論　説

量子コホモロジーのガンマ構造について

入谷　寛

1　はじめに

量子コホモロジーとはシンプレクティック多様体の中の擬正則曲線を数えることにより得られるコホモロジー環の変形族であって，複素化された Kähler モジュライ空間上に量子接続と呼ばれる平坦接続を定める．ガンマ構造とは量子接続の平坦切断の空間に与えられる整構造あるいは有理構造のことであり，多様体の位相的ベクトル束の K 群とガンマ類と呼ばれる特性類によって定まる．これは量子コホモロジー (あるいは量子接続) をある種の一般化された Hodge 構造の変動と思ったときの，整構造・有理構造の候補を与えるものである．

ガンマ構造は量子コホモロジーのまだ明らかにされていない性質を示唆する．例えばガンマ構造は量子コホモロジーの関手性と関係するものと予想されている．普通のコホモロジー理論と異なり，量子コホモロジーは連続写像についての単純な関手性を持たない．Y. Ruan による有名な予想 [58] によれば，標準類を保つ双有理変換で移りあう射影代数多様体の量子コホモロジーはそのパラメータに関する解析接続の下で同型になる．ガンマ構造を通じて，Ruan の予想における量子コホモロジーの同型は K 群の間の自然な写像 (Fourier–向井変換) から誘導されることが期待されている．また，Dubrovin 予想 [23] やガンマ予想 [28] のように，量子接続の Stokes 構造に連接層の導来圏の構造が反映されるとする予想もある．

ガンマ構造はミラー対称性の文脈から自然に現れた．詳しくは以下の第 2 節で述べるが，歴史的な経緯を簡単に紹介しよう．ミラー対称性の研究の出発点となった Candelas–de la Ossa–Green–Parkes [10] の仕事は，3 次元 5 次 Calabi–Yau 超曲面における有理曲線の数え上げ母関数がミラー多様体と呼ばれる別の Calabi–Yau 多様体の周期で与えられる，という驚くべき予言を与えたものであった．彼らはミラー多様体の周期の極大複素構造極限 (large complex structure limit) での展開を計算したが，そこに Riemann ゼータ関数の特殊値 $\zeta(3)$ が現れている．Calabi–Yau 超曲面のミラー多様体の周期は Picard–Fuchs 方程式と呼ばれる微分方程式を満たし，係数がいくつかのガンマ関数の積および商で与えられる超幾何級数であるが (式 (2.1) を見よ)，この $\zeta(3)$ は係数のガンマ関数を Taylor 展開したものから生じたと見ることができる．細野–Klemm–Theisen–Yau [41] は，より一般の Calabi–Yau 完全交叉に対するミラー対称性を調べ，ミラー多様体の周期 (Picard–Fuchs 方程式の解) と元の多様体の Chern 数の間にゼータ値 $\zeta(2), \zeta(3)$ を含む “remarkable identity” が成り立つことを観察している．Libgober [51] は多様体の特性類としてのガンマ類 (正確にはその逆) を導入し，この観察をガンマ類の言葉で解釈した．さらに細野 [40] はこの観察をさらに進めて，ミラー多様体の周期と超幾何級数の関係について，ホモロジー的ミラー対称性を使った明示的な予想を立てた．また Horja [38] と Borisov–

Horja [7] は (ガンマ関数の積および商で係数があらわされる) 超幾何級数の解析接続とトーリック軌道体の間の導来同値との関係を明らかにしていた．これらの研究 (特に [40, 38, 7]) に動機づけられて，著者 [42] は量子コホモロジーのガンマ整構造を導入した．また Katzarkov–Kontsevich–Pantev [46] も同時期に独立にガンマ構造を導入している．

本稿は日本数学会 2016 年度年会の総合講演アブストラクトに加筆・修正を行ったものである．

2　ミラー対称性からの動機づけ

まずガンマ類の定義から始めよう．ガンマ類とは概複素多様体1) の特性類であり，Euler の Γ 関数 $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^x dt/t$ の $x=1$ での Taylor 展開に付随するものである．接ベクトル束 TX の全 Chern 類を $c(TX)=\prod_{i=1}^n(1+\delta_i)$ と仮想的に分解するとき ($n=\dim X$)，ガンマ類は

$$\widehat{\Gamma}_X := \widehat{\Gamma}(TX)=\prod_{i=1}^n \Gamma(1+\delta_i)\in H^*(X,\mathbb{R})$$

で定義される X のコホモロジー類である．右辺は Chern 根 $\delta_1,\dots,\delta_n$ の対称な冪級数に展開されるため，ガンマ類は Chern 類 $c_1(X),\dots,c_n(X)$ の多項式として書ける．実際，よく知られたガンマ関数の Taylor 展開を使うとガンマ類は Chern 指標を使って次のように書けることが分かる．

$$\widehat{\Gamma}_X=\exp\left(-\gamma c_1(TX)+\sum_{k=2}^\infty(-1)^k(k-1)!\zeta(k)\operatorname{ch}_k(TX)\right)$$

ここで $\gamma=\lim_{n\to\infty}(1+1/2+\cdots+1/n-\log n)$ は Euler 定数で $\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty 1/n^s$ は Riemann の ζ 関数である．係数に $\zeta(2)=\pi^2/6,\zeta(3),\zeta(4),\dots$ が現れることから2)，ガンマ類は超越的なコホモロジー類であり，また周期と関係していることが示唆される．

ミラー対称性とはシンプレクティック幾何と複素幾何の間に見つかる双対性のことであるが，ここでは Calabi–Yau 多様体の対に対する Hodge 理論的なミラー対称性を取り上げる．これは平たく言うと，ある Calabi–Yau 多様体 X の有理曲線の数がそれに双対な別の Calabi–Yau 多様体 Y の周期を使って計算できるという予想である．より正確には X の量子接続の定める Hodge 構造の変動 (第 5–6 節を見よ) と Y の複素構造の変形に付随した Gauss–Manin 接続の定める Hodge 構造の変動が同型であるという主張として定式化できる．Hodge 理論的ミラー対称性について詳しくは 6–7 節を見られたい．

例として Candelas–de la Ossa–Green–Parkes [10] による Calabi–Yau 5 次超曲面 $X\subset\mathbb{P}^4$ のミラーを考えよう．ミラー多様体はアフィン多様体

$$Y_q^\circ=\left\{(x_1,\dots,x_4)\in(\mathbb{C}^\times)^4 : x_1+x_2+x_3+x_4+\frac{q}{x_1x_2x_3x_4}=1\right\},\quad q\in\mathbb{C}$$

の適当な Calabi–Yau コンパクト化 Y_q で与えられ，その上の正則 3 形式は

$$\Omega_q=\frac{d\log x_1\wedge\cdots\wedge d\log x_4}{d(x_1+x_2+x_3+x_4+q/(x_1x_2x_3x_4))}$$

で与えられる．ここで $q\in\mathbb{C}$ は Y_q の複素構造のパラメータであり，$q=0$ は極大複素構造極限と呼ばれる Y_q の退化する点である．Ω_q の周期，すなわち 3 次元サイクル上での Ω_q の積分は Picard–Fuchs

方程式と呼ばれる次の微分方程式を満たす.

$$\left(D^4 - 5q(5D+1)(5D+2)(5D+3)(5D+4)\right)\Phi(q) = 0.$$

ただし $D = q\partial/\partial q$ である．この微分方程式は次の超幾何級数解を持つ.

$$\Phi(q;\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+5n+5\epsilon)}{\Gamma(1+n+\epsilon)^5} q^{n+\epsilon}. \tag{2.1}$$

ここで ϵ は $\epsilon^4 = 0$ を満たす無限小の数で，$\Phi(q;\epsilon) = \Phi_0(q) + \Phi_1(q)\epsilon + \Phi_2(q)\epsilon^2 + \Phi_3(q)\epsilon^3$ と展開した時の各係数 $\Phi_i(q)$ が Picard–Fuchs 方程式の解の基底を与える．特に Y_q の周期は $\Phi_i(q)$ たちの $\mathbb{C}$ 上の一次結合であらわされる．X 内の次数 d の有理曲線の数 (インスタントン数)[3)] を n_d とおくとき，Candelas–de la Ossa–Green–Parkes [10] は n_d が関数 $\Phi_i(q)$ から次のように計算できることを予言した.

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{\Phi_2(q)}{\Phi_0(q)}\right) = 1 + \frac{1}{5}\sum_{d=1}^{\infty} n_d d^3 \frac{e^{\tau d}}{1-e^{\tau d}}.$$

ここで新しい変数 $\tau \in H^2(X,\mathbb{C})$ は複素化された Kähler パラメータと呼ばれ，次のミラー写像によって Y_q の複素構造の変形パラメータ q と結びついている.

$$\tau = \tau(q) := \frac{\Phi_1(q)}{\Phi_0(q)} = \log q + 770q + \cdots.$$

関係式 $\epsilon^4 = 0$ により，無限小 ϵ を X の 2 次コホモロジー類である超平面類 $\epsilon = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(X)$ と同定することができる．そこで式 (2.1) の超幾何解 $\Phi(q;\epsilon)$ を $H^*(X)$ に値をもつ級数とみなすことにしよう．このとき $\Phi(q;\epsilon)$ の q 級数としての先頭項は X のガンマ類の逆

$$\frac{\Gamma(1+5\epsilon)}{\Gamma(1+\epsilon)^5} = \frac{1}{\widehat{\Gamma}_X}$$

を与えている．これが既に述べた細野–Klemm–Theisen–Yau [41] と Libgober [51] の観察であって，ミラー多様体の周期と元の多様体のトポロジーの間の関係を示唆するものである.

注意 2.1　上記の Candelas–de la Ossa–Green–Parkes の予言は後に数学的な証明が与えられている．Kontsevich [48] は第 4 節で述べる安定写像の概念を用いてインスタントン数 n_d の定義を提案し，トーラス作用に関する固定点公式を用いて計算する方法を与えた．Givental [31, 32] はその提案を実行し，5 次超曲面 (や，より一般の完全交叉) に対するミラー対称性を示した.

Picard–Fuchs 方程式の解の基底は $\mathbb{C}$ 上の線形変換だけの不定性を持ち，上記の $\Phi_0(q),\dots,\Phi_3(q)$ が周期とどう結びついているかはここまでの話では明らかではない．(逆ガンマ類を先頭項とする級数解 $\Phi(q;\epsilon)$ を考える必然性は論理的にはない．例えば $\Phi(q;\epsilon)$ を $\widehat{\Gamma}_X \cdot \Phi(q;\epsilon)$ で置き換えてもよい．) しかしながら，周期と Picard–Fuchs 方程式の解 $\Phi(q;\epsilon)$ の間にはより明示的な関係があり，その関係の背後にはホモロジー的ミラー対称性がある．細野 [40] は Y_q の 3 次元整サイクル $C \subset Y_q$ 上での周期 $\int_C \Omega_q$ が X 上のある連接層の複体 $\mathcal{E} \in D^b(X)$ を用いて

$$\int_X \Phi(q;\epsilon) \cup (2\pi\sqrt{-1})^{\frac{\deg}{2}} (\mathrm{ch}(\mathcal{E})\,\mathrm{td}_X) \tag{2.2}$$

の形に書けることを予想した．細野は 5 次超曲面とは限らないより一般の Calabi–Yau 完全交叉のミラーに対して同様の予想を述べている．ここで周期の積分サイクル $C \subset Y_q$ が例えば消滅サイクルのように Y_q のラグランジュ部分多様体になっているとすれば，Y_q の深谷圏 $\mathcal{F}(Y_q)$ の対象と見なせる．細野はこれらの対象 $C \in \mathcal{F}(Y_q)$，$\mathcal{E} \in D^b(X)$ はホモロジー的ミラー対称性 [47]

$$\mathcal{F}(Y_q) \cong D^b(X), \qquad C \longleftrightarrow \mathcal{E}$$

の下で対応していると予想した．ここで Hodge 理論的ミラー対称性を考えるときと，ホモロジー的ミラー対称性を考えるときで A 側 (シンプレクティック幾何側) と B 側 (複素幾何側) が入れ替わっていることに注意されたい．つまり Hodge 理論的ミラー対称性では X 上で A 模型 (量子コホモロジー)，Y_q 上で B 模型 (複素構造の変形) を考えたが，ホモロジー的ミラー対称性では Y_q 上で A ブレーンの圏 (深谷圏)，X 上で B ブレーンの圏 (連接層の導来圏) を考えている (表 1 参照)．

	X	Y_q
Hodge 理論的ミラー対称性	量子コホモロジー (量子接続)	複素構造の変形 (Gauss–Manin 接続)
微分方程式の解	量子周期	周期
ホモロジー的ミラー対称性	X の導来圏	Y_q の深谷圏

表 1：A 模型 (B 模型) と B ブレーンの圏 (A ブレーンの圏) の間の双対性．量子周期は式 (2.2) に類似した定義を持つ．5 節の注意 5.5 参照．

A と B が入れ替わることはある種の双対性として理解できる．Y_q の立場からは Y_q 上の A ブレーンの圏 (深谷圏) は複素構造に依存せず，従って深谷圏の対象 $C \in \mathcal{F}(Y_q)$ は複素構造のモジュライ空間の上で局所定数なものを与えていると考えられる．この対象 C と B 模型 (Gauss-Manin 接続の定める Hodge 構造の変動) とのペアリングが周期である．同様に，X の立場からは X 上の B ブレーンの圏 (連接層の導来圏) はシンプレクティック構造に依存せず，従って導来圏の対象 $\mathcal{E} \in D^b(X)$ は (量子接続が定まっている) Kähler モジュライ空間の上で局所定数なものを与えていると考えられる．ガンマ類は導来圏の対象 $\mathcal{E}$ と A 模型 (量子コホモロジー) の間のペアリングを定めるものと見なせる．この視点からは，Y_q の Picard–Fuchs 方程式のモノドロミー (あるいは同じことであるが X の量子接続のモノドロミー) は $D^b(X)$ の自己圏同値 (auto-equivalence) と関係することが予想される．例えば Horja [38] はコニフォールド点と呼ばれる Y_q のモジュライ空間の特異点 (Y_q がコニフォールド特異点をもつ点) の周りでのモノドロミーを調べ，それが $D^b(X)$ の自己同値である，構造層に関する球面ねじり (spherical twist) と関係することを示している．さらに Borisov–Horja [7] は GKZ (Gelfand–Kapranov–Zelevinsky) 系のモノドロミーを上記の $\Phi(q;\epsilon)$ を一般化したガンマ級数解を用いて調べ，解の解析接続がトーリック軌道体の導来圏の間の Fourier–向井変換と関係づけられることを示した．

注意 2.2　ブレーンの圏の立場からは，X の量子接続の底空間である Kähler モジュライは導来圏 $D^b(X)$ の安定性条件の空間 (例えば Douglas [22] や Bridgeland [8] の意味での) と見なすことができ，また逆に，Y_q の複素構造のモジュライ空間は深谷圏 $\mathcal{F}(Y)$ の安定性条件の空間と見なせるはずである．$D^b(X)$ の自己同値と量子接続のモノドロミーが関係していることは多くの例で観察されている

ものの，X の量子コホモロジー (あるいは量子接続) 自体が導来圏 $D^b(X)$ からどのように復元されるのかについてはよくわかっていない．一方，深谷圏 $\mathcal{F}(X)$ から Hochschild ホモロジー (あるいはサイクリックホモロジー) をとることで X の量子コホモロジーを復元する方法については近年大きく理解が進んでいる [25, 29].

注意 2.3　Kontsevich [49] はモチヴィック Galois 群と変形量子化の文脈でガンマ関数の Taylor 展開を論じている．

3　自由ループ空間を使った解釈

前節ではミラー対称性を通じたガンマ類の現れを見た．ここではミラーを経由せずに，元々の多様体 (とその量子コホモロジー) に固有の意味を見出す試みとして，ガンマ類の自由ループ空間を使った解釈 [52, 45] を紹介しよう．以下の解釈はガンマ類が $\widehat{A}$ 類の「平方根」であること，また，指数定理の「平方根」とみなされるべき定理の存在を示唆している．良く知られているように，Γ 関数は $0, -1, -2, -3, \ldots$ のみで 1 位の極を持つので

$$\Gamma(1+\delta) \quad \text{は無限積} \quad \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(\delta+k)} \quad \text{に対応する} \tag{3.1}$$

と考えることができる．もちろんこの無限積は収束しないが，ζ 関数正則化の方法を用いて意味がつけられる．無限積 $\prod_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ の ζ 関数正則化とは，対応する ζ 関数 $f(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}$ が $s=0$ に解析接続されるとき，$\exp(-f'(0))$ で与えられるものであった．$\lambda_k = 1/(\delta+k)$ に対しこの正則化を実行すると次の式が得られる．

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(\delta+k)} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(1+\delta).$$

ここで $\sim$ は右辺が左辺の ζ 関数正則化であることを意味する．実は左辺の形の無限積はループ空間の幾何から自然に現れる．自由ループ空間 LX にループを回転させる S^1 作用を考えよう．固定点集合は定数ループからなる集合で与えられた多様体 X と同一視される．X の LX における法束 $\mathcal{N}$ は S^1 作用によって正表現 $\mathcal{N}_+$ と負表現 $\mathcal{N}_-$ に分解される．重み 1 の S^1 表現を L と書くと，$\mathcal{N}_+ \cong \bigoplus_{k=1}^{\infty} TX \otimes L^k$ が成立するので，(3.1) より $\mathcal{N}_+$ の S^1 同変 Euler 類 $e_{S^1}(\mathcal{N}_+)$ の逆はガンマ類の無限積展開に対応すると考えられる．実際，ζ 関数正則化の方法を用いて $e_{S^1}(\mathcal{N}_+)$ を正則化すると次の式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{1}{e_{S^1}(\mathcal{N}_+)} &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} e_{S^1}(TX \otimes L^k)} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}(\delta_i + kz)} \sim \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} z^{-\frac{\deg}{2}} z^{c_1(X)} \widehat{\Gamma}_X.\end{aligned} \tag{3.2}$$

ここで $z = c_1(L) \in H^2_{S^1}(\mathrm{pt})$ は 1 点の S^1 同変コホモロジーの生成元であり，$\deg \in \mathrm{End}(H^*(X))$ は $\alpha \in H^k(X)$ に対し $\deg\alpha = k\alpha$ で定義される次数付け作用素である．また $\delta_1, \ldots, \delta_n$ は 2 節にも現れた TX の Chern 根である．このループ空間を使った解釈は Witten と Atiyah [3] による指数定理の発見的な導出に似ている．彼らはループ空間上で同変積分の局所化を行うことにより指数定理を導いたが，そこでの主要な観察は X の LX における法束 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{N}_-$ の同変 Euler 類 (の逆) が $\widehat{A}$ 類になるということであった．

$$\frac{1}{e_{S^1}(\mathcal{N})} = \frac{1}{e_{S^1}(\mathcal{N}_+)e_{S^1}(\mathcal{N}_-)} \sim \left(\frac{z}{2\pi}\right)^n \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{z}\right)^{\frac{\deg}{2}} \widehat{A}_X. \tag{3.3}$$

式 (3.2) と式 (3.3) を比べれば，ガンマ類を $\widehat{A}$ 類のある種の「平方根」と見なせることが分かる．$\widehat{A}$ 類は $\delta/\sinh\delta$ に対応する特性類であることに注意すると，ガンマ類が $\widehat{A}$ 類の平方根であるという関係は関数等式

$$\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\delta) = \frac{\pi\sqrt{-1}\delta}{\sinh(\pi\sqrt{-1}\delta)} \tag{3.4}$$

からも理解できる．法束の正部分 $\mathcal{N}_+$ は無限小の擬正則曲線の方向に対応しているので，ガンマ類はシンプレクティック Floer 理論[4)] における定数ループの摂動論的な寄与と考えられるのかも知れない．後で述べるように，ガンマ類が $\widehat{A}$ 類の「平方根」であるという観点を推し進めて，指数定理の「平方根」であるガンマ予想が定式化される．

4　量子コホモロジー

量子コホモロジーは一般にシンプレクティック多様体に対して定義されるが，ここでは滑らかな ($\mathbb{C}$ 上の) 射影代数多様体 X に限って話を進める．X のコホモロジー類 $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in H^*(X,\mathbb{Q})$ および 2 次の整ホモロジー類 $d \in H_2(X,\mathbb{Z})$ に対して種数 g の Gromov–Witten 不変量

$$\langle \alpha_1,\dots,\alpha_k \rangle_{g,k,d} \in \mathbb{Q}$$

が定義される．大まかにいうと，この不変量は種数 g の k 点付きリーマン面 $(\Sigma, x_1,\dots,x_k)$ から X への正則写像 $f\colon \Sigma \to X$ であって，$f_*[\Sigma] = d$, $f(x_i)$ が α_i のポアンカレ双対サイクル A_i に属するもの，の数を数えたものである．正確には安定写像のモジュライ空間とその仮想基本類を用いて次のように定義される (詳しくは [21] およびそこにある文献を参照されたい)．種数 g の曲線から X への k 点付き，次数 $d \in H_2(X,\mathbb{Z})$ の安定写像 (stable map) とは次を満たす組 $(\Sigma; x_1,\dots,x_k; f)$ のことであった [48].

(1)　Σ は算術種数 $\dim H^1(\Sigma,\mathcal{O})$ が g に等しいコンパクトで連結な代数曲線で，特異点としては通常 2 重点 ($(xy=0) \subset \mathbb{C}^2$ の原点の近傍と解析的に同値である特異点) のみを持つもの.

(2)　$x_1,\dots,x_k \in \Sigma$ は名前付き点．x_i は Σ の特異点ではなく，$i \neq j$ に対して $x_i \neq x_j$.

(3)　$f\colon \Sigma \to X$ は次数 $d = f_*([\Sigma])$ の正則写像.

(4)　組 $(\Sigma; x_1,\dots,x_k; f)$ の自己同型は有限: $\mathrm{Aut}(\Sigma; x_1,\dots,x_k; f) < \infty$.

ただし $(\Sigma; x_1,\dots,x_k; f)$ の自己同型とは同型写像 $\varphi\colon \Sigma \to \Sigma$ で $\varphi(x_i) = x_i$, $f \circ \varphi = f$ を満たすもののことである．安定写像の同型類の集合を

$$X_{g,k,d} = \{(\Sigma; x_1,\dots,x_k; f) : X \text{ への } k \text{ 点付き，種数 } g, \text{ 次数 } d \text{ の安定写像 } \}/\cong$$

で表す．このモジュライ空間 $X_{g,k,d}$ はコンパクトな Deligne–Mumford スタックの構造を持ち，仮想基本類 $[X_{g,k,d}]_{\mathrm{vir}} \in H_{2D}(X_{g,k,d},\mathbb{Q})$ を持つ．ここで $D = (1-g)(\dim X - 3) + c_1(X)\cdot d + k$ は Riemann–Roch の定理から計算できるモジュライの仮想次元である．$(\Sigma; x_1,\dots,x_k; f) \in X_{g,k,d}$ を $f(x_i) \in X$ に対応させる評価写像 $\mathrm{ev}_i\colon X_{g,k,d} \to X$ を使って Gromov–Witten 不変量が次で定義さ

れる．

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle_{g,k,d} = \int_{[X_{g,k,d}]_{\mathrm{vir}}} \mathrm{ev}_1^*(\alpha_1) \cup \cdots \cup \mathrm{ev}_k^*(\alpha_k)$$

注意 4.1　より一般に重力子孫 (gravitational descendant) と呼ばれる Gromov–Witten 不変量があり，次の式で与えられる [66, 21].

$$\left\langle \alpha_1 \psi_1^{l_1}, \ldots \alpha_k \psi_k^{l_k} \right\rangle_{g,k,d} = \int_{[X_{g,k,d}]_{\mathrm{vir}}} \mathrm{ev}_1^*(\alpha_1)\psi_1^{l_1} \cup \cdots \cup \mathrm{ev}_k^*(\alpha_k)\psi_k^{l_k}.$$

ここで ψ_i は i 番目の名前付き点での普遍余接直線束 (universal cotangent line bundle) $\mathcal{L}_i \to X_{g,k,d}$ の第一 Chern 類であり，$\mathcal{L}_i$ は点 $(\Sigma; x_1, \ldots, x_k; f) \in X_{g,k,d}$ でのファイバーが $T^*_{x_i}\Sigma$ となるような直線束である．

形式的には Gromov–Witten 理論はコホモロジー的場の理論 (cohomological field theory) を定めている [50]．これは k 個の X のコホモロジー類の組 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ に対して，k 点付き安定曲線のモジュライ $\overline{M}_{g,k}$ のコホモロジー類 $I_{g,k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ を対応させるもので，$\mathfrak{S}_k$ 共変性，多重線形性，リーマン面の退化に伴う分裂公理 (splitting axiom) を満たすものである．Gromov–Witten 理論の場合は

$$I_{g,k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \sum_{d \in \mathrm{Eff}(X)} Q^d \,\mathrm{fgt}_*((\mathrm{ev}_1^*(\alpha_1) \cup \cdots \cup \mathrm{ev}_k^*(\alpha_k)) \cap [X_{g,k,d}]_{\mathrm{vir}})$$

で与えられる．ここで $\mathrm{fgt}\colon X_{g,k,d} \to \overline{M}_{g,k}$ は安定写像に対して写像を忘れ，点付きリーマン面 (の安定化) を対応させる忘却写像である．一般に，種数 $g = 0$ でのコホモロジー的場の理論はある可積分条件を満たす Frobenius 代数の族 (Frobenius 多様体 [23]) を定める．これを Gromov–Witten 理論に適用して得られるのが以下に説明する量子コホモロジーである．

$\mathrm{Eff}(X) \subset H_2(X, \mathbb{Z})$ を正則曲線のホモロジー類の生成する半群とする．安定写像の次数を数える形式的変数 Q を用意し，次の形式的冪級数環 (Novikov 環) を考える．

$$\mathbb{C}[\![Q]\!] := \left\{ \sum_{d \in \mathrm{Eff}(X)} a_d Q^d : a_d \in \mathbb{C} \right\}.$$

小量子コホモロジー環とは加群 $H^*(X)[\![Q]\!] = H^*(X) \otimes \mathbb{C}[\![Q]\!]$ 上に $\mathbb{C}[\![Q]\!]$ 双線形な積 $\star$ を入れたものである．

$$(\alpha \star \beta, \gamma) = \sum_{d \in \mathrm{Eff}(X)} \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{0,3,d} Q^d$$

ここで $(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \cup \beta$ は Poincaré ペアリングである．この積 $\star$ は小量子積と呼ばれ，上に述べたコホモロジー的場の理論の公理から結合的かつ超可換であることが従う．(ここで非自明なのは結合性であって，それは分裂公理からの帰結である．) さらに

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{0,3,0} = \int_X \alpha \cup \beta \cup \gamma$$

が成立するので，$Q \to 0$ の極限で $\star$ はカップ積になる．小量子積の構造定数 $(\alpha \star \beta, \gamma)$ は次数 d の有

理曲線を介して 3 つのサイクル α, β, γ が交わる場合の数に Q^d の重みをつけて足したものと考えることができる．

小量子積はさらに大量子積に変形される．大量子積とはコホモロジー類 $\tau \in H^*(X)$ でパラメータ付けされる積構造の形式的族 $\star_\tau$ であって次の式で定義される．

$$(\alpha \star_\tau \beta, \gamma) = \sum_{d \in \mathrm{Eff}(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \alpha, \beta, \gamma, \tau, \dots, \tau \rangle_{0,3+k,d} \frac{Q^d}{k!}$$

大量子積 $\star_\tau$ も結合的かつ超可換であり，$H^*(X)[\![Q]\!][\![\tau]\!]$ 上の $\mathbb{C}[\![Q]\!][\![\tau]\!]$ 双線形な環構造を定める．さらにカップ積に関する単位元 $1 \in H^*(X)$ は大量子積についても単位元となる．因子等式 (divisor equation) と呼ばれる次の性質

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k, h \rangle_{0,k+1,d} = (h \cdot d) \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle_{0,k,d}, \qquad h \in H^2(X)$$

(ただし $d = 0$ ならば $k \geq 3$ とする) により，$\tau = \sigma + \tau'$ $(\sigma \in H^2(X),\ \tau' \in H^{\neq 2}(X))$ と分解するとき

$$(\alpha \star_\tau \beta, \gamma) = \sum_{d \in \mathrm{Eff}(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \alpha, \beta, \gamma, \tau', \dots, \tau' \rangle_{0,3+k,d} \frac{e^{\sigma \cdot d} Q^d}{k!}$$

が成り立つ．つまり $\star_\tau$ の Q 依存性は τ の $H^2(X)$ 成分 σ に関する依存性と本質的に同じであることが分かる．一般に $\star_\tau$ が収束して (Q, τ) の解析関数になるかどうかは問題であるが，本論説では簡単のため収束を仮定することにする．因子等式を用いた上の議論から量子積の $Q = 1$ への制限は意味を持ち，積 $\star_\tau$ が収束するとすれば，$\star_\tau|_{Q=1}$ は十分大きい $M > 0$ に対して

$$U = \left\{ \tau \in H^*(X, \mathbb{C}) : \text{任意の有効曲線の類 } d \neq 0 \text{ に対して } \Re(\sigma \cdot d) < -M,\ |\tau'| < e^{-M} \right\} \quad (4.1)$$

なる形の領域で解析的な積を与える．ここで (σ, τ') は前と同じく τ の $H^2(X)$ 成分と $H^{\neq 2}(X)$ 成分への分解を表す．この領域 U は極大体積極限 (large volume limit)[5)] と呼ばれる $\Re(\sigma \cdot d) \to -\infty$ となる極限点の近傍と考えることができる．また因子等式からは $\star_\tau$ は τ の $U/H^2(X, 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})$ における像にのみ依存する事がわかる．

以下断り無く，大量子積 $\star_\tau$ は $Q = 1$ に制限されたものを表すことにする．このとき小量子積は大量子積のパラメータ τ を $H^2(X)$ に制限したものと見なすことができる．また超可換性からくる符号を避けるため，量子コホモロジーの文脈においては $H^*(X)$ は偶数次部分 $\bigoplus_{p=0}^n H^{2p}(X)$ を表すものとする．

注意 4.2　Gromov–Witten 不変量および量子コホモロジーは軌道体 (orbifold, あるいは滑らかな Deligne–Mumford スタック) に対して拡張されている [13, 1]．軌道体に対しては，量子積は通常のコホモロジー群を拡張した Chen–Ruan[12] の軌道体コホモロジー群 $H^*_{\mathrm{CR}}(X)$ 上に定義される．

5　量子接続とガンマ構造

ガンマ構造 [42, 46] は量子積に付随する量子接続 (Dubrovin 接続とも呼ばれる) の整構造 (あるいは有理構造) として与えられる．U を式 (4.1) にあるような量子積の収束域とする．量子接続とは自明な正則ベクトル束 $F = H^*(X) \times (U \times \mathbb{C}) \to U \times \mathbb{C}$ 上に定義される次の有理型平坦接続 ∇ である．

$$\nabla = d + \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{N}(\phi_i\star_\tau)d\tau^i - \left(\frac{1}{z}(E\star_\tau) - \mu\right)\frac{dz}{z}. \tag{5.1}$$

ここで $(\tau, z) \in U \times \mathbb{C}$ は底空間の座標で，$\{\phi_i\}_{i=1}^N$ は $H^*(X)$ の斉次基底，$\{\tau^i\}$ はこれに双対な座標 $(\tau = \sum_{i=1}^N \tau^i\phi_i)$ であり，$\mu \in \mathrm{End}(H^*(X))$, $E \in \mathcal{O}(F)$ は次で与えられる．

$$\mu(\phi_i) := \left(\frac{\deg\phi_i}{2} - \frac{n}{2}\right)\phi_i, \quad E := \sum_{i=1}^{N}\left(1 - \frac{\deg\phi_i}{2}\right)\tau^i\phi_i + c_1(X).$$

ここで $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ であり，μ は次数付け作用素，E は Euler ベクトル場と呼ばれる．量子接続が平坦であることは量子積の可換・結合性の帰結である．また新たに導入した z 座標方向の平坦性は量子コホモロジーの (Euler ベクトル場の定める変数の次数を込めた) 斉次性を反映している．量子接続は $z = 0$ に沿って高々 2 位の極を持ち，形式的には

$$\nabla\colon \mathcal{O}(F) \to \mathcal{O}(F)(U \times \{0\}) \otimes_{\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}} \left(\pi^*\Omega_U^1 \oplus \mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}\frac{dz}{z}\right)$$

なる写像を与える．ここで $\pi\colon U \times \mathbb{C} \to U$ は射影である．Poincaré ペアリングは ∇ に関して平坦なペアリング

$$(\cdot,\cdot)_F\colon F_{\tau,-z} \times F_{\tau,z} \to \mathbb{C}, \quad (\alpha,\beta)_F = \int_X \alpha \cup \beta$$

を誘導する．$(\cdot,\cdot)_F$ は異なる点 $(\tau,-z)$, (τ,z) のファイバーの間に定義されていることに注意したい．写像 $\iota\colon U \times \mathbb{C} \to U \times \mathbb{C}$ を $\iota(\tau,z) = (\tau,-z)$ で定めると，$(\cdot,\cdot)_F$ は層の準同型

$$(\cdot,\cdot)_F\colon \iota^*\mathcal{O}(F) \otimes_{\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}} \mathcal{O}(F) \to \mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}$$

ともみなせる．この 3 つ組 $(F, \nabla, (\cdot,\cdot)_F)$ は Hertling [36] の意味での TEP 構造になっている．

量子接続は極大体積極限の近傍で定義されるよく知られた基本解を持つ．$\mathrm{End}(H^*(X))$ に値をもつ関数 $L(\tau,z)$ を次で定義する．

$$(L(\tau,z)\alpha,\beta) = (e^{-\sigma/z}\alpha,\beta) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{d\in\mathrm{Eff}(X)\\(k,d)\neq(0,0)}}\left\langle\frac{e^{-\sigma/z}\alpha}{z+\psi_1},\tau',\dots,\tau',\beta\right\rangle_{0,k+2,d}$$

ここで $(\cdot,\cdot)$ は Poincaré ペアリング，$\alpha,\beta \in H^*(X)$, σ および τ' は各々，τ の $H^2(X)$ 成分および $H^{\neq 2}(X)$ 成分を表す．また $1/(z+\psi_1)$ は級数 $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j z^{-j-1}\psi_1^j$ に展開されると考える．これは注意 4.1 の重量派生不変量である．

命題 5.1 ([31]; [42] も参照)　$L(\tau,z)z^{-\mu}z^{c_1(X)}\phi_i$, $1 \le i \le N$ は ∇ 平坦切断の基底を与える．ただし $z^{-\mu}z^{c_1(X)} = e^{-\mu\log z}e^{c_1(X)\log z}$ とする．平坦切断 $L(\tau,z)z^{-\mu}z^{c_1(X)}\phi_i$ は極大体積極限 $\Re(\sigma\cdot d) \to -\infty$, $\tau' \to 0$ での漸近挙動

$$L(\tau,z)z^{-\mu}z^{c_1(X)}\phi_i \sim e^{-\sigma/z}z^{-\mu}z^{c_1(X)}\phi_i$$

によって特徴づけられる．(ここで $z \in \mathbb{C}^\times$ は固定している．)

定義 5.2 ([42, 46])　**ガンマ (整) 構造**とは X の位相的複素ベクトル束の K 群 $K^0(X)$ から量子接

続の (多価) 平坦切断のなす空間への準同型 $\mathcal{E} \mapsto s(\mathcal{E})(\tau, z)$ であって次で定義される．

$$s(\mathcal{E})(\tau, z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} L(\tau, z) z^{-\mu} z^{c_1(X)} \left(\widehat{\Gamma}_X (2\pi\sqrt{-1})^{\deg/2} \operatorname{ch}(\mathcal{E})\right).$$

ここで $L(\tau, z)z^{-\mu}z^{c_1(X)}$ は命題 5.1 における基本解であり，$(2\pi)^{-n/2}\widehat{\Gamma}_X(2\pi\sqrt{-1})^{\deg/2}\operatorname{ch}(\mathcal{E})$ は $\Re(\sigma \cdot d) \to -\infty$, $z = 1$ における平坦切断の漸近的な初期条件を与えている．すなわち命題 5.1 における ϕ_i を $(2\pi)^{-n/2}\widehat{\Gamma}_X(2\pi\sqrt{-1})^{\deg/2}\operatorname{ch}(\mathcal{E})$ に置き換えたものが $s(\mathcal{E})(\tau, z)$ となっている．また $(2\pi)^{-n/2}z^{-\mu}z^{c_1(X)}\widehat{\Gamma}_X$ は正法束の同変 Euler 類の正則化として式 (3.2) にも現れていたことに注意したい．ガンマ構造の重要な性質は次の通りである．

命題 5.3 ([42, Proposition 2.10])　(a) 極大体積極限の周りでのモノドロミーは直線束のテンソル積に対応する．つまり任意の直線束 L に対して，次が成り立つ．

$$s(\mathcal{E} \otimes L)(\tau, z) = s(\mathcal{E})(\tau - 2\pi\sqrt{-1}c_1(L), z).$$

(b) z 平面上のモノドロミーは Serre 関手に対応する．

$$s(\mathcal{E} \otimes K_X[n])(\tau, z) = s(\mathcal{E})(\tau, ze^{-2\pi\sqrt{-1}})$$

(c) 平坦切断 $s(\mathcal{E})(\tau, z)$ の Poincaré ペアリングは K 群の Euler ペアリングと対応する．

$$\left(s(\mathcal{E}_1)(\tau, e^{-\pi\sqrt{-1}}z), s(\mathcal{E}_2)(\tau, z)\right)_F = \chi(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$$

ここで $\chi(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ は $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ が正則ベクトル束なら $\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ で与えられ，一般には $\mathcal{E}_1^* \otimes \mathcal{E}_2$ の 1 点への K 理論的押し出し $K^0(X) \to K^0(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$ の像 (Spin$^{\mathrm{c}}$-Dirac 作用素の指数) で与えられる整数である．

この命題の (c) の証明では関数等式 (3.4)，すなわちガンマ類が $\widehat{A}$ 類の「平方根」であることと，Riemann–Roch–Hirzebruch の指数定理が用いられる．

注意 5.4　[42] ではより一般に軌道体 (滑らかな Deligne–Mumford スタック) に対してもガンマ構造が定義された．これはクレパント解消予想を議論するときに使われる．

注意 5.5　ガンマ整構造を使って量子コホモロジーに対する整の周期 (量子周期) を次の式で定義することができる．これは著者が [42] で $\mathcal{E} \in K^0(X)$ に付随する量子コホモロジー中心電荷 (quantum cohomology central charge) と呼んだものである．

$$Z(\mathcal{E})(\tau, z) = \frac{(2\pi z)^{n/2}}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_X s(\mathcal{E})(\tau, z)$$

これは量子コホモロジーの単位元 1 と平坦切断 $s(\mathcal{E})(\tau, z)$ の間のペアリングであり，ミラー対称性の下では 1 は正則体積形式，$s(\mathcal{E})(\tau, z)$ は積分サイクルに対応するので，量子コホモロジーにおける周期とみなせる．$X \subset \mathbb{P}^4$ が 3 次元 Calabi–Yau 5 次超曲面であるとき，細野の予想に現れる式 (2.2) とはミラー写像 $\tau = \tau(q)$ の下で次の関係がある [42, 式 (34)]．

$$Z(\mathcal{E})(\tau, e^{-\sqrt{-1}\pi}) = \frac{(-1)^n}{\Phi_0(q)} \int_X \Phi(q; \epsilon) \cup (2\pi\sqrt{-1})^{\deg/2} (\operatorname{ch}(\mathcal{E}^*) \operatorname{td}_X) \tag{5.2}$$

ここで右辺を $\Phi_0(q)$ で割った理由は，ミラー対称性の下で量子コホモロジーの単位元 1 が体積形式

$\Omega_q/\Phi_0(q)$ に対応することからきている．(正則体積形式は q の関数倍の不定性を持つことに注意されたい．) 単位元 1 が正則体積形式に対応することは，以下に定義する A 模型 Hodge フィルトレーション (6.1) において，1 が最も小さい Hodge フィルター $\mathscr{F}^n$ に属することから理解できる．

6　量子接続と (半無限)Hodge 構造

この節では量子接続は Hodge 構造の変動の一般化と見なせることを説明し，ガンマ実構造の役割について議論する．まず，考えている多様体 X が Calabi–Yau 多様体であるとき，量子接続の $H^{1,1}(X)$ への制限は古典的な Hodge 構造の変動を与える．$H^{*,*}(X)=\bigoplus_{p=0}^n H^{p,p}(X)$ とおき，$H^{*,*}(X)$ に次のフィルトレーションを入れる．

$$H^{*,*}(X)=\mathscr{F}^0\supset\mathscr{F}^1\supset\cdots\supset\mathscr{F}^n,\qquad \mathscr{F}^p=\bigoplus_{j\le n-p}H^{j,j}(X). \tag{6.1}$$

$U_{\mathrm{sm}}=U\cap H^{1,1}(X)$ を収束域 (4.1) の $H^{1,1}(X)$ への制限とする．$H^{*,*}(X)$ をファイバーとする自明ベクトル束 $H^{*,*}(X)\times U_{\mathrm{sm}}\to U_{\mathrm{sm}}$ を考える．上のフィルトレーション $\{\mathscr{F}^p\}$ を自然にこの自明ベクトル束の (部分束による) フィルトレーションと見なすことにする．量子接続の $U_{\mathrm{sm}}\times\{z=1\}$ への制限はこのベクトル束 $H^{*,*}(X)\times U_{\mathrm{sm}}\to U_{\mathrm{sm}}$ の平坦接続 ∇^{sm} を誘導する．

$$\nabla^{\mathrm{sm}}=d+\sum_{i=1}^r(\phi_i\star_\tau)d\tau^i$$

ここで $H^*(X)$ の基底 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ の部分集合 $\{\phi_i\}_{i=1}^r$ が $H^{1,1}(X)$ の基底になると仮定した．さらにこのベクトル束の $(-1)^n$ 対称なペアリング (偏極) を

$$Q(\alpha,\beta)=(\sqrt{-1})^{-n}(-1)^{\deg\alpha/2}\int_X\alpha\cup\beta\qquad\alpha,\beta\in H^{*,*}(X)$$

で定義すると，組 $(\mathscr{F}^p,\nabla^{\mathrm{sm}},Q)$ は重み n の $\mathbb{C}$-Hodge 構造の変動になる．実際，Hodge–Riemann 双線形関係式 $Q(\mathscr{F}^p,\mathscr{F}^{n-p+1})=0$ はフィルトレーションの定義から明らかである．また Calabi–Yau 多様体の小量子コホモロジーにおいて，変数の次数は 0 であり $H^{1,1}\star H^{p,p}\subset H^{p+1,p+1}$ であることから Griffiths 横断性 $\nabla^{\mathrm{sm}}\mathscr{F}^p\subset\mathscr{F}^{p-1}\otimes\Omega_U^1$ が従う．これは Morrison [54] による A 模型 Hodge 構造の変動である．

注意 6.1　ここで z 方向の量子接続 $\nabla_{z\partial/\partial z}$ は忘れられているが，これはフィルトレーションの情報に対応している．Calabi–Yau 多様体 X に対して点 $\tau\in U_{\mathrm{sm}}$ での z 方向の量子接続は

$$\nabla_{z\frac{\partial}{\partial z}}=z\frac{\partial}{\partial z}+\mu$$

で与えられる．元々のベクトル束 F の $(\tau,z=1)$ でのファイバーの元 $v\in F_{\tau,1}$ は z 平面上に平坦な (多価) 切断 $z^{-\mu}v$ に拡張されるが，その平坦拡張が $z=0$ でもつ極の位数が $\le(n/2)-p$ となる部分空間が $\mathscr{F}^p$ に対応している．

次に一般の設定，すなわち X が Calabi–Yau とは限らず，またパラメータ τ が $H^{1,1}(X)$ に制限されているとは限らない状況を考える．この場合の量子接続と Hodge 構造の変動の類似は，Barannikov[4] による半無限 Hodge 構造の言葉を使うと見やすい．前節ではベクトル束 $F=H^*(X)\times(U\times\mathbb{C})\to$

$U\times\mathbb{C}$ に量子接続を考えたが，ここでは F のファイバーを $H^{*,*}(X)=\bigoplus_{p=0}^{n}H^{p,p}(X)$ に置き換え，底空間 U を $U'=U\cap H^{*,*}(X)$ に置き換えたベクトル束

$$F'=H^{*,*}(X)\times(U'\times\mathbb{C})\to U'\times\mathbb{C}$$

を考えることにする．$H^{*,*}(X)$ は $\tau\in H^{*,*}(X)$ での量子積 $\star_\tau$ で閉じているので，量子接続は F' の接続を誘導する．正則ベクトル束 F' の切断の層を U' に押し出したものを考えよう．

$$\mathbf{F}=\pi_*\mathcal{O}(F')$$

ただし $\pi\colon U'\times\mathbb{C}\to U'$ は射影である．これは U' 上の無限次元ベクトル束と見なすことができ，F' を $U'\times\mathbb{C}^\times$ に制限してから押し出したもの

$$\mathbf{H}=\pi_*(\mathcal{O}(F')|_{U'\times\mathbb{C}^\times})$$

の半無限次元の部分束となっている．$\mathbf{H}$ はフィルトレーション

$$\mathbf{H}\supset\cdots\supset z^{-1}\mathbf{F}\supset\mathbf{F}\supset z\mathbf{F}\supset z^2\mathbf{F}\supset\cdots \tag{6.2}$$

を持つ．量子接続は $\mathbf{H}$ の接続 $\nabla\colon\mathbf{H}\to\mathbf{H}\otimes\Omega^1_{U'}$ を誘導し，定義から Griffiths 横断性の類似

$$\nabla\mathbf{F}\subset z^{-1}\mathbf{F}\otimes\Omega^1_{U'}$$

を満たす．また Poincaré ペアリング $(\cdot,\cdot)_{F'}$ からペアリング $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}}\colon\mathbf{H}\times\mathbf{H}\to\pi_*(\mathcal{O}_{U'\times\mathbb{C}^\times})$ が誘導される．ここでの Hodge–Riemann 双線形関係式の類似は

$$(\mathbf{F},\mathbf{F})_{\mathbf{H}}\subset\pi_*(\mathcal{O}_{U'\times\mathbb{C}})$$

である．これらのデータ $(\mathbf{H},\mathbf{F},\nabla,(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}})$ を有限次元の Hodge 構造の「半無限版」と見なすことにしよう．

この半無限 Hodge 構造において，ガンマ構造の定める実構造を考える．$F'|_{U'\times\mathbb{C}^\times}$ の実部分束 $F'_{\mathbb{R}}$ をコホモロジー類 $\alpha\in H^{*,*}(X)\cap H^*(X,\mathbb{R})$ に付随する平坦切断たち

$$(2\pi)^{-n/2}L(\tau,z)z^{-\mu}z^{c_1(X)}\left(\widehat{\Gamma}_X(2\pi\sqrt{-1})^{\deg/2}\alpha\right)$$

が $\mathbb{R}$ 上生成するものと定義する．ここでガンマ類は $H^{*,*}(X)$ の元なのでこの平坦切断は F' に属すること，またこの実部分束は命題 5.3 よりモノドロミー不変であることに注意する．$F'_{\mathbb{R}}$ は ∇ についての平行移動に関して不変であり，$F'_{\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=F'|_{U'\times\mathbb{C}^\times}$ を満たしている．次に $\mathbf{H}$ の実部分束 $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ を

$$\mathbf{H}_{\mathbb{R}}=\{f\in\mathbf{H}:|z|=1\text{ のときに }f(z)\in F'_{\mathbb{R}}\}$$

で定義する．$\mathbf{H}$ の $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ に関する複素共役を $\kappa\colon\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ とする．これは $f=f(z)\in\mathbf{H}_\tau$ に対して，$|z|=1$ 上で $\overline{f(z)}$ と一致する $F'|_{\{\tau\}\times\mathbb{C}^\times}$ の正則切断 $\kappa(f)$ を対応させる写像である．ただし $\overline{f(z)}$ は $f(z)\in F'_{\tau,z}$ の $F'_{\mathbb{R}}$ に関する複素共役を表す．この複素共役は $\kappa(zf)=z^{-1}\kappa(f)$ を満たす．このとき Hodge 分解および Hodge–Riemann 双線形不等式の半無限版として次の性質を考えることができる．

$$\mathbf{H}_\tau=\mathbf{F}_\tau\oplus z^{-1}\kappa(\mathbf{F}_\tau),\qquad\text{(半無限 Hodge 分解)} \tag{6.3}$$

$$(f,\kappa(f)) > 0 \quad f \in \mathbf{F}_\tau \cap \kappa(\mathbf{F}_\tau),\ f \neq 0. \qquad \text{(半無限双線形不等式)} \tag{6.4}$$

これらの性質は X が Calabi–Yau であり, 底空間を U_{sm} に制限した時には先に述べた A 模型 Hodge 構造の変動における通常の Hodge 分解および双線形不等式と等価になっている．実際, $F'_{\tau,1}$ を $F'|_{\{\tau\}\times\mathbb{C}^\times}$ の多価平坦切断の空間 $H_\tau := \Gamma(\widetilde{\mathbb{C}^\times}, F'|_{\{\tau\}\times\mathbb{C}^\times})^\nabla$ と同一視するとき，A 模型 Hodge 構造のフィルトレーション (6.1) は半無限 Hodge 構造のフィルトレーション (6.2) と次の式で結びついている．（ここで $\mathscr{F}^p_\tau \subset F'_{\tau,1} \cong H_\tau$ と見なしている．注意 6.1 も参照．）

$$\mathscr{F}^p_\tau = H_\tau \cap z^{p-\frac{n}{2}}\mathbf{F}_\tau, \qquad \tau \in U_{\mathrm{sm}}.$$

この式の共役をとって $\overline{\mathscr{F}^{n-p}_\tau} = H_\tau \cap z^{p-\frac{n}{2}}\kappa(\mathbf{F}_\tau)$ であり (ただし左辺の共役は $F'_{\mathbb{R}}$ に関してとった), 上の半無限 Hodge 分解は通常の Hodge 分解

$$\mathscr{F}^p_\tau \oplus \overline{\mathscr{F}^{n-p+1}_\tau} = F'_{\tau,1} \tag{6.5}$$

と対応し，半無限双線形不等式は通常の Hodge–Riemann 双線形不等式

$$(\sqrt{-1})^{2p-n} Q(v,\overline{v}) > 0 \qquad v \in \mathscr{F}^p_\tau \cap \overline{\mathscr{F}^{n-p}_\tau},\ v \neq 0. \tag{6.6}$$

に対応することが分かる．ここで偏極 Q が H_τ 上のペアリング $(f(e^{-\pi\sqrt{-1}}z), g(z))_{F'}$, $f, g \in H_\tau$ に対応することを使った．Weil 作用素の因子 $(\sqrt{-1})^{2p-n}$ は z 平面上の 180 度回転に沿っての平行移動 (モノドロミーの半分) から来ている．

定理 6.2 ([45]; [37] も参照) ガンマ構造が F' 上の量子接続に定める実構造に関して，上記の半無限 Hodge 分解 (6.3) および半無限双線形不等式 (6.4) が点 $\tau = -x\omega$, $\Re(x) \gg 0$ で成り立つ．ただし ω は X の Kähler 類．特に X が Calabi–Yau 多様体であれば，X の A 模型 Hodge 構造はガンマ実構造に関して極大体積極限の近くで (6.5), (6.6) を満たす偏極 $\mathbb{R}$-Hodge 構造を定める．

注意 6.3 本節では量子接続を $H^{*,*}(X) = \bigoplus_{p=0}^n H^{p,p}(X)$ をファイバーとするベクトル束 F' に制限した．点 $\tau = -x\omega$, $\Re(x) \gg 0$ において，上記の半無限 Hodge 分解は F 全体を考えても成立するが，半無限双線形不等式の成立のためには F' に制限する必要がある ([45, Theorem 3.9] を見よ)．また，ガンマ構造の誘導する有理構造を考えるときは，Hodge サイクル $x \in H^{p,p}(X) \cap H^{2p}(X,\mathbb{Q})$ で生成される部分空間に制限することも自然であろう．

注意 6.4 ここで考えた半無限 Hodge 構造に類似した「一般化された」Hodge 構造は多くの人により研究されている．特異点に対する齋藤構造 [62, 63]，tt^* 構造 [11]，ツイスター構造 [64, 60, 53]，TERP 構造 [36, 37], nc-Hodge 構造 [46] などが有名である．量子接続にガンマ構造から定まる実構造を入れたものは，Hertling [36] の意味での TERP 構造を定めており，[60, 37] の用語では半無限 Hodge 分解の成立は “pure”, 半無限双線形不等式の成立は “polarized” と呼ばれている．

注意 6.5 量子接続に付随する半無限 Hodge 構造の性質の中で，本節で議論しなかった重要な点として Stokes 構造との整合性がある．量子接続は $z = 0$ で一般には不確定特異点を持っており，非自明な Stokes 構造を持つ．z 平面の原点を端点とする半直線を固定するとき，その半直線上での平坦切断の空間には $z \to 0$ での増大度によって Stokes フィルトレーションが定義される．Stokes 構造との整合性とは，Stokes フィルトレーションがガンマ構造の定める有理構造に関して $\mathbb{Q}$ 上定義されているこ

とを意味する．この条件は Hertling–Sevenheck [37] および Katzarkov–Kontsevich–Pantev [46] らによって考察されている．後の 9 節で述べるガンマ予想 [28] はこの整合性に関わる予想である．

注意 6.6 ミラー対称性が知られている場合，ミラー側で半無限 Hodge 分解 (pure)，半無限双線形不等式 (polarized)，Stokes 構造との整合性，等を検証できる事がある．例えば Sabbah [61] はアフィン代数多様体上の従順 (tame) 関数 (Landau–Ginzburg 模型) に付随する B 模型は常に "pure and polarized" であることを示した．また，Stokes 構造との整合性については Landau–Ginzburg 模型のミラーがあるときには明らかである一方，Gromov–Witten 理論側からの説明はつけにくい．

7 ガンマ構造とミラー対称性との整合性

第 2 節で述べたように X が Calabi–Yau 多様体の場合，ミラーは通常 Calabi–Yau 多様体として与えられ，その場合のミラー対称性は Hodge 構造の変動の間の同型として述べることができる．一方で一般に Calabi–Yau 多様体ではない空間の場合，ミラーが Landau–Ginzburg 模型と呼ばれる空間と関数の組 (Y, f) として与えられることがよくあり，その場合のミラー対称性は「一般化された」Hodge 構造の変動の間の同型として述べられる．本節では Calabi–Yau 多様体とは限らない設定においてガンマ構造とミラーの整 (有理・実) 構造との整合性を議論する．

Landau–Ginzburg 模型に基づいたミラー対称性の簡単な例として $X = \mathbb{P}^2$ の場合を挙げよう．この場合のミラーは $q \in \mathbb{C}^\times$ でパラメータづけられる $(\mathbb{C}^\times)^2$ 上の関数の族 $f_q(x, y) = x + y + q/(xy)$ であり，ミラー対称性は次のことを主張する [30]．

> 関数 $f_q(x, y)$ に付随する振動積分
>
> $$(-2\pi z)^{-n/2} \int_\Gamma e^{f_q(x,y)/z} \varphi \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}, \qquad \varphi \in \mathbb{C}[z][x^\pm, y^\pm, q^\pm] \tag{7.1}$$
>
> が生成する $\mathbb{C}_q^\times \times \mathbb{C}_z$ 上の有理型接続が $\mathbb{P}^2$ の量子接続と同型である．(ここでは $n = 2$ であるが次元についての依存性を示すためあえて n を残した．)

より正確な命題は次のようになる．上の振動積分に現れる 2 形式 $\varphi\, dxdy/(xy)$ はねじれ de Rham (twisted de Rham) コホモロジー $H^2(\Omega^\bullet_{(\mathbb{C}^\times)^2}[z], zd + df_q\wedge)$ の元と見なすのが自然である．このねじれ de Rham コホモロジーは (q, z) 空間 $\mathbb{C}_q^\times \times \mathbb{C}_z$ 上のベクトル束をなしており，次で与えられる Gauss–Manin 接続を持っている．

$$\begin{aligned} \nabla_{q\frac{\partial}{\partial q}} \left[\varphi \frac{dxdy}{xy} \right] &= \left[\left(q\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{1}{z} q \frac{\partial f_q}{\partial q} \varphi \right) \frac{dxdy}{xy} \right] \\ \nabla_{z\frac{\partial}{\partial z}} \left[\varphi \frac{dxdy}{xy} \right] &= \left[\left(z\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{f_q}{z}\varphi - \frac{n}{2}\varphi \right) \frac{dxdy}{xy} \right]. \end{aligned} \tag{7.2}$$

主張は，パラメータ $q \in \mathbb{C}^\times$ と $\tau \in H^2(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{C}$ との同一視 $q \mapsto \tau = \log q$ の下でこの Gauss–Manin 接続が $\mathbb{P}^2$ の (小量子コホモロジーに対応する) 量子接続と同型になるというものである．ここで $q \mapsto \tau$ はミラー写像と呼ばれる．さらにねじれ de Rham コホモロジーには高次留数ペアリング (higher residue pairing) と呼ばれるペアリング [62] が定まり，それは同型の下で Poincaré ペアリングと一致する．また Calabi–Yau の場合の正則体積形式に相当する原始形式 $dxdy/(xy)$ は $\mathbb{P}^2$ の量子コホモロジーの単位元 1 に対応している．

$$
\begin{array}{ccc}
H^2(\Omega^{\bullet}_{(\mathbb{C}^\times)^2}[z], zd+df_q\wedge) & \cong & H^*(\mathbb{P}^2)\otimes\mathbb{C}[z] \\
\text{Gauss–Manin 接続} & \Longleftrightarrow & \text{量子接続} \\
\text{高次留数ペアリング} & \Longleftrightarrow & \text{Poincaré ペアリング} \\
\text{原始形式}\quad \dfrac{dx}{x}\dfrac{dy}{y} & \Longleftrightarrow & \text{単位元}\quad 1
\end{array}
$$

上の振動積分 (7.1) はこの Gauss–Manin 接続の解とみなすことができる．即ち振動積分のサイクル Γ の次の相対ホモロジー類

$$[\Gamma]\in H_2((\mathbb{C}^\times)^2, \{(x,y) : \Re(f_q(x,y)/z)\ll 0\}) \tag{7.3}$$

を選ぶごとに Gauss-Manin 接続の解が定まり，この相対ホモロジーは解空間と同一視される[6)]．相対ホモロジー (7.3) は $\mathbb{Z}$ 上で定義されるため，Gauss–Manin 接続は自然な $\mathbb{Z}$ 構造を持つ．

注意 7.1　振動積分の典型的なサイクルは f_q の Lefschetz の指ぬき (Lefschetz thimble) と呼ばれるもので，$\Re(f_q/z)$ の臨界点から発する Morse サイクル (安定部分多様体) である．

上では $\mathbb{P}^2$ に対する Landau–Ginzburg ミラーを紹介したが，同様のミラーがより一般のトーリック軌道体に対して定義される [30, 39, 42] (Givental–Hori–Vafa ミラー)．X をコンパクト弱 Fano トーリック軌道体とする．ここでトーリックの場合の弱 Fano 条件は $-K_X$ がネフ，すなわち任意の有理曲線のクラス d について $c_1(X)\cdot d\ge 0$ が成立することと等価である．簡単のため X は軌道体として生成的固定元 (generic stabilizer) を持たないものとすると，X はある格子 $\mathbf{N}\cong\mathbb{Z}^n (n=\dim X)$ に定まるスタック的扇 (stacky fan) の言葉で記述される [6]．ここで格子 $\mathbf{N}$ はトーリック軌道体 X に作用する代数トーラス T の余指標格子 $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$ である．凸多面体 $\Delta\subset\mathbf{N}_{\mathbb{R}}=\mathbf{N}\otimes\mathbb{R}$ をスタック的扇の 1 次元錘の生成元たちの凸包とする．X の小量子コホモロジーのミラーは，Newton 多面体が Δ と一致する Laurent 多項式の族 $f_c(x)$ によって与えられる．

$$f_c(x)=\sum_{b\in\Delta\cap\mathbf{N}} c_b x^b, \qquad x\in T^\vee := \mathrm{Hom}(\mathbf{N},\mathbb{C}^\times)\cong(\mathbb{C}^\times)^n.$$

$\mathbb{P}^2$ の場合と同様に f_c のねじれ de Rham コホモロジーの族に Gauss–Manin 接続が定義され，それは f_c のパラメータ空間と z 平面の直積上の有理型接続を与える．さらに (7.3) と同様の相対ホモロジー群が Gauss–Manin 接続の整構造を与える．f_c に対する Gauss–Manin 接続の構成の詳細については [59, 42, 56] を参照されたい．この設定の下で，ガンマ整構造とミラーの整構造が一致することが確かめられる[7)]．

定理 7.2 ([42])　Δ に含まれる格子点が $\mathbf{N}$ を $\mathbb{Z}$ 上生成するとする．このときコンパクト弱 Fano トーリック軌道体 X のミラー f_c の Gauss–Manin 接続と X の量子接続は (ミラー写像による底空間の同一視の下で) 同型になり，その同型はペアリングと整構造を保つ．

この結果の Fourier–Laplace 変換をとることで，トーリック軌道体内の Calabi–Yau 超曲面に対する Batyrev ミラー対称性 [5] の下で整構造が一致することを示せる．X を上と同じく生成的固定元を持たないコンパクト弱 Fano トーリック軌道体とし，対応する凸多面体 $\Delta\subset\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ が反射的 (reflexive)，つまり Δ の双対多面体 $\Delta^\circ=\{x\in\mathbf{N}^*_{\mathbb{R}} : (x,y)\ge -1\,(\forall y\in\Delta)\}$ が格子点で張られる多面体であると仮定する．この条件は X が Gorenstein であること，すなわち K_X が粗モジュライ空間上の直線束

の引き戻しになること，と同値である．Batyrev のミラー対とは X の準滑らか (quasi-smooth)[8] な Calabi–Yau 超曲面 $X' \in |-K_X|$ と X のミラー $f_c(x)$ の定めるアフィン超曲面 $\{f_c(x)=1\} \subset T^\vee$ の Calabi–Yau コンパクト化 Y' との組 (X', Y') である．ここで Y' は Δ° に対応するトーリック軌道体の Calabi–Yau 超曲面として得られる．X' の軌道体コホモロジー類のうち X からの制限として得られるもののなす部分空間は量子積で閉じている．したがって X の A 模型 Hodge 構造の変動はこの部分空間に制限することができ，これを X' の**囲繞 A 模型 Hodge 構造の変動** (ambient A-model VHS) と呼ぶことにする．また Y' のコホモロジー類のうちトーラス $T^\vee$ 上の $f_c(x)=1$ に沿って極を持つ n 次有理微分形式の留数類 (residue class) として得られるもののなす部分空間は Gauss–Manin 接続で閉じており，これを Y' の**留数 B 模型 Hodge 構造の変動** (residual B-model VHS) と呼ぶことにする．囲繞 A 模型 Hodge 構造の変動には制限写像 $K^0(X) \to K^0(X')$ の像により整構造が定まり，留数 B 模型 Hodge 構造の変動には $f_c(x)$ の消滅サイクルのなす格子による整構造が導入できる (詳細は [44] を見よ)．

定理 7.3 ([44])　Δ に含まれる格子点が $\mathbf{N}$ を $\mathbb{Z}$ 上生成するとする．X' の囲繞 A 模型 Hodge 構造の変動と Y' の留数 B 模型 Hodge 構造の変動は (ミラー写像による底空間の同一視の下で) 同型であり，この同型は偏極と整構造を保つ．

この定理は第 2 節で述べた細野の予想を部分的に説明するものである．注意 5.5 で説明したように，ミラー対称性の下で Y' の正則体積形式は X' の量子コホモロジーの単位元 1 に対応し，また上の定理から Y' 上の消滅サイクル C はある K 群の類 $\mathcal{E} \in \mathrm{Im}(K^0(X) \to K^0(X'))$ に付随する X' の量子接続の平坦切断 $s(\mathcal{E})$ に対応する．したがって C 上での周期 (正則体積形式と C のペアリング) は注意 5.5 の量子コホモロジー中心電荷 $Z(\mathcal{E})$ (1 と $s(\mathcal{E})$ のペアリング) と等しく，式 (5.2) と類似の等式によって消滅サイクル C 上の周期が式 (2.2) の形で与えられることが従う．ただし C と $\mathcal{E}$ がホモロジー的ミラー対称性で対応するかどうかはさらに検証が必要であろう．

注意 7.4　[44] では Calabi–Yau とは限らないネフ完全交叉に対しても，ガンマ構造とミラー対称性の整合性が部分的に示されている．具体的には，量子接続のガンマ整構造に関する整の解 (注意 5.5 の量子コホモロジー中心電荷) であって囲繞空間から来る K 群のクラスに付随するものが，ミラーの Landau–Ginzburg 模型のある整サイクル上の振動積分として書けることが示されている．

8　クレパント変換予想

ガンマ構造と Gromov–Witten 理論の間の関手性 (functoriality) の関係について，クレパント変換予想に焦点を当てて述べたい．2 つの滑らかな射影多様体 X_1, X_2 が K 同値であるとは滑らかな射影多様体 Z および双有理射 $p_1\colon Z \to X_1$, $p_2\colon Z \to X_2$ が存在して $p_1^* K_{X_1} = p_2^* K_{X_2}$ が成り立つことである．

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi"'] & & X_2 \end{tikzcd}$$

このとき対応する X_1 から X_2 への双有理変換 φ をクレパント変換と呼ぶことにする．K 同値の概念

を軌道体 (あるいは滑らかな Deligne–Mumford スタック) のカテゴリーまで拡張することで，K 同値はクレパント解消[9)] も含む概念となる．K 同値の下で軌道体コホモロジーの Hodge 数が変わらないことは安田 [67] により示されている．Ruan [58] は K 同値の下で量子コホモロジーが変わらないこと，より正確にはパラメータ τ の解析接続を通じて X_1, X_2 の量子コホモロジーが同型になることを予想した．ここで注意すべき点は，X_1 の極大体積極限と X_2 の極大体積極限は一般には異なり，解析接続が必要なことである．Ruan の予想を量子接続とガンマ構造を用いて精密化したものが次の予想である．

予想 8.1 (クレパント変換予想 [20, 42, 43]) (1) クレパント変換 (K 同値) で結びついている軌道体 X_1, X_2 の量子接続は解析接続の下で同型になる．

(2) X_1，X_2 の量子接続の間の解析接続はガンマ整構造を通じて Fourier–向井変換 $K^0(X_1) \cong K^0(X_2)$ から誘導される．ただし Fourier–向井変換とは通常導来圏の間の関手を意味するが，ここでは対応する K 群の間の写像，すなわちある元 $\mathcal{K} \in K^0(X_1 \times X_2)$ によって $(\pi_2)_*(\mathcal{K} \otimes \pi_1^*(-))$ と表される写像を意味することとする．

この予想のより正確な意味は次の通りである．次の性質を満たす複素多様体 $\mathcal{M}$ および $\mathcal{M}$ 上の構造 $(F, F_{\mathbb{Z}}, \nabla, (\cdot,\cdot)_F)$ が存在する．

- F は $\mathcal{M} \times \mathbb{C}$ 上の正則ベクトル束.
- ∇ は F の次の極構造を持つ有理型平坦接続

$$\nabla\colon \mathcal{O}(F) \to \mathcal{O}(F)(U \times \{0\}) \otimes_{\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}} \left(\pi^*\Omega^1_U \oplus \mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}\frac{dz}{z}\right).$$

- $(\cdot,\cdot)_F\colon \iota^*\mathcal{O}(F) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathbb{C}}} \mathcal{O}(F) \to \mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathbb{C}}$ は非退化，対称，∇ 平坦なペアリング．ここで写像 $\iota\colon \mathcal{M}\times\mathbb{C} \to \mathcal{M}\times\mathbb{C}$ は $\iota(\tau, z) = (\tau, -z)$ であり，対称性は $(s_1, s_2)_F = \iota^*(s_2, s_1)_F$ を意味する．
- $F_{\mathbb{Z}}$ は平坦ベクトル束 $(F|_{\mathcal{M}\times\mathbb{C}^\times}, \nabla)$ の平坦切断からなる $\mathbb{Z}$ 上の局所系で，$F_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = \operatorname{Ker}\nabla$ となるもの.
- ある連結開集合 $U_i \subset \mathcal{M}$，$i = 1, 2$ が存在して $(F, F_{\mathbb{Z}}, \nabla, (\cdot,\cdot)_F)$ の $U_i \times \mathbb{C}$ への制限は X_i の量子接続とそのガンマ整構造および Poincaré ペアリングにより定まる構造 (5 節参照) と同型である．
- U_1 と U_2 を結ぶ道 γ に対して Fourier–向井変換 $U_\gamma\colon K^0(X_1) \cong K^0(X_2)$ が存在して，γ に沿っての解析接続はガンマ整構造を通じて U_γ で与えられる．ここで U_γ は γ のホモトピー類のみに依存する．

注意 8.2 予想 8.1 の (1) は [20] に基づく．元々は X_1 と X_2 の量子コホモロジーに付随する Frobenius 多様体の間の同型という (1) より強い予想が考えられていた ([9] 参照) が，[20] は $\mathcal{M}$ 上には大域的なアフィン線形構造が定まらない例を与えた．つまり $H^*_{\mathrm{CR}}(X_1)$ のアフィン線形構造と $H^*_{\mathrm{CR}}(X_2)$ のアフィン線形構造は $\mathcal{M}$ に沿っての解析接続の下で一致するとは限らず，量子コホモロジー Frobenius 多様体が同型になることは一般には期待できない．クレパント解消の場合，この二つのアフィン線形構造の一致を保障する条件として，軌道体に対する Hard Lefschetz 条件が知られている [20]．これは軌道体コホモロジー $H^*_{\mathrm{CR}}(X)$ が Hard Lefschetz 性質 $\omega^k\colon H^{n-k}_{\mathrm{CR}}(X) \cong H^{n+k}_{\mathrm{CR}}(X)$ を満たすという条件である．

トーリック軌道体はベクトル空間の GIT 商として書くことができ，GIT 安定性条件の壁超えに伴っ

てトーリック軌道体の間のクレパント変換が誘導される．このクレパント変換はさらにトーリック軌道体に含まれる適当な完全交叉の間のクレパント変換を誘導する．ミラー定理 [16, 17] を用い，先に述べた Borisov–Horja [7] の計算を拡張することでこの場合には予想 8.1 が証明できる．

定理 8.3 ([19]) GIT 安定性条件の変動から導かれるトーリック軌道体およびその中の完全交叉の間のクレパント変換 $\varphi\colon X_1 \dashrightarrow X_2$ に対して上の予想 8.1 が成立する (詳しい設定と命題については [19] を参照されたい).

注意 8.4 González–Woodward [35] は一般の GIT 商 $X/\!\!/G$ の変動の下で，量子コホモロジーがどのように変わるかを調べている．ここで X は滑らかな射影 (あるいは準射影) 多様体であり，G は X に作用する簡約群である．彼らの結果は (GIT 安定性条件の変動からくるクレパント変換について) 予想 8.1 の (1) に相当する部分を含意するはずである．

クレパント変換予想は高種数 Gromov–Witten 理論に対しても定式化する事ができる [20, 18]．この定式化には Givental による量子化 [33] を用いる．詳しくは述べないが，大まかに言うと上の予想にある Fourier–向井変換 $U\colon K^0(X_1) \cong K^0(X_2)$ を量子化した変換 $\widehat{U}$ によって X_1 と X_2 の高種数 Gromov–Witten ポテンシャルが移りあう

$$\mathcal{Z}_{X_2} \propto \widehat{U}\mathcal{Z}_{X_1}$$

という予想である．ここで $\mathcal{Z}_X$ は X の全子孫ポテンシャル (total descendant potential) と呼ばれる高種数の子孫 Gromov–Witten 不変量の母関数である．次の結果はトーリック軌道体に対するミラー対称性 [42] および高種数 Gromov–Witten ポテンシャルを量子コホモロジーの言葉で表す Givental–Teleman の公式 [33, 65] から従う．

定理 8.5 ([18]) GIT 安定性条件の変動から導かれるコンパクト弱 Fano トーリック軌道体の間のクレパント変換 $\varphi\colon X_1 \dashrightarrow X_2$ に対して高種数のクレパント変換予想が成立する．

注意 8.6 (LG/CY 対応) クレパント変換予想と類似の予想に LG/CY 対応と呼ばれるものがある．これは (重み付き) 射影空間の Calabi–Yau 超平面に対する Gromov–Witten 理論が, Fan–Jarvis–Ruan [24] による量子特異点理論に解析接続される，とする予想である．ここで量子特異点理論とは $(\mathbb{C}^n, G, f)$ の形の Landau–Ginzburg 軌道体に対して定義されるもので，$G \subset (\mathbb{C}^\times)^n$ は有限群，f は $\mathbb{C}^n$ 上の G 不変な多項式関数である．例えば $\mathbb{P}^4$ 内の 5 次 Calabi–Yau 超曲面 $\{f(x_1, \dots, x_5) = 0\}$ に対する Gromov–Witten 理論は $(\mathbb{C}^5, \mu_5, f)$ に対する量子特異点理論と解析接続の関係にあると予想され，この場合の予想は Chiodo–Ruan [15] により種数 0 で証明されている．量子特異点理論においても f の行列因子化の圏の K 群を用いてガンマ整構造を導入することができる．[14] では種数 0 での LG/CY 対応において解析接続はガンマ整構造を保ち，また対応するガンマ整構造の間の写像が, Orlov による行列因子化の圏と Calabi–Yau 超曲面の導来圏の間の圏同値から誘導されること，が示されている．

9 ガンマ予想

最後にガンマ構造と量子微分方程式の Stokes 構造との整合性に関する予想であるガンマ予想を述べて本論説を終わることにしたい．これは著者と S. Galkin, V. Golyshev との共同研究 [28] に基づく．注意 6.5 で述べたように整構造 (あるいは実構造) と Stokes 構造との整合性は Hertling–Sevenheck

[37] や Katzarkov–Kontsevich–Pantev [46] らによっても考察されている．

ここでは Fano 多様体，すなわち反標準束 $-K_X$ が豊富であるような滑らかな射影多様体 X に考察を限ることにする．Fano 多様体の小量子積は Novikov 変数 Q の多項式となるので収束性の問題は存在しない．以下では $\tau=0$, $Q=1$ に特殊化した小量子積 $\star$ を扱う．このとき小量子積は $H^*(X,\mathbb{Q})$ に $\mathbb{Q}$ 上の有限次元可換代数の構造を定めることに注意しよう．また量子接続の z 方向の成分のみに注目することにする．量子接続の z 方向成分は $\tau=0$ では

$$\nabla_{z\frac{\partial}{\partial z}} = z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z}(c_1(X)\star) + \mu \tag{9.1}$$

で与えられる．この接続の特異点は $z=0$ と $z=\infty$ の 2 点のみであり，$z=0$ は不確定特異点，$z=\infty$ は確定特異点となっている．ガンマ予想は不確定特異点 $z=0$ から確定特異点 $z=\infty$ への解の接続に関する予想である．式 (9.1) の形から，$z=0$ の近傍での平坦切断の振る舞いは $c_1(X)\star$ の固有値で決定されると考えられる．つまり u を $c_1(X)\star$ の固有値，Ψ を対応する固有ベクトルとするとき，$z\to 0$ で $e^{-u/z}\Psi$ に漸近する平坦切断がありそうである．

一方，ミラー対称性を使っても $z=0$ のまわりで平坦切断の振る舞いを理解することができる．第 7 節で見たような Landau–Ginzburg ミラー対称性が X に対して成り立つとし，関数 $f\colon Y\to\mathbb{C}$ が X のミラーであったとする．このとき $c_1(X)\star$ の固有値は f の臨界値に対応するはずである．なぜなら，量子接続 $\nabla_{z\partial/\partial z}$ の $z=0$ での主要部は $-(c_1(X)\star)/z$ であり，式 (7.2) から Gauss–Manin 接続の $z=0$ での主要部は $-f/z$ の掛け算であるからである．f の非退化な臨界点に対して，注意 7.1 にある Lefschetz の指ぬき Γ を対応させることができ，Lefschetz の指ぬきは振動積分 (式 (7.1)) を定義する．Γ が臨界値 u に対応する Lefschetz の指ぬきであれば，停留位相近似により振動積分は $z\to 0$ で次の漸近挙動を持つ．

$$(-2\pi z)^{-n/2}\int_\Gamma e^{f(x)/z}\omega \sim \mathrm{Const}\cdot e^{u/z}.$$

振動積分が平坦切断のちょうど双対であることに注意すれば，この漸近挙動は平坦切断の漸近挙動 $s(z)\sim e^{-u/z}\Psi$ と対応している．

我々は $z=0$ の周りの平坦切断の中で $z\to 0$ において最も小さい漸近挙動を示す平坦切断に興味がある．言い換えれば，$c_1(X)\star$ の (絶対値あるいは実部の) 最も大きい固有値に興味がある．これはミラーの言葉では f の最も大きい臨界値に対応する．$c_1(X)\star$ の固有値に関する予想 $\mathcal{O}$ を述べよう．

予想 9.1 (予想 $\mathcal{O}$ [28])　$T:=\max\{|u|:\ u$ は $(c_1(X)\star)$ の固有値 $\}\in\overline{\mathbb{Q}}$ とおく．このとき，

(a) T は $c_1(X)\star$ の重複度 1 の固有値である．

(b) $c_1(X)\star$ の固有値 u が $|u|=T$ を満たすとき，$u=T\zeta$, $\zeta^r=1$ を満たす $\zeta\in\mathbb{C}^\times$ が存在する．ただし r は X の Fano 指数，つまり $c_1(X)/r$ が整クラスとなる最大の自然数．

注意 9.2　小野薫氏は予想 9.1 の (a) が Perron–Frobenius の定理と関係することを指摘した．もし $c_1(X)\star$ がある基底に関して規約な非負行列で表現されるならば (a) は Perron–Frobenius の定理の帰結である．

予想 $\mathcal{O}$ の $\mathcal{O}$ は構造層を意味する．上に見たようにミラー対称性の下で $c_1(X)\star$ の固有値は Landau–Ginzburg 模型の関数 f の臨界値に対応し，さらに f の非退化臨界点には Lefschetz の指ぬきを付随させることができるのであった．ホモロジー的ミラー対称性の下で，この Lefschetz の指ぬきは X の導

来圏の例外対象 (exceptional object) に対応すると考えられる．これらの対応をまとめると，$c_1(X)\star$ の特性多項式における重複度が 1 の固有値は，$D^b(X)$ の例外対象と対応することが予想される．この対応を通じて，$c_1(X)\star$ の最大固有値 T は $D^b(X)$ の例外対称である構造層 $\mathcal{O}$ に対応するという経験則があり，この経験則を踏まえて上の名前が付けられた．以下に述べるガンマ予想 I・II は重複度 1 の固有値と例外対称の間の対応を**ミラー対称性を経由せずに**与えるものである．

注意 9.3　式 (9.1) の接続 $\nabla_{z\partial/\partial z}$ は $c_1(X)$ の生成する直線 $t \mapsto (\tau, z) = (c_1(X)\log t, 1)$ に量子接続を制限したもの

$$\nabla_{c_1(X)}\Big|_{z=1} = t\frac{\partial}{\partial t} + (c_1(X)\star_{c_1(X)\log t})$$

と変数変換 $t = z^{-1}$ およびゲージ変換 z^μ によって移りあうことが簡単な計算で確かめられる．従って X が Fano という仮定の下では，z 方向の接続 (9.1) を $z = \infty$ の周りで考察することは，$z = 1$ および $\tau = c_1(X)\log t$ に制限した量子接続を極大体積極限 $t = 0$ の周りで考察することと同じである．一方 $z = 0$ は極大体積極限の対極 $t = \infty$ に対応する．

予想 $\mathcal{O}$ の下で，量子接続の z の正の実軸 $\mathbb{R}_{>0}$ 上での平坦接続の空間の中に，$z \to +0$ に沿う指数増大度が最も小さいものがちょうど 1 次元分あることがわかる．すなわち，

$$\mathcal{A} = \left\{ s\colon \mathbb{R}_{>0} \to H^*(X) : \begin{array}{l} \nabla_{z\frac{\partial}{\partial z}} s(z) = 0, \\ \exists m > 0, \|e^{T/z}s(z)\| = O(z^{-m}) \text{ as } z \to +0 \end{array} \right\}$$

とおくと $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = 1$ が成立する．

予想 9.4 (ガンマ予想 I [28])　X は予想 $\mathcal{O}$ を満たす Fano 多様体とする．このとき $\mathcal{A}$ は $s(\mathcal{O})(0, z)$ で生成される．ここで $s(\mathcal{O})(\tau, z)$ は第 5 節で導入された量子接続の平坦切断である．

平坦切断 $s(\mathcal{O})(0, z)$ は $z = \infty$ の周りで

$$s(\mathcal{O})(0, z) \sim (2\pi)^{-n/2} z^{-\mu} z^{c_1(X)} \widehat{\Gamma}_X$$

なる漸近挙動を持つ平坦切断であることが分かる．注意 9.3 から $\tau = 0$ をとめて $z \to \infty$ の極限を考えることと，$z = 1$ をとめて τ の極大体積極限を考えることは同じである．従って上記の漸近挙動は命題 5.1 に与えた極大体積極限での $s(\mathcal{O})(\tau, z)$ の漸近挙動と本質的に同等のものである．この漸近挙動から，ガンマ予想 I は **$z \to +0$ での増大度が一番小さい平坦切断を $z \to \infty$ に解析接続したものがガンマ類に漸近する**，という主張であることが分かる．量子接続の解である J 関数を使うとガンマ予想は明示的な形に言い換えられる．J 関数は

$$J(t) = e^{c_1(X)\log t}\left(1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{d \in H_2(X,\mathbb{Z})} \left\langle \frac{\phi_i}{1 - \psi_1} \right\rangle_{0,1,d} t^{c_1(X)\cdot d} \phi^i \right)$$

で与えられるコホモロジー値級数である．ここで $t = z^{-1}$ であり，$\{\phi^i\}$ は $\{\phi_i\}$ の Poincaré ペアリングに関する双対基底，表式 $\phi_i/(1-\psi_1)$ は $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_i \psi_1^k$ と展開され，注意 4.1 の重力子孫を与えている．

命題 9.5 ([28])　予想 $\mathcal{O}$ の下でガンマ予想 I は次の極限公式と同値である．

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{J(t)}{J^0(t)}=\widehat{\Gamma}_X$$

ただし $J^0(t)=\langle J(t),[\mathrm{pt}]\rangle$ は $J(t)$ の $H^0(X)$ 成分．従ってガンマ予想 I の下では，ガンマ類は量子コホモロジーから極限操作によって復元される．

上記の極限公式における左辺を「解析的指数」，右辺を「位相的指数」と考えることで，ガンマ予想を指数定理の類似と見なすことができる．ここで左辺が解析的指数とみなしたのは，量子コホモロジーが非線形の偏微分方程式の解のモジュライ空間を使って定義されていること，またさらにその量子コホモロジーの定める常微分方程式の解 $J(t)$ を使って左辺が定義されることが理由である．また Givental の同変 Floer 理論 [30] において J 関数がループ空間上の「経路積分」として書かれたことも解析的指数との類似を連想させるだろう ([27] も参照)．

上記の命題における連続極限を離散的極限に置き換えることもできる．

命題 9.6 ([28]) Fano 多様体 X が予想 $\mathcal{O}$ およびガンマ予想 I を満たすとする．J 関数を次の形に展開する．

$$J(t)=e^{c_1(X)\log t}\sum_{k=0}^{\infty}J_k t^k.$$

任意のホモロジー類 $\alpha\in H_*(X)$ で $c_1(X)\cap\alpha=0$ を満たすものに対して，極限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\langle\alpha,J_{rk}\rangle}{J^0_{rk}}$$

が存在するならば，それは $\alpha\cdot\widehat{\Gamma}_X$ に等しい．ただし r は X の Fano 指数.

注意 9.7 この命題のより精密な主張は数列 $(\langle\alpha,J_{rk}\rangle/J^0_{rk})_{k=1}^{\infty}$ が $\alpha\cdot\widehat{\Gamma}_X$ を集積点に持つというものである．一方極限 $\lim_{k\to\infty}\langle\alpha,J_{rk}\rangle/J^0_{rk}$ の存在はミラー対称性の観点からも期待される [27].

注意 9.8 ガンマ類が ζ 値と Chern 類で与えられていたことを思い出すと，この命題によりガンマ予想 I を満たす Fano 多様体に対して $\zeta(2),\zeta(3),\zeta(4),\dots$ の有理数による近似が得られる．例えば Fano 多様体 $OGr(5,10)$ の与える $\zeta(3)$ の有理数近似は Apéry が $\zeta(3)$ の無理数性の証明に使ったものである．特別な Fano 多様体に対して $\zeta(5),\zeta(7),\dots$ の無理数性を証明する有理数近似列が得られるかどうかは興味深い問題である ([26] 参照).

小量子コホモロジーが半単純であると仮定すると，ガンマ予想 I は次のガンマ予想 II に精密化される．前に述べたように，これは指数定理の「平方根」と思えるものである．

予想 9.9 (ガンマ予想 II [28]) Fano 多様体 X の小量子積 $\star$ が半単純であるとし，$D^b(X)$ が充満例外列 (full exceptional collection) を持つとする．$c_1(X)\star$ の固有値を $u_1,\dots,u_N$ とする．$\phi\in\mathbb{R}$ を任意の $u_k\neq u_l$ なるペア (k,l) に対して $u_k-u_l\notin\mathbb{R}e^{\sqrt{-1}\phi}$ を満たす実数とする．必要なら番号を付け替えて $\Im(e^{-\sqrt{-1}\phi}u_1)\geq\Im(e^{-\sqrt{-1}\phi}u_2)\geq\cdots\geq\Im(e^{-\sqrt{-1}\phi}u_N)$ が成立すると仮定してよい．このとき $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ の充満例外列 $\mathcal{E}^\phi_1,\dots,\mathcal{E}^\phi_N$ が存在して，z が角領域 $|\arg z-\phi|<(\pi/2)+\epsilon$ の中で $z=0$ に近づくときに漸近展開

$$s(\mathcal{E}^\phi_i)(0,z)\sim e^{-u_i/z}\Psi_i$$

が成立する．ここで $\Psi_i\in H^*(X)$ は $\Psi_i\star\Psi_i\in\mathbb{C}\Psi_i$, $c_1(X)\star\Psi_i=u_i\Psi_i$,$(\Psi_i,\Psi_i)=1$ を満たす元

(べき等元の規格化) であり，$\epsilon > 0$ は十分小さい正の数.

ガンマ予想 II を仮定するとき，量子接続の Stokes 行列 S_{ij} は $s(\mathcal{E}_i^\phi)$ たちのペアリングで与えられ，命題 5.3 よりそれは $\mathcal{E}_i^\phi$ たちの Euler ペアリングとなる.

$$S_{ij} = \left(s(\mathcal{E}_i^\phi)(0, e^{-\pi\sqrt{-1}}z), s(\mathcal{E}_j^\phi)(0,z)\right) = \chi(\mathcal{E}_i^\phi, \mathcal{E}_j^\phi).$$

これは Dubrovin 予想 [23](の一部) を復元している．Dubrovin は量子コホモロジーが半単純であるとき，連接層の導来圏 $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ は充満例外列をもつこと，さらに量子微分方程式の Stokes 行列が充満例外列の Euler ペアリングで与えられると予想した.

注意 9.10　[28] は Grassmann 多様体 $G(k,n)$ がガンマ予想 I,II を満たすことを示した．Golyshev–Zagier [34] は Picard rank 1 の 3 次元 Fano 多様体に対しガンマ予想 I を示している．また第 7 節での結果を用いるとトーリック多様体やその中の完全交叉に対するガンマ予想が (予想 $\mathcal{O}$ に対応する部分を除き) 部分的に解決される [27].

注意 9.11　ガンマ予想 II では導来圏が充満例外列を持つ場合を考えたが，一般に導来圏の半直交分解の構造が量子接続の Stokes 構造に反映されると予想できる.

注　釈

1) より一般に弱複素構造 (weakly complex structure, あるいは stable complex structure ともいう) をもつ多様体に対して定義できる.

2) 偶数での ζ 値は $\zeta(2n) = (2\pi)^{2n}|B_{2n}|/(2(2n)!)$ であり，π^{2n} の有理数倍である．奇数での値 $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$ は超越数であると (さらに代数的独立とも) 予想されているが証明はされていない．Apéry[2] は $\zeta(2), \zeta(3)$ が無理数であることを示し，Rivoal[57] は $\{\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \ldots\}$ が $\mathbb{Q}$ 上独立な元を無限個含むこと，Zudilin[68] は $\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)\}$ の中で少なくとも一つは無理数であることを示した.

3) 数学的には Gromov–Witten 不変量から multiple cover formula を経由して定義されるもので，本当の有理曲線の数との関係は分かっていない.

4) シンプレクティック Floer 理論において，量子コホモロジーはループ空間 LX の普遍被覆に対する「半無限次数」の Morse ホモロジーとみなすことができる．ここでの解釈は Givental [30] の提案した S^1 同変 Floer 理論と密接に関係している．ガンマ類と同変 Floer 理論やミラー対称性とのかかわりについては [27] の解説を見られたい.

5) ここでは $-\Re(\sigma)$ の $(1,1)$ 部分を Kähler 類と見なしている.

6) 正確には振動積分に $(-2\pi z)^{-n/2}$ の項があるので，次元 n が奇数のときは相対ホモロジーのなす局所系をこの項でねじった局所系を考える必要がある.

7) 以下の定理の証明にはトーリック多様体に対する Givental のミラー定理 [32] を軌道体に拡張した結果 [16] を用いる.

8) ここで軌道体 X の超曲面 X' が準滑らかとは，X' の特異点が定義方程式からは生じず，全て X の商特異点からくるときに言う．言い換えれば X' が滑らかな Deligne–Mumford スタックになっていること.

9) Gorenstein 軌道体 X のクレパント解消とは滑らかな射影多様体 Y から X の粗モジュライ空間 $\overline{X}$ への双有理射 $f\colon Y \to \overline{X}$ であって $f^*K_{\overline{X}} = K_Y$ を満たすもののことであった.

文　献

[1] Dan Abramovich, Tom Graber, Angelo Vistoli, Gromov–Witten theory of Deligne–Mumford stacks. Amer. J. Math. 130 (2008), no.5, pp.1337–1398.

[2] Roger Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Asterisque 61 (1979) 11–13.

[3] M. F. Atiyah, Circular symmetry and stationary phase approximation, pp. 43–59 in Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz (École Polytechnique, Palaiseau, 30 May – 3 June 1983). Astérisque 131. Société mathématique de France (Paris), 1985.

[4] Serguei Barannikov, Quantum periods. I. Semi-infinite variations of Hodge structures, Internat. Math. Res. Notices, 2001, no. 23, 1243–1264.

[5] Victor V. Batyrev, Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties. J. Algebraic Geom. 3 (1994), no. 3, pp.493–535.

[6] Lev Borisov, Linda Chen, Gregory Smith, The orbifold Chow ring of toric Deligne–Mumford stacks. J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 1, pp.193–215.

[7] Lev Borisov and Richard Paul Horja, Mellin–Barnes integrals as Fourier–Mukai transforms, Adv. Math. 207 (2006), no. 2, 876–927, arXiv:math/0510486.

[8] Tom Bridgeland, Stability conditions on trian-

gulated categories Ann. of Maths. (2), 166 (2007), pp.317–345.

[9] Jim Bryan, Tom Graber, The crepant resolution conjecture, Algebraic geometry Seattle 2005. Part 1, 23–42, Proc. Sympos. Pure Math., 80, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[10] Philip Candelas, Xenia C. de la Ossa, Paul S. Green and Linda Parkes: An exactly soluble superconformal theory from a mirror pair of Calabi–Yau manifolds, Phys. Lett. B 258 (1991), no.1-2, pp.118–126.

[11] Sergio Cecotti, Cumrun Vafa, On classification of N = 2 supersymmetric theories, Comm. Math. Phys. 158 (1993), no. 3, 569–644.

[12] Weimin Chen, Yongbin Ruan, A new cohomology theory of orbifold. Comm. Math. Phys. B 359 (1991) no.1, pp.1–31.

[13] Chen, Weimin; Ruan, Yongbin Orbifold Gromov–Witten theory. Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), Contemp. Math., vol. 310, Amer. Math. Soc., Province, RI, 2002, pp.25-85.

[14] Alessandro Chiodo, Hiroshi Iritani and Yongbin Ruan, Landau–Ginzburg/Calabi–Yau correspondence, global mirror symmetry and Orlov equivalence, Publ. IHES, June 2014, Vol 119, Issue 1, pp.127-216

[15] Alessandro Chiodo and Yongbin Ruan, Landau–Ginzburg/Calabi–Yau correspondence for quintic three-folds via symplectic transformations, Invent. Math. 182 (2010), no. 1, 117–165.

[16] Tom Coates, Alessio Corti, Hiroshi Iritani and Hsian-Hua Tseng, A mirror theorem for toric stacks, Compos. Math. 151 (2015), no. 10, 1878–1912.

[17] Tom Coates, Alessio Corti, Hiroshi Iritani and Hsian-Hua Tseng, Some Applications of the Mirror Theorem for Toric Stacks, arXiv:1401.2611.

[18] Tom Coates, Hiroshi Iritani A Fock sheaf for Givental quantization, arXiv:1411.7039.

[19] Tom Coates, Hiroshi Iritani, Yunfeng Jiang, The crepant transformation conjecture for toric complete intersections, arXiv:1410.0024.

[20] Tom Coates, Hiroshi Iritani, Hsian-Hua Tseng, Wall-crossings in toric Gromov–Witten theory. I. Crepant examples, Geom. Topol. 13 (2009), no. 5, 2675–2744.

[21] David A. Cox and Sheldon Katz, Mirror symmetry and algebraic geometry, Mathematical Surveys and Monographs, 68. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[22] M. R. Douglas, Dirichlet Branes, Homological Mirror Symmetry, and Stability, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Beijing 2002, vol.III, 395–408, Higher Education Press, Beijing, 2003.

[23] Boris Dubrovin, Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), 315–326, arXiv:math/9807034.

[24] Huijun Fan, Tyler Jarvis and Yongbin Ruan, The Witten equation, mirror symmetry and quantum singularity theory, Ann. of Math. 178 (2013), no. 1, 1-106, arXiv:0712.4021v4.

[25] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds, Astérisque No. 376 (2016).

[26] Sergey Galkin, Apery constants of homogeneous varieties, preprint SFB45 (2008), http://www.mi.ras.ru/ galkin/work/zetagrass.pdf.

[27] Sergey Galkin and Hiroshi Iritani, Gamma conjecture via mirror symmetry, arXiv:1508.00719

[28] Sergey Galkin, Vasily Golyshev and Hiroshi Iritani, Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: Gamma conjectures, to appear in Duke. Math. J. arXiv:1404.6407.

[29] Sheel Ganatra, Timothy Perutz, Nick Sheridan, Mirror symmetry: from categories to curve counts, arXiv:1510.03839.

[30] Alexander B. Givental, Homological geometry and mirror symmetry, In: Proceedings of the ICM, Zürich, 1994, Birkhäuser, Basel, 1995, vol 1, pp.472–480.

[31] Alexander B. Givental, Equivariant Gromov–Witten invariants, Internat. Math. Res. Notices 1996, no.13, 613–663.

[32] Alexander B. Givental, A mirror theorem for toric complete intersections. Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), pp.141–175, Progr. Math., 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

[33] Alexander B. Givental, Gromov–Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians, Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary. Mosc. Math. J. 1 (2001), no. 4, 551–568, 645.

[34] Vasily Golyshev, Don Zagier, Proof of the gamma conjecture for Fano 3-folds of Picard rank 1, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., 80 (2016), no.1, 27–54.

[35] Eduardo González, Chris Woodward, A wall-crossing formula for Gromov–Witten invariants under variation of git quotient, arXiv:1208.1727.

[36] Claus Hertling, tt^* geometry, Frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities, J. Reine Angew. Math. Vol.555, (2003), 77–161

[37] Claus Hertling and Christian Sevenheck, Nilpotent orbits of a generalization of Hodge structures, J. Reine Angew. Math. 609 (2007), pp.23–80, arXiv:math/0603564.

[38] Richard Paul Horja, Hypergeometric functions and mirror symmetry in toric varieties,

arXiv:math/9912109.

[39] Kentaro Hori, Cumrun Vafa, Mirror symmetry. preprint, arXiv:hep-th/0002222.

[40] Shinobu Hosono, Central charges, symplectic forms, and hypergeometric series in local mirror symmetry, Mirror symmetry. V, pp.405–439, AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, arXiv:hep-th/0404043.

[41] Shinobu Hosono, Albrecht Klemm, Stefan Theisen and Shing-Tung Yau, Mirror symmetry, mirror map and applications to complete intersection Calabi–Yau spaces, Nuclear Phys. B 433 (1995), no. 3, 501–552, arXiv:hep-th/9406055.

[42] Hiroshi Iritani, An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds, Adv. Math. **222** (2009), no. 3, 1016–1079, arXiv:0903.1463.

[43] Hiroshi Iritani, Ruan's conjecture and integral structures in quantum cohomology. Adv. Stud. Pure Math. 59, (2010) New Developments in Algebraic Geometry, Integrable Systems and Mirror Symmetry (Kyoto, 2008), pp.111-166; arXiv:0809.2749.

[44] Hiroshi Iritani, Quantum cohomology and periods, Ann. Inst. Fourier 61, No. 7, 2909–2958 (2011), arXiv:1101.4512.

[45] Hiroshi Iritani: tt^*-geometry in quantum cohomology, arXiv:0906.1307.

[46] Ludmil Katzarkov, Maxim Kontsevich, and Tony Pantev, Hodge theoretic aspects of mirror symmetry, arXiv:0806.0107.

[47] Maxim Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians (1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 120–139.

[48] Maxim Kontsevich, Enumeration of rational curves via torus actions, Progr. Math. 129, Birkhauser, Boston (1995)

[49] Maxim Kontsevich, Operads and motives in deformation quantization, Lett. Math. Phys., 48(1), 35–72, 1999.

[50] Maxim Kontsevich, Yuri I. Manin, Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry, Comm. Math. Phys. Volume 164, Number 3 (1994), 525–562.

[51] Anatoly S. Libgober, Chern classes and the periods of mirrors, Math. Res. Lett., 6 (1999), 141–149, arXiv:math/9803119.

[52] Rongmin Lu, The $\widehat{\Gamma}$-genus and a regularization of an S^1-equivariant Euler class, J. Phys. A 41 (2008), no.42, 425204 (13pp), arXiv:0804.2714.

[53] Takuro Mochizuki, Mixed twistor D-Modules, Lecture Notes in Mathematics, 2125, Springer, 2015.

[54] Morrison, David R. Mathematical aspects of mirror symmetry. Complex algebraic geometry (Park City, UT, 1993), pp.265–327, IAS/Park City Math. Ser., 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[55] Dmitri Orlov, Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, Progr. Math., vol. 270, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009, pp. 503–531.

[56] Thomas Reichelt, Christian Sevenheck, Logarithmic Frobenius manifolds, hypergeometric systems and quantum $\mathcal{D}$-modules, J. Algebraic Geom. 24 (2015), no. 2, 201–281.

[57] Tanguy Rivoal, La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 331 (2000), no. 4, 267–270.

[58] Yongbin Ruan, The cohomology ring of crepant resolutions of orbifolds. pp. 117–126, Contemp. Math., 403. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[59] Claude Sabbah, Hypergeometric periods for a tame polynomial. Portugalia Mathematicae, 63 (2006), no.2, pp.173–226, (available at arXiv:math/9805077); A short version without proofs in: C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 328 (1999), no.7, pp.603–608.

[60] Claude Sabbah, Polarizable twistor D-modules, Astérisque 300, S.M.F., 2005.

[61] Claude Sabbah, Fourier-Laplace transform of a variation of polarized complex Hodge structure. J. Reine Angew. Math. 621 (2008), pp.123–158.

[62] Kyoji Saito, The higher residue pairings $K_F^{(k)}$ for a family of hypersurface singular points, Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), 441–463, Proc. Sympos. Pure Math., 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[63] Kyoji Saito, Period mapping associated to a primitive form, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 19 (1983), no. 3, 1231–1264.

[64] Carlos Simpson, Mixed twistor structures, arXiv:alg-geom/9705006

[65] Constantin Teleman, The structure of $2D$ semi-simple field theories, Invent. Math., 188(3):525–588, 2012.

[66] Edward Witten, Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space, Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990), 243–310, Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.

[67] Takehiko Yasuda, Motivic integration over Deligne–Mumford stacks, Adv. Math. 207 (2006), no.2, 707–761.

[68] V. V. Zudilin, One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational, Uspekhi Mat. Nauk 56 (2001), no. 4(340), 149–150; translation in Russian Math. Surveys 56 (2001), no. 4, 774–776.

(2016 年 7 月 12 日提出)
(いりたに ひろし・京都大学大学院理学研究科)