トーリック多様体に付随する q 差分系

入谷　寛

1. 序

トーリック多様体に対応する微分方程式系として GKZ 系 (もしくは Mellin の微分方程式系) がよく知られている．ここではコンパクトなトーリック多様体に対応する q 差分加群を，半無限次元の同変 K コホモロジーとして構成し、その解の q 積分表示を与える．ここで，q 差分加群とは q シフト作用素と関数を掛ける操作が生成する環上の加群のことである．ただし，q シフト T は関数 $f(x)$ に対し $(Tf)(x) = f(qx)$ と作用する．ミラー対称性の文脈では、GKZ 系はトーリック多様体の量子コホモロジーを計算することが知られている．ここで与える q 差分加群が量子 K コホモロジーとかかわる可能性もある．

2. トーリック多様体

トーリック多様体 X を次のデータから構成しよう．

i) r 次元のトーラス $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^r$
ii) N 個の整ウェイトベクトル $u_1, \dots, u_N \in \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}^r$ (重複を許す)
iii) ケーラークラスを指定する元 $\eta \in \sum_{i=1}^N \mathbb{R}_{\geq 0} u_i \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*) \otimes \mathbb{R}$

以上のデータに対して，$\{1, \dots, N\}$ のべき集合の部分集合 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A} = \{I \subset \{1, \dots, N\}; \eta \in \sum_{i \in I} \mathbb{R}_{\geq 0} u_i\}$ で定義し，η の定める $\mathbb{C}^N$ の開集合 $\mathcal{U}_\eta \subset \mathbb{C}^N$ を

$$\mathcal{U}_\eta = \mathbb{C}^N \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{A}} \mathbb{C}^I = \bigcup_{I \in \mathcal{A}} \mathbb{C}^{*I} \times \mathbb{C}^{\bar{I}}$$

とおく．ここで，$\mathbb{C}^I = \{(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N; z_i = 0 \text{ for } i \notin I\}$ であり，$\bar{I} \subset \{1, \dots, N\}$ は I の補集合．トーラス $\mathbb{T}$ は $\mathbb{C}^N$ に成分ごとにウェイト $u_1, \dots, u_N$ によって作用し，とくに開集合 $\mathcal{U}_\eta$ に作用している．トーリック多様体 X は $\mathcal{U}_\eta$ の $\mathbb{T}$ による商として定まる．

$$X = \mathcal{U}_\eta / \mathbb{T}$$

これは $\mathbb{T}$ の極大コンパクト群 $\mathbb{T}_\mathbb{R} \cong (S^1)^r$ によるシンプレクティック商としても書かれる．

$$X \cong \left\{ (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N; \textstyle\sum_{i=1}^N |z_i|^2 u_i = \eta \right\} \Big/ \mathbb{T}_\mathbb{R}$$

ここで与えたトーリック多様体は，簡約された Kähler 計量に関して完備であり，また扇 (fan) の言葉では扇の台 (support) が凸なものである[1]．X は以下の条件 (a) を満たすときに orbifold でさらに (b) を満たせば滑らかである．また (c) を満たせばコンパクトになる．

(a) 各 $I \in \mathcal{A}$ に対し $\{u_i\}_{i \in I}$ はベクトル空間 $\mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*) \otimes \mathbb{R}$ を生成する．
(b) 各 $I \in \mathcal{A}$ に対し $\{u_i\}_{i \in I}$ は格子 $\mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$ を生成する．
(c) $\{(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N; c_i \geq 0, \sum_{i=1}^N c_i u_i = 0\} = \{0\}$.

[1] たとえば, $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathcal{O}(-1)$ の全空間はそうだが，$\mathcal{O}(1)$ の全空間 $(= \mathbb{P}^2 \setminus \{\mathrm{pt}\})$ はそうではない.

以下では条件 (b),(c) を仮定し，X は滑らかでコンパクトとする．

ウェイト格子 $\mathrm{Hom}(\mathbb{T},\mathbb{C}^*)$ の元は $X=\mathcal{U}_\eta/\mathbb{T}$ 上に直線束を定め，その Chern 類を対応させることで自然な同型 $\mathrm{Hom}(\mathbb{T},\mathbb{C}^*)\cong H^2(X,\mathbb{Z})$ が得られる．このとき，$H^2(X,\mathbb{R})$ の中で Kähler 形式で代表されるものから成る Kähler 錐は $\bigcap_{I\in\mathcal{A}}(\sum_{i\in I}\mathbb{R}_{>0}u_i)$ と書かれる．(仮定 (a) の下で η はこの錐の内点である.) $\mathbb{C}^N$ の座標を $z_1,\dots,z_N$ とし，$z_i=0$ の定める X 内の因子を $D_i=\{z_i=0\}\cap\mathcal{U}_\eta/\mathbb{T}$ とおく．

Proposition 2.1. トーリック多様体 X の (正則ベクトル束の)K コホモロジー環は直線束 $\mathcal{O}(D_i)^{\pm}$ のクラスにより $\mathbb{Z}$ 上の環として生成される．$U_i:=[\mathcal{O}(D_i)]$ を K 群のクラスとするとき，全ての関係は次の 2 種類のもので生成される．

(i) $\prod_{i=1}^N U_i^{c_i}=1$ for $\sum_{i=1}^N c_iu_i=0, c_i\in\mathbb{Z}$,

(ii) $\prod_{i\in\bar{I}}(1-U_i^{-1})=0$ for $I\notin\mathcal{A}$.

後の目的のために，$H^2(X,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $p_1,\dots,p_r$ であって Kähler 錐の閉包に含まれるものをとっておく．対応する直線束の K 群でのクラスを $P_1,\dots,P_r$ とおく．($\mathrm{Pic}(X)\cong H^2(X,\mathbb{Z})$ である．) このとき，$u_i=\sum_{a=1}^r u_i^a p_a$ とおくと

$$U_i=\prod_a P_a^{u_i^a}$$

であり，$d\in H_2(X,\mathbb{Z})$ は $d=(d_1,\dots,d_r)$, $d_a=\langle p_a,d\rangle$ と座標表示される．もし d が曲線を代表するクラスならば，p_a のとり方から $d_a\geq 0$ となる．

3. ループ空間のモデルと半無限次元の K 理論

トーリック多様体のループ空間の普遍被覆のモデルとして次の L_X を考える．

$$L_X=L\mathcal{U}_\eta/\mathbb{T},\quad L\mathcal{U}_\eta=\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]^N\setminus\bigcup_{I\notin\mathcal{A}}\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]^I$$

ここで，$\mathbb{T}$ は無限次元ベクトル空間 $\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]^N$ に前と同様，N 個の各成分ごとにウェイト $u_1,\dots,u_N$ で作用する. 変数 ζ はループのパラメータと考えている. L_X は無限次元のトーリック多様体で，前節のデータで言えば i) のトーラス $\mathbb{T}$ と iii) の Kähler 類 η は変えずに，ii) のベクトルは，u_1 から u_N までの各々について可算無限個のコピーを用意した場合に対応する．L_X はループの回転 $\zeta\mapsto e^{\sqrt{-1}\theta}\zeta$ による S^1 作用を持つ．この S^1 作用はハミルトニアンでハミルトン関数 $H\colon L_X\to\mathbb{R}$ は

$$H[\gamma_1(\zeta),\dots,\gamma_N(\zeta)]=\sum_{i=1}^N\sum_\nu \nu|a_{i\nu}|^2$$

の形に書ける．ただし，$\gamma_i(\zeta)=\sum_\nu z_{i\nu}\zeta^\nu\in\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]$ であり，$z_{i\nu}$ は $\sum_{i,\nu}|z_{i\nu}|^2u_i=\eta$ とシンプレクティック簡約のレベル集合に入るように規格化されている．以下ではハミルトニアン H に関する L_X 上の Morse 理論を考えたい．上の H に関する下向きの Morse 流 ϕ_t は

$$\phi_t[\gamma(\zeta)]=[\gamma(e^{-t}\zeta)],\quad \gamma(\zeta)\in L\mathcal{U}_\eta$$

と書かれる (ここでは規格化を課していない)．H の臨界多様体の各成分は X と同型で $d\in H_2(X,\mathbb{Z})\cong\mathrm{Hom}(\mathbb{T},\mathbb{C}^*)^\vee$ でパラメータ付けされる．

$$X_d=\{[z_1\zeta^{\langle u_1,d\rangle},\dots,z_N\zeta^{\langle u_N,d\rangle}]\in L_X\}\cong X$$

Morse 流 ϕ_t に関する X_d の安定多様体 $\widetilde{L}_d^\infty$，不安定多様体 $\widetilde{L}_{-\infty}^d$ は次で与えられる．

$$\widetilde{L}_d^\infty = \left\{[\gamma_1(\zeta),\dots,\gamma_N(\zeta)] \in L_X; \gamma_i(\zeta) = \textstyle\sum_{\nu \geq \langle u_i, d\rangle} z_{i\nu}\zeta^\nu, (z_{1\langle u_1,d\rangle},\dots,z_{N\langle u_N,d\rangle}) \in \mathcal{U}_\eta\right\}$$
$$\widetilde{L}_\infty^d = \left\{[\gamma_1(\zeta),\dots,\gamma_N(\zeta)] \in L_X; \gamma_i(\zeta) = \textstyle\sum_{\nu \leq \langle u_i, d\rangle} z_{i\nu}\zeta^\nu, (z_{1\langle u_1,d\rangle},\dots,z_{N\langle u_N,d\rangle}) \in \mathcal{U}_\eta\right\}$$

これらの閉包を L_d^∞, $L_{-\infty}^d$ とおく (二つ目の条件をはずしたもの)．元のトーリック多様体 X がコンパクトであることから，

$$L_X = \bigsqcup_d \widetilde{L}_d^\infty = \bigsqcup_d \widetilde{L}_{-\infty}^d = \bigsqcup_{d_1,d_2} (\widetilde{L}_{d_1}^\infty \cap \widetilde{L}_{-\infty}^{d_2})$$

であり，$L_{d_1}^\infty \cap L_{-\infty}^{d_2}$ はコンパクトなトーリックであることがわかる．また，L_X, L_d^∞, $L_{-\infty}^d$ らはホモトピー論的には $\mathbb{T}$ の分類空間 $B\mathbb{T}$ を与えている．

上の S^1 同変な stratification を用いて半無限次元の同変 K コホモロジーを次のように構成する．まず，$d, d' \in H_2(X,\mathbb{Z})$ に対して大小関係 $d \prec d'$ を包含関係 $L_d^\infty \supset L_{d'}^\infty$ によって定める．これは $\langle u_i, d\rangle \leq \langle u_i, d'\rangle, \forall i$ と同じである．$d_1 \prec d_2$ のとき，$L_{d_1}^\infty \cap L_{-\infty}^{d_2}$ はコンパクトで滑らかなトーリック多様体であり，$d_1' \prec d_1 \prec d_2$ に対して押し出し (Gysin 写像) $K_{S^1}(L_{d_1}^\infty \cap L_{-\infty}^{d_2}) \to K_{S^1}(L_{d_1'}^\infty \cap L_{-\infty}^{d_2})$ が定まる．任意の d_2 に対して次の図式を可換にする写像 $K_{S^1}(L_{d_1}^\infty) \to K_{S^1}(L_{d_1'}^\infty)$ が一意に定まる．

$$\begin{array}{ccc}
K_{S^1}(L_{d_1}^\infty) & \longrightarrow & K_{S^1}(L_{d_1'}^\infty) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
K_{S^1}(L_{d_1}^\infty \cap L_{-\infty}^{d_2}) & \longrightarrow & K_{S^1}(L_{d_1'}^\infty \cap L_{-\infty}^{d_2})
\end{array}$$

ここで縦の写像は制限である．これにより $K_{S^1}(L_d^\infty)$ は帰納系を成し，その極限を

$$K_{S^1}^{\infty/2}(L_X) := \operatorname{inj}\lim_d K_{S^1}(L_d^\infty), \quad d \text{ は小さくなる方向}$$

とおく．同様に $L_{-\infty}^d$ に対しても $K_{S^1}(L_{-\infty}^d)$ は帰納系を成し，上と双対な理論が

$$K_{\infty/2}^{S^1}(L_X) := \operatorname{inj}\lim_d K^{S^1}(L_{-\infty}^d), \quad d \text{ は大きくなる方向}$$

で定義される．$d_1 \prec d_2$ のとき，同変オイラー標数 $\chi_{S^1} \colon K_{S^1}(L_{d_1}^\infty \cap L_{-\infty}^{d_2}) \to \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ が定義される．ここで，ベクトル束 E に対し $\chi_{S^1}(E) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Ch}[H^i(X,E)]$ であり，$\operatorname{Ch}(\cdot)$ は S^1 表現の指標，q は S^1 の基本表現に対応する変数である．これは帰納極限の間に次のペアリングを誘導する．

$$\chi_{S^1} \colon K_{\infty/2}^{S^1}(L_X) \times K_{S^1}^{\infty/2}(L_X) \to \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$$

半無限次元 K 理論を具体的に記述するために，L_X 上の S^1 同変直線束 $\widehat{P}_a$, $\widehat{U}_{i\nu}$ を次で導入する．(K 群のクラスも同じ記号で表す．)

$$\widehat{P}_a = L\mathcal{U}_\eta \times \mathbb{C}/(\gamma,v) \sim (t\gamma, p_a(t)v), t \in \mathbb{T} \quad S^1 \text{ 作用: } [\gamma(\zeta),v] \mapsto [\gamma(e^{\sqrt{-1}\theta}\zeta),v]$$
$$\widehat{U}_{i\nu} = L\mathcal{U}_\eta \times \mathbb{C}/(\gamma,v) \sim (t\gamma, u_i(t)v), t \in \mathbb{T} \quad S^1 \text{ 作用: } [\gamma(\zeta),v] \mapsto [\gamma(e^{\sqrt{-1}\theta}\zeta), e^{\nu\sqrt{-1}\theta}v]$$

このとき次が成り立つ.

$$\widehat{U}_{i\nu} = q^\nu \prod_{a=1}^r \widehat{P}_a^{u_i^a}, \quad K_{S^1}(L_d^\infty) \cong K_{S_1}(L_{-\infty}^d) \cong \mathbb{Z}[P_1^\pm, \ldots, P_r^\pm, q^\pm].$$ [2]

また，押し出し写像 $K_{S^1}(L_d^\infty) \to K_{S^1}(L_{d'}^\infty)$ は Thom クラスの掛け算

$$\alpha \mapsto \alpha \cdot \prod_{i=1}^N \prod_{\nu=\langle u_i, d'\rangle}^{\langle u_i, d\rangle - 1} (1 - \widehat{U}_{i\nu}^{-1})$$

によって与えられる．$\Delta \in K_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ を $1 \in K_{S^1}(L_0^\infty)$ の像とする．押し出しの列

$$K_{S^1}(L_0^\infty) \to K_{S^1}(L_{d_1}^\infty) \to K_{S^1}(L_{d_2}^\infty) \to \cdots, \quad 0 \succ d_1 \succ d_2 \succ \cdots$$

によって 1 を押し出していくと，元 Δ の次の無限積表示が得られる．

$$\Delta = \prod_{i=1}^N \prod_{\nu<0} (1 - \widehat{U}_{i\nu}^{-1})$$

半無限次元の K 群に q 差分加群の構造を入れよう．L_X はループ空間の普遍被覆のモデルであったが，$d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ ごとに被覆変換に対応する写像 $Q^d \colon L_X \to L_X$ が定義される．

$$Q^d[\gamma_1(\zeta), \ldots, \gamma_N(\zeta)] = [\zeta^{-\langle u_1, d\rangle}\gamma_1(\zeta), \ldots, \zeta^{-\langle u_N, d\rangle}\gamma_N(\zeta)]$$

基底 $p_1, \ldots, p_r$ に双対な $H_2(X, \mathbb{Z})$ の基底に対応する被覆変換を $Q_1, \ldots, Q_r$ とすると，Q^d は $Q^d = Q_1^{d_1} \cdots Q_r^{d_r}$ と表示される．これから引き戻し $Q^d \colon K_{S^1}(L_{d'}^\infty) \to K_{S^1}(L_{d'+d}^\infty)$ および押し出し $Q^d \colon K_{S^1}(L_{-\infty}^{d'}) \to K_{S^1}(L_{-\infty}^{d'-d})$ が誘導され，帰納極限において

$$Q^d \colon K_{S^1}^{\infty/2}(L_X) \to K_{S^1}^{\infty/2}(L_X), \quad Q^d \colon K_{\infty/2}^{S^1}(L_X) \to K_{\infty/2}^{S^1}(L_X)$$

が定まる．一方，$\widehat{P}_1, \ldots, \widehat{P}_r$ は $K_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ および $K_{\infty/2}^{S^1}(L_X)$ に掛け算で作用し，$\widehat{P}_a$ と Q_b の作用は次を満たす．

$$Q_b \widehat{P}_a = q^{\delta_{ab}} \widehat{P}_a Q_b \qquad \text{on } K_{S^1}^{\infty/2}(L_X),$$
$$Q_b \widehat{P}_a = q^{-\delta_{ab}} \widehat{P}_a Q_b \qquad \text{on } K_{\infty/2}^{S^1}(L_X).$$

したがって，$K_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ 上では $\widehat{P}_a$ は $Q_b \mapsto q^{-\delta_{ab}} Q_b$ なるシフト作用素と同じ働きをし，$K_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ は q 差分加群の構造を持つ．ループの向きを反対にする L_X の自己同型 $[\gamma(\zeta)] \mapsto [\gamma(\zeta^{-1})]$ (S^1 作用を逆向きにする) によって同型

$$\overline{} \colon K_{S^1}^{\infty/2}(L_X) \xrightarrow{\cong} K_{\infty/2}^{S^1}(L_X)$$

が誘導される．この写像は $\overline{Q_a \alpha} = Q_a \overline{\alpha}$, $\overline{\widehat{P}_a \alpha} = \widehat{P}_a \overline{\alpha}$, $\overline{q\alpha} = q^{-1}\overline{\alpha}$ を満たす．

Proposition 3.1. $K_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ は差分作用素のなす環 $\mathbb{Z}\langle P_1^\pm, \ldots, P_r^\pm, Q_1^\pm, \ldots, Q_r^\pm, q^\pm\rangle$ 上の加群として Δ で生成され，すべての関係は次で生成される．ただし $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$.

$$\left[Q^d \prod_{\langle u_i, d\rangle < 0} \prod_{\nu=0}^{-\langle u_i, d\rangle - 1} \left(1 - q^{-\nu} \textstyle\prod_a \widehat{P}_a^{-u_i^a}\right) - \prod_{\langle u_i, d\rangle > 0} \prod_{\nu=0}^{\langle u_i, d\rangle - 1} \left(1 - q^{-\nu} \textstyle\prod_a \widehat{P}_a^{-u_i^a}\right) \right] \Delta = 0$$

[2]実際にはこの適当な完備化であるが，ここでは簡単のためこのようにおく．

つぎに $K_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ のべき級数解を構成する．$\alpha \in K_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ に対してある $d \prec 0$ が存在して α はある元 $\alpha_d \in K_{S^1}(L_d^{\infty})$ で代表される．一方，$\Delta \in K_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ は $K_{S^1}(L_d^{\infty})$ の元 $\prod_i \prod_{\nu=\langle u_i,d\rangle}^{-1}(1-\widehat{U}_{i\nu}^{-1})$ で代表される．そこで，埋め込み $i\colon X \cong X_0 \to L_X$ に対し，

$$i^*\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right) := i^*\left(\frac{\alpha_d}{\prod_{i=1}^N \prod_{\nu=\langle u_i,d\rangle}^{-1}(1-\widehat{U}_{i\nu}^{-1})}\right) = \frac{i^*(\alpha_d)}{\prod_{i=1}^N \prod_{\nu=\langle u_i,d\rangle}^{-1}(1-q^{-\nu}\prod_a P_a^{-u_i^a})}$$

と定義する．右辺は d のとり方によらず，$K(X)\otimes\mathbb{Z}[q^{\pm},(1-q^n)^{-1};n>0]$ の元を定める．写像 $\mathrm{Loc}\colon K_{S^1}^{\infty/2}(L_X) \to K(X)\otimes\mathbb{Z}[q^{\pm},(1-q^n);n>0][Q^{-1},Q]\!]$ を次で定義する[3]．

$$\mathrm{Loc}(\alpha) = \sum_{d\in H_2(X,\mathbb{Z})} i^*\left(\frac{Q^{-d}\alpha}{\Delta}\right)Q^d$$

T_a を $T_a(Q_b) = q^{\delta_{ab}}Q_b$ で定義されるシフト作用素とする．

Proposition 3.2. 写像 Loc は $\mathbb{Z}[Q_1^{\pm},\dots,Q_r^{\pm}]$ 加群の順同型であり，差分方程式

$$P_a T_a^{-1}\,\mathrm{Loc}(\alpha) = \mathrm{Loc}(\widehat{P}_a\alpha)$$

を満たす．さらに，Loc は単射である．

Corollary 3.3. $K(X)$ に値をとる関数 $I(Q,q) := \prod_a P_a^{-\log Q_a/\log q}\,\mathrm{Loc}(\Delta)$ は次の差分方程式の (一般には形式的な) べき級数解である．

$$\left[Q^d \prod_{\langle u_i,d\rangle<0}\prod_{\nu=0}^{-\langle u_i,d\rangle-1}\left(1-q^{-\nu}\textstyle\prod_a T_a^{u_i^a}\right) - \prod_{\langle u_i,d\rangle>0}\prod_{\nu=0}^{\langle u_i,d\rangle-1}\left(1-q^{-\nu}\textstyle\prod_a T_a^{u_i^a}\right)\right] I(Q,q) = 0$$

ただし，$P_a^z = (1+(P_a-1))^z = 1+z(P_a-1)+\binom{z}{2}(P_a-1)^2+\cdots$，$d\in H_2(X,\mathbb{Z})$．($P_a-1$ が K 群の中でべき零であることに注意.)

解 $I(Q,q)$ は具体的には次で与えられる．

$$I(Q,q) = \prod_a P_a^{-\log Q_a/\log q}\sum_{d\geq 0}\prod_{i=1}^N \frac{\prod_{m=-\infty}^0(1-q^m\prod_a P_a^{-u_i^a})}{\prod_{m=-\infty}^{\langle u_i,d\rangle}(1-q^m\prod_a P_a^{-u_i^a})}Q^d$$

4. q 差分加群のペアリングおよび完備化

$K_{\infty/2}^{S^1}(L_X)$ と $K_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ の間のペアリング χ_{S^1} は $\mathbb{Z}[Q^{\pm}]$ 双線形なペアリング $G(\cdot,\cdot)$ に拡張される．

$$G(\alpha,\beta) := \sum_{d\in H_2(X,\mathbb{Z})}\chi_{S^1}(\alpha,Q^{-d}\beta)Q^d,\quad \alpha\in K_{\infty/2}^{S^1}(L_X),\beta\in K_{S^1}^{\infty/2}(L_X).$$

これは $\mathbb{Z}[q,q^{-1}][Q^{-1},Q]\!]$ に値を持つ．同変 K 群の局所化定理により，次を得る．

[3] Loc は localization の略

Proposition 4.1. $\alpha, \beta \in K^{\infty/2}_{S^1}(L_X)$ に対して，次が成り立つ．

$$G(\overline{\alpha}, \beta) = \chi(\overline{\mathrm{Loc}(\alpha)} \otimes \mathrm{Loc}(\beta))$$

ここで，χ は $K(X)$ におけるオイラー標数で，$\overline{}$ は $K(X)\otimes\mathbb{Z}[q^{\pm}, (1-q^n)^{-1}; n>0][Q^{-1}, Q]\!]$ 上では $\overline{q} = q^{-1}$ と定義している．

$K^{\infty/2}_{S^1}(L_X)$ の部分加群 $F^n(K^{\infty/2}_{S^1}(L_X))$ を次で定義する．

$$F^n(K^{\infty/2}_{S^1}(L_X)) := \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_r\ge n,\\ i_1,\ldots,i_r\ge 0}} Q_1^{i_1}\cdots Q_r^{i_r}\mathbb{Z}\langle P_1^{\pm}, \ldots, P_r^{\pm}, Q_1, \ldots, Q_r, q^{\pm}\rangle\Delta$$

このフィルトレーションは $F^0(K^{\infty/2}_{S^1}(L_X))$ に位相を定める．$FK_{S^1}(L_X)$ をこの位相に関する完備化と定義する[4]．

$$FK_{S^1}(L_X) := \widehat{F^0}(K^{\infty/2}_{S^1}(L_X)) = \operatorname*{proj\,lim}_n F^0(K^{\infty/2}_{S^1}(L_X))/F^n(K^{\infty/2}_{S^1}(L_X))$$

$FK_{S^1}(L_X)$ は完備化された差分作用素環 $\mathbb{Z}[q^{\pm}, P_1^{\pm}, \ldots, P_r^{\pm}][\![Q_1, \ldots, Q_r]\!]$ 上の加群となる．$K^{S^1}_{\infty/2}(L_X)$ のフィルトレーションおよびそれによる完備化 $FK^{S^1}(L_X)$ も同様に定義される．写像 Loc およびペアリング $G(\cdot,\cdot)$ と同型 $\overline{}$ は，以下のように完備化された加群上に拡張され Proposition 3.2, 4.1 を満たす．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Loc}\colon FK_{S^1}(L_X) &\hookrightarrow K(X)\otimes\mathbb{Z}[q^{\pm}, (1-q^n)^{-1}; n>0][\![Q]\!]\\
G(\cdot,\cdot)\colon FK^{S^1}(L_X)\otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}][\![Q]\!]} FK_{S^1}(L_X) &\to \mathbb{Z}[q,q^{-1}][\![Q]\!]\\
\overline{}\colon FK_{S^1}(L_X) &\xrightarrow{\cong} FK^{S^1}(L_X)
\end{aligned}$$

Proposition 4.2. $FK_{S^1}(L_X)$ は $\mathbb{Z}[q,q^{-1}][\![Q]\!]$ 上の加群として自由であり，標準的な同型

$$FK_{S^1}(L_X)\Big/\sum_{a=1}^{r} Q_a FK_{S^1}(L_X) \cong K(X)\otimes\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$$

を持つ．また，$FK_{S^1}(L_X)$ 上のペアリング $G(\overline{\alpha},\beta)$ は非退化で $G(\overline{\alpha},\beta)|_{Q=0} = \chi(\overline{\alpha}_0\otimes\beta_0)$ を満たす．ここで α_0, β_0 は上の同型の下で α, β に対応する $K(X)\otimes\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ の元．

量子 K 理論においては，$K(X)\otimes\mathbb{Z}[q,q^{-1}][\![Q]\!]$ に q 差分加群の構造が定まると予想されており，報告者は上の $FK_{S^1}(L_X)$ と量子 K 理論の間には何らかの関係があると予想している．ただし，上の Proposition では $FK_{S^1}(L_X)$ は階数が $\dim K(X)$ に等しい自由加群であることしか分からず，$K(X)\otimes\mathbb{Z}[q,q^{-1}][\![Q]\!]$ と標準的に同一視する方法は与えられていない点が問題である．本研究集会では，q 差分加群から出発して量子 K 理論を構成するある方法についても言及した．それによると $FK_{S^1}(L_X)$ と量子 K 理論の関係についてある予想をたてることができるが，これは現在準備中の論文の中で述べる予定である．

[4] FK は Floer K 理論の意味

5. 解の q 積分表示

ここでは差分加群 $K_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ の解の q 積分表示を与える．以下で与えるものはトーリックのミラーとして通常与えられる振動積分の q 類似である．ウェイト $u_1, \ldots, u_N$ の定める埋め込み $\mathbb{T} \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^N$ に双対な複素トーラスの族

$$\pi \colon Y = (\mathbb{C}^*)^N \to \mathbb{T}^\vee, \quad (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (Q_1, \ldots, Q_r),\ Q_a = \prod_{i=1}^N x_i^{u_i^a}$$

を考える．これを X のミラー族と呼ぶ．各ファイバー $Y_Q := \pi^{-1}(Q_1, \ldots, Q_r)$ は $N - r(= \dim X)$ 次元のトーラス $\operatorname{Ker}\pi = Y_1 \cong (\mathbb{C}^*)^{N-r}$ に同型である．Y_Q 上の関数 $f(y)$ と $a \in Y_Q$ に対し，$f(y)$ の q 積分を

$$\int_{Y_Q}^a f(y) d_q y := (1-q) \sum_{v \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^*, Y_1)} f(v(q) \cdot a)$$

と定義する．全射 π の分裂順同型 $s \colon \mathbb{T}^\vee \to Y$ および $\beta \in Y_1$ を選び，次の q 積分 $\mathcal{I}_{s,\beta}(Q,q)$ を考える．

$$\mathcal{I}_{s,\beta}(Q,q) = \int_{Y_Q}^{\beta \cdot s(Q)} \prod_{i=1}^N \exp_q\left(\frac{x_i}{1-q}\right) d_q y$$

ここで，$x_1, \ldots, x_N$ は Y の座標で，q 指数関数 $\exp_q(x)$ は次で定義される．

$$\exp_q(x) := \sum_{n=0}^\infty \frac{(1-q)^n}{(1-q)\cdots(1-q^n)} x^n.$$

非積分関数に現れる $\exp_q(x/(1-q))$ は $|q| < 1$ のときゼロ点を持たず，$x = q^{-n}, n \geq 0$ で一位の極を持つ．また $|q| < 1$ で次の無限積に展開される．

$$\exp_q\left(\frac{x}{1-q}\right) = \frac{1}{\prod_{n=0}^\infty (1 - q^n x)} = \frac{1}{(x;q)_\infty}$$

Proposition 5.1. q 積分 $\mathcal{I}_{s,\beta}(Q,q)$ が収束すると仮定する．このとき，$\mathcal{I}_{s,\beta}(Q,q)$ は Corollary 3.3 の差分方程式の解を与える．

Example 5.2. $X = \mathbb{P}^1$ に対してはトーラスの族 $\pi \colon Y = (\mathbb{C}^*)^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto Q = x_1 x_2 \in \mathbb{C}^*$ が対応するミラーである．分裂 $Q \mapsto (1, Q)$ をとるとき，対応する q 積分解は

$$\mathcal{I}_\beta(Q,q) = \int_{\mathbb{C}^*}^\beta \frac{d_q y}{(y;q)_\infty (Q/y;q)_\infty} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1-q}{(\beta q^n;q)_\infty (\frac{Q}{\beta q^n};q)_\infty}$$

で与えられ，差分方程式 $(1-T)^2 \mathcal{I}_\beta(Q,q) = Q \mathcal{I}_\beta(Q,q)$ を満たす．

以下に参考文献をあげる．トーリック多様体とその中の完全交差にたいする量子コホモロジーとそのミラーの記述は [2] で与えられた．量子コホモロジーの半無限次元コホモロジーとしての記述は [1, 5] にある．量子 K 理論についての基礎的文献としては，A 型の旗多様体の量子 K 理論と差分戸田との関係を示した [4], フロベニウス多様体に近い構造 (F 多様体の構造＋アファイン構造＋平坦計量) を記述した [3, 6] がある．

References

1. A. B. Givental, *Homological geometry I. Projective hypersurfaces.* Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), no. 2, pp.325–345.
2. A. B. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections.* Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), pp.141–175, Progr. Math., 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.
3. A. B. Givental, *On the WDVV-equation in quantum K-theory.* Michigan Math. J. 48 (2000), pp.295-304.
4. A. B. Givental, Y. -P. Lee, *Quantum K-theory on flag manifolds, finite-difference Toda lattices and quantum groups.* Invent. Math. 151 (2003), pp.193-219.
5. H. Iritani, *Quantum D-modules and equivariant Floer theory for free loop spaces.* math.DG/0410487, to appear in Math. Z.
6. Y. -P. Lee, *Quantum K-theory I: foundations.* Duke. Math. J. 121 (2004), no.3, pp.389-424.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University, Kyoto 606-0816, Japan

E-mail address: iritani@math.kyoto-u.ac.jp