

位相幾何学 期末試験

2025 年 7 月 29 日 10:30 – 12:00

持ち込み不可. 携帯電話はかばんに入れ, かばんの口はしっかり閉じること.

問題 1. $p: E \rightarrow X$ を位相空間の間の連続写像とする.

- (1) p が位相空間 F をファイバーとするファイバー束であることの定義を述べよ.
- (2) p が位相空間 F をファイバーとするファイバー束であるとき, p は開写像であることを示せ.

問題 2. $p: E \rightarrow X$ を主 S^1 束とする.

- (1) この主 S^1 束が切断 $s: X \rightarrow E$ を持つとする. このとき $p: E \rightarrow X$ の主 S^1 束としての自明化を構成せよ. 構成した自明化が主 S^1 束の同型であることの証明は不要.
- (2) 主 S^1 束の引き戻し $p^*E \rightarrow E$ の Euler 類はゼロであることを示せ. (X が多様体で $p: E \rightarrow X$ が滑らかな主 S^1 束のときに de Rham コホモロジーで示してもよい.)

問題 3. $E \rightarrow S^2$ をランク 2 の複素ベクトル束とする.

- (1) $E \rightarrow S^2$ は至る所ゼロでない切断を持つ. その理由を説明せよ. (ヒント: 例えば障害理論を使う.)
- (2) $c_1(E) = 0$ ならば, E は自明束であることを示せ.

問題 4. $L \rightarrow \mathbb{CP}^2$ を同語反復的複素直線束 (tautological complex line bundle) とする. L のファイバーは $\mathbb{C}^3$ の 1 次元部分空間であるから, L は $\mathbb{C}^3$ をファイバーとする自明束 $\underline{\mathbb{C}^3}$ の部分束とみなせる. $Q = \underline{\mathbb{C}^3}/L$ を商ベクトル束とする.

- (1) Q の全 Chern 類 $c(Q)$ を超平面類 $x = -c_1(L)$ の多項式として表せ.
- (2) ランク 4 の複素ベクトル束 $\text{End}(Q) = \text{Hom}(Q, Q)$ について, $\int_{\mathbb{CP}^2} c_2(\text{End}(Q))$ を計算せよ.
- (3) ベクトル束 Q は 2 つの直線束の和と同型ではないことを示せ.
- (4) 射影束 $\mathbb{P}(Q) \rightarrow \mathbb{CP}^2$ は切断を持たないことを示せ.

問題 5. $n \geq 2$ とし, k, l を正の整数とする. 複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ 内の k 次の超曲面と l 次の超曲面は必ず交わることを示せ.

ただし, k 次の超曲面とは斉次 k 次多項式 $F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ を用いて,

$$\{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{CP}^n \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

の形に書ける部分集合である.

期末試験 解答例と採点基準

配点 問題 5 (20 点) を除き, 各小問 15 点で, 170 点満点.

問題 1: 30 点, 問題 2: 30 点, 問題 3: 30 点, 問題 4: 60 点, 問題 5: 20 点

平均点: 90 点, 中央値 (メディアン): 95 点

問題 1. (1) 各点 $x \in X$ に対して, x の開近傍 V と同相写像

$$\phi: p^{-1}(V) \rightarrow V \times F$$

が存在して, $\pi_1 \circ \phi = p$ が成り立つこと. ただし, $\pi_1: V \times F \rightarrow V$ は第 1 射影.

(2) $U \subset E$ を開集合とする. 全ての $y \in U$ に対して $p(y)$ が $p(U)$ の内点であることを示せばよい. $p(y)$ の開近傍 V と局所自明化 $\phi: p^{-1}(V) \cong V \times F$ が存在する. $\phi(U \cap p^{-1}(V))$ は $\phi(y)$ を含む開集合であるから, ある開集合 $V' \subset V$, $W \subset F$ が存在して

$$\phi(y) \in V' \times W \subset \phi(U \cap p^{-1}(V))$$

従って $\pi_1: V \times F \rightarrow V$ を第 1 射影とすると, $p = \pi_1 \circ \phi$ を使って

$$p(y) = \pi_1(\phi(y)) \in V' \subset \pi_1(\phi(U \cap p^{-1}(V))) = p(U \cap p^{-1}(V)) \subset p(U).$$

これは $p(y)$ が $p(U)$ の内点であることを示している.

採点基準等 (1) ほとんどの人ができていた. 授業ノートでは p の全射性も要求していたが, それはあってもなくてもよい. ($F \neq \emptyset$ なら自動的に全射になる.)

(2) これも多くの人できていた. 射影 $\pi_1: V \times F \rightarrow V$ が開写像であることに帰着していれば OK. 積の射影が開であることの証明までは要求しない. 大域的に積 (自明束) と考えている解答は 5 点, 局所自明化で覆って議論しているが, 積射影が開であることを使っているのかどうか判定できない答案について, 10 点としたものがある.

問題 2. (1) 切断 $s: X \rightarrow E$ に対して, 自明化 $f: X \times S^1 \rightarrow E$ を次で定めることができる.

$$f(x, z) = s(x)z$$

(逆向きの自明化) 自明化 $g: E \rightarrow X \times S^1$ を次のように定める. $e \in E$ に対して $e = s(p(e))z$ を満たす $z \in S^1$ がただ一つ存在する. このとき $g(e) = (p(e), z)$ とする.

(2) $p^*E = E \times_X E$ であることに注意する. ここで $p^*E \rightarrow E$ は $s(e) = (e, e)$ で与えられる切断を持つ. 従って p^*E は自明束であり, その Euler 類はゼロである.

(別解): X を多様体とし, $p: E \rightarrow X$ を滑らかな主 S^1 束とする. Euler 類の自然性から $e(p^*E) = p^*e(E)$ である. 一方 ψ を E 上の接続 1 形式, $\mathbf{e}$ を $E \rightarrow X$ の Euler form とするとき, $d\psi = -2\pi p^*\mathbf{e}$ を満たす. 従って $p^*e(E) = [p^*\mathbf{e}]$ は de Rham コホモロジーにおいてゼロである.

採点基準等 (1) は $X \times S^1 \rightarrow E$ あるいは $E \rightarrow X \times S^1$ のどちらかが構成できていればよい.

問題 3. (1) S^2 を 3 次元単体の境界と同一視して, 単体分割しておく. 各単体上では E は自明であることに注意する. 各 0 単体 $x \in S^2$ に対してゼロでない元 $e_x \in E_x$ を選んでおく. これは 0-skeleton 上の至る所消えない切断を与える. $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ は弧状連結であることから, この切断は 1-skeleton 上の至る所消えない切断に拡張できる. さらに $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) = \pi_1(S^3) = \{1\}$ であることから, この切断は 2-skeleton 上の至る所消えない切断に拡張される. 従って $E \rightarrow S^2$ は至る所消えない切断を持つ.

(同じことの別の説明) S^2 を二つの円盤 D_+^2 と D_-^2 を境界に沿って張り合わせたものとする. 各円盤の上では E は自明である. D_+^2 上での E の至る所消えない切断 s_+ をとる. $s_+|_{\partial D_+^2} = s_+|_{\partial D_-^2}$ を D_-^2 上の自明化について表示すると, 写像 $S^1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ とみなせる. これは定値写像とホモトピックであるから, s_+ は S^2 全体の至る所消えない切断に拡張される.

(2) E は至る所消えない切断を持つので, 自明束 $\underline{\mathbb{C}}$ を部分束として持つ. このとき $E \cong \underline{\mathbb{C}} \oplus (E/\underline{\mathbb{C}})$ であり,

$$c(E) = c(\underline{\mathbb{C}})c(E/\underline{\mathbb{C}}) = 1 + c_1(E/\underline{\mathbb{C}})$$

従って, もし $c_1(E) = 0$ ならば $c_1(E/\underline{\mathbb{C}}) = 0$. 第 1Chern 類は複素直線束の同型類と一対一に対応するから, $E/\underline{\mathbb{C}}$ は自明束である. すなわち E も自明束である.

採点基準等 (1) 2 骨格に切断を拡張するとき, $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) = \{1\}$ (に相当する事実) に言及がない答案は 5 点. 「Euler 類がゼロだから, 至る所ゼロでない切断が存在する」と議論している答案は 0 点. (至る所ゼロでない切断があれば Euler 類は消えるが, その逆は言えない.)

問題 4. (1) 完全列

$$0 \rightarrow L \rightarrow \underline{\mathbb{C}}^3 \rightarrow Q \rightarrow 0$$

より $c(L)c(Q) = 1$ である. 従って

$$c(Q) = \frac{1}{c(L)} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2$$

(2) まず $c(\text{End}(Q))$ を計算する. 分裂原理より, Q が直線束の和 $Q = L_1 \oplus L_2$ と仮定して計算してよい. $\text{End}(Q) = \bigoplus_{i,j} \text{Hom}(L_i, L_j)$ である. Chern 根を $\delta_1 = c_1(L_1)$, $\delta_2 = c_1(L_2)$ とおくと,

$$\begin{aligned} c(\text{End}(Q)) &= c(\text{Hom}(L_1, L_1) \oplus \text{Hom}(L_1, L_2) \oplus \text{Hom}(L_2, L_1) \oplus \text{Hom}(L_2, L_2)) \\ &= c(\text{Hom}(L_1, L_2))c(\text{Hom}(L_2, L_1)) \\ &= (1 + \delta_2 - \delta_1)(1 + \delta_1 - \delta_2) \\ &= 1 - (\delta_1 - \delta_2)^2 = 1 - (\delta_1 + \delta_2)^2 + 4\delta_1\delta_2 \\ &= 1 - c_1(Q)^2 + 4c_2(Q) = 1 - x^2 + 4x^2 = 1 + 3x^2 \end{aligned}$$

従って $c_2(\text{End}(Q)) = 3x^2$. よって $\int_{\mathbb{CP}^2} c_2(\text{End}(Q)) = \int_{\mathbb{CP}^2} 3x^2 = 3$.

- (3) 2つの直線束 E_1, E_2 の和になったと仮定して矛盾を導く. $Q = E_1 \oplus E_2$, $c(E_i) = 1 + a_i x$ ($a_i \in \mathbb{Z}$) とおくと,

$$c(Q) = c(E_1)c(E_2)$$

すなわち

$$1 + x + x^2 = (1 + a_1 x)(1 + a_2 x)$$

よって $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 a_2 = 1$. これは実根を持たないため矛盾.

- (4) $\pi: \mathbb{P}(Q) \rightarrow \mathbb{CP}^2$ を射影とする. $L \rightarrow \mathbb{P}(Q)$ を tautological line bundle とするとき, $\mathbb{P}(Q)$ 上のベクトル束の完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow \pi^* Q \rightarrow \pi^* Q/L \rightarrow 0$ があるから, $\pi^* Q$ は直線束の和 $H_1 \oplus H_2$ と同型になる (ここで $H_1 = L$, $H_2 = \pi^* Q/L$). もし射影束の切断 s があれば,

$$Q \cong s^* \pi^* Q \cong s^*(H_1 \oplus H_2) \cong s^* H_1 \oplus s^* H_2$$

である. これは (3) に矛盾する.

採点基準等 この問題もよくできていた (特に (1) と (2)).

(1) $c_1(L) = x$ として解答したものは減点なし. また $1/(1-x) = 1+x-x^2$ や $1/(1-x) = 1-x+x^2$ などの間違いは 10 点.

(2) splitting principle をどう使ったか説明がない答案は 5 点~10 点の範囲で減点した. $c_2(\text{End}(Q))$ は求めたが, その積分が求まっていない答案は 10 点.

(3) (1) が間違っている場合、正しい議論が書かれている場合は点を与えた.

問題 5. $\mathbb{CP}^n$ 上の直線束 $\mathcal{O}(i) \rightarrow \mathbb{CP}^n$ を思い出そう. k 次超曲面は $\mathcal{O}(k)$ の切断 s のゼロ点集合, l 次超曲面は $\mathcal{O}(l)$ の切断 t のゼロ点集合である. もし k 次超曲面と l 次超曲面が交わりを持たないとすると, (s, t) は $\mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(l)$ の至る所消えない切断を与える. 従って $\mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(l)$ の Euler 類は消えなければならない: $e(\mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(l)) = 0$. 一方で

$$e(\mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(l)) = e(\mathcal{O}(k))e(\mathcal{O}(l)) = k l x^2 \neq 0$$

ここで $x = c_1(\mathcal{O}(1))$ は超平面類である. $e(\mathcal{O}(i)) = i x$ であること, また, $\mathbb{CP}^n$ ($n \geq 2$) において $x^2 \neq 0$ であることを用いた. これは矛盾である.

採点基準等 代数幾何による議論でも, 正しく議論されている場合は点を与えている. また超曲面が滑らかで, また超曲面の交わりが横断的である, と仮定して解答した答案も減点していない.