_1(t) - p_1}{q_1 - p_1} q
$$

より $f(t) = \frac{c_1(t) - p_1}{q_1 - p_1}$ が題意を満たす．

問題 3 測地線の方程式 $\nabla_t \frac{dc}{dt} = 0$ を使って，

$$
\frac{d}{dt}\left|\frac{dc}{dt}\right|^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dc}{dt} \cdot \frac{dc}{dt}\right) = 2\left(\frac{d}{dt}\frac{dc}{dt}\right) \cdot \frac{dc}{dt} = 2\left(\nabla_t \frac{dc}{dt}\right) \cdot \frac{dc}{dt} = 0
$$

途中で，$\frac{dc}{dt} \in T_{c(t)}M$ より，$\frac{d}{dt}\frac{dc}{dt}$ を $\nabla_t \frac{dc}{dt} = (\frac{d}{dt}\frac{dc}{dt})^{\parallel}$ に置き換えてよいことを用いた．従って $|\frac{dc}{dt}|$ は t によらない．

問題 4 $v = \frac{dc}{dt}$ とおき，$\kappa := \left|\frac{dv}{dt}\right|$ と定義する．条件より $\kappa > 0$.

$$
n := \frac{1}{\kappa}\frac{dv}{dt}, \qquad b := v \times n = \frac{dc}{dt} \times n
$$

と定義する．$|v|^2 = |\frac{dc}{dt}|^2 = 1$ を微分して，$v \cdot \frac{dv}{dt} = 0$ であるから，v と n は直交する．従って $\{v, n, b\}$ は正規直交基底となる．さらに $|n|^2 = 1$ を微分すると $\frac{dn}{dt} \cdot n = 0$．つ

まり $\frac{dn}{dt}$ は n と直交するため，v と b の一次結合で表される．ρ, τ を一次結合の係数として定める．

$$\frac{dn}{dt} = \rho v + \tau b$$

ここで

$$\rho = \frac{dn}{dt} \cdot v = \frac{d(n \cdot v)}{dt} - n \cdot \frac{dv}{dt} = -\kappa.$$

従って

$$\frac{dn}{dt} = -\kappa v + \tau b$$

を得る．最後に

$$\begin{aligned}\frac{db}{dt} &= \frac{d}{dt}(v \times n) = \frac{dv}{dt} \times n + v \times \frac{dn}{dt} \\ &= \kappa n \times n + v \times (-\kappa v + \tau b) = \tau(v \times b) = \tau(v \times (v \times n)) \\ &= -\tau n\end{aligned}$$

以上で全ての求められる性質が示された．

問題 5 問題 4 の解答と同じ記号を使う．$|c|^2 = 1$ を微分して $c \cdot v = 0$．これをさらに微分し $|v|^2 + c \cdot \frac{dv}{dt} = 0$．すなわち

$$1 + \kappa c \cdot n = 0 \tag{$\star$}$$

従って

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \kappa n \neq 0.$$

さらに ($\star$) を微分して

$$\frac{d\kappa}{dt} c \cdot n + \kappa v \cdot n + \kappa c \cdot (-\kappa v + \tau b) = 0$$

$c \cdot v = 0, v \cdot n = 0$ より

$$\frac{d\kappa}{dt}(c \cdot n) + \kappa\tau(c \cdot b) = 0$$

($\star$) から $c \cdot n = -1/\kappa$ を用いると，

$$\frac{d\kappa}{dt} = \kappa^2 \tau (c \cdot b)$$

v, n, b が正規直交基底であったことから，

$$1 = |c|^2 = (c \cdot v)^2 + (c \cdot n)^2 + (c \cdot b)^2 = (c \cdot n)^2 + (c \cdot b)^2 = \frac{1}{\kappa^2} + (c \cdot b)^2$$

これに $\kappa^4 \tau^2$ をかけ，1 つ前の式を用いると

$$\kappa^4 \tau^2 = \kappa^2 \tau^2 + \left(\frac{d\kappa}{dt}\right)^2$$

これは問題に与えた式と同じ．

問題 6 c は測地線であるから，定義より $(\frac{d^2c}{dt^2})^{\|}=0$．$T_{c(t)}S^2=c(t)^{\perp}$ であることに注意すれば，これは $\frac{d^2c}{dt^2}$ がベクトル c と平行であることを意味する．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}v &= \frac{d}{dt}\left(c\times\frac{dc}{dt}\right)\\ &= \frac{dc}{dt}\times\frac{dc}{dt}+c\times\frac{d^2c}{dt^2}=0\end{aligned}$$

より v は t によらないベクトルである．$|c|^2=1$ を微分することにより $c\cdot\frac{dc}{dt}=0$ が得られるため，c と $\frac{dc}{dt}$ は直交する．c は定値でないことから，$\frac{dc}{dt}$ はゼロでないベクトルである.（$|\frac{dc}{dt}|$ は t によらないことに注意せよ.）従って $v=c\times\frac{dc}{dt}$ はゼロベクトルではない．v の定義から

$$v\cdot c=0$$

であるから，c は定ベクトル v に直交する平面に含まれる．すなわち c は大円に含まれる．

問題 7 M が2次元多様体であること．$C\subset\mathbb{R}^2$ が1次元多様体より，任意の点 $p\in C$ に対し，p の開近傍 $U\subset\mathbb{R}^2$ および $\mathbb{R}$ の開集合 V から $C\cap U$ への同相写像 $\phi=(\phi_1,\phi_2)\colon V\to C\cap U$ であって，ϕ は C^∞ 級であり，各点 $t\in V$ に対して $d_t\phi$ が単射になるものが存在する．ここで U を必要なら小さく取り直して $U\subset\{x>0\}$ としてよい．$b-a<2\pi$ となる実数 a,b に対して，M のパラメータ付け $\varphi\colon V\times(a,b)\to M$ を次で定義する．

$$\varphi(t,\theta)=(\phi_1(t)\cos\theta,\phi_2(t),\phi_1(t)\sin\theta)$$

M はこのようなパラメータ付けの像で覆われる．φ がパラメータ付けの性質をもつことを示そう．まず φ は明らかに単射 C^∞ 級写像である．また $p\colon\mathbb{R}\to S^1$ を $p(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ で定めるとき，演習 No.5 の問題 1 より $p((a,b))\subset S^1$ は開集合で $p|_{(a,b)}\colon(a,b)\to p((a,b))$ は同相写像．φ の像は M と $\mathbb{R}^3$ の開集合

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(\sqrt{x^2+z^2},y)\in U,\ \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}(x,z)\in p((a,b))\}$$

の交わりであるから開集合である．また φ の逆写像 $W\cap M\to V\times(a,b)$ は

$$\varphi^{-1}(x,y,z)=(\phi^{-1}(\sqrt{x^2+z^2},y),(p|_{(a,b)})^{-1}(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}))$$

で与えられるため連続．従って φ は像への同相写像．さらに φ の微分は

$$(J\varphi)_{(t,\theta)}=\begin{pmatrix}\phi_1'(t)\cos\theta & \phi_2'(t) & \phi_1'(t)\sin\theta\\ -\phi_1(t)\sin\theta & 0 & \phi_1(t)\cos\theta\end{pmatrix}$$

で与えられる．$\phi_2'(t)\neq0$ ならば

$$\begin{pmatrix}\phi_1'(t)\cos\theta & \phi_2'(t)\\ -\phi_1(t)\sin\theta & 0\end{pmatrix}\quad\text{または}\quad\begin{pmatrix}\phi_2'(t) & \phi_1'(t)\sin\theta\\ 0 & \phi_1(t)\cos\theta\end{pmatrix}$$

が正則行列となる．また $\phi_2'(t) =$ のときは $\phi_1'(t) \neq 0$ であり，

$$\begin{pmatrix} \phi_1'(t)\cos\theta & \phi_1'(t)\sin\theta \\ -\phi_1(t)\sin\theta & \phi_1(t)\cos\theta \end{pmatrix}$$

が正則行列となる．ここで $\phi_1(t) > 0$ であることを使った．以上より $\mathrm{rank}(J\varphi)_{(t,\theta)} = 2$ であり，φ はパラメータ付けの条件を全て満たすことが示された．

<u>C が局所的に M 上の測地線の像であること</u>．C は上のパラメータ付け ϕ を用いて局所的に $c\colon V \to M$, $c(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), 0)$ の像である．$c'(t) \neq 0$ であるから，パラメータを取り換えて t は弧長パラメータであるとしてよい．このとき $\frac{dc}{dt}(t) = \left(\frac{d\phi_1}{dt}(t), \frac{d\phi_2}{dt}(t), 0\right)$ は c に沿ったベクトル場で，その共変微分は

$$\nabla_t \frac{dc}{dt}(t) = \left(\frac{d}{dt}\frac{dc}{dt}(t)\right)^{\parallel} = (\phi_1''(t), \phi_2''(t), 0)^{\parallel}.$$

$|(\phi_1'(t), \phi_2'(t), 0)|^2 = 1$ を微分することにより，$(\phi_1'(t), \phi_2'(t), 0)$ と $(\phi_1''(t), \phi_2''(t), 0)$ は直交することが分かる．一方 $c(t)$ での M の接空間は（上記の φ を用いると）

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,0) = (\phi_1'(t), \phi_2'(t), 0) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(t,0) = (0, 0, \phi_1(t))$$

を基底とするベクトル空間である．従って $(\phi_1''(t), \phi_2''(t), 0) \perp T_{c(t)}M$ であり，

$$\nabla_t \frac{dc}{dt}(t) = 0$$

が示された．

<u>$p \in C$ を回転させて得られる M 上の曲線が測地線になるための条件</u>．上のように p の周りの C のパラメータ付け ϕ をとり，$p = (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ とする．このとき，$p \in C$ を回転させて得られる M 上の曲線は $c(\theta) = (\phi_1(t_0)\cos\theta, \phi_2(t_0), \phi_1(t_0)\sin\theta)$ と書ける．速度ベクトルの長さ $|\frac{dc}{d\theta}(\theta)| = \phi_1(t_0)$ は θ によらないため，c の像が測地線の像と一致するとすれば，c 自身も測地線となる．共変微分 $\nabla_\theta \frac{dc}{d\theta}(\theta)$ を計算すると，

$$\nabla_\theta \frac{dc}{d\theta}(\theta) = \left(\frac{d}{d\theta}\frac{dc}{d\theta}(\theta)\right)^{\parallel} = (-\phi_1(t_0)\cos\theta, 0, -\phi_1(t_0)\sin\theta)^{\parallel}$$

より，c が測地線となる条件は $(-\phi_1(t_0)\cos\theta, 0, -\phi_1(t_0)\sin\theta)^{\parallel} = 0$ である．接空間 $T_{c(\theta)}M$ の基底は（上の M のパラメータ付け φ を用いて）

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t_0,\theta) = (\phi_1'(t_0)\cos\theta, \phi_2'(t_0), \phi_1'(t_0)\sin\theta)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(t_0,\theta) = (-\phi_1(t_0)\sin\theta, 0, \phi_1(t_0)\cos\theta_0)$$

で与えられる．c が測地線であることと $(-\phi_1(t_0)\cos\theta, 0, -\phi_1(t_0)\sin\theta)$ がこれらのベクトルと直交することは同値であり，内積を計算することによりそれは

$$\phi_1'(t_0)\phi_1(t_0) = 0$$

と同値である．$\phi_1(t_0) > 0$ より求める条件は $\phi_1'(t_0) = 0$，すなわち曲線 C 上の x 座標の定める関数 $x\colon C \to \mathbb{R}$ が p で極値をとること，である．

問題 8 パラメータ付け $f\colon V \to M$（$V \subset \mathbb{R}^2$ は開集合）を用いて曲線が $c(t) = f(x(t))$ の形に座標表示されるとする．V の座標を (x^1, x^2) とし，f の偏微分係数を $\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ と表すことにする．点 $c(t)$ における接空間は $\partial_1 f(x(t)), \partial_2 f(x(t))$ を基底として持つから，$c(t)$ に沿った任意のベクトル場は

$$X(t) = a^1(t)\partial_1 f(x(t)) + a^2(t)\partial_2 f(x(t))$$

の形に書くことができる．ここで $a^1(t), a^2(t)$ は C^∞ 級関数である．このとき方程式 $\nabla_t X(t) = (\frac{d}{dt}X(t))^\parallel = 0$ は

$$\sum_i \frac{da^i}{dt}(t)\partial_i f(x(t)) + \sum_{i,j} a^i(t)\frac{dx^j}{dt}(t)(\partial_j\partial_i f(x(t)))^\parallel = 0 \qquad (\star)$$

と同値である．$(\partial_i\partial_j f(x))^\parallel$ は接空間 $T_{f(x)}M$ の元なので，基底 $\{\partial_i f(x)\}$ の一次結合で表すことができる．これを

$$(\partial_i\partial_j f(x))^\parallel = \sum_k \Gamma^k_{i,j}(x)\partial_k f(x)$$

と書く．（$\Gamma^k_{i,j}(x)$ が何になるかは問題 10 で与えられる．）微分方程式 ($\star$) は次のように書き換えられる．

$$\frac{da^k}{dt}(t) + \sum_j \frac{dx^i}{dt}(t)\Gamma^k_{ij}(x(t))a^j(t) = 0$$

これはベクトル値関数 $(a^1(t), a^2(t))$ に対する線形常微分方程式であり，$t = t_0$ での任意の初期値 $(a^1(t_0), a^2(t_0))$ に対して（微分方程式が定義されている t の範囲で）解が一意に存在することが知られている．$[a,b]$ のコンパクト性から，曲線 $c\colon [a,b] \to M$ の像は有限個の座標近傍（パラメータ付けの像）で覆うことができる．各座標近傍で上記の微分方程式を解くことにより，任意に与えた $v \in T_{c(a)}M$ に対して $X(a) = v$ を満たす c に沿った平行ベクトル場 $X(t)$ （つまり $\nabla_t X(t) = 0$ を満たす）がただ一つ存在することが分かる．

平行移動が内積を保つことを示す．任意に 2 つの接ベクトル $v_1, v_2 \in T_{c(a)}M$ をとる．上で示したことから，c に沿った 2 つのベクトル場 $X_1, X_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ であって $X_i(a) = v_i$, $\nabla_t X_i(t) = 0$ $(i = 1, 2)$ を満たすものがそれぞれ一意に存在し，v_1, v_2 の平行移動はそれぞれ $X_1(b), X_2(b)$ である．平行移動が内積を保つことを示すには，

$$\frac{d}{dt}(X_1(t)\cdot X_2(t)) = 0$$

を示せばよいが，左辺は

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt}(t)\cdot X_2(t) + X_1(t)\cdot\frac{dX_2}{dt}(t) &= \left(\frac{dX_1}{dt}(t)\right)^\parallel \cdot X_2(t) + X_1(t)\cdot\left(\frac{dX_2}{dt}(t)\right)^\parallel \\ &= \nabla_t X_1(t)\cdot X_2(t) + X_1(t)\cdot\nabla_t X_2(t) = 0\end{aligned}$$

よりゼロとなる．以上より平行移動は内積を保ち，直交変換であることが示された．

問題 9 (1) 一般に $p \in S^2$ の接空間は $T_pS^2 = p^\perp$ で与えられることに注意する．従って $c_1(t)$ での接空間の基底として $\frac{dc_1}{dt}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $e_3 = (0,0,1)$ がとれる．$c_1(t)$ に沿ったベクトル場は C^∞ 級関数 $a(t)$, $b(t)$ を用いて

$$X_1(t) = a(t)\frac{dc_1}{dt}(t) + b(t)e_3$$

の形に書くことができる．これが方程式 $\nabla_t X_1(t) = 0$ を満たすための条件を求めよう．

$$0 = \nabla_t X_1(t) = \left(\frac{d}{dt}X_1(t)\right)^{\parallel} = \left(\frac{da}{dt}(t)\frac{dc_1}{dt}(t) + \frac{db}{dt}e_3 + a(t)\frac{d^2c_1}{dt^2}\right)^{\parallel}$$

を解けばよいが，$\frac{dc_1}{dt}, e_3 \in T_{c_1(t)}S^2$ であり，また

$$\frac{d^2c_1}{dt^2}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) = -c_1(t) \in (T_{c_1(t)}S^1)^\perp$$

であるから[1]上の微分方程式は

$$0 = \frac{da}{dt}(t)\frac{dc_1}{dt}(t) + \frac{db}{dt}(t)e_3 \iff \frac{da}{dt}(t) = \frac{db}{dt}(t) = 0$$

と同値である．つまり解 $a(t)$, $b(t)$ は定数関数となる．従って初期値 $X_1(0) = (0,a,b)$ を満たす $\nabla_t X_1(t) = 0$ の解は

$$X_1(t) = a\frac{dc_1}{dt} + be_3 = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

で与えられ，$v_0 = (0,a,b)$ の c_1 に沿った平行移動は $v_1 = X_1(\pi/2) = (-a,0,b)$ となる．

(2) 上と同様の方法により，c_2 に沿ったベクトル場 $X_2(t)$ で $X_2(0) = v_1 = (-a,0,b)$, $\nabla_t X_2 = 0$ を満たすものは

$$X_2(t) = b\frac{dc_2}{dt} - ae_1 = (-a, -b\sin t, b\cos t)$$

で与えられるから $v_2 = X_2(\pi/2) = (-a,-b,0)$ となる．また c_3 に沿ったベクトル場 $X_3(t)$ で $X_3(0) = v_2 = (-a,-b,0)$, $\nabla_t X_3 = 0$ を満たすものは

$$X_3(t) = -a\frac{dc_3}{dt} - be_2 = (-a\cos t, -b, a\sin t)$$

で与えられるから $v_3 = X_3(\pi/2) = (0,-b,a)$ となる．

注：$v_0 = (0,a,b) \mapsto v_3 = (0,-b,a)$ は $\frac{\pi}{2}$ 回転の写像となっている．この角度 $\frac{\pi}{2}$ は曲線 c_1, c_2, c_3 の囲む球面三角形の面積に等しい．これは球面にたいする Gauss-Bonnet の定理の例である．

[1] これは c_1 が測地線（大円の一部）であることの反映である．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 計 10 点．以下より細かい部分点は付けない．

(1) 5 点：$c_1(t)$ に沿った平行ベクトル場 $X_1(t)$ が正しく求められていればよい．$X_1(t)$ を天下り的に与えるなど，前問の結果（平行移動の一意性）を仮定した解答も認める．

(2) 5 点： v_2, v_3 が正しく求められている．もし (1) が正しい方法で計算できている場合は，(2) については答えだけで採点してよい．(1) の答え v_1 が間違っていた場合は，(2) については採点しない．

問題 10 $c(t) = f(x^1(t), x^2(t))$ の速度ベクトルは

$$\frac{dc}{dt}(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt}(t)\partial_i f(x(t))$$

で与えられる．ここで $f(x^1, x^2)$ の偏微分を $\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ と書いた．従って測地線の方程式 $\nabla_t \frac{dc}{dt}(t) = (\frac{d}{dt}\frac{dc}{dt}(t))^{\|} = 0$ は

$$\sum_i \frac{d^2x^i}{dt^2}(t)\partial_i f(x(t)) + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt}(t)\frac{dx^j}{dt}(t)(\partial_j\partial_i f(x(t)))^{\|} = 0$$

とかける．ここで

$$(\partial_i\partial_j f(x))^{\|} = \sum_k \Gamma^k_{i,j}(x)\partial_k f(x) \tag{$\star$}$$

であることを示せば，上記の微分方程式は

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}(t) + \sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j}(x(t))\frac{dx^i}{dt}(t)\frac{dx^j}{dt}(t) = 0$$

と書き換えられることが分かる．以下，($\star$) を示すことにする．$(\partial_i\partial_j f(x))^{\|}$ は $T_{f(x)}M$ のベクトルであるから，その基底 $\partial_k f(x)$ を使って展開できることに注意する．まず，$\Gamma^k_{i,j}(x)$ を ($\star$) を満たす展開係数として定めよう．このとき ($\star$) の両辺と $\partial_l f(x)$ の内積をとることで

$$\partial_l f(x)\cdot\partial_i\partial_j f(x) = \sum_k \Gamma^k_{i,j}(x)g_{kl}(x) \tag{$\star\star$}$$

である．一方 $g_{i,j}$ の定義を微分することにより

$$\begin{aligned}
\partial_i g_{lj}(x) &= \partial_i\partial_l f(x)\cdot\partial_j f(x) + \partial_l f(x)\cdot\partial_i\partial_j f(x)\\
\partial_j g_{il}(x) &= \partial_j\partial_i f(x)\cdot\partial_l f(x) + \partial_i f(x)\cdot\partial_j\partial_l f(x)\\
\partial_l g_{ij}(x) &= \partial_l\partial_i f(x)\cdot\partial_j f(x) + \partial_i f(x)\cdot\partial_l\partial_j f(x)
\end{aligned}$$

第 1 行と第 2 行を足してそこから第 3 行を引くと，

$$\partial_i g_{lj}(x) + \partial_j g_{il}(x) - \partial_l g_{ij}(x) = 2\partial_l f(x)\cdot\partial_i\partial_j f(x)$$

従って ($\star\star$) から

$$\sum_k \Gamma^k_{i,j}(x)g_{kl}(x) = \frac{1}{2}(\partial_i g_{lj}(x) + \partial_j g_{il}(x) - \partial_l g_{ij}(x))$$

これを (g_{ij}) の逆行列を使って書き直したものが問題に与えた式

$$\Gamma^k_{i,j}(x) = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}(x)(\partial_i g_{lj}(x) + \partial_j g_{il}(x) - \partial_l g_{ij}(x))$$

である．

問題 11 $p \in M$, $v \in T_pM$ は任意に固定する．$p \in M$ のまわりのパラメータ付け $f\colon V \to M$（$V \subset \mathbb{R}^2$ は開集合）をとる．$f(x_*) = p$ とし，$v = \sum_i v^i \partial_i f(x_*)$ とする．前問の結果から

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}(t) + \sum_{i,j}\Gamma^k_{i,j}(x(t))\frac{dx^i}{dt}(t)\frac{dx^j}{dt}(t) = 0$$

をみたす $x\colon (-\epsilon, \epsilon) \to V$ で初期条件

$$x(0) = x_*, \quad \frac{dx}{dt}(0) = (v^1, v^2)$$

をみたすものの存在を示せばよい．$y^i(t) = \frac{dx^i}{dt}(t)$ とおくと、

$$\text{微分方程式} \quad \begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = y^i \\ \dfrac{dy^k}{dt} = -\displaystyle\sum_{i,j}\Gamma^k_{i,j}(x)y^iy^j \end{cases}$$

$$\text{初期条件} \quad x(0) = x_*, \quad y(0) = (v^1, v^2)$$

という 1 階の常微分方程式に書き直すことができる．常微分方程式の一般論から，十分小さい $\epsilon > 0$ に対して解が $(-\epsilon, \epsilon)$ 上で一意に存在する．ただし，**この常微分方程式は線形でないため，解がどこまでも延長できるとは限らない**ことに注意したい．

次に測地線の大域的な一意性を示そう．$c_i(t)$, $i = 1, 2$ を開区間 (a_i, b_i) で定義された測地線で $a_i < 0 < b_i$ を満たし，$c_1(0) = c_2(0)$, $\frac{dc_1}{dt}(0) = \frac{dc_2}{dt}(0)$ が成り立つと仮定する．このとき $c_1(t) = c_2(t)$ が $t \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ で成立することを示す．解の局所的な一意性から $c_1(t) = c_2(t)$ が $t = 0$ の開近傍で成立する．$c_1(t) \neq c_2(t)$ となる $t \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ が $t > 0$ の範囲に存在したとし，

$$t_* = \inf\{t > 0 \mid c_1(t) \neq c_2(t)\}$$

とおくと $t_* > 0$ である．$[0, t_*)$ 上では $c_1(t) = c_2(t)$ であるから，$c_1(t_*) = c_2(t_*)$ かつ $\frac{dc_1}{dt}(t_*) = \frac{dc_2}{dt}(t_*)$．微分方程式の解の局所的な一意性から，$c_1(t) = c_2(t)$ が t_* の近傍で成立し，これは t_* の定義と矛盾する．$c_1(t) \neq c_2(t)$ となる $t \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ が $t < 0$ の範囲に存在しても同様に矛盾する．

問題 12 まず M はコンパクトとする．任意の $p \in \mathbb{R}^3$ に対して M 上の C^∞ 級関数 $k_p(q) = |p - q|^2$ は最小値をある $q \in M$ で達成する．その点では k_p の微分は消えて

いなければならないから，$d_q k_p = 0$ である．$\tilde{k}_p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $\tilde{k}_p(x) = |p-x|^2$ で定義し，$i\colon M \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とすると $k_p = \tilde{k}_p \circ i$．従って $q \in M$ に対して

$$\begin{aligned} 0 = d_q k_p = d_q \tilde{k}_p \circ d_q i &\iff T_q M = \mathrm{Im}(d_q i) \subset \mathrm{Ker}(d_q \tilde{k}_p) \\ &\iff T_q M \perp p - q \end{aligned}$$

ここで $d_q \tilde{k}_p$ は行列 $(\frac{\partial \tilde{k}_p}{\partial q_i}) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ で表現されることを使った．特に k_p の最小値を達成する点 q について

$$T_p M \perp q - p$$

であることが分かる．

部分集合 $N \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ を次のように定義する．

$$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid x \in M, y \in (T_x M)^{\perp}\}.$$

これは M の法ベクトル束と呼ばれる．N は3次元多様体であることをみよう．M は2次元多様体なので，M の各点 $q \in M$ に対して開近傍 $U \subset \mathbb{R}^3$ と C^∞ 関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が存在して $M \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ かつ $x \in M \cap U$ に対して $d_x F \neq 0$ となる．このとき

$$\begin{aligned} N \cap (U \times \mathbb{R}^3) &= \{(x,y) \in U \times \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 0, y \in \mathbb{R}(\partial_1 F(x), \partial_2 F(x), \partial_3 F(x))\} \\ &= \{(x,y) \in U \times \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 0, G(x,y) = 0, H(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

ここで $G(x,y) = y_1 \partial_2 F(x) - y_2 \partial_1 F(x)$, $H(x,y) = y_2 \partial_3 F(x) - y_3 \partial_2 F(x)$ とおいた．N の各点 (x,y) でベクトル値関数 $(F(x), G(x,y), H(x,y))$ のヤコビ行列のランクが3であることは容易に分かり，N が多様体であることが分かる．N の点 (x,y) での接空間は

$$\begin{aligned} T_{(x,y)} N &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid d_x F(u) = 0, d_{(x,y)} G(u,v) = d_{(x,y)} H(u,v) = 0\} \\ &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid u \in T_x M, v \in (T_x M)^{\perp}\} \end{aligned}$$

であることに注意しておく．

次に写像

$$\pi\colon N \to \mathbb{R}^3, \quad \pi(x,y) = x + y$$

を考える．$(x,y) \in N$ における微分は $d_{(x,y)} \pi(u,v) = u + v$ で与えられ，これは常に同型となる．$\epsilon > 0$ に対して $B_\epsilon(N) = \{(x,y) \in N \mid |y| < \epsilon\}$ とおく．十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $\pi|_{B_\epsilon(N)}\colon B_\epsilon(N) \to \mathbb{R}^3$ はその像への微分同相写像であることを示そう．$\pi|_{B_\epsilon(N)}$ が単射となる $\epsilon > 0$ が存在することを示す．もしそうでなければ，点列 $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n) \in B_{1/n}(N)$ が存在して $x_n + y_n = x'_n + y'_n$, $(x_n, y_n) \neq (x'_n, y'_n)$ となる．ここで $|y_n| < 1/n$, $|y'_n| < 1/n$ より $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y'_n = 0$ である．M のコンパクト性から（必要なら部分列をとって）x_n, x'_n は収束すると仮定してよい．x_n, x'_n の収束先を x, x' とする．$x_n + y_n = x'_n + y'_n$ であったから $x = x'$ で

ある．ここで (x_n, y_n), (x'_n, y'_n) は同じ点 $(x, 0)$ に収束する点列で $(x_n, y_n) \neq (x'_n, y'_n)$, $\pi(x_n, y_n) = \pi(x'_n, y'_n)$ を満たす．一方，逆関数定理より $(x, 0)$ の近傍上では π は単射でなければならない．これは矛盾である．従ってある $\epsilon > 0$ に対して $\pi|_{B_\epsilon(N)}$ は単射となる．また逆関数定理から $U := \pi(B_\epsilon(N))$ は開集合であり，$\pi|_{B_\epsilon(N)}$ の逆写像は C^∞ 級．従って $\pi|_{B_\epsilon(N)} \colon B_\epsilon(N) \to U$ は微分同相写像である．

最後に $p \in U$ に対して $f(p) = p_1(\pi|_{B_\epsilon(N)})^{-1}(p)$ は $k_p(q) = |p - q|^2$ の最小値を達成するただ一つの M の点であることを示す．ここで $p_1 \colon N \to M$ は第 1 成分への射影である．$(\pi|_{B_\epsilon(N)})^{-1}(p) = (x, y)$ とおくと，$p = x + y$, $|y| < \epsilon$ であるから，$k_p(x) = |x - p|^2 = |y|^2 < \epsilon^2$．$k_p$ の最小値を達成する $q_* \in M$ をとると，$k_p(q_*) = |p - q_*|^2 < \epsilon^2$ でなければならない．また既に示したことから $(q_*, p - q_*) \in N$ であり，特に $(q_*, p - q_*) \in B_\epsilon(N)$．ここで (x, y), $(q_*, p - q_*)$ は共に $B_\epsilon(N)$ の点であって $\pi(x, y) = p = \pi(q_*, p - q_*)$ を満たすから，$(x, y) = (q_*, p - q_*)$．従って $q_* = x$ となる．以上で M がコンパクトの場合は示された．

主張は M がコンパクトでなくても正しい．各点 $x \in M$ に対して，x 中心の半径 3ϵ の開球体 $B_{3\epsilon}(x)$ が存在して $B_{3\epsilon(x)} \cap M$ は $B_{3\epsilon}(x)$ 上の C^∞ 級関数のゼロ点として表される.（つまり $M \cap B_{3\epsilon}(x)$ は $B_{3\epsilon}(x)$ 内の閉集合である.）ここで $p \in B_\epsilon(x)$ に対して，$k_p \colon M \to \mathbb{R}$ はコンパクト集合 $M \cap \overline{B_{2\epsilon}(x)}$ 上で最小値を達成することに注意しよう．$M \setminus \overline{B_{2\epsilon}(x)}$ の点 y では $k_p(y) > \epsilon^2 > k_p(x)$ となり，最小値はとらない．上記と同様の議論をする（詳細は省略）ことにより，ある x の開近傍 $U_x \subset B_\epsilon(x)$ が存在して，U_x の任意の点 p に対して k_p の最小値を達成する点 $f(p) \in M$ がただ一つ存在し，また対応 $p \mapsto f(p)$ は C^∞ 級であることが示せる．U はこのような U_x の和集合ととればよい．

問題 13 問題 12 の性質を持つ M の開近傍 U と C^∞ 級写像 $f \colon U \to M$ をとる．写像 $g \colon [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を $g(t, s) = c(t) + sX(t)$ とおく．$g^{-1}(U)$ は開集合であり，$[a, b]$ はコンパクトなので，ある $\epsilon > 0$ が存在して $g([a, b] \times (-\epsilon, \epsilon)) \subset U$．このとき $\tilde{c} := f \circ g|_{[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)}$ とおく．$\tilde{c}(t, 0) = c(t)$, $\tilde{c}(a, s) = c(a)$, $\tilde{c}(b, s) = c(b)$ は明らか．また

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(t, 0) = \frac{d}{ds} f(c(t) + sX(t))\bigg|_{s=0} = d_{c(t)} f(X(t))$$

であるが，包含写像 $i \colon M \to \mathbb{R}^3$ に対して $f \circ i = \mathrm{id}$ であるから $x \in M$ において $d_x f|_{T_x M} = \mathrm{id}$．従って上の値は $X(t)$ に等しい．

別解：$\tilde{c}(t, s)$ を次の測地線方程式の解ととることもできる．(問題 11 参照)

$$\nabla_s \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(t, s) \right) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(t, 0) = X(t)$$

問題 14 (略解) 円錐は局所的に $\mathbb{R}^2$ と等長同型であることを使えばよい．具体的には

$$F \colon \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0,\ \theta \in (0, \sqrt{2}\pi)\} \to \{(x, y, z) \neq 0 \mid x^2 + y^2 = z^2\},$$
$$(r\cos\theta, r\sin\theta) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(r\cos(\sqrt{2}\theta), r\sin(\sqrt{2}\theta), r)$$

が等長同型を与えるので，これによる直線の像が測地線.

幾何学入門演習　No.14　(2023年1月18日)[1]

今回の演習では，M を $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた滑らかな曲面（2次元多様体）とする．

定義　Gauss写像 $n\colon M \to S^2$ とは点 $p \in M$ に対してその点での単位法ベクトル $n(p) \in \mathbb{R}^3$（$T_pM \perp n(p)$, $|n(p)| = 1$ を満たすベクトル）を対応させるものである．点 $p \in M$ での shape operator とは n の微分で与えられる写像 $S(p) = d_pn\colon T_pM \to T_{n(p)}S^2 = n(p)^{\perp} = T_pM$ のことである．

定義　shape operator S の固有値 κ_1, κ_2 を主曲率，$H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(S)$ を平均曲率，$K = \kappa_1\kappa_2 = \det S$ を Gauss曲率という．

定義　T_pM の内積 $(u, v) = u \cdot v$ を第1基本形式（リーマン計量）という．shape operator の定義する T_pM 上の対称双一次形式 $(S(u), v)$ を第2基本形式という．

問題 1 $V \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，$f\colon V \to M$ をパラメータ付けとする．x^1, x^2 を $V \subset \mathbb{R}^2$ の座標とし，$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $\partial_i n = \frac{\partial n(f(x))}{\partial x^i}$ と書くことにする．伝統的な記法によると，接空間の基底 $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ に関して第1基本形式は次のように表示され，

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f \cdot \partial_1 f & \partial_1 f \cdot \partial_2 f \\ \partial_2 f \cdot \partial_1 f & \partial_2 f \cdot \partial_2 f \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I} = E(dx^1)^2 + 2F dx^1 dx^2 + G(dx^2)^2$$

第2基本形式は次のように表示される．

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 n \cdot \partial_1 f & \partial_1 n \cdot \partial_2 f \\ \partial_2 n \cdot \partial_1 f & \partial_2 n \cdot \partial_2 f \end{pmatrix}, \quad \mathrm{II} = L(dx^1)^2 + 2M dx^1 dx^2 + N(dx^2)^2$$

これらの量 E, F, G, L, M, N を用いてガウス曲率 K と平均曲率 H を表せ．

問題 2 この問題では第2基本形式の幾何学的意味を与える．$u \in T_pM$ に対して測地線 $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ であって $c(0) = p$, $u = \frac{dc}{dt}(0)$ となるものをとる．c の曲率を $\kappa = -\frac{d^2c}{dt^2} \cdot n$ で定めるとき，$(S(u), u) = \kappa$ であることを示せ．

問題 3 滑らかな2変数関数 $f(x, y)$ のグラフ $z = f(x, y)$ として与えられる曲面 M について，その Gauss 曲率を偏導関数 f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を用いて表せ．

問題 4 (No.13の問題8,10参照) M 上のベクトル場とは C^∞ 級関数 $X\colon M \to \mathbb{R}^3$ であって，各点 $p \in M$ に対して $X(p) \in T_pM$ を満たすものである．曲面のパラメータ付け $f\colon V \to M$ に関してベクトル場 X は V 上の C^∞ 級関数 $X^i(x)$ を用いて $X(f(x)) = \sum_{i=1}^2 X^i(x)\partial_i f(x)$ と表示できる．x^i 方向へのベクトル場 X の共変微分 $\nabla_i X$ を $(\nabla_i X)(f(x)) = \left(\frac{\partial X(f(x))}{\partial x^i}\right)^{\parallel}$ と定める（ここで上付きの $\parallel$ は直交分解 $\mathbb{R}^3 = T_{f(x)}M \oplus T_{f(x)}M^{\perp}$ における $T_{f(x)}M$ 成分を表す）．$\nabla_i X$ は $f(V)$ 上のベクトル場を定める．このとき

$$(\nabla_i X)(f(x)) = \sum_k \left(\partial_i X^k(x) + \sum_j \Gamma^k_{i,j}(x) X^j(x) \right) \partial_k f(x)$$

を示せ．但し，$\Gamma^k_{i,j}(x)$ は No.13 の問題10で導入したもの．

[1] $\star$ はやや難，★ は難しい．それ以外は易しい or 標準的．

問題 5 前問の設定で考える．$g_{i,j} = \partial_i f \cdot \partial_j f$ とおくとき，

$$((\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)\partial_1 f, \partial_2 f) = -K(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)$$

が成り立つことを示せ．ここで左辺の $(\cdot,\cdot)$ は T_pM の内積で，$(\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)\partial_1 f$ は $\partial_1 f$ を $f(V)$ 上のベクトル場とみて共変微分したもの．前問の結果とこの等式より，Gauss 曲率は第 1 基本形式 $(g_{i,j})$ のみから定まる，という Gauss の「驚きの定理」が分かる．

問題 6 前問の設定で考える．M 上のベクトル場 X に対して，$R_{12}X := (\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)X$ の点 $p \in f(V) \subset M$ での値は $X(p)$ のみに依存することを示せ．従って R_{12} は線形写像 $T_pM \to T_pM$ を定める．さらに 2 つの接ベクトル $u, v \in T_pM$ に対して $(R_{12}u, v) = -(u, R_{12}v)$ を示せ．R_{12} も曲率と呼ばれる．

問題 7 点 $p \in M$ を通る直線 ℓ で M に含まれるものが存在するとき，$K(p) \leq 0$ を示せ．

問題 8 $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$ の各点に対してその点を通り M に含まれる直線が存在することを示せ．また M の各点での Gauss 曲率を求めよ．このように直線で覆われる曲面を ruled surface という．

問題 9 (レポート問題 2023 年 1 月 24 日 17:00 締め切り) $f(t,s) = (x(t), y(t), s)$ の形のパラメータ付けを持つ曲面（柱面）の点 $f(t,s)$ での主曲率，Gauss 曲率，平均曲率を求めよ．但し，$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ と仮定する．

問題 10 パラメータ付け $f\colon V \to M$ で与えられる曲面の変形を考える．V 上の滑らかな関数 g と実数 s に対して f の変形 $f_s(x) = f(x) + sg(x)n(f(x))$ を考える．開集合 $R \subset V$ で $\overline{R}$ はコンパクトであり $\overline{R} \subset V$ となるものをとる．$f_s(R)$ の面積を $A(s) = \int_R |\partial_1 f_s \times \partial_2 f_s| dx^1 dx^2$ とおく．このとき任意の滑らかな関数 g に対して $\frac{d}{ds}A(s)|_{s=0} = 0$ となることは，$f(R)$ 上で平均曲率 $H = 0$ となることと同値であることを示せ．平均曲率がゼロになる曲面を極小曲面という．

問題 11 (x,z) 平面上の曲線 $c(t) = (x(t), z(t))$ を z 軸を中心に回転させて得られる回転面 M を考え，$f(t,s) = (x(t)\cos s, x(t)\sin s, z(t))$ をそのパラメータ付けとする．ただし，$c(t)$ は弧長パラメータ表示 $x'(t)^2 + z'(t)^2 = 1$ であり，$x(t) > 0$ とする．M の主曲率，Gauss 曲率，平均曲率を求めよ．

問題 12 前問の結果を用いて Gauss 曲率がいたるところ -1 に等しい回転面の例を与えよ．また極小曲面（$H = 0$）になる回転面の例を与えよ．

問題 13 曲面 M が正の定数倍で保たれるとする．つまり任意の $c > 0$ に対して $cM = M$ とする．このとき M のガウス曲率はいたるところ 0 であることを示せ．

問題 14 曲面 M 上の測地 n 角形（辺が測地線で与えられる n 角形）P に対して，Gauss-Bonnet の定理

$$\int_P K dA = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) - 2\pi$$

を示せ．但し α_i は i 番目の頂点での外角を表す．

幾何学入門演習　No.14 解答例

問題 1 $S(\partial_j f) = \sum_i s_{ij}\partial_i f$ により行列 (s_{ij}) を定義する．s_{ij} は基底 $\{\partial_i f\}$ に関する shape operator の行列表示である．このとき，第 2 基本形式は

$$(S\partial_i f, \partial_j f) = \sum_k s_{ki}(\partial_k f, \partial_j f) = \sum_k (\partial_j f, \partial_k f)s_{ki}$$

で与えられる．行列で書くと

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

この行列のトレースと行列式を見て，

$$H = \frac{-2FM + EN + GL}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

が従う．

問題 2 パラメータ付け $f\colon V \to M$ によって $c(t) = f(x(t))$ と書けているとする．$\frac{dc}{dt}(t) \cdot n(c(t)) = 0$ を微分して

$$\frac{d^2c}{dt^2}(t) \cdot n(c(t)) + \sum_i \frac{dc}{dt}(t) \cdot \frac{\partial(n \circ f)}{\partial x^i}(x(t))\frac{dx^i}{dt}(t) = 0$$

ここで $t = 0$ とおくと，$\frac{dc}{dt}(0) = u$，$\frac{\partial(n\circ f)}{\partial x^i} = S(\partial_i f)$ より，

$$\frac{dc^2}{dt^2}(0) \cdot n(c(0)) + \sum_i u \cdot S(\partial_i f(x(0)))\frac{dx^i}{dt}(0) = 0$$

$u = \frac{dc}{dt}(0) = \sum_i \partial_i f(x(0))\frac{dx^i}{dt}(0)$ を使って，

$$\frac{d^2c}{dt^2}(t) \cdot n(c(t)) + u \cdot S(u) = 0$$

従って

$$\kappa = -\frac{dc^2}{dt^2}(t) \cdot n(c(t)) = (S(u), u).$$

注：$c(t)$ が測地線であることはこの解答では使っていない．ただし，$c(t)$ は測地線であるから，$\frac{d^2c}{dt^2}$ は $n = n(c(t))$ と平行であり，$\frac{d^2c}{dt^2} = -\kappa n$ と書ける．すなわち $|\kappa|$ は $c(t)$ の空間曲線としての曲率と一致している．

問題 3 M のパラメータ付けを $F(x,y)=(x,y,f(x,y))$ と定めるとき，$F_x=(1,0,f_x)$, $F_y=(0,1,f_y)$ は点 $F(x,y)$ での接空間の基底をなす．第 1 基本形式は

$$E=F_x\cdot F_x=1+f_x^2,\quad F=F_x\cdot F_y=f_xf_y,\quad G=F_y\cdot F_y=1+f_y^2$$

で与えられる．また単位法ベクトル n は

$$n=\frac{F_x\times F_y}{|F_x\times F_y|}=\left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)$$

である．これを x で微分して

$$n_x=\left(-\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},-\frac{f_{yx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},0\right)+\frac{\partial((1+f_x^2+f_y^2)^{-1/2})}{\partial x}(-f_x,-f_y,1)$$
$$n_y=\left(-\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},-\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},0\right)+\frac{\partial((1+f_x^2+f_y^2)^{-1/2})}{\partial y}(-f_x,-f_y,1)$$

を得る．従って第 2 基本形式は

$$L=F_x\cdot n_x=\frac{-f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad M=F_x\cdot n_y=\frac{-f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad N=F_y\cdot n_y=\frac{-f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

と求まり，問題 1 より

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2},\ H=-\frac{f_{xx}(1+f_y^2)-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}(1+f_x^2)}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}}$$

を得る．

問題 4 No.13 の問題 8,10 の解答を参照.

問題 5 与えられた式の左辺を計算する．

$$\begin{aligned}((\nabla_1\nabla_2-\nabla_2\nabla_1)\partial_1f,\partial_2f)&=(\nabla_1((\partial_2\partial_1f)^{\|})-\nabla_2((\partial_1\partial_1f)^{\|}),\partial_2f)\\&=(\partial_1((\partial_2\partial_1f)^{\|})-\partial_2((\partial_1\partial_1f)^{\|}),\partial_2f)\end{aligned}$$

ここで $\partial_i\partial_jf=(\partial_i\partial_jf)^{\|}+(\partial_i\partial_jf)^{\perp}$ と分解するとき，この式は次のように書き直せる

$$\big(\partial_1(\partial_2\partial_1f-(\partial_2\partial_1f)^{\perp})-\partial_2(\partial_1\partial_1f-(\partial_1\partial_1f)^{\perp}),\partial_2f\big)=(\partial_2(\partial_1^2f)^{\perp}-\partial_1(\partial_1\partial_2f)^{\perp},\partial_2f)$$

また $(\partial_i\partial_jf)^{\perp}=a_{ij}n$ とおくとき，$a_{ij}=n\cdot\partial_i\partial_jf$ である．$n\cdot\partial_jf=0$ を微分して $\partial_in\cdot\partial_jf+n\cdot\partial_i\partial_jf=0$．従って $a_{ij}=-\partial_in\cdot\partial_jf$ である．一方で，a_{ij} を使うと上の式は次のように書き換えられる

$$\begin{aligned}((\partial_2a_{11})n+a_{11}\partial_2n-(\partial_1a_{12})n-a_{12}\partial_1n,\partial_2f)&=a_{11}\partial_2n\cdot\partial_2f-a_{12}\partial_1n\cdot\partial_2f\\&=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-\det(a_{ij})\end{aligned}$$

一方で問題 1 の結果より，$\det(a_{ij})=K\det(g_{ij})$ であるから，結局左辺は

$$-K(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)$$

に等しいことが示された．

問題 6 略

問題 7 直線 ℓ は測地線（の像）である．実際 ℓ を弧長パラメータ表示する関数を $c(t)$ とすると，$\frac{d^2c}{dt^2}=0$ より $\nabla\frac{dc}{dt}=(\frac{d^2c}{dt^2})^{\parallel}=0$ である．問題 2 より，$u=\frac{dc}{dt}\in T_{c(t)}M$ とおくとき，点 $c(t)$ での shape operator S について

$$(S(u),u)=0$$

ここで S の固有ベクトル e_1,e_2 で正規直交基底をなすものをとり，$Se_i=\kappa_i e_i$ とする．$u=u_1e_1+u_2e_2$ とおくとき，上の式から

$$\kappa_1u_1^2+\kappa_2u_2^2=0$$

もし $K=\kappa_1\kappa_2>0$ であれば，κ_1,κ_2 は（どちらもゼロでなく）同符号であり，上の式から $u_1=u_2=0$ でなくてはならない．これは $u\neq 0$ と矛盾する．従って $K\leq 0$ が ℓ の各点で成り立つ．

問題 8 (ヒント) M の方程式を

$$(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$$

の形に書き直すと，次の直線が M に含まれることが分かる．

$$\begin{aligned}\ell_\lambda:&\quad \frac{1-y}{x-z}=\frac{x+z}{1+y}=\lambda\\ m_\lambda:&\quad \frac{1-y}{x+z}=\frac{x-z}{1+y}=\lambda\end{aligned}$$

点 (x,y,z) でのガウス曲率は $-(x^2+y^2+z^2)^{-2}$ で与えられる．

問題 9 与えられた柱面を M とかく．点 $f(t,s)$ での接空間の基底として $f(t,s)$ を t,s で偏微分した次のベクトルがとれる．

$$f_t=(x'(t),y'(t),0),\quad f_s=(0,0,1)$$

条件から $|f_t|=1$ であり，これらは $T_{f(t,s)}M$ の正規直交基底となる．従って単位法ベクトルは

$$n=f_t\times f_s=(y'(t),-x'(t),0)$$

これを t,s で微分すると

$$n_t=(y''(t),-x''(t),0),\quad n_s=(0,0,0)$$

を得る．f_t,f_s が正規直交基底であることを使うと，

$$\begin{aligned}n_t&=(n_t\cdot f_t)f_t+(n_t\cdot f_s)f_s=(x'y''-x''y')f_t\\ n_s&=(n_s\cdot f_t)f_t+(n_s\cdot f_s)f_s=0\end{aligned}$$

従って，shape operator S の行列表示は

$$\begin{pmatrix} x'y'' - x''y' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以上より，主曲率は

$$\kappa_1 = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t), \quad \kappa_2 = 0$$

平均曲率とガウス曲率は

$$H = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{2}, \quad K = 0$$

$\boxed{\text{採点基準}}$　上の解答例の方法以外でも，正しい方法で正しい答えが計算できていたらよい．(問題 1 の方法等を使っていてもよい．) 10 点満点で，次の場合に減点を行う．

- なんとなく方針は正しいが，説明にあいまいな点や理解が正しくない点があるとき：マイナス 5 点
- κ_i, K, H の答えのどれかに（軽微でない）誤りがあるとき：マイナス 5 点
- κ_i, K, H の答えはあっているが，説明が大きく誤っている（あるいは意味をなさない）場合：マイナス 10 点

主曲率，平均曲率は単位法ベクトル n のとり方によって符号が変わるので，上の答えをマイナス 1 倍したものも正答である．また $x'^2 + y'^2 = 1$, $x'x'' + y'y'' = 0$ を用いると

$$\kappa_1 = -\frac{x''}{y'} = \frac{y''}{x'}$$

などとも計算できる．$x' = 0$ または $y' = 0$ のときを考慮していない解答については，軽微なミスとみなし減点しない．