

1 ベクトル束, ファイバー束, 主 G 束

1.1 ベクトル束の定義

参考文献: [Bott-Tu, §6], [服部, 第3章, §1]

位相空間の記号としてここでは M を使っているが、後ほど X に変更する。

定義 1.1. $p: E \rightarrow M$ がランク n の (位相的) 複素ベクトル束 (complex vector bundle) であるとは,

- (0) E と M は位相空間で p は連続全射
- (1) $\forall x \in M$ に対して $E_x := p^{-1}(x)$ には n 次元 \mathbb{C} ベクトル空間の構造が与えられている. (E_x をファイバー (fiber) という.)
- (2) $\forall x \in M, \exists U: x$ の開近傍, 同相写像 $\exists \varphi: E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ (局所自明化, local trivialization という)

$$\begin{array}{ccc}
 E|_U := p^{-1}(U) & \xrightarrow[\varphi]{\cong} & U \times \mathbb{C}^n \\
 & \searrow p & \swarrow \pi_1 \\
 & & U
 \end{array}$$

s.t.

- $p = \pi_1 \circ \varphi$,
- φ がファイバーに誘導する写像 $\varphi_x: E_x \rightarrow \mathbb{C}^n$ は \mathbb{C} ベクトル空間の同型.

ここで $\pi_1(x, v) = x$ は第一射影.

注 1.2. 実ベクトル束も同様に定義される.

注 1.3. M が C^∞ 級多様体のとき, $p: E \rightarrow M$ が C^∞ 級複素ベクトル束 $\stackrel{\text{def}}{\iff} E$ は C^∞ 級多様体, p は C^∞ 級写像であって, 上の (1), (2) を満たす. ただし, (2) において局所自明化 φ は diffeo であることを要求する.

問 1.4. C^∞ 級複素ベクトル束 $p: E \rightarrow M$ は沈めこみであることを示せ.

注 1.5. $p: E \rightarrow M$ をベクトル束とする. $N \subset M$ を部分位相空間とするととき, $E|_N = p^{-1}(N) \rightarrow N$ はベクトル束になる.

例 1.6 (自明なベクトル束). $p: E = M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M, p(x, v) = x$ はランク n のベクトル束. これを自明なベクトル束 (あるいは単に自明束) という.

例 1.7 (接ベクトル束, あるいは接束). $M: C^\infty$ 級多様体.

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$$

には C^∞ 級多様体の構造が自然に入る (演習). $p: TM \rightarrow M$ を $p(T_x M) = \{x\}$ となるように定める. 局所座標系 $(U; x_1, \dots, x_m)$ に対して局所自明化が

$$TM|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^m$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \mapsto (p, e_i)$$

により定まり, TM は実ベクトル束の構造を持つ.

例 1.8. M を複素多様体とする. (局所的に \mathbb{C}^n の開集合と同相で, 座標変換が双正則) このとき TM は複素ベクトル束の構造を持つ. (さらに正則ベクトル束の構造を持っている.)

定義 1.9. rank 1 のベクトル束を直線束 (line bundle) という.

定義 1.10 (ベクトル束の同型). ベクトル束 $p: E \rightarrow M, q: F \rightarrow M$ が同型であるとは, 同相写像 $\varphi: E \rightarrow F$ が存在して, 次が成り立つこと.

(1) $q \circ \varphi = p$, i.e.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & F \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & M & \end{array}$$

(2) $\forall x \in M, \varphi_x: E_x \rightarrow F_x$ は \mathbb{C} ベクトル空間の同型.

ベクトル束 $E \rightarrow M$ が自明 $\iff E$ は自明なベクトル束 $M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M$ と同型.

例 1.11 (Möbius の帯). 自明でない直線束の例を挙げよう.

$$\mathbb{R} \times [0, 1] / (x, 0) \sim (-x, 1)$$

$$\downarrow$$

$$([0, 1] / 0 \sim 1) \cong S^1$$

は自明でない実直線束 (何故か?). もし, \mathbb{R} を \mathbb{C} に変えたらどうなるか?

例 1.12 (tautological line bundle). 複素射影空間

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \{ \ell \subset \mathbb{C}^{n+1} : \ell \text{ は 1 次元 } \mathbb{C} \text{ 部分空間} \}$$

上の tautological line bundle とは

$$L := \{ (\ell, v) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : v \in \ell \}, \quad p(\ell, v) = \ell$$

$$\downarrow p$$

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

- $L_\ell = \{ (\ell, v) : v \in \ell \} \cong \ell$ がファイバーになっている.

- 局所自明化は $U_0 = \{[1, z_1, \dots, z_n] : (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n\}$ 上で

$$\begin{aligned} L|_{U_0} &\longrightarrow U_0 \times \mathbb{C} \\ (\ell, v) &\longmapsto (\ell, v_0) \end{aligned}$$

により与えられる. ただし $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ とした. $\ell = [1, z_1, \dots, z_n]$ とするとき, $v \in \ell$ より, $v = (v_0, v_0 z_1, \dots, v_0 z_n)$ に注意する.

これが複素直線束になっていることは演習とする.

例 1.13. 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ 上の tautological line bundle も同様に定義される (実直線束になる). $\mathbb{R}P^1 = S^1$ 上の tautological line bundle は実は先ほどの Möbius の帯である (check せよ).

ベクトル束より一般の構造として, fiber 束がある.

定義 1.14 (ファイバー束). $p: E \rightarrow M$ が F をファイバーとするファイバー束であるとは,

- (0) E, F, M は位相空間で p は連続全射.
- (1) $\forall x \in M, \exists U: x$ の開近傍, 同相写像 $\exists \varphi: E|_U \cong U \times F$ (局所自明化, local trivialization)

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \pi_1 \\ & & U \end{array}$$

さらに各ファイバー $E_x := p^{-1}(x)$ が何らかの構造を持ち, $\varphi_x: E_x \cong F$ がその構造を保つことを要請することもある.

1.2 変換関数によるベクトル束の構成

参考文献: [Bott-Tu, §6], [服部, 第3章, §1]

$E \rightarrow M$ を \mathbb{C} ベクトル束とする. M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ および, 各 U_α 上での局所自明化 $\varphi_\alpha: E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ をとる.

$U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ とおく. 2つの同型の合成

$$U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi_\beta^{-1}} E|_{U_{\alpha\beta}} \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n$$

は各ファイバーごとには線形同型写像なので,

$$(x, v) \longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$$

の形をしている. ここで,

$$g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

は $U_{\alpha\beta}$ 上の行列値関数で, 変換関数 (transition function) と呼ばれる.

問 1.15. $g_{\alpha\beta}$ は連続関数であることを示せ.

命題 1.16 (コサイクル条件). 変換関数は次の性質を持つ.

(a) $g_{\alpha\alpha}(x) = \text{id}$.

(b) $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x)^{-1}$.

(c) $\forall x \in U_{\alpha\beta\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して, $g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x) = \text{id}$.

命題 1.17. 上の性質 (a)-(c) を満たす連続関数の族 $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_n(\mathbb{C})\}$ が与えられたとき, これを変換関数とするベクトル束が存在する.

Proof.

$$E := \bigsqcup_{\alpha} (U_\alpha \times \mathbb{C}^n) / \sim$$

ただし, $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ と $(y, w) \in U_\beta \times \mathbb{C}^n$ に対して,

$$(x, v) \sim (y, w) \iff x = y \text{ かつ } v = g_{\alpha\beta}(x)w$$

と定義する. $p: E \rightarrow M$ を $p([x, v]) = x$ と定めればよい. 上の性質 (a)-(c) を使うと, \sim が同値関係になることが分かる. 自然な射影 $U_\alpha \times \mathbb{C}^n \rightarrow E|_{U_\alpha}$ は全単射で同相写像になることがチェックできる. 詳細は演習とする. \square

命題 1.18. 変換関数 $\{g_{\alpha\beta}\}, \{g'_{\alpha\beta}\}$ が同型なベクトル束を定める $\iff \exists \lambda_\alpha: U_\alpha \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $g'_{\alpha\beta}(x) = \lambda_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x)\lambda_\beta(x)^{-1}$ for $x \in U_{\alpha\beta}$.

Proof. (\implies) E, E' を各々 $\{g_{\alpha\beta}\}, \{g'_{\alpha\beta}\}$ を変換関数とするベクトル束とする. 仮定により E と E' は同型

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\cong]{\lambda} & E' \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

である. これが (局所自明化を通じて) 誘導する次の写像を考える.

$$U_\alpha \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\lambda} E'|_{U_\alpha} \xrightarrow{\varphi'_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^n$$

ただし, $\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha$ は各々 $E|_{U_\alpha}, E'|_{U_\alpha}$ の自明化. これは, ある $\lambda_\alpha: U_\alpha \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ を用いて,

$$(x, v) \mapsto (x, \lambda_\alpha(x)v)$$

の形に書ける. 各 $x \in U_{\alpha\beta}$ に対して, 次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\lambda_\alpha(x)} & \mathbb{C}^n & & \mathbb{C}^n \\ & \swarrow \varphi_\alpha & & \searrow \varphi'_\alpha & \\ & E_x & \xrightarrow[\lambda_x]{\cong} & E'_x & \\ & \swarrow \varphi_\beta & & \searrow \varphi'_\beta & \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\lambda_\beta(x)} & \mathbb{C}^n & & \mathbb{C}^n \end{array}$$

$g_{\alpha\beta}(x)$ (left vertical), $g'_{\alpha\beta}(x)$ (right vertical)

より $g'_{\alpha\beta}(x)\lambda_\beta(x) = \lambda_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x)$.

(\Leftarrow) 局所自明化により, λ_α により U_α 上の同型 $E|_{U_\alpha} \cong E'|_{U_\alpha}$ を作る. これが張り合うことを見ればよい. (詳細略) \square

系 1.19. 変換関数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ が自明なベクトル束を定める $\iff g_{\alpha\beta}(x) = \lambda_\alpha(x)\lambda_\beta(x)^{-1}$ を満たす $\lambda_\alpha: U_\alpha \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ が存在する.

もし各 U_α 上でベクトル束が自明になることが分かっているとすると (例えば U_α が可縮であればそうなる), 集合

$$\{\text{変換関数 } \{g_{\alpha\beta}\}\} / \{g_{\alpha\beta}\} \sim \{\lambda_\alpha g_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}\}$$

は M 上のベクトル束の同型類の集合を与える. これは後で出てくる Čech コホモロジーの非アーベル版である. 複素直線束 ($n = 1$) のときは $GL_n(\mathbb{C})$ はアーベル群となり, この集合はコホモロジー群 $H^2(M; \mathbb{Z})$ と同一視される.

例 1.20. 接束 $TM \rightarrow M$ の変換関数. M を座標近傍 $(U_\alpha; x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha)$ たちで覆う. 各座標近傍は $TM|_{U_\alpha}$ の自明化を定める. 変換関数は Jacobi 行列で与えられる.

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left(\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta} \right)_{i,j}$$

注 1.21. M が C^∞ 級多様体, $E \rightarrow M$ が C^∞ 級ベクトル束なら, 変換関数 $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ は C^∞ 級にとれる.

M が複素多様体, $E \rightarrow M$ が正則ベクトル束なら, 変換関数 $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ は正則関数にとれる.

2025.4.7 ここまで

1.3 自明なベクトル束の判定方法

自明なベクトル束 $E \rightarrow M$ とは $M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M$ と同型なベクトル束のことであった.

定義 1.22. ベクトル束 (あるいはもっと一般に fiber 束でもよい) $p: E \rightarrow M$ の切断 (section) とは, 連続写像 $s: M \rightarrow E$ であって, $p \circ s = \text{id}$ を満たすもののこと.

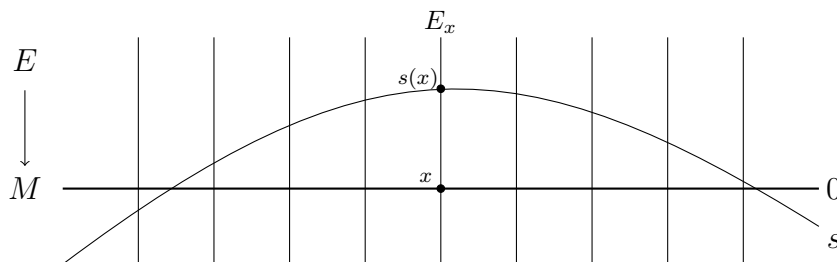


図 1: 切断 s とゼロ切断 0

定義 1.23. ベクトル束のゼロ切断 $0: M \rightarrow E$ とは各点 $x \in M$ に対してその点のファイバーのゼロベクトル $0 \in E_x$ を対応させる切断のことである。(問: 0切断は連続か?) しばしば, ゼロ切断により M を E の部分集合と思う。

定義 1.24. $E \rightarrow M$ をランク n のベクトル束とする. $U \subset M$ を部分集合とする. $E|_U$ の切断の組 s_1, \dots, s_n が, E の U 上の枠 (frame) であるとは, 任意の $x \in U$ に対して $\{s_1(x), \dots, s_n(x)\}$ が E_x の基底となること。

命題 1.25. ベクトル束 $E \rightarrow M$ が自明 $\iff E$ の M 全体での枠 s_1, \dots, s_n が存在する。

Proof. (\implies) $E \cong M \times \mathbb{C}^n$ のとき, $s_i: M \rightarrow M \times \mathbb{C}^n, s_i(x) = (x, e_i)$ は枠となる。

(\impliedby) $\{s_1, \dots, s_n\}$ を M 上の枠とする. 写像 $\Phi: M \times \mathbb{C}^n \rightarrow E$ を

$$\Phi \left(x, \sum_{i=1}^n v_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n v_i s_i(x)$$

と定めると,

- Φ は各ファイバーの線形写像を誘導する。
- Φ は同相になる (問: E の局所自明化をもちいてこれを確かめよ)。

従って E は自明である. □

系 1.26. 直線束 $L \rightarrow M$ が自明 \iff 至る所 0 でない (つまり $\forall x \in M, s(x) \neq 0$) 切断 $s: M \rightarrow L$ が存在する。

例 1.27. Möbius の帯は至る所 0 でない切断を持たず, 従って非自明な直線束である。

[Möbius の帯の絵を描く]

定義から, Möbius の帯の section とは, 連続関数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ であって $f(0) = -f(1)$ を満たすものである. $f(0) = 0$ ならゼロ点を持つし, $f(0) \neq 0$ なら, 中間値の定理より $f(x)$ はゼロ点を持つ。

問 1.28. Tautological line bundle $L \rightarrow \mathbb{C}P^1$ は至る所消えない切断を持たないことを示せ. ヒント: もしあれば, s は $s: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ を定める. 自然な射影 $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ に対して, $\pi \circ s = \text{id}$ が成立する. π, s がコホモロジーに誘導する写像を考えて矛盾を導け。

1.4 ベクトル束の計量

複素ベクトル束 $E \rightarrow M$ の (Hermite) 計量 h とは各ファイバーに正定値エルミート計量 $h_x: E_x \otimes \overline{E_x} \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられたもので, 次の意味で x について連続であるもの。

局所自明化 $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ の下で, h_x は \mathbb{C}^n の計量を誘導する. それを再び h_x と書くと, $h_x(e_i, e_j)$ は x の連続関数となる.

注 1.29. C^∞ 級ベクトル束に対しては, C^∞ 級計量が定義できる. 実ベクトル束の実計量も同様に定義される.

命題 1.30. *paracompact Hausdorff* 空間 M 上のベクトル束は計量を持つ.

Proof. M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ および自明化 $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ をとる. パラコンパクトハウスドルフ空間の性質より, 次を満たす連続な 1 の分割 $\rho_\alpha: M \rightarrow [0, 1]$ が存在する:

$$\text{Supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha, \quad \{\text{Supp } \rho_\alpha\} \text{ は locally finite, } \quad \sum_{\alpha} \rho_\alpha(x) = 1$$

各 U_α 上では自明化 (と \mathbb{C}^n の標準計量) を用いて計量 h_α を定めることができる. $u, v \in E_x$ に対して,

$$h_x(u, v) := \sum_{\alpha} \rho_\alpha(x) h_\alpha(u, v)$$

とおくと, これは E_x の正定値エルミート計量になる. 実際, $u \neq 0$ に対して

$$h_x(u, u) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha(x) h_\alpha(u, u) > 0$$

h_x は x について連続に依存し (何故か?), 計量を定める. □

問 1.31. エルミート計量の代わりに, 非退化な \mathbb{C} -bilinear ペアリング

$$Q_x: E_x \otimes E_x \rightarrow \mathbb{C}$$

であって, x について連続に依存するもの, はどんなベクトル束についても作れるか? また, 上の命題でハウスドルフの仮定を落とすとどうなるか?

命題 1.32 (正規直交枠の存在). $E \rightarrow M$ をエルミート (あるいは実) 計量 h が与えられた複素 (実) ベクトル束とする. $\forall x \in M, \exists U: x$ の開近傍, $\exists s_1, \dots, s_n: E|_U$ の枠, s.t. $h(s_i(x), s_j(x)) = \delta_{i,j}$.

Proof. x のある開近傍 U 上での局所自明化が取れる. つまり, $E|_U$ の枠 $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n$ が存在する. この $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n$ に対して, Gram-Schmidt の直交化法を施すとよい.

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \frac{\tilde{s}_1(x)}{\|\tilde{s}_1(x)\|} \\ s_2(x) &= \frac{\tilde{s}_2(x) - h(\tilde{s}_2(x), s_1(x))s_1(x)}{\|\tilde{s}_2(x) - h(\tilde{s}_2(x), s_1(x))s_1(x)\|} \\ &\vdots \end{aligned}$$

ここで $\|u\| = \sqrt{h_x(u, u)}$ はベクトル $u \in E_x$ の長さ. □

系 1.33. $E \rightarrow M$ を *paracompact Hausdorff* 空間 M 上の \mathbb{C} (あるいは \mathbb{R}) ベクトル束とする. その局所自明化を上手くとれば, 変換関数は全て $U(n)$ (あるいは $O(n)$) に値をとるようにできる.

Proof. E に計量を入れて, 正規直交枠に付随する局所自明化をとればよい. \square

変換関数が値をとる群を**構造群** (structure group) と呼ぶ. 上の系は任意の \mathbb{C} ベクトル束の構造群が (一般には $GL_n(\mathbb{C})$ であるが) $U(n)$ に取り直せることを言っている. これを構造群の $U(n)$ への還元 (reduction) という.

1.5 よりみち：fiber 束の構造群

$E \rightarrow M$ を F をファイバーとするファイバー束とする. M のある開被覆 $\{U_\alpha\}$ および U_α 上での局所自明化 $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times F$ をとると, ベクトル束のときと同様に, 変換関数

$$g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Homeo}(F)$$

が定義される. ここで $\text{Homeo}(F)$ は F の自己同相写像のなす群. $g_{\alpha\beta}$ が部分群 $G \subset \text{Homeo}(F)$ に値をとるとき, G はこのファイバー束の構造群であるという.

例 1.34. $E \rightarrow M$ を計量 h をもつ複素ベクトル束とする. このベクトル束に関して次のファイバー束が構成できる.

- 単位球面束 (sphere bundle)

$$S(E) = \bigsqcup_{x \in M} \{v \in E_x \mid \|v\| = 1\}$$

ファイバーは S^{2n-1} .

- 円盤束 (disc bundle)

$$D(E) = \bigsqcup_{x \in M} \{v \in E_x \mid \|v\| \leq 1\}$$

ファイバーは D^{2n} .

- 枠束 (frame bundle)

$$\text{Fr}(E) = \bigsqcup_{x \in M} \{(v_1, \dots, v_n) \in E_x^n \mid (v_1, \dots, v_n) \text{ は } E_x \text{ の基底}\}$$

ファイバーは $GL_n(\mathbb{C})$.

これらのファイバー束の構造群は $U(n)$ である (演習).

1.6 ベクトル束に対する操作

1.6.1 引き戻し (pull-back)

$p: E \rightarrow X$ をベクトル束とする (ファイバー束でもよい). $f: Y \rightarrow X$ を連続写像とする. このとき

$$f^*E = \{(y, e) \in Y \times E \mid f(y) = p(e)\}$$

とおき, $\tilde{p}: f^*E \rightarrow Y$ を $\tilde{p}(y, e) = y$ と定める.

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \longrightarrow & E \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

このとき, \tilde{p} は Y 上のベクトル束となる (演習). さらに $y \in Y$ でのファイバーは

$$(f^*E)_y = E_{f(y)}$$

注 1.35. $Y \subset X$ のとき, 包含写像 $i: Y \rightarrow X$ に関する引き戻しは, Y への制限と同じ:

$$i^*E \cong E|_Y.$$

2025.4.15 ここまで

1.6.2 Whitney 和

$p: E \rightarrow X, q: F \rightarrow X$ をベクトル束 (あるいはファイバー束) とする.

$$E \oplus F = \{(e, f) \in E \times F \mid p(e) = q(f)\} \ni (e, f) \mapsto p(e) = q(f) \in X$$

はベクトル束になる. ファイバー束の場合は, $E \times_X F$ と書く.

注 1.36. 引き戻しと Whitney 和はどちらも「ファイバー積」として理解される.

1.6.3 部分ベクトル束

$p: E \rightarrow X, q: F \rightarrow X$ をベクトル束とする. 位相空間の埋め込み $i: F \hookrightarrow E$ (つまり, $i: F \rightarrow i(F)$ が同相) が次を満たすとき, F を E の部分ベクトル束という.

(1) 次が可換

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & X \end{array}$$

(2) i はファイバーの間の線形写像 $i_x: F_x \rightarrow E_x$ を誘導する

問 1.37. 連続写像 $f: F \rightarrow E$ が上の可換図式 (1) を満たし, ファイバーに誘導する写像 $f_x: F_x \rightarrow E_x$ が線形単射という条件を満たすとき, f は埋め込みであることを示せ.

1.6.4 商ベクトル束

$E \rightarrow X$ をベクトル束, $F \rightarrow X$ をその部分ベクトル束とする. このとき

$$E/F = \bigsqcup_{x \in X} E_x/F_x$$

とおき, 商ベクトル束という. これはベクトル束の構造を持つ.

部分ベクトル束 $F \subset E$ に対して,

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow E/F \longrightarrow 0$$

の形の列 (と同型な列) をベクトル束の小完全列という.

例 1.38. M を C^∞ 級多様体, $S \subset M$ を部分多様体とする. このとき TS は $TM|_S$ の部分ベクトル束. さらに商ベクトル束

$$N_{S/M} := TM|_S/TS$$

を S の法ベクトル束 (normal vector bundle) という.

1.6.5 直交補束

$E \rightarrow X$ を計量を持つベクトル束, $F \rightarrow X$ をその部分ベクトル束とする. このとき

$$F^\perp = \bigsqcup_{x \in X} F_x^\perp$$

はベクトル束となる. さらにこの時,

$$E \cong F \oplus F^\perp, \quad E/F \cong F^\perp$$

が成立する.

命題 1.39. パラコンパクトハウスドルフ空間上のベクトル束の小完全列は分裂する.

Proof. 小完全列 $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow E/F \rightarrow 0$ に対して, E に計量を入れると, $E \cong F \oplus F^\perp$. ここで $F^\perp \cong E/F$ であるから, $E \cong F \oplus E/F$. \square

1.6.6 双対, テンソル積, Hom, 外積

$E \rightarrow X, F \rightarrow X$ を複素ベクトル束とする. E の双対束が

$$E^* := \bigsqcup_{x \in X} E_x^*, \quad E_x^* = \text{Hom}(E_x, \mathbb{C})$$

で与えられる. E と F のテンソル積束は

$$E \otimes F := \bigsqcup_{x \in X} E_x \otimes F_x$$

で与えられ, Hom 束は

$$\mathrm{Hom}(E, F) := \bigsqcup_{x \in X} \mathrm{Hom}(E_x, F_x) \cong E^* \otimes F$$

で与えられる. E の p 次外積束は

$$\bigwedge^p E := \bigsqcup_{x \in X} \bigwedge^p E_x$$

で与えられる. 例えば, 多様体 M に対して, 余接束 T^*M は接束 TM の双対束であり, M 上の p 次微分形式は T^*M の p 次外積束 $\bigwedge^p T^*M$ の切断である.

問 1.40. 底空間の開被覆 $\{U_\alpha\}$ を固定する. E が変換関数 $g_{\alpha\beta}$ で与えられるベクトル束, F が変換関数 $h_{\alpha\beta}$ で与えられるベクトル束であるとき, E^* は変換関数 ${}^t g_{\alpha\beta}^{-1}$ で与えられるベクトル束, $E \otimes F$ は変換関数 $g_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta}$ で与えられるベクトル束であることを観察せよ.

1.7 ファイバー束のホモトピー性質

この節では次の定理を示すことを目標とする. $I = [0, 1]$ とおく. この節の証明は [Husemoller, Chapter 4, §9] を参照した.

定理 1.41. X をパラコンパクトハウスドルフ空間, $E \rightarrow X \times I$ を fiber 束とする. $\pi: X \times I \rightarrow X$ を射影とする. このとき $X \times I$ 上のファイバー束の同型

$$\phi: E \xrightarrow{\cong} \pi^*(E|_{X \times \{1\}}) = E|_{X \times \{1\}} \times I$$

であって, $\phi|_{X \times \{1\}} = \mathrm{id}$ となるものが存在する. 特に, $E|_{X \times \{0\}} \cong E|_{X \times \{1\}}$.

証明のために幾つかの Lemma を用意する.

補題 1.42. $E \rightarrow X \times [a, c]$ をファイバー束とする. $a \leq b \leq c$ とする. もし $E|_{X \times [a, b]}$ と $E|_{X \times [b, c]}$ が共に (ファイバー束として) 自明ならば, E も自明である.

Proof. F をファイバーとする. 仮定より自明化

$$\phi_1: E|_{X \times [a, b]} \cong (X \times [a, b]) \times F$$

$$\phi_2: E|_{X \times [b, c]} \cong (X \times [b, c]) \times F$$

が存在する. $X \times \{b\}$ に沿った変換関数

$$g: X \times F \xrightarrow{(\phi_2|_{X \times \{b\}})^{-1}} E|_{X \times \{b\}} \xrightarrow{\phi_1|_{X \times \{b\}}} X \times F$$

を考えて, ϕ_2 を次の合成で与えられる自明化 $\tilde{\phi}_2$ に取り換える.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\phi}_2: E|_{X \times [b, c]} & \xrightarrow{\phi_2} & (X \times [b, c]) \times F & \longrightarrow & (X \times [b, c]) \times F \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & X \times F \times [b, c] & \xrightarrow{g \times \mathrm{id}} & X \times F \times [b, c] \end{array}$$

このとき定義から

$$\tilde{\phi}_2|_{X \times \{b\}} = \phi_1|_{X \times \{b\}}$$

が分かるので、 ϕ_1 と $\tilde{\phi}_2$ を張り合わせて同型写像

$$\phi: E \cong (X \times [a, c]) \times F$$

を得ることができる。 \square

注 1.43. ϕ が同相写像であることは、次の事実を ϕ および ϕ^{-1} に適用することで分かる。 $f: X \rightarrow Y$ が連続 $\Leftrightarrow \exists X_1, \exists X_2: X$ の閉集合, s.t. $X = X_1 \cup X_2, f|_{X_i}: X_i \rightarrow Y$ は連続 ($i = 1, 2$).

補題 1.44. $E \rightarrow X \times I$ をファイバー束とする。 $\forall x \in X, \exists U \subset X: x$ の開近傍 s.t. $E|_{U \times I}$ は自明。

Proof. 各 $t \in I$ に対して、 x の開近傍 $\exists U(t) \subset X, t$ を含む連結開集合 $\exists J(t) \subset I$ s.t. $E|_{U(t) \times J(t)}$ は自明。 I のコンパクト性から、有限個の $t_1, \dots, t_k \in I$ が存在して、

$$I = J(t_1) \cup \dots \cup J(t_k)$$

となる。ここで

$$U = U(t_1) \cap \dots \cap U(t_k)$$

とおく。各 i に対して $E|_{U \times J(t_i)}$ は自明なので、Lemma 1.42 より $E|_{U \times I}$ も自明であることが分かる。 \square

定理 1.41 の証明。補題 1.44 より、 X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在して、 $E|_{U_\alpha \times I}$ は自明である。

$$h_\alpha: (U_\alpha \times I) \times F \cong E|_{U_\alpha \times I}$$

を自明化とする。

以下では、まず $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が有限被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ である場合に証明し、あとで無限被覆の場合に議論をどのように修正すればよいかを説明する。

$\{\rho_\alpha\}$ を $\{U_\alpha\}$ に付随する連続な 1 の分割とする。ここで $\rho_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ は $\text{Supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$ を満たす。また

$$\tau_0(x) := 0, \quad \tau_\alpha(x) := \rho_1(x) + \dots + \rho_\alpha(x)$$

とおく。 $\tau_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ は $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_m = 1$ を満たす関数列である。さらに $r_\alpha: X \times I \rightarrow X \times I$ を

$$r_\alpha(x, t) := (x, \max(\tau_\alpha(x), t))$$

と定義する。 [写像 r_α を図示] $r_0 = \text{id}, r_m(x, t) = (x, 1)$ に注意する。以下での目標は $X \times \{1\}$ 上で恒等写像である同型

$$E \cong r_1^* E \cong r_2^* E \cong \dots \cong r_m^* E = \pi^*(E|_{X \times \{1\}})$$

を順次構成することである。

同型 $r_{\alpha-1}^* E \cong r_\alpha^* E$ の構成を説明する。アイデアは図 2 にある通り。

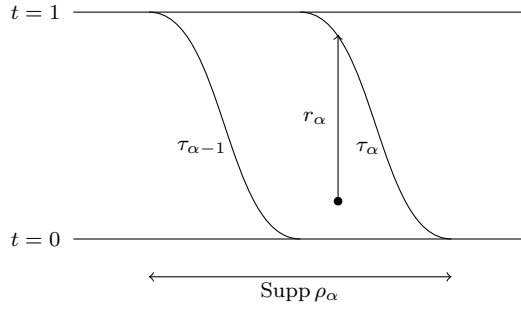


図 2: $\text{Supp}(\rho_{\alpha}) \times I$ 上の自明化を使って $r_{\alpha-1}^* E \cong r_{\alpha}^* E$ を構成する.

- $U_{\alpha} \times I$ 上では

$$r_{\alpha-1}^* E|_{U_{\alpha} \times I} \xrightarrow{\cong} (U_{\alpha} \times I) \times F \xrightarrow{\cong} r_{\alpha}^* E|_{U_{\alpha} \times I}$$

$$(x, t, h_{\alpha}(r_{\alpha-1}(x, t), f)) \mapsto (x, t, f) \mapsto (x, t, h_{\alpha}(r_{\alpha}(x, t), f))$$

により同型を定める.

- $(\text{Supp } \rho_{\alpha})^c \times I$ 上では, $r_{\alpha-1} = r_{\alpha}$ であるから, 恒等写像

$$r_{\alpha-1}^* E|_{(\text{Supp } \rho_{\alpha})^c \times I} \cong r_{\alpha}^* E|_{(\text{Supp } \rho_{\alpha})^c \times I}$$

が同型を与える.

この二つの同型は張り合う. また $X \times \{1\}$ 上では恒等写像であることに注意する.

$\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ が無限被覆のとき. A に整列順序を入れておく. 局所有限な 1 の分割 $\{\rho_{\alpha}\}$ をとる. $\tau_{\alpha}(x) := \sum_{\beta \leq \alpha} \rho_{\beta}(x)$ と定め, $r_{\alpha}: X \times I \rightarrow X \times I$ を同様に定める. $x \in X$ の開近傍 U を十分小さくとると, $U \cap \text{Supp } \rho_{\alpha} \neq \emptyset$ となる α は有限個 $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$ であり, 上と同様に同型

$$E \cong r_{\alpha_1}^* E \cong r_{\alpha_2}^* E \cong \dots \cong r_{\alpha_k}^* E \cong \pi^*(E|_{X \times \{1\}})$$

が $U \times I$ 上で構成される. これらの同型は張り合う. □

系 1.45. X をパラコンパクトハウスドルフ空間, $E \rightarrow Y$ をファイバー束とする. $f, g: X \rightarrow Y$ がホモトピックであるとき, $f^* E \cong g^* E$.

Proof. f と g の間のホモトピーを $H: X \times I \rightarrow Y$ とする. ここで $f = H|_{X \times \{0\}}$, $g = H|_{X \times \{1\}}$ である. このとき

$$f^* E = H^* E|_{X \times \{0\}} \cong H^* E|_{X \times \{1\}} \cong g^* E$$

□

系 1.46. X をパラコンパクトハウスドルフ空間で, 可縮であるとする. このとき, X 上の任意のファイバー束は自明である.

Proof. X が可縮 $\Leftrightarrow X$ は 1 点とホモトピー同値. 従って, $\exists c: \text{pt} \rightarrow X, \pi: X \rightarrow \text{pt}$ s.t. $c \circ \pi \sim \text{id}_X$. ($\pi \circ c = \text{id}_{\text{pt}}$ は自明に成り立つ.) X 上のファイバー束 $E \rightarrow X$ に対して, $E = \text{id}_X^* E \cong (c \circ \pi)^* E = \pi^*(E|_c) \cong F \times X$. □

1.8 ベクトル束のホモトピー性質

前節の結果をベクトル束に応用する.

定理 1.47. X をパラコンパクトハウスドルフ空間とする. $E \rightarrow X \times I$ をベクトル束とする. このときベクトル束の同型

$$\phi: E \cong \pi^*(E|_{X \times \{1\}})$$

であって $\phi|_{X \times \{1\}} = \text{id}$ となるものが存在する.

Proof. 同型がベクトル束の同型にとれることを示したい. そのために次のファイバー束を考える. $F = \pi^*(E|_{X \times \{1\}})$ とおく. ファイバー束 $\text{Iso}(E, F) \rightarrow X \times I$ を点 (x, t) でのファイバーが

$$\text{Iso}(E, F)_{(x,t)} = \{\varphi: E_{(x,t)} \cong F_{(x,t)} : \text{線形同型}\}$$

与えられるものとする. $E|_{X \times \{1\}} \cong F|_{X \times \{1\}}$ より $\text{Iso}(E, F)$ は $X \times \{1\}$ 上で切断を持つ. 定理 1.41 より,

$$\text{Iso}(E, F) \cong \text{Iso}(E, F)|_{X \times \{1\}} \times I$$

であるから, この切断は $X \times I$ 上に拡張する. 従って $E \cong F$ が従う. □

問 1.48. X が (パラコンパクトだが) ハウスドルフでないときに, 上の定理の反例を作れ.

ファイバー束のときと同様に次の系を得る.

系 1.49. X をパラコンパクトハウスドルフ空間, $f \sim g: X \rightarrow Y$ をホモトピックな写像とする. Y 上の任意のベクトル束 $E \rightarrow Y$ に対して, $f^*E \cong g^*E$.

系 1.50. 可縮なパラコンパクトハウスドルフ空間上のベクトル束は自明である.

問 1.51. X と Y がホモトピー同値なパラコンパクトハウスドルフ空間のとき, X 上のベクトル束の同型類の集合と Y 上のベクトル束の同型類の集合の間に 1 対 1 の写像があることを示せ.

1.9 被覆ホモトピー性質

ファイバー束のホモトピー性質の系として, 次の被覆ホモトピー性質 (covering homotopy property, CHP と略する) を得る. CHP はホモトピーリフト性質 (homotopy lifting property) とも呼ばれる.

定義 1.52. 連続写像 $p: E \rightarrow Y$ が位相空間 X に対して被覆ホモトピー性質 (CHP) を持つとは, 任意の連続写像 $g: X \times I \rightarrow Y$ および $g_0 := g|_{X \times \{0\}}$ の E へのリフト $f: X \rightarrow E$ (すなわち, $p \circ f = g_0$ を満たす写像) に対して, 連続写像 $\tilde{f}: X \times I \rightarrow E$ であって, $\tilde{f}|_{X \times \{0\}} = f, p \circ \tilde{f} = g$ を満たすものが存在すること.

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

つまり, $g_0: X \rightarrow Y$ とそのリフト $f: X \rightarrow E$ が与えられ, g_0 をホモトピックに変形するとき, リフト f も共に変形できる.

注 1.53. $E \rightarrow Y$ が被覆写像 (covering map) であるときは, 上の状況でリフト \tilde{f} が一意に存在する. 被覆ホモトピー性質は存在しか要求していない.

定理 1.54. ファイバー束 $E \rightarrow Y$ は任意のパラコンパクトハウスドルフ空間 X に対して CHP を持つ.

Proof. g, f, \tilde{f} を上の定義の通りとする. ファイバー束 $g^*E \rightarrow X \times I$ を考えよう.

$$\begin{aligned}
 f \text{ を与える} &\iff g^*E \text{ の } X \times \{0\} \text{ 上の切断 } s \text{ を与える} \\
 \tilde{f} \text{ を与える} &\iff s \text{ の } X \times I \text{ への拡張を与える}
 \end{aligned}$$

に注意する. 定理 1.41 より $g^*E \cong (g^*E|_{X \times \{0\}}) \times I$ であるから結論が従う. \square

注 1.55. 実は定理 1.54 は, X がパラコンパクトハウスドルフと仮定する代わりに, Y がパラコンパクトハウスドルフと仮定しても成立する. つまり, パラコンパクトハウスドルフ空間上のファイバー束は任意の位相空間に対して CHP を持つ. より一般には, numerable fiber bundle $E \rightarrow Y$ は任意の位相空間に対して CHP を持つ.

(説明) 詳細は技術的になるため本講義では省略するが, [Husemöller, Chapter 4, §9] (あるいは原論文 [Dold]) を参照せよ. X の開被覆 $\{U_\alpha\}$ が numerable であるとは, ある連続な 1 の分割 $\rho_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して, $\text{Supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$ であり, 集合族 $\{\text{Supp } \rho_\alpha\}$ が局所有限となること. ファイバー束 $E \rightarrow X$ が numerable であるとは, ある numerable な開被覆 $\{U_\alpha\}$ が存在して, 全ての α に対して $E|_{U_\alpha}$ が自明になることである. パラコンパクトハウスドルフ空間上のファイバー束は必ず numerable になる.

まず numerable fiber bundle は引き戻しで閉じている. つまり, $f: X \rightarrow Y$ が連続写像で $E \rightarrow Y$ が numerable fiber bundle であれば f^*E も numerable fibre bundle である [Husemöller, Proposition 9.3]. numerable という条件は, 底空間がパラコンパクトハウスドルフという条件と違って, 圏論的に閉じており扱いやすい.

次に $X \times I$ 上の numerable なファイバー束 $E \rightarrow X \times I$ に対して, X の numerable な開被覆 $\{U_\alpha\}$ であって, 各 α に対して $E|_{U_\alpha \times I}$ が自明になるものが存在する. これは [Husemöller, Lemma 9.5] の議論から従う. このことを使うと, 定理 1.41 および定理 1.54 の証明をファイバー束 E が numerable の場合に拡張できることが分かる.

定義 1.56. 任意の位相空間 X に対して CHP をもつ写像 $p: E \rightarrow Y$ を fibration という. 全ての I^n に対して CHP をもつ写像 $p: E \rightarrow Y$ を Serre fibration という.

上の注意より, 任意のファイバー束は fibration である.

定理 1.57 (ホモトピー長完全列). $p: X \rightarrow Y$ を Serre fibration とする. $y \in Y$, $F = p^{-1}(y)$, $x \in F$ に対して, 次の群の完全列¹.

$$\rightarrow \pi_n(F, x) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x) \xrightarrow{p_*} \pi_n(Y, y) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(Y, y)$$

がある.

ホモトピー群について非常に簡単に説明する. より詳しくは [Bott-Tu, Section 17] を参照. X を位相空間, $x \in X$ を基点とする. n 次ホモトピー群 $\pi_n(X, x)$ は

$$\begin{aligned} \pi_n(X, x) &:= \{ \text{境界 } \partial I^n \text{ を } x \text{ にうつす連続写像 } f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x) \} / \sim \\ &= \{ \text{基点を保つ連続写像 } f: (S^n, *) \rightarrow (X, x) \} / \sim \end{aligned}$$

と定義される². ここで \sim は homotopic の関係. 例えば $f_1, f_2: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x)$ がホモトピックであるとは, 連続写像 $H: (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x)$ が存在して $f_1 = H(\cdot, 0)$, $f_2 = H(\cdot, 1)$ となること. $n = 0$ のときは $\pi_0(X, x)$ は X の弧状連結成分のなす集合である ($I^0 = \text{pt}$, $\partial I^0 = \emptyset$ に注意).

$n \geq 1$ のとき, $\pi_n(X, x)$ には写像の定義域である I^n を「よこに並べてつなぎ合わせる」により積が入る (絵を描いて説明). $n \geq 2$ のとき, $\pi_n(X, x)$ はアーベル群であることが容易に分かる (絵を書いて説明). $n = 1$ のときはアーベル群とは限らない.

基点を保つ連続写像 $p: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ に対して, $p_*: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$ が $p_*([f]) = [p \circ f]$ により定義される.

ホモトピー長完全列に出てくる写像 $\partial: \pi_n(Y, y) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x)$ について説明しよう. $\pi_n(Y, y)$ の元は写像 $g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (Y, y)$ によって代表される. I^n の「一番上の面」 $I^{n-1} \times \{1\}$ 以外の面の和集合 $B = (I^{n-1} \times \{0\}) \cup (\partial I^{n-1} \times I)$ を考えよう. g は B 上で y に値をとる定値写像である. 同相写像 $I^n \cong B \times I$ であって, $B \subset I^n$ 上では, $B \times \{0\}$ への恒等写像になっているものが存在する. この同相写像により I^n を $B \times I$ と同一視しよう. $B \subset I^n$ 上での g のリフト f として x に値をとる定値写像を考え, CHP を適用すると, g のリフト写像 $\tilde{f}: I^n \rightarrow X$ であって, B 上では x に値をとる定値写像になっているものが存在する. ここで \tilde{f} を一番上の面 $I^{n-1} \times \{1\}$ に制限したものは (g のリフトであることから) F に値をとることが分かり, $\partial I^{n-1} \times \{1\} \subset B$ 上では x への定値写像である. このとき $\partial[g] = [\tilde{f}|_{I^{n-1} \times \{1\}}]$ と定義する.

長完全列は CHP を使って比較的容易に示せる. 詳細は [Hatcher, Theorem 4.41] を参照のこと.

本講義では fibration についてこれ以上あまり立ち入らないが, 演習問題を幾つか出しておく.

問 1.58. $p: E \rightarrow Y$ を fibration とする.

- (1) 連続な道で結ばれる任意の 2 点 $y_1, y_2 \in Y$ に対して, E_{y_1} と E_{y_2} はホモトピー同値であることを示せ. ただし $E_y = p^{-1}(y)$ は y でのファイバーを表す.

¹ただし, π_0 については群ではなく, 基点付き集合である. 基点付き集合への写像の核をその基点の逆像と定義することで, $\pi_1(Y, x) \rightarrow \pi_0(F, x) \rightarrow \pi_0(X, x) \rightarrow \pi_0(Y, y)$ の完全性が定義される.

²記号 $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x)$ は, 写像 $f: I^n \rightarrow X$ であって, $f(\partial I^n) \subset \{x\}$ なるものを意味する.

(2) 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ による引き戻し $f^*E = X \times_Y E \rightarrow X$ は fibration であることを示せ.

問 1.59. 位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$P_f = \{x \in X, p: [0, 1] \rightarrow Y \mid p \text{ は連続, } p(0) = f(x)\}$$

とおく. ただし道の空間にはコンパクト開位相を入れるものとする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ を次のように分解する.

$$X \xrightarrow{i} P_f \xrightarrow{\pi} Y$$

ここで $i(x) = (x, f(x))$ への定値写像, $\pi(x, p) = p(1)$ と定める. このとき i はホモトピー同値, π は fibration であることを示せ.

問 1.60. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$, $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ とおく. 写像 $f: E \rightarrow X$, $f(x, y) = x$ は fibration であることを示せ. (これはファイバー束ではない fibration の例である.)

1.10 主 G 束

G を位相群とする. つまり, 位相が与えられた群 G であって, 写像 $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy$, $G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$ が連続となるもの. 本講義では, G として $GL_n(\mathbb{C}), U(n)$ などの Lie 群を考えることが多い.

定義 1.61. 主 G 束 (principal G -bundle) とは, G を fiber とするファイバー束 $P \rightarrow X$ であって次を満たすもの.

1. P は G の右作用を持つ.

$$P \times G \rightarrow P, \quad (p, g) \mapsto p \cdot g$$

ただし右作用とは, $p \cdot 1_G = p$, $p \cdot (g_1 g_2) = (p \cdot g_1) \cdot g_2$ が成立すること.

2. $\forall x \in X, \exists U: x$ の開近傍, 局所自明化

$$\begin{array}{ccc} \exists \phi: P|_U & \xrightarrow{\cong} & U \times G \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

が存在して, $U \times G$ に右 G 作用を $(u, g) \cdot g' = (u, gg')$ と定めるとき, ϕ は G 同変である. つまり, $\phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot g$ が全ての $p \in P|_U, g \in G$ に対して成立する.

P への右 G 作用は自由であることに注意されたい. つまり, $p \cdot g = p$ ならば $g = 1_G$ である.

1.10.1 同伴ファイバー束

主 G 束からファイバー束を構成する方法を与える. G の連続な左作用 $G \times F \rightarrow F$ が与えられた位相空間 F を考える. $\pi: P \rightarrow X$ を主 G 束とする. このとき, F をファイバーとするファイバー束 (同伴ファイバー束) が

$$P \times_G F := P \times F / (p \cdot g, f) \sim (p, g \cdot f) \quad \forall g \in G$$

$$\pi: P \times_G F \rightarrow X, \quad \pi([p, f]) = \pi(p)$$

により定義される. 局所的に $P|_U \cong U \times G$ と自明化しておく, と

$$P|_U \times_G F \cong (U \times G) \times_G F \cong U \times F$$

となるからファイバー束の局所自明性が分かる. 2番目の同型は $[(u, g), f]$ を $(u, g \cdot f)$ に送るもの.

問 1.62. 同伴ファイバー束 $P \times_G F$ の変換関数は「 G に値をとる」ことを観察せよ.

1.10.2 ベクトル束と主 G 束

一般に, 主 G 束 $P \rightarrow X$ および群 G の線形表現 V が与えられると, (同伴ファイバー束と同様にして) 同伴ベクトル束 $P \times_G V \rightarrow X$ が定義される. G の V への作用が V の線形構造を保つので, $P \times_G V \rightarrow X$ はベクトル束になる.

ランク n の複素ベクトル束が主 $GL_n(\mathbb{C})$ 束と同値であることを観察しよう. $GL_n(\mathbb{C})$ は自然な表現 (ベクトル表現)

$$GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad (g, v) \mapsto gv$$

を持つことに注意する. これは $GL_n(\mathbb{C})$ の \mathbb{C}^n への左作用である.

まず, 主 $GL_n(\mathbb{C})$ 束 $P \rightarrow X$ が与えられると, 同伴ベクトル束 $E := P \times_{GL_n(\mathbb{C})} \mathbb{C}^n$ が定まる.

逆にランク n のベクトル束 $E \rightarrow X$ に対して例 1.34 で導入された枠束 (frame bundle)

$$\text{Fr}(E) = \bigsqcup_{x \in M} \{(v_1, \dots, v_n) \in E_x^n \mid (v_1, \dots, v_n) \text{ は } E_x \text{ の基底}\}$$

は主 $GL_n(\mathbb{C})$ 束の構造を持つ. 実際 $GL_n(\mathbb{C})$ の右作用が

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ & \ddots & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

により与えられる. ここで $(g_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C})$.

問 1.63. これが互いに逆の操作であることを確かめよ.

問 1.64. 上のように主 $GL_n(\mathbb{C})$ 束 $P \rightarrow X$ がベクトル束 $E \rightarrow X$ に対応するとき,

$$P \times_{GL_n(\mathbb{C})} \bigwedge^k \mathbb{C}^n \cong \bigwedge^k E$$

であることを確かめよ. ここで $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ は $GL_n(\mathbb{C})$ の表現とみている.

問 1.65. 定理 1.47 の証明と同様にして, 主 G 束に対するホモトピー性質を示せ. つまり, X をパラコンパクトハウスドルフ空間とし, $P \rightarrow X \times I$ を主 G 束とするとき, 主 G 束の同型 $\phi: P \cong \pi^*(P|_{X \times \{1\}})$ であって, $\phi|_{X \times \{1\}} = \text{id}$ となるものが存在する.

1.11 いくつかの演習問題

問 1.66. $\mathbb{C}P^n$ 上の tautological line bundle L について, 次の問いに答えよ.

1. $\mathbb{C}P^n$ を開集合 $U_i = \{[x_0, \dots, x_n] : x_i \neq 0\}$, $i = 0, \dots, n$ で覆う. U_i 上で L の局所自明化をとり, $U_{ij} = U_i \cap U_j$ 上での変換関数 g_{ij} を求めよ.
2. L は次の直線束 $p: E \rightarrow \mathbb{C}P^n$ と同型であることを証明せよ.

$$E = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}/\mathbb{C}^\times,$$

$$p: E \rightarrow \mathbb{C}P^n, \quad p([(x_0, \dots, x_n), v]) = [x_0, \dots, x_n]$$

ただし \mathbb{C}^\times は $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ に $\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n, v) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n, \lambda^{-1}v)$ で作用するものとする.

問 1.67. X をコンパクトハウスドルフ空間. $Y \subset X$ を閉集合とする. $E \rightarrow X$ を複素ベクトル束で, $E|_Y$ が自明束になるものとする.

- (1) Y の開近傍 U が存在して $E|_U$ は自明束であることを示せ. (ヒント: 連続な 1 の分割を使って枠を拡張する.)
- (2) X/Y を X の部分集合 Y を一点につぶして得られる位相空間とする. つまり, X の同値関係「 $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ または $(x_1 \in Y \text{ かつ } x_2 \in Y)$ 」による X の商位相空間とする. $\pi: X \rightarrow X/Y$ を自然な射影とする. このとき X/Y 上のベクトル束 F が存在して, $\pi^*F \cong E$ となることを示せ.

問 1.68. X をコンパクトハウスドルフ空間, $E \rightarrow X$ をベクトル束とする. $E \rightarrow X$ が自明なベクトル束であることと, X の錐 $C(X)$ 上のベクトル束 $F \rightarrow C(X)$ が存在して X 上のベクトル束として $F|_{X \times \{0\}} \cong E$ となることとは同値であることを示せ. ここで X の錐 (cone) とは $X \times [0, 1]$ において部分集合 $X \times \{1\}$ を一点につぶして得られる位相空間, すなわち, $X \times [0, 1]$ を同値関係

$$(x, t) \sim (y, s) \iff (x = y, s = t) \text{ または } s = t = 1$$

で割った商位相空間である.

問 1.69. X をコンパクトハウスドルフ空間, $E \rightarrow X$ を可縮な空間 F をファイバーとするファイバー束とする. このとき E は切断を持つことを示せ.

2 主 S^1 束の Euler 類

参考文献：[森田, 第 6 章], [Bott-Tu, §6, §11]

Euler 類は一般に向きづけられた実ベクトル束に対して定義されるが、本節では主 S^1 束（あるいは同じことであるが複素直線束）に対する Euler 類について以下の定義を紹介し、その関係を述べたい。

- 障害類 (obstruction class) としての定義
- Čech cohomology class としての定義
- 曲率による定義 (de Rham cohomology class)

2.1 単体複体

単体複体とは簡単に言えば「三角形分割された」空間である。例えば四面体の表面は S^2 と同相であり、 S^2 を三角形分割したものと思うことができる。

定義 2.1. V を集合とする。 $S \subset 2^V$ を V の有限部分集合の族とする。 V を頂点の集合、 S を単体の集合という。組 $K = (V, S)$ が次を満たすとき、 K を **(抽象) 単体複体** (abstract simplicial complex) という。

1. $v \in V$ ならば $\{v\} \in S$.
2. $\sigma \in S, \tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in S$.

n 単体の集合 $S_n \subset S$ を次で定義する

$$S_n := \{\sigma \in S \mid \#\sigma = n + 1\}$$

例 2.2. $V = \{1, 2, 3, 4\}, S = 2^V \setminus \{V\}$ は四面体の表面を与える抽象単体複体。

以下、単体複体 $K = (V, S)$ の頂点の集合 V には全順序を一つ入れ、固定することにする。この全順序は各単体の「向き」を定めるのに使う。 $\sigma \in S_n$ に対して σ の元をこの順序で並べて

$$\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}, \quad v_0 < v_1 < \dots < v_n$$

と書く。標準 n 単体 Δ_n を次で定める。

$$\Delta_n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0 (\forall i), t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1\}$$

$i = 0, \dots, n$ に対して face map ∂_i, ∂^i を次で定義する。

$$\begin{aligned} \partial_i: S_n &\rightarrow S_{n-1} \\ \sigma = \{v_0, \dots, v_n\} &\mapsto \{v_0, \dots, \check{v}_i, \dots, v_n\} \\ \partial^i: \Delta_{n-1} &\rightarrow \Delta_n \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) &\mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, \underset{i \text{ 番目}}{0}, t_i, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

抽象単体複体 $K = (V, S)$ の幾何学的実現 $|K|$ (geometric realization) とは、次で定義される位相空間である。

$$|K| := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times S_n) / \sim$$

ただし S_n には離散位相を入れており、 \sim は次で生成される同値関係：

$$(\partial^i u, \sigma) \sim (u, \partial_i \sigma) \quad u \in \Delta_{n-1}, \sigma \in S_n, 0 \leq i \leq n.$$

この同値関係は、 $\partial_i \sigma$ を σ の i 面だと思って、対応する単体を張り合わせるものである。

位相空間 X の単体分割とは、単体複体 K と同相写像 $\phi: |K| \cong X$ の組のことである。

$\sigma \in S$ に対して、 $|\sigma| \subset |K|$ を $\Delta_n \times \{\sigma\}$ の $|K|$ における像とする。これは Δ_n と同相。また $|K|$ の n 骨格 (n -skeleton) を

$$|K|^{(n)} = \bigcup_{\sigma \in S_0 \cup \dots \cup S_n} |\sigma|$$

と定義する。

2.2 単体複体の (コ) ホモロジー

$K = (V, S)$ を単体複体とする。 R を可換環とする。 K に付随してチェイン複体 (C_*, ∂) が定義される。

$$\begin{aligned} C_n &= C_n(K, R) := S_n \text{ を基底とする自由 } R \text{ 加群} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k a_i [\sigma_i] : a_i \in R, \sigma_i \in S_n \right\} \end{aligned}$$

微分 $\partial: C_n \rightarrow C_{n-1}$ は次で定義される R 線形写像である。

$$\partial[\sigma] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\partial_i \sigma]$$

問 2.3. n 単体 $|\sigma| \cong \Delta_n$ の向きを座標 (t_1, \dots, t_n) により定める (t_0 を落としていることに注意)。このとき、 $|\sigma|$ の境界 $\partial|\sigma|$ に誘導される向きと、上の公式は合致していることを確かめよ。

簡単な計算により $\partial \circ \partial = 0$ が言える (演習)。単体複体 K の n 次ホモロジーは次で定義される。

$$H_n(K, R) := H_n(C_*, \partial) = \frac{\text{Ker}(\partial: C_n \rightarrow C_{n-1})}{\text{Im}(\partial: C_{n+1} \rightarrow C_n)}$$

同様にコチェイン複体 (C^*, δ) が次のように定まる.

$$C^n = C^n(K, R) := \text{Hom}_R(C_n, R) \cong R^{S_n}$$

$$\delta: C^n \rightarrow C^{n+1} \text{ は } \partial \text{ の双対として定まる}$$

これを用いてコホモロジーが

$$H^n(K, R) := H^n(C^*, \delta) = \frac{\text{Ker}(\partial: C^n \rightarrow C^{n+1})}{\text{Im}(\delta: C^{n-1} \rightarrow C^n)}$$

と定まる. これらのホモロジー, コホモロジーは幾何学的実現 $|K|$ の位相不変量 ($|K|$ の特異 (コ) ホモロジーと同型) であることが知られている.

2.3 障害類としての Euler 類の定義

X を単体分割 $X \cong |K|$ の与えられた位相空間とする. $E \rightarrow X$ を主 S^1 束とする (以下の議論は, $E \rightarrow X$ が「向きづけられた」 S^1 束である場合も通用する). 各単体 $|\sigma|$ は可縮であるから, $|\sigma|$ 上で E は自明化される $E|_{|\sigma|} \cong |\sigma| \times S^1$ ことに注意しよう. [以下, 絵を描いて説明]

- 0 単体 v に対して $e_v \in E_v$ をとる³.
- 1 単体 $\tau = \{v_0, v_1\}$ に対して, $|\tau|$ 上の E の切断 $s_\tau: |\tau| \rightarrow E|_{|\tau|}$ であって, $s_\tau(v_0) = e_{v_0}$, $s_\tau(v_1) = e_{v_1}$ を満たすものが存在する (S^1 は弧状連結だから). これより 1-skeleton $X^{(1)}$ 上の E の切断 s が定まる.
- 各 2 単体 $|\sigma|$ 上に切断 s を伸ばすことは一般にはできない. 何故なら写像

$$S^1 \cong \partial|\sigma| \xrightarrow{s} E|_{\partial|\sigma|} \cong \partial|\sigma| \times S^1 \xrightarrow{\text{pr}_2} S^1$$

は非自明な写像度 $e(\sigma)$ を持つかもしれないから. ここで, $\partial|\sigma|$ には自然な向きが入っており, $E|_{\partial|\sigma|} \cong \partial|\sigma| \times S^1$ は $E|_{|\sigma|}$ の自明化から誘導されるものである. この写像度を $e(\sigma) = e_s(\sigma) \in \mathbb{Z}$ とおく.

主張 2.4. $e: S_2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $\sigma \mapsto e(\sigma)$ はコサイクル, つまり, $\delta e = 0$ を満たす.

Proof. 3 単体 ρ に対して $e(\partial\rho) = 0$ を示せばよい. $|\rho|$ 上での自明化 $E|_{|\rho|} \cong |\rho| \times S^1$ をとる. ρ の頂点を $0, 1, 2, 3$ と名づける. 記号 $[i, j]$ で頂点 i と j を結ぶ辺を表すことにする. 各辺 $[i, j]$ 上の切断は連続関数 $f_{ij}: [i, j] \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $s(t) = (t, e^{\sqrt{-1}f_{ij}(t)})$ の形に書ける.

$$\theta_{i,j} := f_{ij}(j) - f_{ij}(i)$$

を辺 $[i, j]$ に沿った位相の増分とする. 2 単体 $\{i, j, k\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$ に対して

$$e(\{i, j, k\}) = \frac{1}{2\pi}(\theta_{i,j} + \theta_{j,k} + \theta_{k,i})$$

³ここでは V の元 v を 0 単体 $\{v\}$ と同一視しており, 0 単体は $|K|$ の 1 点と同一視している

このとき

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(\partial\rho) &= \sum_{i=0}^3 (-1)^i \mathbf{e}(0, \dots, \check{i}, \dots, 3) \\
&= \mathbf{e}(1, 2, 3) - \mathbf{e}(0, 2, 3) + \mathbf{e}(0, 1, 3) - \mathbf{e}(0, 1, 2) \\
&= \frac{1}{2\pi} (\theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31} - (\theta_{02} + \theta_{23} + \theta_{30}) + (\theta_{01} + \theta_{13} + \theta_{30}) - (\theta_{01} + \theta_{12} + \theta_{20})) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が簡単にわかる.

(別証) ρ の 1 skeleton $|\rho|^{(1)}$ 上での切断 $s: |\rho|^{(1)} \rightarrow S^1$ は $|\rho|^{(1)}$ をすこし膨らませた $\partial|\rho| \setminus (4 \text{ discs})$ 上の切断 s に拡張する. このとき, $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ において,

$$s_*((\partial|\rho| \setminus (4 \text{ discs})) \text{ の境界}) = 0$$

である. 「 $(\partial|\rho| \setminus (4 \text{ discs}))$ の境界」の向きを考察すると ($\partial|\rho|$ の i 面の向きは 2 単体 $\{0, \dots, \check{i}, \dots, 3\}$ の向きの $(-1)^i$ 倍であることから), これは

$$\sum_{i=0}^3 (-1)^i \mathbf{e}(0, \dots, \check{i}, \dots, 3) = \mathbf{e}(\partial\rho)$$

に等しい. □

2025.5.20 ここまで

主張 2.5. \mathbf{e} のコホモロジー類は $X^{(1)} = |K|^{(1)}$ 上の切断 s の取り方によらない.

Proof. s_1, s_2 を $X^{(1)}$ 上の二つの切断とする. $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{s_i}$ とおく. \mathbf{e}_i は s_i のホモトピー類にのみ依存することに注意しよう. 必要なら s_2 をホモトピックに動かして, s_1, s_2 は 0-skeleton の上で一致すると仮定してよい.

$$s_1|_{X^{(0)}} = s_2|_{X^{(0)}}$$

2 単体 $[i, j]$ 上では自明化 $E|_{[i, j]} \cong [i, j] \times S^1$ の下で, ある連続関数 $f_1, f_2: [i, j] \rightarrow \mathbb{R}$ および $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= (t, e^{\sqrt{-1}f_1(t)}) & f_1(i) &= f_2(i) \\
s_2(t) &= (t, e^{\sqrt{-1}f_2(t)}) & f_1(j) &= f_2(j) + 2\pi n_{ij}
\end{aligned}$$

と書くことができる. ここで n_{ij} は位相の増分の差であり, 自明化の取り方に依らない. このとき 2 単体 $\{i, j, k\}$ に対して

$$\mathbf{e}_1(i, j, k) = \mathbf{e}_2(i, j, k) + n_{ij} + n_{jk} + n_{ki}$$

である. $n_{ki} = -n_{ik}$ に注意すると, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 + \delta\{n_{ij}\}$ が従う. ここで $\{n_{ij}\}$ は ($i < j$ なる添え字に制限して) $C^1(K, \mathbb{Z})$ の元と見ている. □

定義 2.6. $e(E) = [e] \in H^2(X, \mathbb{Z})$ を E のオイラー類という.

注 2.7. 上の証明を逆にたどると, $C^1(K, \mathbb{Z})$ の元 $\{n_{ij}\}$ が与えられるとき, $X^{(1)}$ 上の切断 s を各辺 $[i, j]$ 上で n_{ij} 回余分に回転させる切断 s' に取り換えることで,

$$e_{s'} = e_s + \delta\{n_{ij}\}$$

という関係が成り立つことが分かる. 従って

$$\begin{aligned} e(E) = 0 &\iff X^{(1)} \text{ 上の切断 } s \text{ で } e_s(\sigma) = 0, \forall \sigma \in S_2 \text{ なるものが存在する.} \\ &\iff E \text{ は } X^{(2)} \text{ 上の切断を持つ} \end{aligned}$$

注 2.8. $\pi_k(S^1) = 0, k \geq 2$ であることを用いると, もし $E|_{X^{(2)}}$ が切断を持てば, それは $X^{(3)}, X^{(4)}, \dots$ に順次拡張できることが分かる. 従って $e(E) = 0$ ならば $E \rightarrow X$ は切断を持ち, $E \rightarrow X$ は主 S^1 束として自明である.

問 2.9. この節の Euler 類の構成は特異コホモロジーに一般化できることを観察しよう. 以下の定義は, **一般の位相空間** X 上の主 S^1 束 $E \rightarrow X$ (あるいは向きづけられた S^1 束) に対して適用される. 特異 q 単体とは連続写像 $\Delta_q \rightarrow X$ のことであったことを思い出しておく. 特異 2-cochain e を次のように構成する.

1. 各特異 0 単体 v (つまり, X の点) に対して, E_v の元 e_v を選んでおく.
2. 各特異 1 単体 $\tau: [0, 1] \rightarrow X$ に対して, τ^*E の切断 s_τ であって, $s_\tau(0) = e_{\tau(0)}, s_\tau(1) = e_{\tau(1)}$ となるものをとる. ただし, τ の向きを逆にした単体 $\tau'(t) = \tau(1-t)$ に対しては, s_τ の向きを逆にした切断 $s_{\tau'}(t) = s_\tau(1-t)$ を対応させるものと仮定しておく.
3. 各特異 2 単体 $\sigma: \Delta_2 \rightarrow X$ に対して, σ^*E は自明化 $\phi: \sigma^*E \cong \Delta_2 \times S^1$ を持つ. 境界に制限すると $\sigma^*E|_{\partial\Delta_2}$ は 2 で構成された切断 s を持つ. このとき, $e(\sigma)$ が写像

$$S^1 \cong \partial\Delta_2 \xrightarrow{s} \sigma^*E|_{\partial\Delta_2} \xrightarrow{\phi} \partial\Delta_2 \times S^1 \xrightarrow{\text{第2射影}} S^1$$

の写像度として定まる.

本文と同様にして, e は特異コサイクル ($\delta e = 0$) であることを示せ. またコホモロジー類 $[e]$ は e_v や s_τ の取り方に依らないことを示せ.

2.4 Čech コホモロジー

記号 2.10. 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとき, それらの交わりを

$$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta, \quad U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \quad U_{\alpha\beta\gamma\delta} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \cap U_\delta, \dots$$

等と書くことにする.

定義 2.11. 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を固定し, G をアーベル群とする. G に値をとる Čech p -cochain (p 次の Čech cochain) とは, $U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p} \neq \emptyset$ となる $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in A^{p+1}$ に対して G の元 $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \in G$ が定まったもので, 次を満たすもの.

1. $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ は $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ の入れ替えについて反対称.
2. $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ に重複があるとき $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = 0$.

\mathcal{U} に関する G に値をとる p -cochain 全体のなす集合を $\check{C}^p(\mathcal{U}, G)$ と表す.

注 2.12. G に位数 2 の元がなければ, 条件 2 は条件 1 から従う.

注 2.13. Čech cochain はもっと一般に X 上のアーベル群の前層 (presheaf) \mathcal{G} に対して定義される. そのときは $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \in \mathcal{G}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ を要求する. 上の定義は \mathcal{G} が定数前層である特別の場合.

例 2.14. 0 次の Čech cochain は各 $\alpha \in A$ に対して $\omega_\alpha \in G$ が定まったもの.

例 2.15. ベクトル束の変換関数 $g_{\alpha\beta}$ は $GL_n(\mathbb{C})$ 値関数の層に値をとる Čech 1-cochain と思える. ただし, $n \geq 2$ のときは非アーベル群の層に値をとる.

Čech cochain 複体の微分

$$\delta: \check{C}^p(\mathcal{U}, G) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, G)$$

を次で定める.

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} := \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \check{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}}$$

この定義は反対称性を保っており, $\delta^2 = 0$ であることも簡単に分かる (演習). そこで p 次の Čech コホモロジーを

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, G) = \frac{\text{Ker}(\delta: \check{C}^p(\mathcal{U}, G) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, G))}{\text{Im}(\delta: \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}, G) \rightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, G))}$$

と定義する.

例 2.16. Čech cocycle とは $\delta\omega = 0$ を満たす Čech cochain である. Čech 1-cocycle $\omega \in \check{C}^1(\mathcal{U}, G)$ は次の式を満たす.

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta\omega)_{\alpha\beta\gamma} = \omega_{\beta\gamma} - \omega_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\beta} \\ &= \omega_{\beta\gamma} + \omega_{\gamma\alpha} + \omega_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

これは変換関数の満たすコサイクル条件 $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = \text{id}$ と似ている.

定義 2.17. \mathcal{U} が good cover であるとは, 任意の $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in A$, $p \geq 0$ について, $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \neq \emptyset$ ならば $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ は可縮となること.

\mathcal{U} が good cover であるとき, Čech コホモロジー $\check{H}^p(\mathcal{U}, G)$ は G 係数の特異コホモロジー $H^p(X, G)$ と同型であることが知られている.

2.5 Čech コホモロジーによる Euler 類の定義

本節では X をパラコンパクトハウスドルフ空間で good open cover $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を持つものとする. $E \rightarrow X$ を主 S^1 束とする.

まず U_α は可縮なので, $E|_{U_\alpha}$ は自明である⁴. $\phi_\alpha: E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times S^1$ を自明化とする. 変換関数 $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow S^1$ を次で定める.

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta} \times S^1 &\xrightarrow{\phi_\beta^{-1}} E|_{U_{\alpha\beta}} \xrightarrow{\phi_\alpha} U_{\alpha\beta} \times S^1 \\ (x, z) &\longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)z) \end{aligned}$$

$U_{\alpha\beta}$ は可縮なので, $g_{\alpha\beta}$ は S^1 の universal cover \mathbb{R} に持ち上がる. つまり, 連続関数 $\exists \varphi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{R}$, s.t. $g_{\alpha\beta}(x) = e^{\sqrt{-1}\varphi_{\alpha\beta}(x)}$ と書ける.

問 2.18. 関数 $\varphi_{\alpha\beta}$ の存在を universal cover $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{\sqrt{-1}x}$ に対する CHP から導け.

また $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ より, $\varphi_{\alpha\beta} = -\varphi_{\beta\alpha}$ となるようにとることができる. \mathbb{Z} に値をとる Čech 2-cochain ϵ を $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$ のとき,

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi}(\varphi_{\alpha\beta}(x) + \varphi_{\beta\gamma}(x) + \varphi_{\gamma\alpha}(x)), \quad x \in U_{\alpha\beta\gamma}$$

と定める. ここで $g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x) = 1$ より, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{Z}$ である. また連続関数なので $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ は $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ の取り方によらない. $\varphi_{\alpha\beta}$ を実数値関数に値をとる cochain とみなして, $\epsilon = \frac{1}{2\pi}\delta\varphi$ ゆえ, $\delta\epsilon = 0$ である. つまり ϵ は cocycle. (ただし, \mathbb{Z} に値をとる Čech 複体の元として ϵ は exact とは限らないことに注意.) 以上により 2 次の Čech コホモロジーの元

$$[\epsilon] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

が定まった.

主張 2.19. $[\epsilon] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ は $E|_{U_\alpha}$ の自明化や, $\varphi_{\alpha\beta}$ の取り方によらない.

Proof. $E|_{U_\alpha}$ の別の自明化をとる. 対応する変換関数はある $\lambda_\alpha: U_\alpha \rightarrow S^1$ を用いて,

$$g'_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha g_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}$$

と書ける. このとき $\exists \xi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ により $\lambda_\alpha(x) = e^{\sqrt{-1}\xi_\alpha(x)}$ と書ける. $g_{\alpha\beta} = e^{\sqrt{-1}\varphi_{\alpha\beta}}$, $g'_{\alpha\beta} = e^{\sqrt{-1}\varphi'_{\alpha\beta}}$ とおくと, ある $n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\varphi'_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta} + \xi_\alpha - \xi_\beta + 2\pi n_{\alpha\beta}$$

⁴パラコンパクト空間の開集合 U_α がパラコンパクトかどうかは分からないが, $E|_{U_\alpha}$ は (numerable bundle の引き戻しであるから) numerable bundle であることは分かる. 主 G 束のホモトピー性質が numerable bundle に対して成り立つ (注 1.55 を参照) ため, $E|_{U_\alpha}$ は自明である.

が成立する. ここで $\varphi_{\alpha\beta}, \varphi'_{\alpha\beta}$ は α, β について反対称と仮定しておく, $n_{\alpha\beta}$ もそうであり Čech 1-cochain を定める. このとき

$$\begin{aligned}\epsilon'_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2\pi}(\varphi'_{\alpha\beta} + \varphi'_{\beta\gamma} + \varphi'_{\gamma\alpha}) \\ &= \frac{1}{2\pi}(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\alpha}) + n_{\alpha\beta} + n_{\beta\gamma} + n_{\gamma\alpha} \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} + (\delta n)_{\alpha\beta\gamma}.\end{aligned}$$

従って $[\epsilon'] = [\epsilon]$. □

定義 2.20. 上で定めた Čech コホモロジー類 $[\epsilon]$ を主 S^1 束 $E \rightarrow X$ の Euler 類という.

2.6 二つの定義の比較

節 2.3 では障害類として Euler 類を定義し, 節 2.5 では Čech コホモロジー類として Euler 類を定めた. その二つの定義を比較したい. そのため $X \cong |K|$ を単体分割の与えられた位相空間とする. K の頂点 v に対して, v の open star を次で定める.

$$U_v := \bigcup_{\substack{v \in \sigma \\ \sigma \text{ は } K \text{ の単体}}} \text{Int}(|\sigma|)$$

ここで $\text{Int}(|\sigma|)$ は相対的内部 (relative interior), つまり p 単体 σ は標準単体 Δ_p の像であったが, その中で

$$\Delta_p^\circ = \{(t_0, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} : t_0 + \dots + t_p = 1, t_i > 0 (\forall i)\} \subset \Delta_p$$

の像になっている部分である. [open star の絵を描く]

問 2.21. U_v は open であることを確認せよ. また, U_v たちが X の good open cover になることを示せ.

上の問題から次が言える.

命題 2.22. 単体分割を持つ空間は good open cover を持つ.

命題 2.23. 単体複体 K の open star のなす good open cover \mathcal{U} について, コチェイン複体の同型

$$(\check{C}^*(\mathcal{U}, \mathbb{Z}), \delta) \cong (C^*(K, \mathbb{Z}), \delta)$$

がある. 特に, $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \cong H^p(K, \mathbb{Z})$.

Proof. 次のことに注意すれば定義からほぼ直ちに従う.

$$U_{v_0} \cap U_{v_1} \cap \dots \cap U_{v_p} \neq \emptyset \iff \{v_0, v_1, \dots, v_p\} \text{ は } K \text{ の } p \text{ 単体をなす}$$

□

障害類を代表するコサイクル e_s は 1-skeleton $X^{(1)}$ 上での切断 $s: X^{(1)} \rightarrow E|_{X^{(1)}}$ を選ぶことにより得られた. 一方で s から u に関する Čech コサイクル ϵ を次のように定めることができる.

1. 各頂点 v に対して $X_v^{(1)} \subset X^{(1)}$ を v を含む 1 単体の和とする. 切断 $s|_{X_v^{(1)}}$ は v の closed star $\bar{U}_v = \bigcup_{\sigma \in \sigma} |\sigma|$ 上に拡張できる. ($X_v^{(1)}$ は \bar{U}_v の変形レトラクトであることを使う.)
2. s_v は自明化 $h_v: E|_{\bar{U}_v} \cong \bar{U}_v \times S^1$, $s_v(x)z \mapsto (x, z)$ を誘導する.
3. 上の局所自明化は変換関数 $g_{uv}: U_{uv} \rightarrow S^1$ を $h_u \circ h_v^{-1}(x, z) = (x, g_{uv}(x)z)$ により定める. $g_{uv} = e^{\sqrt{-1}\varphi_{uv}}$, $\varphi_{uv} = -\varphi_{vu}$ なる $\varphi_{uv}: U_{uv} \rightarrow \mathbb{R}$ を選び, $\epsilon_{uvw} = \frac{1}{2\pi}(\varphi_{uv} + \varphi_{vw} + \varphi_{wu})$ によりコサイクル ϵ が定まる.

定理 2.24. 上の構成で φ_{uv} を上手く選べば, ϵ_{uvw} は障害コサイクル $e_s(\{u, v, w\})$ と一致する (ただし $u < v < w$ で $\{u, v, w\}$ は K の 2 単体). つまり, $[\epsilon] = [e_s]$.

Proof. 切断 s_v は closed star \bar{U}_v 上で定義されているので, 自明化 h_v は \bar{U}_v 上に拡張し, また変換関数 g_{uv} も $\bar{U}_u \cap \bar{U}_v$ 上に拡張されることに注意する. K の 1 単体 $\{u, v\}$ に対して $[u, v] := |\{u, v\}|$ をその幾何学的実現とする. $[u, v]$ 上では自明化 h_u, h_v のどちらによっても切断 s は 1 で表示されるので, $g_{uv}|_{[u, v]} = 1$ である. 従って $\varphi_{uv} = \log g_{uv}/\sqrt{-1}$ を φ_{uv} が $[u, v]$ 上で 0 になるように定めることができる. K の 2 単体 $\{u, v, w\}$, $u < v < w$ をとり, その幾何学的実現を $[u, v, w] = |\{u, v, w\}|$ とおく. $[u, v, w]$ は \bar{U}_u に含まれることに注意しておく. $\partial[u, v, w] = [u, v] \cup [v, w] \cup [u, w]$ 上での切断 s を \bar{U}_u 上での自明化 $h_u: E|_{\bar{U}_u} \cong \bar{U}_u \times S^1$ を用いて S^1 値関数として表示すると,

$$s(x) = \begin{cases} 1 & x \in [u, v] \text{ のとき} \\ 1 & x \in [u, w] \text{ のとき} \\ g_{uv} = g_{uw} & x \in [v, w] \text{ のとき} \end{cases}$$

ここで $[v, w]$ は \bar{U}_v (あるいは \bar{U}_w) に含まれておりその上の自明化 h_v (あるいは h_w) に関して切断 s が 1 で与えられることを使った. ($g_{uv} = g_{uw}g_{vw}$ であり, $g_{vw}|_{[v, w]} = 1$ であることに注意されたい.) したがって $\partial[u, v, w]$ に沿った s の写像度は

$$e_s(\{u, v, w\}) = \frac{1}{2\pi}(\varphi_{uv}(w) - \varphi_{uv}(v)) = \frac{1}{2\pi}\varphi_{uv}(w).$$

ここで $\varphi_{uv}|_{[u, v]} = 0$ より $\varphi_{uv}(v) = 0$ を使った. 一方 Čech cocyle ϵ_{uvw} は定義より,

$$\begin{aligned} \epsilon_{uvw} &= \frac{1}{2\pi}(\varphi_{uv} + \varphi_{vw} + \varphi_{wu}) \\ &= \frac{1}{2\pi}(\varphi_{uv}(w) + \varphi_{vw}(w) + \varphi_{wu}(w)) \quad (\text{点 } w \text{ で評価した}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\varphi_{uv}(w). \end{aligned}$$

以上より $e_s(\{u, v, w\}) = \epsilon_{uvw}$ が示された. □

2.7 接続1形式

de Rham 理論での Euler 類を定義するために、主 S^1 束の接続の概念を導入する。本節では底空間 M は C^∞ 級多様体とし、 $E \rightarrow M$ を C^∞ 級主 S^1 束とする。

本節では虚数単位の記号として $i = \sqrt{-1}$ を用いることにする。 S^1 の座標 $\theta \mapsto e^{i\theta}$ をとり、 S^1 上の 1-form (Maurer-Cartan 1-form)

$$i d\theta = e^{-i\theta} d(e^{i\theta})$$

を考える。これは S^1 の Lie 環 $i\mathbb{R}$ に値をとる微分形式である。以下では i 倍は省略した $d\theta$ (角度形式) を考える。

注 2.25. 一般に、Lie 群 G に対して、表式 $g^{-1}dg$ は G の Lie 環に値をとる左不変な 1-form (Maurer-Cartan form) を与える⁵。

定義 2.26. E 上の S^1 不変な 1-form ψ であって、各 fiber $E_x \cong S^1$ に制限すると $d\theta$ に等しいものを E の接続 1 形式 (connection 1-form) という。

注 2.27. E 上の微分形式 ψ が S^1 不変であるとは、 $z \in S^1$ の作用の与える写像 $R_z: E \rightarrow E$, $e \mapsto e \cdot z$ に対して、 $R_z^*\psi = \psi$ が成り立つことである。ファイバー $E_x \cong S^1$ 上の 1-form $d\theta$ は自明化の取り方によらず定まることに注意したい。

例 2.28. $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 上の tautological line bundle

$$L = \{(\ell, v) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 : v \in \ell\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$$

を思い出そう。これに付随する S^1 束

$$S(L) = \{(\ell, v) \in L : \|v\| = 1\} \cong \{v \in \mathbb{C}^2 : \|v\| = 1\} = S^3$$

は S^1 作用 $v \mapsto ve^{i\theta}$ により主 S^1 束である。主 S^1 束 $S(L) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ を Hopf fibration という。この上の接続 1 形式 ψ を次のように定める。各点 $e \in S^3$ で

$$\psi_e: T_e S^3 = T_e(e \cdot S^1) \oplus (T_e(e \cdot S^1))^\perp \xrightarrow{\text{直交射影}} T_e(e \cdot S^1) \xrightarrow{d\theta} \mathbb{R}$$

により余接ベクトル ψ_e を定める。ここでは \mathbb{C}^2 の標準計量が $T_e S^3$ に誘導する計量に関する直交補空間 $(T_e(e \cdot S^1))^\perp$ を考えており、 $e \cdot S^1$ は e の S^1 軌道、つまり、主 S^1 束のファイバーである。次に注意しよう。

- 計量が S^1 不変であることから、 ψ は S^1 不変である。

⁵ここで、 g は G の点を動く変数を表しており、 dg は G 値関数 (恒等写像) $g: G \rightarrow G$ の微分、つまり $\text{id}: T_g G \rightarrow T_g G$ であり、 g^{-1} は逆元をとる写像 $G \rightarrow G$ を表している。言い換えると、 dg は G 上の TG に値をとる 1-form ($TG \otimes T^*G$ の切断) であり、 g^{-1} は G に値をとる関数である。

一方で掛け算写像 $G \times G \rightarrow G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ の第 2 変数 g_2 に関する微分として、 G の TG への作用 $G \times TG \rightarrow TG$ が定まる (さらにこの作用は TG の群構造 $TG \times TG \rightarrow TG$ に拡張されるがここでは使わない)。この作用の下で $\{g^{-1}\} \times T_g G$ は $T_e G$ に写ることに注意すれば、 $g^{-1} \cdot dg$ は $T_e G$ に値をとる 1-form ($T^*G \otimes T_e G$ の切断) と解釈できる。 G が行列群であるときは、 $g^{-1}dg$ を行列値微分形式として解釈することもできる。

- ψ をファイバー $S^1 \cdot e$ に制限すると $d\theta$ である.

問 2.29. \mathbb{C}^2 の座標を $(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)$ と書くとき, 上の接続形式 ψ は

$$\psi = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 - y_2 dy_1 + y_1 dy_2 \Big|_{S^3}$$

で与えられることを示せ.

自明束 $M \times S^1$ の接続 ψ について考えよう. M の局所座標を x_1, \dots, x_m とし,

$$\psi = f(x, \theta) d\theta + \sum_{i=1}^m g_i(x, \theta) dx_i$$

とおく. 各ファイバーに制限すると $d\theta$ に等しいことから, $f(x, \theta) = 1$ が分かる. さらに S^1 不変であることから, $g_i(x, \theta)$ は θ によらない. つまり, 接続1形式は

$$\psi = d\theta + \sum_{i=1}^m g_i(x) dx_i$$

の形をしていることが分かる.

命題 2.30. 任意の C^∞ 級主 S^1 束 $p: E \rightarrow M$ は接続1形式を持つ.

Proof. 開被覆 $\{U_\alpha\}$ であって, 各 U_α 上で $E|_{U_\alpha}$ が自明になるものをとる. 自明束 $E|_{U_\alpha}$ には接続1-form ψ_α が存在する. $\{U_\alpha\}$ に付随する滑らかな1の分割 ρ_α をとり,

$$\psi = \sum_{\alpha} (p^* \rho_\alpha) \psi_\alpha$$

とおくと, ψ は接続1形式を定める. 実際, 各ファイバー上で

$$\psi|_{E_x} = \sum_{\alpha} \rho_\alpha(x) \psi_\alpha|_{E_x} = \left(\sum_{\alpha} \rho_\alpha(x) \right) d\theta = d\theta$$

であり, $p^* \rho_\alpha$ と ψ_α はどちらも S^1 不変なので ψ も S^1 不変である. □

2.8 曲率としての Euler 類の定義

命題 2.31. ψ を主 S^1 束 $p: E \rightarrow M$ の接続とする. このとき, ただ一つの *closed 2-form* $e \in \Omega^2(M)$ が存在して, $d\psi = -2\pi p^* e$ が成り立つ. e の *de Rham* コホモロジー類 $[e] \in H_{\text{dR}}^2(M)$ は接続 ψ の取り方に依らない.

Proof. 座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_n)$ 上での局所自明化 $E|_U \cong U \times S^1$ の下で, 接続 ψ は

$$\psi|_U = d\theta + \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$$

の形に表示されるのだった。このとき,

$$d\psi|_U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_i$$

は U 上の 2-form の p による引き戻しである。 p^* は明らかに単射であるから、これらの座標近傍上の 2-form は張り合っ M 上の 2-form を定める。従って $d\psi = -2\pi p^*(e)$ を満たす 2-form $e \in \Omega^2(M)$ がただ一つあることが分かる。

$$0 = d(d\psi) = -2\pi p^*(de)$$

より $de = 0$ である。

ψ_1, ψ_2 を $E \rightarrow M$ の二つの接続形式とする。上と同様に局所的に考えることにより,

$$\psi_1 - \psi_2 = p^*\xi$$

を満たす 1-form $\xi \in \Omega^1(M)$ が存在することが言える。従って $d\psi_j = -2\pi p^*(e_j)$ とおくと、

$$e_1 - e_2 = -\frac{1}{2\pi} d\xi$$

であり、 e_1 と e_2 の定める de Rham コホモロジー類は等しい。 \square

定義 2.32. 上の命題で定まる $e \in \Omega^2(M)$ を Euler form と呼び、 $[e] \in H_{\text{dR}}^2(M)$ を (de Rham 理論で定義される) Euler 類という。

また、 $\text{id}\psi = p^*\omega$ を満たす ω を曲率形式という。これは Euler form と

$$e = \frac{i}{2\pi} \omega \quad \text{あるいは} \quad \omega = -2\pi i e$$

の関係にある。後で見るように、 2π の因子は $[e]$ が整コホモロジー類 (から来る de Rham コホモロジー類) となるようにつけている。

例 2.33. 例 2.28 の Hopf fibration の Euler form を求めよう。問 2.29 より,

$$-2\pi p^*(e) = d\psi = 2(dx_1 \wedge dx_2 + dy_1 \wedge dy_2) \Big|_{S^3}$$

$\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ の chart $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, $z \mapsto [1, z]$ を考えよう。Hopf fibration の $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 上での切断を $s(z) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}(1, z)$ で与える。 $p \circ s = \text{id}_{\mathbb{C}}$ より、 $s^* \circ p^* = \text{id}$ であるから、上を s で引き戻すことにより,

$$\begin{aligned} e \Big|_{\mathbb{C}} &= s^* p^*(e) = -\frac{1}{\pi} s^*(dx_1 \wedge dx_2 + dy_1 \wedge dy_2) \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{ds \wedge dt}{(1+s^2+t^2)^2} \end{aligned}$$

を得る。ここで \mathbb{C} の座標を $z = s + it$ とした。これは $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ の標準的な向きについて

$$\int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} e = -1$$

を満たし、整コホモロジー類 $[e] \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$ を定めることが分かる。

問 2.34. 上の計算を確かめよ。

2.9 接続の幾何学的意味：平行移動とホロノミー

主 S^1 束 $E \rightarrow M$ を考える. $e \in E$ に対して $x = p(e) \in M$ とおく. 接続 ψ は点 $e \in E$ において

$$\psi_e: T_e E \rightarrow \mathbb{R}$$

であって $T_e p^{-1}(x)$ 上では同型になるものを与えている. これは直和分解

$$T_e E = T_e p^{-1}(x) \oplus \text{Ker } \psi_e$$

を定める. $H_e := \text{Ker } \psi_e$ を**水平部分空間** (horizontal subspace) という [絵を描く]. ψ は S^1 作用で不変であることから, H_e も S^1 作用で不変, つまり, $\forall z \in S^1$ に対して $H_{e \cdot z} = (R_z)_* H_e$ が成り立つ.

逆に各点 $e \in E$ での分解

$$T_e E = T_e p^{-1}(x) \oplus H_e$$

で S^1 不変なものが与えられると, 接続形式 ψ が

$$T_e E \xrightarrow{H_e \text{ に沿った射影}} T_e p^{-1}(x) \xrightarrow{d\theta} \mathbb{R}$$

により与えられる.

水平部分空間は異なる fiber の無限小の「つながり方」(つまり「接続」)を与えているものと解釈できる (次の問を参照のこと).

問 2.35. $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ を滑らかな道とする. 任意の $e \in p^{-1}(\gamma(0))$ に対してただ一つの道 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow E$ が存在して

$$p \circ \tilde{\gamma} = \gamma, \quad \tilde{\gamma}(0) = e, \quad \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \in H_{\tilde{\gamma}(t)}$$

を満たすことを示せ. $\tilde{\gamma}$ を γ の**水平リフト**といい, 写像 $P_\gamma: E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)}$, $e \mapsto \tilde{\gamma}(1)$ を γ に沿った**平行移動**という. さらに, 平行移動 P_γ は S^1 同変であることを示せ.

問 2.36. closed path (loop) に沿った平行移動をホロノミー (holonomy) という. $g: D^2 \rightarrow M$ を滑らかな写像, $\gamma := g|_{\partial D^2}$ とする. $z_0 \in \partial D^2$ を基点とする. γ の水平リフトは平行移動 $E_{\gamma(z_0)} \rightarrow E_{\gamma(z_0)}$ を定める [絵を描く]. この写像は

$$e^{2\pi i \int_{D^2} g^* \omega} = e^{-\int_{D^2} g^* \omega}$$

の作用に等しいことを示せ. すなわち, 曲率の積分によりホロノミーが分かる.

(略解) 自明化 $g^* E \cong D^2 \times S^1$ をとる. この自明化の下で $g^* \psi = d\theta + p^* \xi$ の形に表示できる. ただし, ξ は D^2 上の 1-form. $\tilde{\gamma}$ を $\tilde{\gamma}(e^{is}) = (e^{is}, e^{i\theta(s)})$ と書く (ただし $e^{is} \in \partial D^2$. $\tilde{\gamma}$ は水平リフトなので,

$$\theta'(s) = -\xi(\partial/\partial s)$$

が成り立つ. ここで $\partial/\partial s$ は ∂D^2 上のベクトル場とみなしている. 従って

$$\begin{aligned} \theta(2\pi + s_0) - \theta(s_0) &= \int_{s_0}^{s_0+2\pi} \theta'(s) ds \\ &= - \int_{\partial D^2} \xi = - \int_{D^2} d\xi = 2\pi \int_{D^2} e. \end{aligned}$$

2.10 Čech–de-Rham 複体と Euler 類の比較

参考文献: [Bott-Tu, §8].

本節では good open cover $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を持つ多様体 M に対して,

$$H_{\text{dR}}^*(M) \cong \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$$

が成り立ち, 各々の理論で定義される Euler 類が対応することを示す.

定義 2.37. Ω^q に値をとる p 次の Čech cochain とは $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \neq \emptyset$ なる $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in A^{p+1}$ に対して $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \in \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ が定まり, $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ は $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ の入れ替えに関して反対称性を満たすもの.

$$K^{p,q} := \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = \{\Omega^q \text{ に値をとる Čech } p\text{-cochain}\}$$

とおく. これは次の二つの微分を持つ 2 重複体である.

$$\begin{aligned} d: K^{p,q} &\rightarrow K^{p,q+1} && \text{de Rham の微分 (外微分)} \\ \delta: K^{p,q} &\rightarrow K^{p+1,q} && \check{\text{Cech の微分}} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} (d\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} &= d\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \\ (\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \check{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}} \Big|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}}} \end{aligned}$$

これらの微分は $d^2 = \delta^2 = 0$, $d\delta = \delta d$ を満たす (容易). ここで total complex (K^*, D) を

$$\begin{aligned} K^n &:= \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}, && D: K^n \rightarrow K^{n+1}, \quad D = D' + D'' \\ &&& D' = \delta, \quad D''|_{K^{p,q}} = (-1)^p d \end{aligned}$$

により定める. このとき $(D')^2 = (D'')^2 = 0$, $D'D'' + D''D' = 0$ が成り立つので, $D^2 = (D' + D'')^2 = 0$ となる.

2 重複体の一般論を少し展開する. 以下では $K^{p,q}$ は $p < 0$ または $q < 0$ の時に 0 となる 2 重複体で, $D': K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$, $D'': K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$ が与えられ, $(D')^2 = (D'')^2 = 0$, $D'D'' + D''D' = 0$ を満たすものとする.

命題 2.38. 横方向の高次コホモロジーが消える, つまり, $H^p(K^{*,q}, D') = 0$ が $p > 0$, $q \geq 0$ に対して成り立つとする. このとき包含写像

$$H^0(K^{*,q}, D') \hookrightarrow K^{0,q} \hookrightarrow K^q$$

はコホモロジーの同型

$$H^q(H^0(K^{*,*}, D'), D'') \cong H^q(K^*, D)$$

を誘導する. (左辺は D' コホモロジーを取ってから D'' コホモロジーを取ったもの. 右辺は total complex の D コホモロジー.)

Proof. $C^q = H^0(K^{*,q}, D')$ とおく. このとき横方向に exact な次の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^2 & \longrightarrow & K^{0,2} & \longrightarrow & K^{1,2} & \longrightarrow & K^{2,2} & \longrightarrow & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^1 & \longrightarrow & K^{0,1} & \longrightarrow & K^{1,1} & \longrightarrow & K^{2,1} & \longrightarrow & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^0 & \longrightarrow & K^{0,0} & \longrightarrow & K^{1,0} & \longrightarrow & K^{2,0} & \longrightarrow &
\end{array}$$

この図式は C^* が total complex K^* にどのように入っているかを示している.

例として total complex の 2-cocycle $\alpha = \alpha^{0,2} + \alpha^{1,1} + \alpha^{2,0}$ を考えよう (ここで $\alpha^{i,j} \in K^{i,j}$). $D\alpha = 0$ より

$$D''\alpha^{0,2} = 0, \quad D'\alpha^{0,2} + D''\alpha^{1,1} = 0, \quad D'\alpha^{1,1} + D''\alpha^{2,0} = 0, \quad D'\alpha^{2,0} = 0$$

が分かる [diagram を描く]. D' に関する高次コホモロジーの消滅から, $\exists \beta^{1,0} \in K^{1,0}$ s.t. $\alpha^{2,0} = D'\beta^{1,0}$. ここで α を同じ D -コホモロジー類を代表する $\alpha' = \alpha - D\beta^{1,0}$ に取り換えると,

$$\alpha' = \alpha^{0,2} + \tilde{\alpha}^{1,1}$$

の形である (ここで $\tilde{\alpha}^{1,1} = \alpha^{1,1} - D''\beta^{1,0}$). これは D -closed だから, 同じ理由で $\exists \beta^{0,1}$ s.t. $\tilde{\alpha}^{1,1} = D'\beta^{0,1}$. このとき α' をさらに $\alpha'' = \alpha' - D\beta^{0,1}$ に取り換えると

$$\alpha'' = \tilde{\alpha}^{0,2}$$

の形となる. これは D -closed ゆえ, $D'\tilde{\alpha}^{0,2} = D''\tilde{\alpha}^{0,2} = 0$. つまり $\tilde{\alpha}^{0,2} \in C^2$ であって, D'' -closed. 以上の議論は $C^* \hookrightarrow K^*$ がコホモロジーに全射を誘導することを示している.

同様の議論で単射になることも分かる (演習問題). □

注 2.39. もちろん縦と横を反対にした命題も成立する. つまり, 縦方向の高次のコホモロジーが消えていた場合, total complex のコホモロジーは, 逐次的にコホモロジーを取ったもの (縦方向の D'' コホモロジーを取ってから横方向の D' コホモロジーを取ったもの) に等しい.

以下, Čech-de-Rham 複体 $K^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ は縦方向と横方向の高次のコホモロジーが消えていることを示そう.

補題 2.40 (横方向).

$$0 \rightarrow \Omega^q(M) \xrightarrow{i} \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^q) \xrightarrow{D'} \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^q) \xrightarrow{D'} \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega^q) \xrightarrow{D'} \dots$$

は完全.

と定める. $U_{\beta\alpha_0\dots\alpha_{p-1}}$ 上の form $\rho_\beta\omega_{\beta\alpha_0\dots\alpha_{p-1}}$ は U_β の外では (あるいは $\text{Supp } \rho_\beta$ の外では) 0 で拡張することにより, $U_{\alpha_0\dots\alpha_{p-1}}$ 上の form に拡張されることに注意しよう. このとき,

$$\begin{aligned} (\delta\eta)_{\alpha_0\dots\alpha_p} &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \eta_{\alpha_0\dots\check{\alpha}_i\dots\alpha_p}|_{U_{\alpha_0\dots\alpha_p}} \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{\beta} (-1)^i \rho_\beta \omega_{\beta\alpha_0\dots\check{\alpha}_i\dots\alpha_p}|_{U_{\alpha_0\dots\alpha_p}} \\ &= \sum_{\beta} \rho_\beta \omega_{\alpha_0\dots\alpha_p} \quad (\because \delta\omega = 0) \\ &= \omega_{\alpha_0\dots\alpha_p}. \end{aligned}$$

ただし, 3行目への変形では, $\delta\omega = 0$ から導かれる式 $\omega_{\alpha_0\dots\alpha_p} = \sum_{i=0}^p (-1)^i \omega_{\beta\alpha_0\dots\check{\alpha}_i\dots\alpha_p}$ を用いた. \square

補題 2.41 の証明. $U_{\alpha_0\dots\alpha_p}$ は可縮なので 1 次以上の de Rham コホモロジーは消えており,

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \Omega^0(U_{\alpha_0\dots\alpha_p}) \rightarrow \Omega^1(U_{\alpha_0\dots\alpha_p}) \rightarrow \Omega^2(U_{\alpha_0\dots\alpha_p}) \rightarrow \dots$$

は完全である. 与えられた列はこれを $U_{\alpha_0\dots\alpha_p} \neq \emptyset$, $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p$ を満たす⁶ $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in A^{p+1}$ に渡って直積をとったものであるから, 完全である. \square

定理 2.42. M を多様体, \mathcal{U} を M の good open cover とする. $E \rightarrow M$ を滑らかな主 S^1 束とする. このとき Čech コホモロジー類として定まる Euler 類 $[\epsilon] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ と, de Rham コホモロジー類として定まる Euler 類 $[e] \in H_{\text{dR}}^*(M)$ は Čech-de-Rham 複体の同じコホモロジー類を与える.

Proof. U_α 上の自明化 $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times S^1$ をとる. このチャートにおける S^1 の座標を $\theta_\alpha \mapsto e^{i\theta_\alpha}$ とするとき, $d\theta_\alpha$ は $E|_{U_\alpha}$ 上の接続 1 形式を与える. $E|_{U_\alpha}$ 上で接続 ψ は U_α 上のある 1 形式 ξ_α を用いて

$$\psi|_{E|_{U_\alpha}} = d\theta_\alpha + p^*\xi_\alpha$$

と表される. 従って

$$e = -\frac{1}{2\pi} d\psi = -\frac{1}{2\pi} d\xi_\alpha \quad \text{on } U_\alpha$$

である. これらの自明化に付随する変換関数を $g_{\alpha\beta}$ とし, $g_{\alpha\beta} = e^{i\varphi_{\alpha\beta}}$, $\varphi_{\alpha\beta} = -\varphi_{\beta\alpha}$ となる関数 $\varphi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{R}$ を選ぶ. $E|_{U_{\alpha\beta}}$ 上で $\theta_\alpha \equiv \theta_\beta + p^*\varphi_{\alpha\beta} \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$ ゆえ,

$$\psi|_{E|_{U_{\alpha\beta}}} = (d\theta_\beta + p^*d\varphi_{\alpha\beta}) + p^*\xi_\alpha = d\theta_\beta + p^*(\xi_\alpha + d\varphi_{\alpha\beta})$$

従って

$$\xi_\beta - \xi_\alpha = d\varphi_{\alpha\beta} \quad \text{on } U_{\alpha\beta}$$

⁶添え字集合 A には全順序が入っているものとする

また $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ の定義から

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi}(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\alpha})$$

以上から Čech-de-Rham 複体 $K^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ の微分を $D = D' + D''$, $D'|_{K^{p,q}} = \delta$, $D''|_{K^{p,q}} = (-1)^p d$ とおくと,

$$\begin{aligned} D''(\{\frac{1}{2\pi}\xi_\alpha\}) &= -e \\ D'(\{\frac{1}{2\pi}\xi_\alpha\}) &= \{\frac{1}{2\pi}d\varphi_{\alpha\beta}\} \\ D''(\{\frac{1}{2\pi}\varphi_{\alpha\beta}\}) &= \{-\frac{1}{2\pi}d\varphi_{\alpha\beta}\} \\ D'(\{\frac{1}{2\pi}\varphi_{\alpha\beta}\}) &= \{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\} = \epsilon \end{aligned}$$

が成立する. 図示すると,

$$\begin{array}{ccc} e \longmapsto \{e|_{U_\alpha}\} & & \\ \uparrow \text{消す} & & \\ \{\frac{1}{2\pi}\xi_\alpha\} \longmapsto \{\frac{1}{2\pi}d\varphi_{\alpha\beta}\} & & \\ \uparrow \text{消す} & & \\ \{\frac{1}{2\pi}\varphi_{\alpha\beta}\} \longmapsto \{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\} & & \\ & & \uparrow \\ & & \{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\} \end{array}$$

従って $-e + \epsilon = D(\{\frac{1}{2\pi}\xi_\alpha\} + \{\frac{1}{2\pi}\varphi_{\alpha\beta}\})$ ゆえ, e と ϵ は同じコホモロジー類を代表する. □

問 2.43 (Čech コホモロジーの積構造). $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を位相空間 M の開被覆とする. 添え字集合 A には全順序を入れておくこととする.

- (1) R を単位元を持つ可換環とする. Čech cochain 複体 $(\check{C}^*(\mathcal{U}, R), \delta)$ にカップ積 $\check{C}^p(\mathcal{U}, R) \times \check{C}^q(\mathcal{U}, R) \rightarrow \check{C}^{p+q}(\mathcal{U}, R)$ を次のように定義する. $\omega \in \check{C}^p(\mathcal{U}, R)$, $\eta \in \check{C}^q(\mathcal{U}, R)$ に対して, $\alpha_0 < \dots < \alpha_{p+q}$ のときは

$$(\omega \cup \eta)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+q}} = \omega_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} \eta_{\alpha_p, \dots, \alpha_{p+q}}$$

と定め, $\alpha_0 < \dots < \alpha_{p+q}$ でないときは, 反対称性により上の定義を拡張する. このカップ積は結合的であり, 次の Leibniz 則を満たすことを示せ.

$$\delta(\omega \cup \eta) = \delta\omega \cup \eta + (-1)^p \omega \cup \delta\eta.$$

Leibniz 則よりコホモロジーにカップ積 $\check{H}^p(\mathcal{U}, R) \times \check{H}^q(\mathcal{U}, R) \rightarrow \check{H}^{p+q}(\mathcal{U}, R)$ が誘導されることが分かる⁷.

⁷コホモロジーに誘導される積は次数付き可換 (超可換ともいう) になる.

(2) M を多様体, \mathcal{U} を良い開被覆 (good open covering) とする. Čech–de-Rham 複体 $K^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ の結合的積

$$\cup: \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q) \times \check{C}^{p'}(\mathcal{U}, \Omega^{q'}) \rightarrow \check{C}^{p+p'}(\mathcal{U}, \Omega^{q+q'})$$

であって, total complex $K^k = \bigoplus_{p+q=k} K^{p,q}$ の微分 D に関して Leibniz 則を満たし, さらに包含写像

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^0), \quad \Omega^q(M) \hookrightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^q)$$

が積を保つようなものを構成せよ. さらに, このことを用いてこの節で示した同型 $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \cong H_{\text{dR}}^*(M)$ は積を保つことを示せ.

2.11 Čech-singular 複体

参考文献: [Bott-Tu, §15]

Čech-singular 複体を使うと前節と同様にして Čech コホモロジーと特異コホモロジーを比較することができる. まず特異 (コ) ホモロジーについて簡単に復習する.

X を位相空間とする. X の特異 p 単体 (singular p -simplex) とは連続写像 $\sigma: \Delta_p \rightarrow X$ のことである. 特異 p 単体の生成する自由 \mathbb{Z} 加群を $S_p(X)$ と書く. 境界作用素

$$\partial: S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$$

を

$$\partial[\sigma] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [\sigma \circ \partial^i]$$

と定義する. ここで $\partial^i: \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ は i 面を与える face map (2.1 節参照). このとき $\partial \circ \partial = 0$ が確かめられ, 整数係数の特異ホモロジー $H_*^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) = H_*(S_*(X), \partial)$ が定義される.

$S_p(X)$ の双対として $S^p(X) := \text{Hom}(S_p(X), \mathbb{Z})$ が定義され, ∂ の双対として $d: S^p(X) \rightarrow S^{p+1}(X)$ が定義される. このコホモロジーとして整数係数の特異コホモロジー $H_{\text{sing}}^*(X, \mathbb{Z}) = H^*(S^*(X), d)$ が定義される.

次に位相空間 X が good open cover $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を持つと仮定する. X の開集合 U に対して U 上の特異コチェイン複体 $S^q(U)$ を対応させる写像 $U \mapsto S^q(U)$ は presheaf と思うことができる. Čech-singular 複体を次で定める.

$$K^{p,q} := \check{C}^p(\mathcal{U}, S^q) = \left\{ \left\{ \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \right\} \mid \begin{array}{l} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \in S^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}), \\ \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \text{ は } \alpha_0, \dots, \alpha_p \text{ の入れかえについて反対称} \end{array} \right\}$$

これは二つの微分

$$\begin{aligned} d: K^{p,q} &\rightarrow K^{p,q+1} \\ \delta: K^{p,q} &\rightarrow K^{p+1,q} \end{aligned}$$

を持つ. 前と同様に, $D = D' + D''$, $D' = \delta$, $D''|_{K^{p,q}} = (-1)^p d$ とおく.

この Čech-singular 複体を使って, Čech コホモロジーと特異コホモロジーの同型を示したい. そのためには高次の D' コホモロジーと高次の D'' コホモロジーが消えていることをいう必要がある.

(1) D'' コホモロジーの消滅:

$$0 \rightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, S^0) \rightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, S^1) \rightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, S^2) \rightarrow \dots$$

は完全である. これは各 $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ が可縮であり,

$$H_{\text{sing}}^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0 \\ 0 & * \neq 0 \end{cases}$$

が成り立つことからわかる.

(2) D' コホモロジーの消滅. $S_q^{\mathcal{U}}(X)$ をどれかの U_α に含まれる特異 q 単体の生成する自由 \mathbb{Z} 加群とする. また $S_{\mathcal{U}}^q(X) = \text{Hom}(S_q^{\mathcal{U}}(X), \mathbb{Z})$ とおく. このとき,

$$0 \rightarrow S_{\mathcal{U}}^q(X) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, S^q) \rightarrow \check{C}^1(\mathcal{U}, S^q) \rightarrow \check{C}^2(\mathcal{U}, S^q) \rightarrow \dots$$

は完全である. $S_{\mathcal{U}}^q(X) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, S^q)$ は自然な写像 $\omega \mapsto \{\omega|_{U_\alpha}\}$ であり, $\check{C}^0(\mathcal{U}, S^q)$ での完全性は定義から明らか. $\check{C}^p(\mathcal{U}, S^q)$, $p > 0$ での完全性については [Bott-Tu, (15.7)] を参照のこと.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & S_{\mathcal{U}}^2(X) & \longrightarrow & K^{0,2} & \longrightarrow & K^{1,2} & \longrightarrow & K^{2,2} & \longrightarrow & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & S_{\mathcal{U}}^1(X) & \longrightarrow & K^{0,1} & \longrightarrow & K^{1,1} & \longrightarrow & K^{2,1} & \longrightarrow & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & S_{\mathcal{U}}^0(X) & \longrightarrow & K^{0,0} & \longrightarrow & K^{1,0} & \longrightarrow & K^{2,0} & \longrightarrow & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

以上の事実と, 命題 2.38 を用いた議論により, 同型

$$H^*(S_{\mathcal{U}}^*(X), d) \xrightarrow{\cong} H^*(K^*, D) \xleftarrow{\cong} H^*(\check{C}^*(\mathcal{U}, \mathbb{Z}), \delta)$$

が分かる. 自然な射影 $S^*(X) \rightarrow S^*_U(X)$ はチェインホモトピー同値である (特異ホモロジー複体の間の写像 $S^*_U(X) \hookrightarrow S^*(X)$ はチェインホモトピー同値 [Hatcher, Proposition 2.21] であり, この双対をとるとわかる) ので, 結局

$$H^*_{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) \cong \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

を得る.

問 2.44. 問 2.9 で定義したオイラー類 $[e] \in H^2_{\text{sing}}(X, \mathbb{Z})$ と, Čech コホモロジー $\check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ に値をとる Euler 類 $[\epsilon]$ が, 上の同型の下で一致することを示せ.

注 2.45. good open cover を持つ空間の例としては,

- パラコンパクト多様体
- 単体複体 (の幾何学的実現)

が挙げられる. 一般に CW 複体は単体複体とホモトピー同値であり [Hatcher, Theorem 2C.5], [Gray, Corollary 16.44], 特に, good open cover を持つ空間とホモトピー同値である. さらに, CW 近似定理 [Hatcher, Proposition 4.13] により, 任意の位相空間 X に対して, CW 複体 Y と弱ホモトピー同値 $f: Y \rightarrow X$ が存在する.

2025.6.10 ここまで

2.12 主 S^1 束 (複素直線束) の分類

本節では X をパラコンパクトハウスドルフ空間で, good open cover を持つものとする.

まず主 S^1 束と複素直線束の同型類の間には自然な対応があることに注意しよう. 複素直線束 $L \rightarrow X$ が与えられたとき, エルミート計量をとると, S^1 束

$$S(L) = \bigcup_{x \in X} \{v \in L_x \mid \|v\| = 1\}$$

が定まる. これは S^1 の作用 $v \mapsto ve^{i\theta}$ により主 S^1 束となる. 主 S^1 束 $S(L)$ の同型類はエルミート計量の取り方によらない. 逆に, 主 S^1 束 $E \rightarrow X$ が与えられるとき, 同伴直線束 $L = E \times_{S^1} \mathbb{C} = E \times \mathbb{C} / (e\lambda, v) \sim (e, \lambda v)$, $\lambda \in S^1$ が構成される. この2つの構成は互いに逆の構成であることが容易に確かめられる.

複素直線束 $L \rightarrow X$ に対して, その Euler 類を $e(L) := e(S(L))$ と定義する.

定理 2.46. X を good open cover $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を持つパラコンパクトハウスドルフ空間とする. 対応 $L \mapsto S(L) \mapsto e(L) = e(S(L))$ は以下の3つの対象の間の全単射を与える.

- (1) X 上の複素直線束の同型類
- (2) X 上の主 S^1 束の同型類

(3) $H^2(X, \mathbb{Z})$ の元

さらにこの対応は積（あるいは和）を保つ。ただし、複素直線束 L_1, L_2 の積はテンソル積 $L_1 \otimes L_2$ とし、主 S^1 束 E_1, E_2 の積は $E_1 \times_{S^1} E_2 := E_1 \times_X E_2 / (e_1 \lambda, e_2) \sim (e_1, e_2 \lambda)$, $\lambda \in S^1$ と定める（ S^1 作用は $[e_1, e_2] \mapsto [e^{i\theta} e_1, e_2] = [e_1, e^{i\theta} e_2]$ とする）。

Proof. (1) と (2) の対応については既に述べた。この対応は積を保っている。実際、 $\{g_{\alpha\beta}\}, \{h_{\alpha\beta}\}$ を主 S^1 束 E_1, E_2 の変換関数とすると、 $E_1 \times_{S^1} E_2$ の変換関数は $\{g_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}\}$ で与えられることからわかる。さらにこのことは、 e_1, e_2 を E_1, E_2 の局所的な切断とすると、 $e'_1 = e_1 g_{\alpha\beta}, e'_2 = e_2 h_{\alpha\beta}$ ならば $[e'_1, e'_2] = [e_1, e_2] g_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ であることから確かめられる。

(2) と (3) の対応について考える。Čech コホモロジーを使った Euler 類の定義を思い出しておく。主 S^1 束 $E \rightarrow X$ の変換関数を $g_{\alpha\beta}$ とするとき、 $g_{\alpha\beta} = e^{i\varphi_{\alpha\beta}}, \varphi_{\alpha\beta} = -\varphi_{\beta\alpha}$ を満たす実数値関数 $\varphi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{R}$ をとり、 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi}(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\alpha})$ により 2-コサイクル ϵ を定義する。このとき $[\epsilon]$ がオイラー類を与える。主 S^1 束の積は変換関数の積に対応するから、この対応 $E \mapsto [\epsilon] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ は群構造を保っている。

次に単射性を示そう。もし $[\epsilon] = 0$ とする。このときある $n = \{n_{\alpha\beta}\} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ が存在して $\epsilon = \delta n$ となる。

$$\xi_{\alpha\beta} := \varphi_{\alpha\beta} - 2\pi n_{\alpha\beta}$$

とおくと、 ξ は連続関数の層 \mathcal{C}^0 に値をとる Čech 1-cochain ($\xi \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$) であり、 $\delta\xi = 0$ を満たす。従って \mathcal{C}^0 が fine sheaf であることから（補題 2.40 の証明を参照）、ある $u = \{u_\alpha\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$ が存在して、 $\xi = \delta u$, すなわち、

$$\xi_{\alpha\beta} = u_\beta - u_\alpha$$

が成立する。このとき

$$g_{\alpha\beta} = e^{i\varphi_{\alpha\beta}} = e^{i(\xi_{\alpha\beta} + 2\pi n_{\alpha\beta})} = e^{i(u_\beta - u_\alpha)} = \lambda_\alpha^{-1} \lambda_\beta$$

ただし、 $\lambda_\alpha = e^{iu_\alpha}$ とおいた。従って主 S^1 束 E は自明である。

最後に全射性を示す。任意の $[\epsilon] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ に対して $\epsilon \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \subset \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$ とみなすとき、 $\delta\epsilon = 0$ であることと \mathcal{C}^0 が fine sheaf であることから、 $\epsilon = \frac{1}{2\pi} \delta\varphi$ なる $\varphi = \{\varphi_{\alpha\beta}\} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$ が存在する。このとき $g_{\alpha\beta} = e^{i\varphi_{\alpha\beta}}$ とおくと、

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &= 1 \\ g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} &= e^{i(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\delta})} = e^{2\pi i \epsilon_{\alpha\beta\gamma}} = 1 \end{aligned}$$

より $g_{\alpha\beta}$ はコサイクル条件を満たし、主 S^1 束を定める。この主 S^1 束のオイラー類が $[\epsilon]$ になることは構成から明らかである。□

注 2.47. Euler 類の定義として、障害類としての定義、Čech コホモロジー類としての定義、曲率としての定義、の 3つを述べた。それ以外にも次の定義がある。

- Thom 類の引き戻し（次節で紹介）

- 層の完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{C}^0(-, \mathbb{R}) \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{C}^0(-, S^1) \rightarrow 0$ に付随する層コホモロジーの連結準同型 $H^1(X, \mathcal{C}^0(-, S^1)) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ を使う方法 (これは Čech コホモロジー類としての定義と本質的に同じ)
- 分類空間を使う方法

3 Thom 類と Euler 類

本節では Thom 類の観点から Euler 類を議論する.

3.1 de Rham コホモロジーでの Thom 類と Thom 同型

参考文献: [Bott-Tu, §6, §12].

ここではコホモロジーとしては de Rham コホモロジーを使い, M を C^∞ 級多様体, $E \rightarrow M$ をランク n の C^∞ 級実ベクトル束とする.

まず, E の縦方向にコンパクト台をもつコホモロジー $H_{cv}^*(E)$ (cohomology of compact support in the vertical direction) を導入する. de Rham 複体 $\Omega^*(E)$ の部分複体 $\Omega_{cv}^*(E)$ を次で定義する.

$$\Omega_{cv}^*(E) = \{\omega \in \Omega^*(E) \mid \text{Supp}(\omega) \rightarrow M \text{ は proper}\}$$

とおく. これは d で閉じていることは明らかである. そこで

$$H_{cv}^*(E) := H^*(\Omega_{cv}^*(E), d)$$

と定める.

定義 3.1. $E \rightarrow M$ が向きづけられた実ベクトル束であるとは, 各ファイバー E_x に向き⁸が与えられ, それが局所的に一定であるもの. つまり, 任意の $x \in M$ に対して x の開近傍 U と U 上での自明化 $\phi: E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ が存在して, 任意の $y \in U$ に対して, 自明化の与える同型 $\phi_y: E_y \cong \mathbb{R}^n$ は E_y の与えられた向きを \mathbb{R}^n の標準的な向きに写す.

注 3.2. $E \rightarrow M$ に向きが与えられているとき, 定義にあるような局所自明化をとると, その間の変換関数は $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ に値をとる. すなわち, $E \rightarrow M$ の向きを与えるということは, その構造群の $GL_n^+(\mathbb{R})$ への還元 (reduction) を与えることと同じである.

向きづけられた実ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ に対して **ファイバーに沿った積分** (integration along the fiber)

$$\pi_*: \Omega_{cv}^*(E) \rightarrow \Omega^{*-n}(M)$$

ここでは射影の記号として p ではなく π を使っている. Čech 複体の次数 p との重複を避けるため.

⁸実ベクトル空間の向きとは基底の $GL_n^+(\mathbb{R})$ 同値類のことであった.

が定義される. M の座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_m)$ と, その上の向きを保つ局所自明化 $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ をとる. \mathbb{R}^n の座標を (t_1, \dots, t_n) とする. 局所自明化の与える $E|_U$ の座標 $(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)$ を用いると, π_* は

$$\pi_*: \sum_{I,J} f_{I,J}(x,t) dx_I \wedge dt_J \mapsto \sum_I dx_I \int_{\mathbb{R}^n} f_{I,\{1,\dots,n\}}(x,t) dt_1 \cdots dt_n$$

で与えられる. ここで $I \subset \{1, \dots, m\}$, $J \subset \{1, \dots, n\}$ は多重指数であり, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ (ただし $i_1 < i_2 < \dots < i_p$) のとき, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ とおく. (π_* が局所座標の取り方によらず定まることは演習とする.)

問 3.3. $\pi_* \circ d = d \circ \pi_*$ を示せ. 特に π_* はコホモロジーの間の写像 $H_{\text{cv}}^*(E) \rightarrow H^{*-n}(M)$ を誘導する.

定理 3.4 (Thom 同型定理). $E \rightarrow M$ を向きづけられたランク n の実ベクトル束とする.

- (1) ファイバーに沿った積分 $\pi_*: H_{\text{cv}}^*(E) \rightarrow H^{*-n}(M)$ は同型である (Thom 同型).
- (2) 特に $\pi_*[\Theta] = 1$ となるコホモロジー類 $[\Theta] \in H_{\text{cv}}^n(E)$ がただ一つ存在する. これを Thom 類という.
- (3) (1) の同型の逆写像は, $[\alpha] \mapsto [\pi^* \alpha \wedge \Theta]$ で与えられる.

注 3.5. (1) $M = \text{pt}$ のとき, Thom 同型は

$$H_c^*(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & * = n \text{ のとき} \\ 0 & * \neq n \text{ のとき} \end{cases}$$

を与える (Poincaré の補題). この同型は \mathbb{R}^n 上の積分 $H_c^n(\mathbb{R}^n) \ni [\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega \in \mathbb{R}$ で与えられる.

- (2) fiber E_x の向きを与えると, $H_c^n(E_x)$ の生成元 $[\omega]$ で $\int_{E_x} \omega = 1$ を満たすものが定まる. つまり E_x の向きと $H_c^n(E_x)$ の (整な) 生成元が対応している.
- (3) 局所自明化 $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ をとるとき, 少し一般化された Poincaré の補題 [Bott-Tu, Proposition 6.16] により,

$$\begin{aligned} H_{\text{cv}}^*(E|_U) &\cong H_{\text{cv}}^*(U \times \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} H^{*-n}(U) \\ &\alpha \mapsto \pi_* \alpha \\ \pi^* \beta \wedge \phi(t) dt^1 \dots dt^n &\longleftarrow \beta \end{aligned}$$

ここで $\phi(t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $\int \phi(t) dt_1 \dots dt_n = 1$ を満たすコンパクト台の関数.

特に, U が連結のとき, $\forall x \in U$ に対して

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{cv}}^n(E|_U) & \xrightarrow[\cong]{\pi_*} & H^0(U) \\ \cong \downarrow j^* & & \parallel \\ H_c^n(E_x) & \xrightarrow[\cong]{\int_{E_x}} & \mathbb{R} \end{array}$$

ただし $j: E_x \rightarrow E|_U$ は包含写像. これは直線束 $\bigcup_{x \in M} H_c^n(E_x)$ の局所自明化を与えている.

局所自明化の与える同型 $E_x \cong \mathbb{R}^n$ により各ファイバー E_x に向きが入り, E_x 上での積分が $\bigcup_{x \in M} H_c^n(E_x)$ の局所自明化を与えると考えてもよい.

- (4) この局所自明化により, $\bigcup_{x \in M} H_c^n(E_x)$ はベクトル空間の局所系 (local system) をなす⁹. 変換関数は $\{\pm 1\}$ に値をとっている.

$$E \rightarrow M \text{ の向きを与える} \iff \text{局所系 } \bigcup_{x \in M} H_c^n(E_x) \text{ の自明化をとる}$$

に注意しよう.

Thom 同型定理の証明. $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ を good open cover とする. Čech-de-Rham 複体

$$K^{p,q} = \check{C}^p(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{\text{cv}}^q) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega_{\text{cv}}^q(\pi^{-1}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}))$$

を考えよう. 前と同様 $D' = \delta$, $D'' = (-1)^p d$ とし, $D = D' + D''$ を total complex の微分とする. 証明の要点は, total complex のコホモロジー $H^*(K^*, D)$ が δ コホモロジーをとってから d コホモロジーをとったもの $H_d^* H_\delta^*(K^{*,*})$ にも, d コホモロジーをとってから δ コホモロジーをとったもの $H_\delta^* H_d^*(K^{*,*})$ にも, どちらにも同型になるということである.

- (a) $H_d^* H_\delta^*$ の計算. 1 の分割を用いた補題 2.40 と同様の議論により, $p = 0$ のみに δ コホモロジーがあり,

$$0 \rightarrow \Omega_{\text{cv}}^q(E) \rightarrow K^{0,q} \xrightarrow{\delta} K^{1,q} \xrightarrow{\delta} K^{2,q} \xrightarrow{\delta} \dots$$

は完全. つまり

$$H_\delta^*(K^{*,q}) = \begin{cases} \Omega_{\text{cv}}^q(E) & * = 0 \\ 0 & * \neq 0 \end{cases}$$

命題 2.38 によって total complex のコホモロジーはこの d コホモロジー

$$H^*(K^*, D) \cong H_d^* H_\delta^0(K^{*,*}) = H_d^*(\Omega_{\text{cv}}^*(E)) = H_{\text{cv}}^*(E)$$

と同型になる.

⁹ベクトル空間の局所系とは, 変換関数が局所定数関数になるような局所自明化 $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ で覆われるベクトル束と定義できる.

(b) $H_\delta^* H_d^*$ の計算. Poincaré の補題より $q = n$ のみに d コホモロジーがある.

$$H^*(\Omega_{\text{cv}}^*(\pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}), d) = H_{\text{cv}}^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \times \mathbb{R}^n) \stackrel{\pi_*}{\cong} H^{*-n}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & * = n \\ 0 & * \neq n \end{cases}$$

ここでファイバーの向きを保つ同型 $\pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \cong U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \times \mathbb{R}^n$ を用いた. 従って, $K^{p,*}$ の d に関するコホモロジーを $H_d^*(K^{p,*})$ と表すと,

$$H_d^*(K^{p,*}) = \begin{cases} \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p, U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \neq \emptyset} \mathbb{R} & * = n \\ 0 & * \neq n \end{cases}$$

さらにこの δ コホモロジーをとると $H_\delta^p H_d^n(K^{*,*}) = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ になる.

次は命題 2.38 (の縦と横を入れ替えたもの) の一般化と思える. また spectral sequence の特別な場合となっている.

命題 3.6. 一般に, 2重複体 $\bigoplus_{p,q \geq 0} K^{p,q}$ の縦方向のコホモロジー (d コホモロジー) $H_d^*(K^{p,*})$ がある次数 $* = n$ に集中しているとき, 同型

$$H^{p+n}(K^*, D) \cong H_\delta^p H_d^n(K^{*,*})$$

が成立する. ($n = 0$ の特別の場合が, 命題 2.38 の縦と横を入れ替えたもの)

Proof. 以下では $K^{*,*}$ を省略して $H_\delta^p H_d^n(K^{*,*})$ を単に $H_\delta^p H_d^n$ などと書く.

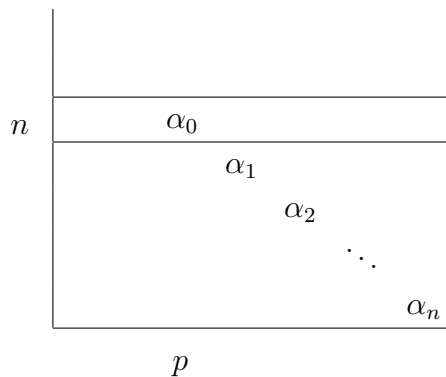
$H_\delta^p H_d^n \rightarrow H^{n+p}(K^*, D)$ の作り方. $[\alpha_0] \in H_\delta^p H_d^n$ をとる. ここで $\alpha_0 \in K^{p,n}$ であり, $d\alpha_0 = 0$ かつ $[\delta\alpha_0] = 0$ in H_d^n . つまり $\exists \alpha_1 \in K^{p+1, n-1}$ s.t.

$$\delta\alpha_0 = -D''\alpha_1$$

このとき $D(\alpha_0 + \alpha_1) = \delta\alpha_1 \in K^{p+2, n-1}$ であるが,

$$D''\delta\alpha_1 = -\delta D''\alpha_1 = \delta(\delta\alpha_0) = 0.$$

従って D'' コホモロジーの消滅から, $\exists \alpha_2 \in K^{p+2, n-2}$ s.t. $\delta\alpha_1 = -D''\alpha_2$. これを続けて D -cocycle $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ を得る. D コホモロジー類 $[\alpha_0 + \dots + \alpha_n]$ は取り方によらないことが示せる (演習問題).



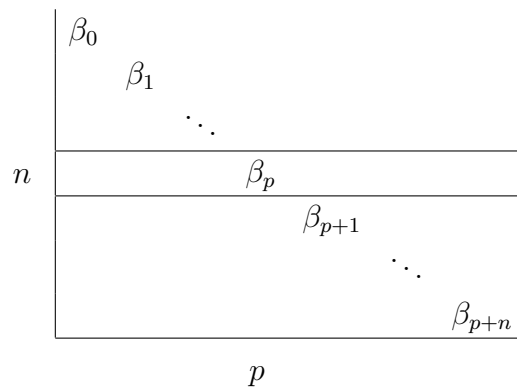
逆に $(n+p)$ 次の D -cocycle $\beta = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{n+p}$ が与えられたとする. ここで $\beta_i \in K^{i, n+p-i}$. $D''\beta_0 = 0$ と D'' コホモロジーが消えていることから, $\exists \gamma \in K^{0, n+p-1}$ s.t. $\beta_0 = D''\gamma$. そこで β を $\beta - D\gamma$ で置き換えると

$$\beta - D\gamma = \beta'_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n+p}, \quad \beta'_1 \in K^{1, n+p-1}$$

の形となる. これを繰り返して β と D -cohomologous な D -cocycle

$$\beta'_p + \beta_{p+1} + \cdots + \beta_{p+n}$$

を得る. このとき, β'_p は $H_\delta^p H_d^n$ の元を定める. クラス $[\beta'_p] \in H_\delta^p H_d^n$ が取り方によらないことが示せる (演習問題). この二つの構成は明らかに互いに逆の操作を与えており, $H_\delta^p H_d^n \cong H^{n+p}(K^*, D)$ が結論される.



□

上の命題および, 上の (a),(b) における計算から

$$H_{cv}^{p+n}(E) \cong H^{p+n}(K^*, D) \cong H_\delta^p H_d^n(K^{*,*}) = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$$

が結論される.

2025.6.17 ここまで

次にこの同型がファイバーに沿った積分 $\pi_*: \Omega_{cv}^*(E) \rightarrow \Omega^{*-n}(M)$ から誘導されることを示そう. $K_M^{p,q}$ を M の Čech-de-Rham 複体とする.

$$K_M^{p,q} := \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$$

ファイバーに沿った積分は 2 重複体の間の写像

$$\pi_*: K^{p, q+n} = \check{C}^p(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{cv}^{q+n}) \rightarrow K_M^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$$

を与える. この写像は δ および d と可換である.

この π_* がコホモロジーに誘導する写像 $H^*(K^*, D) \rightarrow H^{*-n}(K_M^*, D)$ を調べよう.

- (K^*, D) の部分複体 $(\Omega_{cv}^*(E), d)$ に制限すると, π_* はやはりファイバーに沿った積分

$$\pi_*: \Omega_{cv}^*(E) \rightarrow \Omega^{*-n}(M)$$

と一致する.

- 一方で $H^{n+p}(K^*, D)$ の任意の元は $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha_i \in K^{p+i, n-i}$ の形の D -cocycle で代表された. この π_* による像は

$$\pi_*(\alpha_0 + \cdots + \alpha_n) = \pi_*\alpha_0 \in \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$$

であるが, このコホモロジー類は同型 $H^{n+p}(K^*, D) \cong H_\delta^p H_d^n \cong \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ の下での $[\alpha]$ の像そのものである.

以上より, 構成された同型は integration along the fiber であることが分かった.

構成された同型から, $[\Theta] \in H_{cv}^n(E)$ がただ一つ存在して, $\pi_*[\Theta] = 1$ となることは明らかである. このとき form としても $\pi_*\Theta = 1$ でなければならない (つまり任意の $x \in M$ に対して $\int_{E_x} \Theta = 1$). $\alpha \in \Omega^*(M)$, $\beta \in \Omega_{cv}^*(E)$ に対して成立する射影公式

$$\pi_*(\pi^*\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge \pi_*(\beta)$$

を用いると, 任意の $[\alpha] \in H^*(M)$ に対して

$$\pi_*(\pi^*\alpha \wedge \Theta) = \alpha$$

が成立するため, π_* の逆写像は $[\alpha] \mapsto [\pi^*\alpha \wedge \Theta]$ で与えられる. □

定義 3.7. $\pi_*\Theta = 1$ を満たす縦方向にコンパクト台を持つ閉微分形式 $\Theta \in \Omega_{cv}^n(E)$ を Thom form という. (定義から Thom form のコホモロジー類が Thom class である.)

問 3.8. $E \rightarrow M$ をランク n の実ベクトル束とする. もし (必ずしも閉とは仮定しない) n 次微分形式 $\Theta \in \Omega_{cv}^n(E)$ であって, 各ファイバー E_x に制限すると $H_c^n(E_x)$ の生成元を与えるものが存在すれば, $E \rightarrow M$ は向きづけ可能であることを示せ.

問 3.9. 上の証明で用いた射影公式 (projection formula) を示せ.

問 3.10. Thom 同型定理の上の証明方法は Thom form Θ の明示的な構成を与える. つまり, M の good cover $\{U_\alpha\}$, U_α 上の自明化 $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, 変換関数 $g_{\alpha\beta}$, $\{U_\alpha\}$ に付随する 1 の分割 ρ_α を用いて, Θ が構成できることを確かめよ.

問 3.11 ([Bott-Tu, Proposition 6.17]). M が finite good cover を持つとき, Thom 同型定理は good cover の数に関する帰納法で示せる. これを確かめよ. (こちらの方が証明方法としては易しい.)

3.2 複素直線束の Thom 類と Euler 類

本節でも引き続き, M は C^∞ 級多様体とする. 複素直線束 $L \rightarrow M$ の場合に Thom 類と Euler 類を (de Rham コホモロジー類として) 比較しよう. 複素直線束は向きづけられた rank 2 の実ベクトル束であることに注意しておく.

$L \rightarrow M$ の Hermite 計量をとり, 主 S^1 束 $S(L) = \bigcup_{x \in M} \{v \in L_x : \|v\| = 1\}$ を定める. $S(L)$ 上の接続 1 形式 ψ をとる. ψ は

- $\psi|_{S(L_x)} = d\theta$
- ψ は S^1 不変

なる条件を満たしていた. ここで $\theta \mapsto e^{i\theta}$ は $S(L_x)$ の角度座標. $\rho(r)$ を $[0, \infty)$ 上の C^∞ 級関数で, $r = 0$ の近くでは -1 , r が十分大きいとき 0 となるものとする.

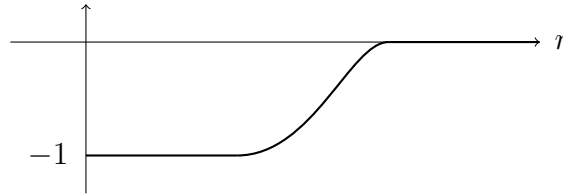


図 3: $\rho(r)$ のグラフ

$r: L \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ をエルミート計量の与える関数 $r(v) = \|v\|$ とし, $q: L \setminus M \rightarrow S(L)$ を $q(v) = v/\|v\|$ と定める (ここで M は L のゼロ切断と同一視されている).

ここでは射影の記号として π ではなく p を使っている. 円周率 π との混乱を避けるため.

$$\begin{array}{ccc} L \setminus M & \xrightarrow{q} & S(L) \\ & \searrow p & \downarrow p \\ & & M \end{array}$$

このとき

命題 3.12. $\Theta = \frac{1}{2\pi} d(\rho(r)q^*\psi)$ は L の Thom form を与える.

Proof. Θ が縦方向にコンパクト台を持つ閉形式で, $\int_{L_x} \Theta = 1$ であることを示せばよい.

まず Θ は $r > 0$ において well-defined で exact であるから, closed である. $r = 0$ では $\rho(r)q^*\psi$ は定義されていない. しかしながら,

$$\begin{aligned} 2\pi\Theta &= d\rho(r) \wedge q^*\psi + \rho(r)q^*d\psi \\ &= d\rho(r) \wedge q^*\psi + \rho(r)q^*(-2\pi p^*e) \\ &= d\rho(r) \wedge q^*\psi - 2\pi\rho(r)p^*e \end{aligned}$$

と計算できる. ここで e は M 上の Euler form であり, $p: L \rightarrow M, p: S(L) \rightarrow M$ は自然な射影. この式から Θ は $r = 0$ の近くに滑らかに拡張される. 最後に, この式の第 2 項はファイバー L_x に制限すると消えるから,

$$\begin{aligned} \int_{L_x} \Theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_x} d\rho(r) \wedge q^*\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \rho'(r) dr \wedge d\theta \quad \text{ここで } (r, \theta) \text{ は } L_x \cong \mathbb{C} \text{ の極座標} \\ &= 1 \end{aligned}$$

以上より Θ は Thom form である. □

定理 3.13. 複素直線束 $L \rightarrow M$ の Thom 類を $[\Theta] \in H_{\text{cv}}^2(L)$, Euler 類を $e(L) \in H^2(M)$ とおく. 任意の切断 $s: M \rightarrow L$ に対して

$$s^*[\Theta] = e(L)$$

が成立する. ここで s^* は写像 $H_{\text{cv}}^*(L) \rightarrow H^*(L) \xrightarrow{s^*} H^*(M)$ を表す.

Proof. Thom 類の代表元として, 上の命題に与えた Thom form Θ を使う. 全ての切断はゼロ切断 s_0 とホモトピックなので,

$$\begin{aligned} s^*[\Theta] &= s_0^*[\Theta] \\ &= s_0^* \left[\frac{1}{2\pi} d(\rho q^* \psi) \right] \\ &= \left[s_0^* \left(\frac{1}{2\pi} d\rho \wedge q^* \psi - \rho p^* e \right) \right] \\ &= [e] = e(L). \end{aligned}$$

以上により示された. □

上の定理から, 一般に次のように定義する.

定義 3.14. M を C^∞ 級多様体, $E \rightarrow M$ を向きづけられた rank n の C^∞ 級実ベクトル束とする. $E \rightarrow M$ の Thom 類 $[\Theta] \in H_{\text{cv}}^n(E)$ の C^∞ 級切断 s による引き戻し $e(E) := s^*[\Theta] \in H^n(M)$ を, $E \rightarrow M$ の Euler 類と呼ぶ. (これは切断の取り方によらない.)

3.3 Thom 類と Poincaré 双対

参考文献: [Bott-Tu, §5, §6, §12]

引き続き M は C^∞ 級多様体とし, コホモロジーは de Rham コホモロジーを使う. 本節では, M を向きづけられた m 次元 C^∞ 級多様体で finite good cover を持つものとする¹⁰.

3.3.1 Poincaré 双対性

Poincaré 双対性定理 [Bott-Tu, §5] によると, 積分の定めるペアリング

$$\begin{aligned} H_c^p(M) \otimes H^{m-p}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\alpha] \otimes [\beta] &\longmapsto \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

は非退化, つまり, $H^{m-p}(M) \cong H_c^p(M)^*$ を誘導する.

¹⁰ このときコホモロジー $H^*(M)$, $H_c^*(M)$ は有限次元となる [Bott-Tu, Proposition 5.3.1, 5.3.2].

$S \subset M$ を s 次元の向きづけられた閉部分多様体とする。 S 上での積分は次の線形写像を定める。

$$H_c^s(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[\alpha] \mapsto \int_S \alpha$$

この線形写像に対応する $\eta_S \in H^{m-s}(M)$ がただ一つ存在する。つまり

$$\exists! \eta_S \in H^{m-s}(M) \quad \text{s.t.} \quad \int_S \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_S \quad (\forall \alpha \in H_c^s(M))$$

この η_S を S の **Poincaré 双対** という。

注 3.15. ここで S が閉であることは積分の定義に必要である。 M 上のコンパクト台 s -form $\alpha \in \Omega_c^s(M)$ に対して、 $\alpha|_S$ の台 $\text{Supp}(\alpha|_S)$ は S の閉集合であるから、 M の部分集合として閉である。 さらにそれはコンパクト集合 $\text{Supp}(\alpha)$ に含まれるため、コンパクトになる。 従って $\int_S \alpha$ が定義される。

注 3.16. さらに S がコンパクトであるときは、コンパクト Poincaré 双対 $\eta_{S,c} \in H_c^{m-s}(M)$ が定まる。 これは任意の $\alpha \in H^s(M)$ に対して

$$\int_S \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_{S,c}$$

を満たすクラスとして特徴づけられる。

3.3.2 管状近傍定理 (tubular neighbourhood theorem)

部分多様体 S の法ベクトル束は

$$N := N_{S/M} = TM|_S / TS$$

と定義されていた。 管状近傍定理は、 S の M における開近傍 T と微分同相写像

$$\phi: N \xrightarrow{\cong} T \subset M$$

であって $\phi|_S = \text{id}_S$ を満たすものが存在することを主張している [絵を描く]。 証明については [服部, Guillemin-Pollack] を見よ。

法束 N に計量を入れて、(閉および開) 円盤束

$$D(N) = \bigcup_{x \in M} \{v \in N_x : \|v\| \leq 1\}$$

$$\mathring{D}(N) = \bigcup_{x \in M} \{v \in N_x : \|v\| < 1\}$$

を考える。 N の計量をうまくとれば、 $D(N) \subset N \cong T \subset M$ は M の中で閉となるようにできる¹¹ (このことは S がコンパクトなら $D(N)$ もコンパクトのため、自動的に)。 以下このことを仮定する。

¹¹ M に完備な Riemann 計量を入れ、 S の無限遠点で 0 に収束する関数 $\epsilon: S \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を用いて、 $\bigcup_{x \in S} \{v \in N_x : \|v\| < \epsilon(x)\}$ の形に書ける開集合 (とそこからの exponential map により定まる管状近傍) を考えれば分かる。

3.3.3 Thom 類と Poincaré 双対

M とその部分多様体 S が向きづけられているとき, 法束 $N = N_{S/M}$ にも標準的な向きが入る. ここでは, 同型

$$TM|_S \cong TS \oplus N$$

が向きを保つように N に向きを入れることとする.

定理 3.17. $\Theta \in \Omega_{\text{cv}}^{m-s}(N)$ を法束 N の Thom form とし, $\text{Supp } \Theta \subset \mathring{D}(N)$ と仮定する¹². $j: N \cong T \hookrightarrow M$ を包含写像とする. $j_*\Theta \in \Omega^{m-s}(M)$ を Θ を T の外ではゼロで拡張した微分形式とする. このとき, $j_*\Theta$ は S の Poincaré 双対 $\eta_S \in H^{m-s}(M)$ を代表する.

Proof. $N \cong T$ 上の微分形式 Θ を T の外では 0 で拡張した微分形式 $j_*\Theta$ は, $\text{Supp}(\Theta) \subset \mathring{D}(N)$ および $D(N)$ が M の中で閉という仮定より M 上の smooth form になっていることに注意しよう.

2025.6.24 ここまで

任意のコンパクト台閉形式 $\alpha \in \Omega_c^s(M)$ について

$$\int_M \alpha \wedge j_*\Theta = \int_S \alpha$$

を示せばよい. $t \geq 1$ に対して t 倍写像 $t: N \rightarrow N, v \mapsto tv$ を考える. $\Theta^{(t)} := t^*\Theta$ は台が $\frac{1}{t}\mathring{D}(N)$ に含まれる Thom form になっている. $t \rightarrow \infty$ の極限で, 「 S に台を持つデルタ関数」に近づいていくと考える.

$\Theta^{(t)}, t \geq 1$ は $\mathring{D}(N) \cong N$ の Thom form であるから, そのコホモロジー類は t によらない. つまり $[\Theta^{(t)}] = [\Theta] \in H_{\text{cv}}^{m-s}(\mathring{D}(N))$ である. このことから $[j_*\Theta^{(t)}] = [j_*\Theta] \in H^{m-s}(M)$ であることが分かる. よって

$$\int_M \alpha \wedge j_*\Theta = \int_M \alpha \wedge j_*\Theta^{(t)} = \int_N j^*\alpha \wedge \Theta^{(t)}$$

左辺は t によらない. 右辺を $t \rightarrow \infty$ の極限で計算して, 主張を示そう.

$\{U_i\}$ を S の相対コンパクトな座標近傍による開被覆で, その上で自明化 $N|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^{m-s}$ を持つものとする. $\rho_i: S \rightarrow [0, 1]$ を $\{U_i\}$ に付随する (局所有限な) 1 の分割とする. N 上に引き戻して N 上の関数 $\rho_i: N \rightarrow [0, 1]$ とみなす. このとき

$$\int_N \alpha \wedge \Theta^{(t)} = \sum_i \int_N \rho_i \alpha \wedge \Theta^{(t)} = \sum_i \int_{N|_{U_i}} \rho_i \alpha \wedge \Theta^{(t)}$$

和の各項は $\text{Supp } \rho_i \cap \text{Supp } \alpha \cap D(N) \neq \emptyset$ のときのみ値を持つ. $\text{Supp}(\alpha) \cap D(N)$ はコンパクトで, $\text{Supp } \rho_i$ は局所有限であることから, そのような i は有限個しかない.

¹²ファイバー方向に関数倍する写像 $N \rightarrow N, N_x \ni v \mapsto f(x)v \in N_x$ (ただし $f: S \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は滑らかな関数) で引き戻すことにより, このように仮定できる.

ファイバーの向きを保つ自明化 $N|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^{m-s}$ をとり, U_i の正の座標を (x_1, \dots, x_s) , \mathbb{R}^{m-s} の座標を (y_1, \dots, y_{m-s}) と書く. 向きの定め方から, $(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_{m-s})$ は M の座標として正である. この座標について

$$\begin{aligned}\Theta &= \sum_{I,J} \theta_{I,J}(x,y) dx^I \wedge dy^J && (y \text{ 方向にコンパクト台}) \\ \rho_i \alpha &= \sum_{I,J} a_{i,I,J}(x,y) dx^I \wedge dy^J && (x \text{ 方向にコンパクト台})\end{aligned}$$

と局所座標表示しておく. このとき

$$\begin{aligned}\int_{N|_{U_i}} \rho_i \alpha \wedge \Theta^{(t)} &= \sum_{I,J} \int_{U_i \times \mathbb{R}^{m-s}} a_{i,I,J}(x,y) \theta_{I^c, J^c}(x, ty) \epsilon_{I,J} t^{|J^c|} dx \wedge dy \\ &= \sum_{I,J} \int_{U_i \times \mathbb{R}^{m-s}} a_{i,I,J}(x, y/t) \theta_{I^c, J^c}(x, y) \epsilon_{I,J} t^{-|J|} dx \wedge dy\end{aligned}$$

ここで $dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_s$, $dy = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{m-s}$ であり, $\epsilon_{I,J} \in \{-1, 1\}$ は

$$dx^I \wedge dy^J \wedge dx^{I^c} \wedge dy^{J^c} = \epsilon_{I,J} dx \wedge dy$$

で決まる. 第2式では $y \rightarrow y/t$ と変数変換を行った. $t \rightarrow \infty$ の極限では $J = \emptyset$ のときのみが寄与し, このとき $J^c = \{1, \dots, m-s\}$, $I^c = \emptyset$, $I = \{1, \dots, s\}$ である. またこのとき $\epsilon_{I,J} = 1$ である. $t \rightarrow \infty$ の極限で

$$\begin{aligned}\int_{U_i \times \mathbb{R}^{m-s}} a_{i, \{1, \dots, s\}, \emptyset}(x, 0) \theta_{\emptyset, \{1, \dots, m-s\}}(x, y) dx \wedge dy &= \int_{U_i} a_{i, \{1, \dots, s\}, \emptyset}(x, 0) dx \\ &= \int_{U_i} \rho_i \alpha|_S\end{aligned}$$

に収束する. i について和をとると $\int_S \alpha$ を得る. □

問 3.18. 上の定理において, S がコンパクトのときは, $j_* \Theta$ はコンパクト Poincaré 双対 $\eta_{S,c} \in H_c^{m-s}(M)$ も代表することを示せ.

注 3.19. 上の定理により, S の Poincaré 双対 η_S は S のいくらでも近くに (S の任意の近傍に) 台を持つ微分形式で代表できることが言える (局所化原理).

注 3.20. 上の証明では Θ を t 倍写像でリスケールした $\Theta^{(t)}$ を考えたが, 次のような議論の方法もある [Bott-Tu, §6]. $\pi: N \rightarrow S$ を射影, $i: S \rightarrow N$ を包含写像とする. $i \circ \pi$ が id とホモトピックであることを使って

$$\alpha|_{\dot{D}(N)} - \pi^* i^*(\alpha|_{\dot{D}(N)}) = d\beta$$

と書くことができる. ここで β は $\dot{D}(N)$ 上の $(s-1)$ -form. ここでこのとき

$$\begin{aligned}\int_{\dot{D}(N)} \alpha \wedge \Theta &= \int_{\dot{D}(N)} (\pi^* i^* \alpha + d\beta) \wedge \Theta \\ &= \int_{\dot{D}(N)} \pi^* i^* \alpha \wedge \Theta + \int_{\dot{D}(N)} d(\beta \wedge \Theta)\end{aligned}$$

ここで β の台は $\pi^{-1}(\pi(\text{Supp}(\alpha) \cap D(N)))$ に含まれるように取ることができる (これはホモトピーの構成まで戻るとわかる). ここで, $\pi(\text{Supp}(\alpha) \cap D(N))$ はコンパクトであり, 従って $\beta \wedge \Theta$ の台はコンパクトになることが分かる. このことから第2項は消える. 第1項は projection formula を使うと

$$\int_{\hat{D}(N)} \pi^* i^* \alpha \wedge \Theta = \int_S i^* \alpha \wedge \pi_* \Theta = \int_S i^* \alpha$$

となる.

3.4 ベクトル束の切断と Euler 類

参考文献: [Bott-Tu, §12]

本節では $E \rightarrow M$ を rank が n の C^∞ 級実ベクトル束とする.

定義 3.21. 切断 $s: M \rightarrow E$ が (ゼロ切断と) 横断的 (transversal) であるとは, 任意の $x \in s^{-1}(0)$ に対して

$$\text{Im}(d_x s: T_x M \rightarrow T_x E) + T_x M = T_x E$$

が成り立つことである. 同じことであるが, x の近傍の局所自明化 $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ の下で, $s(y) = (y, f(y))$ と表示するとき (ここで $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$), $d_x f: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ は全射. [横断的な切断, 横断的でない切断の絵を描く.]

命題 3.22. $s: M \rightarrow E$ を横断的な切断とする.

- (1) $Z := s^{-1}(0)$ は M の C^∞ 級部分多様体.
- (2) ベクトル束の完全列 $0 \rightarrow TZ \rightarrow TM|_Z \xrightarrow{ds} E|_Z \rightarrow 0$ が存在する. 特に, s の微分は Z の法束 $N_{Z/M}$ と $E|_Z$ の間の同型を定める.

Proof. 多様体論の標準的な内容のため, 詳細は省略するが, (2) における写像 ds は次のように定まる. $x \in s^{-1}(0)$ に対して

$$d_x s: T_x M \rightarrow T_x E \cong T_x M \oplus E_x \xrightarrow{\text{第2射影}} E_x$$

s が transversal であるとき, この写像 $d_x s$ が全射となる. この核が $T_x Z$ になる. \square

注 3.23. ここでは M は E のゼロ切断 (の像) と同一視している. ゼロ切断上の点 $x \in M$ に対して, 標準的な分解 $T_x E \cong T_x M \oplus E_x$ があることに注意しよう. 一般の点 $x \in E$ に対しては, 完全列 $0 \rightarrow E_{p(x)} \rightarrow T_x E \xrightarrow{d_x p} T_{p(x)} M \rightarrow 0$ はあるが, この canonical な分裂はない. (E の接続を与えると, 分裂が定まる.)

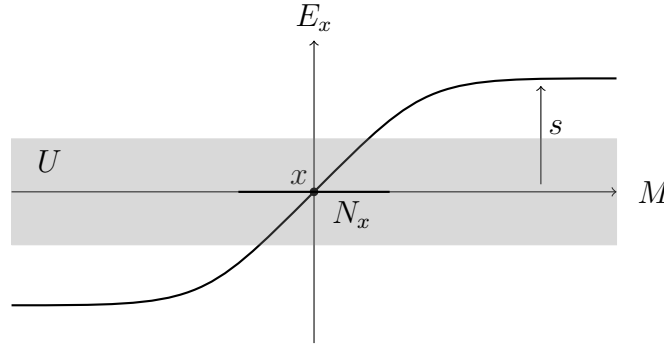
$E \rightarrow M$ が向きづけられていると仮定し, $s: M \rightarrow E$ を transversal section とする. 上の命題の完全列から誘導される同型 (ホモトピーを除いて一意)

$$T_x M \cong T_x Z \oplus E_x, \quad E_x \cong N_{Z/M,x}$$

が向きを保つように, Z の向きとその法束 $N = N_{Z/M}$ の向きを定める¹³.

定理 3.24. 上の状況で, $Z = s^{-1}(0)$ の Poincaré 双対 η_Z は E の Euler 類 $e(E) \in H^n(M)$ と等しい.

Proof. $N = N_{Z/M}$ を Z の M における法束とする. 管状近傍定理より, 開部分多様体としての埋め込み $N \hookrightarrow M$ がとれる. N の計量をうまくとり, 円盤束 $D(N)$ が M の中で閉になるとする.



ゼロ切断 $M \subset E$ の開近傍 U で fiberwise に凸なもの (つまり各 $x \in M$ に対して $U \cap E_x$ が凸になる) をうまくとると, $s^{-1}(U) \subset \mathring{D}(N)$ が成立する¹⁴. さらに E の Thom form Θ を (ファイバー方向の rescaling により) $\text{Supp } \Theta \subset U$ となるようにとることができる. このとき $\text{Supp}(s^*\Theta) \subset s^{-1}(U) \subset \mathring{D}(N)$ である.

Euler 類の定義より $e(E) = [s^*\Theta]$ であった. $s^*\Theta$ が N の Thom form になることを示せばよい. つまり, 任意の $x \in Z$ に対して

$$\int_{N_x} s^*\Theta = 1$$

を示せばよい. $s(N_x)$ と E_x とをホモトピックに結ぶことで,

$$\int_{N_x} s^*\Theta = \int_{s(N_x)} \Theta = \int_{E_x} \Theta = 1$$

が分かる. ここではこの議論の詳細を埋めることはしないが, 以下で, 孤立ゼロ点の場合にこの部分をもう少し丁寧に議論する (その場合の議論をこの場合にも適用できる). □

上の証明では, $Z = s^{-1}(0)$ の Poincaré 双対 η_Z を $E \rightarrow M$ の Thom 類の引き戻しとして構成した. Thom 類自体は, ゼロ切断 $M \subset E$ の Poincaré 双対 $\eta_M \in H^n(E)$ とみなすことができる. 従って上の定理は次の定理の特別の場合である.

¹³この規則には少し例外がある. Z が 0 次元の場合は, $T_x M \cong E_x$ は向きを保つとは限らない. 点 $x \in Z$ の向きは, 同型 $T_x M \xrightarrow{ds} E_x$ が向きを保つとき 1, 保たないとき -1 と定める.

¹⁴実際, $M \setminus \mathring{D}(N)$ の s による像 $s(M \setminus \mathring{D}(N))$ は E の閉集合であり, ゼロ切断と交わらない. U はこの閉集合の補集合に含まれるように取ればよい.

定理 3.25. M, N を向きづけられた C^∞ 級多様体とする. $S \subset N$ を余次元が n の向きづけられた閉部分多様体とし, $f: M \rightarrow N$ を S と横断的 ($f \pitchfork S$) な C^∞ 級写像とする. つまり, 任意の $x \in f^{-1}(S)$ に対して $\text{Im}(d_x f) + T_{f(x)} S = T_{f(x)} N$ が成り立つとする. このとき, $f^{-1}(S) \subset M$ は余次元 n の部分多様体になり, 同型 $N_{f^{-1}(S)/M} \cong f^* N_{S/N}$ を通じて向きづけることができる. このとき,

$$\eta_{f^{-1}(S)} = f^* \eta_S$$

が成立する. ここで $\eta_{f^{-1}(S)} \in H^n(M)$ は $f^{-1}(S)$ の Poincaré 双対であり, $\eta_S \in H^n(N)$ は S の Poincaré 双対である.

問 3.26. 定理 3.25 を示せ.

問 3.27. 定理 3.25 を用いて, 次を示せ. S_1, S_2 が M の向きづけられた閉部分多様体で横断的に交わるとき, $\eta_{S_1 \cap S_2} = \eta_{S_1} \wedge \eta_{S_2}$ を示せ. ただし, $S_1 \cap S_2$ の向きは $N_{S_1 \cap S_2} \cong N_{S_1}|_{S_1 \cap S_2} \oplus N_{S_2}|_{S_1 \cap S_2}$ を通じて向きづける. ここで $N_{S_1 \cap S_2}, N_{S_1}, N_{S_2}$ は $S_1 \cap S_2, S_1, S_2$ の (M の部分多様体としての) 法束である.

例 3.28. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の接束 $TS^2 \rightarrow S^2$ の切断として, z 軸に関する回転を生成するベクトル場 s をとる. このとき

$$s^{-1}(0) = \{N, S\}$$

ここで $N = (0, 0, 1), S = (0, 0, -1)$. N の近くではベクトル場は

$$-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

であり, これは N で横断的である. さらに写像 $(x, y) \mapsto (-y, x)$ は向きを保っている. このことから N に誘導される向きは $+1$ である. S についても同様.

従って

$$\int_{S^2} e(TS^2) = \int_{S^2} \eta_{\{N, S\}} = \int_{\{N, S\}} 1 = 2.$$

3.4.1 孤立ゼロ点の場合

次に切断は横断的ではないが, ゼロ点が孤立している場合を考えよう. M をコンパクト向きづけられた多様体, $E \rightarrow M$ を向きづけられた実ベクトル束で, $\text{rank } E = \dim M = m$ とする. 切断 $s: M \rightarrow E$ に対して, そのゼロ点集合 $s^{-1}(0)$ が有限集合であると仮定する.

点 $x \in s^{-1}(0)$ での s の重複度 $\text{mult}_x(s)$ を定義する. 点 x を中心とする閉球体 B で s は $B \setminus \{x\}$ で消えていないものをとる. $E|_B \cong B \times \mathbb{R}^m$ を向きを保つ自明化とする. これにより $s: B \rightarrow \mathbb{R}^m$ とみなす. このとき, $\text{mult}_x(s)$ を

$$\frac{s}{\|s\|} : \partial B \rightarrow S^{m-1}$$

の写像度とする. ここで ∂B には B の境界としての向きが入り, S^{m-1} にも D^m の境界としての向きを入れている.

定理 3.29. 上の状況の下で,

$$\int_M e(E) = \sum_{x \in s^{-1}(0)} \text{mult}_x(s)$$

Proof. $s^{-1}(0) = \{x_1, \dots, x_k\}$ とする. B_i を点 x_i を中心とする閉球体で, 互いに交わらないものとする. $E \rightarrow M$ のゼロ切断の開近傍 U で, fiberwise に凸であり, $s^{-1}(U) \subset \mathring{B}_1 \cup \dots \cup \mathring{B}_k$ が満たされるものをとることができる. $E \rightarrow M$ の Thom form Θ で, 台が U に含まれるものを取っておく. このとき, $\text{Supp } s^*\Theta \subset \mathring{B}_1 \cup \dots \cup \mathring{B}_k$ であるから,

$$\int_M e(E) = \int_M s^*\Theta = \sum_{i=1}^k \int_{B_i} s^*\Theta$$

あとは $\int_{B_i} s^*\Theta = \text{mult}_{x_i}(s)$ を示せばよい. 切断 s をスケールして s とホモトピックな切断 $t \cdot s$ ($t \geq 1$) におきかえても $\int_{B_i} s^*\Theta$ の値は変わらないことに注意する¹⁵.

向きを保つ自明化 $E|_{B_i} \cong B_i \times \mathbb{R}^m$ を選ぶ. $p_2: B_i \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ を第2射影とする. $\theta \in \Omega_c^m(\mathbb{R}^m)$ を $\int_{\mathbb{R}^m} \theta = 1$, $\text{Supp } \theta \subset \mathring{D}^m$ を満たすものとする. $p_2^*\theta$ と Θ は共に Thom 類を与えているから,

$$\Theta = p_2^*\theta + d\beta$$

を満たす $\beta \in \Omega_{\text{cv}}^{n-1}(E|_{B_i})$ が存在する. 十分大きな $R > 1$ に対して, $\text{Supp } \beta$ は $B_i \times D_R$ に含まれる. ここで $D_R \subset \mathbb{R}^m$ は原点中心, 半径 R の閉球体. s をスケールすることで, $s|_{\partial B_i}$ は $\partial B_i \times D_R$ に値をとらないと仮定してよい. このとき,

$$\begin{aligned} \int_{B_i} s^*\Theta &= \int_{B_i} s^*(p_2^*\theta + d\beta) \\ &= \int_{B_i} (p_2 \circ s)^*\theta + \int_{\partial B_i} s^*\beta \end{aligned}$$

ここで右辺第2項は $s(\partial B_i)$ 上で β が消えていることからゼロとなる.

$p_2 \circ s$ を改めて s と書こう. $\theta = d\sigma$ なる $m-1$ 形式 $\sigma \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ をとるとき,

$$\begin{aligned} \int_{B_i} s^*\theta &= \int_{B_i} s^*d\sigma \\ &= \int_{B_i} ds^*\sigma \\ &= \int_{\partial B_i} s^*\sigma \end{aligned}$$

ここで, $s|_{\partial B_i}$ と $\frac{s}{\|s\|}|_{\partial B_i}$ はホモトピックであり, そのホモトピーの像の上で σ は閉形式であることから,

$$= \int_{\partial B_i} \left(\frac{s}{\|s\|} \right)^* \sigma$$

一方, $\sigma|_{S^{m-1}}$ は閉形式で, $\int_{S^{m-1}} \sigma = \int_{D^m} d\sigma = \int_{D^m} \theta = 1$ より, σ は $H^{m-1}(S^{m-1})$ の生成元を与える. 従ってこれは $\text{mult}_{x_i}(s)$ に等しい. \square

2025.7.1 ここまで

¹⁵ここで s と $t \cdot s$ を結ぶホモトピー h_u として, $h_u(\partial B_i) \cap \text{Supp } \Theta = \emptyset$ を満たすものが取れることを使っている.

3.5 Thom 類と Euler 類の性質

以上では de Rham コホモロジーで Thom 類と Euler 類を論じたが、より一般の位相空間 X 上の向きづけられたベクトル束 $E \rightarrow M$ に対しても (\mathbb{Z} 係数で) Thom 類, Euler 類が定義される. (講義の時間の都合で説明は省略.)

向きづけられたランク n の実ベクトル束 $E \rightarrow X$ の Thom 類を Θ_E と書くことにする. de Rham 理論では Θ_E は $H_{cv}^n(E)$ の元として定めた. 特異理論では, \mathbb{Z} 係数の相対特異コホモロジー $H^n(E, E \setminus X, \mathbb{Z})$ の元として定めることができる. ここで $X \subset E$ はゼロ切断とみなしている.

Thom 類は以下の性質を持つ.

1. (同型) $\varphi: E \cong F$ を向きづけられたベクトル束 $E \rightarrow X, F \rightarrow X$ の同型とするとき, $\varphi^*\Theta_F = \Theta_E$.
2. (自然性) $f: X \rightarrow Y$ を写像, $E \rightarrow Y$ を向きづけられたベクトル束とする. 引き戻しの図式

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

の下で, $\Theta_{f^*E} = \tilde{f}^*\Theta_E$.

3. (和) $\Theta_{E \oplus F} = p_1^*\Theta_E \cup p_2^*\Theta_F$. ただし, $p_1: E \oplus F \rightarrow E, p_2: E \oplus F \rightarrow F$ は射影. ここでカップ積 \cup は de Rham コホモロジーの場合は wedge 積 \wedge に対応するもの.
4. (向き) \bar{E} を E の向きを反対にしたベクトル束とするとき, $\Theta_{\bar{E}} = -\Theta_E$.

Euler 類は Thom 類の切断 $s: X \rightarrow E$ による引き戻し $e(E) = s^*\Theta_E$ として定義できる. 同様に Euler 類は以下の性質を持つ.

1. (同型) $E \cong F$ ならば $e(E) = e(F)$.
2. (自然性) $e(f^*E) = f^*e(E)$.
3. (和) $e(E \oplus F) = e(E) \cup e(F)$.
4. (向き) $e(\bar{E}) = -e(E)$.
5. (切断) $E \rightarrow X$ が至る所消えない切断 s をもつとき, $e(E) = 0$.
6. (奇ランク) $E \rightarrow M$ が向きづけられた, ランクが奇数の実ベクトル束とする. このとき $2e(E) = 0$.

Proof. 写像 $E \rightarrow \bar{E}, v \mapsto -v$ は向きを保つ同型. 従って $e(E) = e(\bar{E})$. これと上の性質から $e(E) = -e(E)$. つまり $2e(E) = 0$. \square

3.6 接束の Euler 類と Euler 数

参考文献：[Bott-Tu, §11]

位相空間 X の Euler 数を導入する．特異ホモロジー群 $\bigoplus_{p \geq 0} H_p(X, \mathbb{Z})$ が有限生成アーベル群であると仮定する．このとき，任意の体 k に対して， $\bigoplus_{p \geq 0} H^p(X, k)$ は有限次元 k ベクトル空間であり，整数

$$\chi(X) := \sum_{p \geq 0} (-1)^p \dim_k H^p(X, k)$$

が定義される．これを X の Euler 数という．

問 3.30. 普遍係数定理を用いて， $\chi(X)$ が well-defined であること，また，体 k の取り方によらないことを示せ．（一般に， $\dim H^p(X, k)$ は体 k の取り方によるが，その交代和は k の取り方によらない．）

注 3.31. X が有限 CW 複体であるとき，

$$\chi(X) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p (X \text{ の } p\text{-cell の数})$$

が成り立つ（何故か？）．凸多面体は球面 S^2 の胞体分割を与えていることから， $\chi(S^2) = 2$ は Euler の多面体定理「面の数 - 辺の数 + 頂点の数 = 2」の言い換えである．これが Euler 数，Euler 類の語源になっている．

定理 3.32. コンパクト向きづけられた多様体 M に対して，

$$\chi(M) = \int_M e(TM)$$

が成り立つ．

注 3.33. Euler 数 $\chi(M)$ は明らかに M の向きの取り方によらない．一方 M の向きを反対にすると， $e(TM)$ は (-1) 倍になり， M 上の積分も (-1) 倍になるため，右辺も M の向きの取り方によらない．

この定理を証明するために3つの補題を準備する．

補題 3.34. $\Delta \subset M \times M$ を対角集合，つまり， $\Delta = \{(x, x) \in M \times M \mid x \in M\}$ とする．また $\{\alpha_i\}$ ， $\{\beta_i\}$ を *de Rham* コホモロジー $H^*(M)$ の基底で

$$\int_M \alpha_i \wedge \beta_j = \delta_{i,j}$$

を満たすものとする（Poincaré 双対定理から存在する）．このとき Δ の Poincaré 双対 η_Δ は次で与えられる．

$$\eta_\Delta = \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \otimes \beta_i, \quad |\alpha_i| := \deg \alpha_i$$

ここで $\alpha \otimes \beta$ は $M \times M$ のコホモロジー類 $p_1^* \alpha \wedge p_2^* \beta$ を表す¹⁶（ただし $p_i: M \times M \rightarrow M$ は第 i 射影）．

¹⁶Künneth の定理から $H^*(M) \otimes H^*(M) \rightarrow H^*(M \times M)$, $\alpha \otimes \beta \mapsto p_1^* \alpha \wedge p_2^* \beta$ は同型である．

Proof. コホモロジー類 $\omega, \tau \in H^*(M)$ をとり, $\omega = \sum_i \omega_i \beta_i$, $\tau = \sum_i \tau_i \alpha_i$ とおく ($\omega_i, \tau_i \in \mathbb{R}$). このとき

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \omega \otimes \tau &= \sum_{i,j} \int_M \omega_i \beta_i \wedge \tau_j \alpha_j \\ &= \sum_{i,j} \omega_i \tau_j \int_M (-1)^{|\alpha_j||\beta_i|} \alpha_j \wedge \beta_i \\ &= \sum_{i,j} \omega_i \tau_i (-1)^{|\alpha_i||\beta_i|} \end{aligned}$$

一方で

$$\begin{aligned} \int_{M \times M} (\omega \otimes \tau) \wedge \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \otimes \beta_i &= \sum_{j,k,i} \int_{M \times M} (\omega_j \beta_j \otimes \tau_k \alpha_k) \wedge (-1)^{|\alpha_i|} (\alpha_i \otimes \beta_i) \\ &= \sum_{j,k,i} \omega_j \tau_k (-1)^{|\alpha_i|+|\alpha_i||\alpha_k|} \int_{M \times M} (\beta_j \wedge \alpha_i) \otimes (\alpha_k \wedge \beta_i) \\ &= \sum_{j,k,i} \omega_j \tau_k (-1)^{|\alpha_i|+|\alpha_i||\alpha_k|} \int_M \beta_j \wedge \alpha_i \int_M \alpha_k \wedge \beta_i \\ &= \sum_{j,k,i} \omega_j \tau_k (-1)^{|\alpha_i|+|\alpha_i||\alpha_k|} (-1)^{|\beta_j||\alpha_i|} \delta_{i,j} \delta_{k,i} \\ &= \sum_i \omega_i \tau_i (-1)^{|\alpha_i|+|\alpha_i|^2+|\alpha_i||\beta_i|} \\ &= \sum_i \omega_i \tau_i (-1)^{|\alpha_i||\beta_i|} \end{aligned}$$

上の2式は等しいので, $\eta_{\Delta} = \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \otimes \beta_i$. □

補題 3.35. $N_{\Delta/M \times M} \cong TM$.

Proof. 対角写像 $\Delta: M \rightarrow M \times M$, $x \mapsto (x, x)$ の微分から定まる完全列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_x M & \xrightarrow{d_x \Delta} & T_{(x,x)}(M \times M) = T_x M \oplus T_x M & \longrightarrow & T_x M \longrightarrow 0 \\ & & v & \longmapsto & (v, v) & & \\ & & & & (v, w) & \longmapsto & v - w \end{array}$$

より明らか. □

補題 3.36. S を M の向きづけられた部分多様体とすると, $\eta_S|_S = e(N_{S/M})$.

Proof. Θ を管状近傍 $N \cong N_{S/M} \xrightarrow{j} M$ の Thom form とするとき, $\eta_S = [j_* \Theta]$ であったことを思い出すと,

$$\eta_S|_S = [j_* \Theta]|_S = [\Theta]|_S = e(N_{S/M})$$

□

定理 3.32 の証明.

$$\begin{aligned}
\int_M e(TM) &= \int_{\Delta} e(N_{\Delta/M \times M}) && \text{Lemma 3.35 より} \\
&= \int_{\Delta} \eta_{\Delta} && \text{Lemma 3.36 より} \\
&= \int_{\Delta} \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \otimes \beta_i && \text{Lemma 3.34 より} \\
&= \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \int_M \alpha_i \wedge \beta_i \\
&= \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} = \chi(M).
\end{aligned}$$

□

系 3.37 (Poincaré-Hopf の定理). M をコンパクト多様体 (向きづけの仮定は不要). V を M 上のベクトル場でゼロ点が孤立しているものとする. このとき

$$\chi(M) = \sum_{x: V_x=0} \text{mult}_x(V)$$

Proof. M が向きづけられているとき. 右辺は定理 3.29 より $\int_M e(TM)$ に等しく, 従って前定理より $\chi(M)$ に等しい.

M が向きづけられていないときも, 点 x のまわりで局所的な向きを選ぶことで $\text{mult}_x(V)$ が定まる. 底空間の向きとファイバーの向きが連動するため, $\text{mult}_x(V)$ は局所的な向きの取り方によらない. 2 対 1 の被覆 $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ であって, \widetilde{M} が向きづけられているようなものがとれる (orientation cover). 例えば実直線束 $\wedge^m T^*M$ (ただし $m = \dim M$) に計量を入れて, $\widetilde{M} = S(\wedge^m T^*M)$ と取ればよい. このとき \widetilde{M} 上のベクトル場 \widetilde{V} で $p_*\widetilde{V} = V$ なるものに対して公式を適用すると

$$\chi(\widetilde{M}) = \sum_{x: \widetilde{V}_x=0} \text{mult}_x(\widetilde{V})$$

を得るが, この式の両辺は示したい式の両辺の各々 2 倍になっている. □

問 3.38. $\widetilde{M} \rightarrow M$ をコンパクト多様体 M の 2 重被覆とすると, $\chi(\widetilde{M}) = 2\chi(M)$ を示せ. ヒント: 例えば M の finite good cover をとってみよ.

問 3.39. $G(r, n)$ を \mathbb{C}^n の r 次元複素部分空間のなすグラスマン多様体とする. \mathbb{C}^n への S^1 作用を $t \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = (v_1, tv_2, \dots, t^{n-1}v_n)$, $t \in S^1$ で与える. この S^1 作用が誘導するグラスマン多様体 $G(r, n)$ への S^1 作用を考える.

- (1) $G(r, n)$ への S^1 作用の固定点は孤立していることを示せ.
- (2) Poincaré-Hopf の定理から, $\chi(G(r, n))$ は S^1 作用の固定点の個数と等しいことを結論し, $\chi(G(r, n)) = \binom{n}{r}$ を導け.

4 Chern 類

参考文献：[Bott-Tu, §20]

本節ではコホモロジー理論として \mathbb{Z} 係数の特異コホモロジーを使い、 X を一般の位相空間とする¹⁷。ランク r の複素ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対して Chern 類と呼ばれるコホモロジー類

$$c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z}), \quad 0 \leq i \leq r$$

を対応させることが目標である。ここで $c_0(E) = 1$ であり、

$$c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \cdots + c_r(E)$$

を全 Chern 類 (total Chern class) という。

$E \rightarrow X$ が複素直線束であるとき、 $c_1(E)$ は Euler 類と定義する。

$$c_1(E) := e(E)$$

一般には、Euler 類 $e(E)$ は $c_r(E)$, $r = \text{rank } E$ と一致する。

注 4.1. 複素直線束 $L_1, L_2, L \rightarrow X$ に対して

$$\begin{aligned} c_1(L_1 \otimes L_2) &= c_1(L_1) + c_1(L_2) \\ c_1(L^*) &= -c_1(L) \end{aligned}$$

が成り立つことに注意する (定理 2.46)。2 番目の等式は $L \otimes L^* = \text{Hom}(L, L)$ が自明束であることと、1 番目の性質からわかる。

4.1 Chern 類の定義

ランク r の複素ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対してその射影化 $\mathbb{P}(E) \rightarrow X$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \bigcup_{x \in X} \mathbb{P}(E_x) \\ &= \bigcup_{x \in X} \{\ell \subset E_x \mid \dim_{\mathbb{C}} \ell = 1\} \end{aligned}$$

これはファイバーが $\mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}$ となるファイバー束である。 $\mathbb{P}(E)$ 上の tautological line bundle $L \rightarrow \mathbb{P}(E)$ が次で定まる。

$$L = \{(\ell, v) \in \mathbb{P}(E) \times E \mid v \in \ell\} \rightarrow \mathbb{P}(E) \quad (\ell, v) \mapsto \ell$$

この tautological line bundle を射影束のファイバー $\mathbb{P}(E_x) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}$ に制限すると、以前に定義した射影空間上の tautological line bundle に他ならない。

射影空間の \mathbb{Z} 上のコホモロジーについて次の事実を使う。

¹⁷Cech 理論で主 S^1 束の Euler 類を定義したときは、底空間が good open cover を持つパラコンパクト・ハウスドルフ空間という仮定をおいた。一般の位相空間上の主 S^1 束の Euler 類は、問 2.9 で障害理論により特異コホモロジー類として定義した。

命題 4.2. $L \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}$ を *tautological line bundle* とする. $x := -c_1(L) \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}, \mathbb{Z})$ とおくと、環として $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^r)$.

特に、

$$H^{2j}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}x^j \quad 0 \leq j \leq r-1$$

でありこれ以外の次数のコホモロジーはゼロである.

問 4.3. $0 \leq j \leq r-1$ とする. x^j は線形部分空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^{r-j-1} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}$ の Poincaré 双対であることを示せ. (ここで線形部分空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^{r-j-1}$ とは、ある $r-j$ 次元部分空間 $V \subset \mathbb{C}^r$ の射影化のことである. $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ は複素多様体の構造を持ち、自然な向きを持っていることにも注意する.) ヒント: $j=1$ のときは、 L^* の横断的な切断 s で $s^{-1}(0) = \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-2}$ となるものを見つければ、定理 3.24 から分かる. そのような切断 s としては、全射線形写像 $\varphi: \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}$ をとり、 $L_\ell = \ell \subset \mathbb{C}^r \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ で与えられる元 $s(\ell) \in L_\ell^*$ を考えればよい. $j \geq 2$ のときは、問 3.27 の結果を使う.

次の Leray-Hirsch の定理も使う.

定理 4.4 (Leray-Hirsch). $p: E \rightarrow X$ をファイバー束とする. コホモロジー類 $c_1, \dots, c_N \in H^*(E, \mathbb{Z})$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $c_1|_{E_x}, \dots, c_N|_{E_x}$ が $H^*(E_x, \mathbb{Z})$ の \mathbb{Z} 基底をなすと仮定する. $H^*(E, \mathbb{Z})$ を $p^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(E, \mathbb{Z})$ により $H^*(X, \mathbb{Z})$ 加群とみなすとき、 c_1, \dots, c_N は $H^*(E, \mathbb{Z})$ の $H^*(X, \mathbb{Z})$ 加群としての自由基底をなす.

$$H^*(E, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{j=1}^N H^*(X, \mathbb{Z})c_j$$

注 4.5. Leray-Hirsch の定理の条件の下で、 $p^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(E, \mathbb{Z})$ は単射であることに注意する. 実際、 $H^*(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^*(E, \mathbb{Z}) \xrightarrow{c_i \cup} H^*(E; \mathbb{Z})$ が単射である.

問 4.6. X が finite good cover を持つパラコンパクトハウスドルフ空間のとき、Mayer-Vietoris を使った議論で Leray-Hirsch の定理を示せ. ([Bott-Tu, §5]などを参照. 一般の場合の証明は例えば [Hatcher, Theorem 4D.1]を見よ.)

射影束上の tautological line bundle $L \rightarrow \mathbb{P}(E)$ に対して、 $x = -c_1(L) = -e(L)$ とおく. このとき、 $\{1, x, \dots, x^{r-1}\}$ はファイバー $\mathbb{P}(E_y)$, $y \in X$ に制限すると

$$x|_{\mathbb{P}(E_y)} = -c_1(L)|_{\mathbb{P}(E_y)} = -c_1(L|_{\mathbb{P}(E_y)})$$

より $H^*(\mathbb{P}(E_y), \mathbb{Z})$ の \mathbb{Z} 上の基底をなす. 従って Leray-Hirsch の定理から

$$H^*(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=0}^{r-1} H^*(X, \mathbb{Z})x^i$$

このとき、 $-x^r$ を $H^*(X, \mathbb{Z})$ 基底 $\{1, x, \dots, x^{r-1}\}$ で展開したときの係数として Chern 類が定義される.

$$-x^r = c_1(E)x^{r-1} + c_2(E)x^{r-2} + \dots + c_r(E), \quad c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$$

注 4.7. E が直線束の場合、 $\mathbb{P}(E) = X$ であり、その上の tautological line bundle は E 自身. このとき $x = -c_1(E)$ となって上の定義と合致する.

4.2 Chern 類の公理

Chern 類 $c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_r(E)$ を公理的性質によって特徴づける.

1. (同型) 複素ベクトル束 $E, F \rightarrow X$ が同型であるとき, $c_i(E) = c_i(F)$.
2. (自然性) $f: X \rightarrow Y$ を連続写像, $E \rightarrow Y$ を複素ベクトル束とする. このとき, $f^*c_i(E) = c_i(f^*E)$.
3. (和公式) 全 Chern 類は $c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F)$ を満たす. 各次数に分けると,

$$c_k(E \oplus F) = \sum_{i+j=k} c_i(E) \cup c_j(F)$$

4. (直線束) E が直線束のとき, $c(E) = 1 + e(E)$.

このうち, 1 と 4 は明らか. 3 の和公式の証明は後で行う. 2 の自然性の証明をしておこう.

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

の射影化をとると

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f}^*L & \longrightarrow & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(f^*E) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{P}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

なる図式を得る. ここで $L \rightarrow \mathbb{P}(E)$ は tautological line bundle. \tilde{f}^*L は $\mathbb{P}(f^*E)$ 上の tautological line bundle と同一視できる. $x = -c_1(L)$ とおくと, $\tilde{f}^*x = -c_1(\tilde{f}^*L)$ である (Euler 類に対する自然性). 関係式

$$x^r + c_1(E)x^{r-1} + \cdots + c_r(E) = 0 \quad \text{in } H^*(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z})$$

を \tilde{f} で引き戻すと

$$(\tilde{f}^*x)^r + (f^*c_1(E))(\tilde{f}^*x)^{r-1} + (f^*c_2(E))(\tilde{f}^*x)^{r-2} + \cdots + (f^*c_r(E)) = 0$$

を得る. 従って $f^*c_i(E) = c_i(f^*E)$ である.

定理 4.8. ランク r の複素ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対してコホモロジー類

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_r(E) \in H^*(X, \mathbb{Z}), \quad c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$$

を対応させる規則で, 上の公理 1-4 を満たすものは一意である.

Proof. $E \mapsto \tilde{c}(E)$ を公理 1-4 を満たす (複素ベクトル束に底空間のコホモロジー類を対応させる) 規則とする. CW 近似定理 [Hatcher, Proposition 4.13] より, パラコンパクトハウスドルフ空間上のベクトル束について $c = \tilde{c}$ が示されれば十分である¹⁸.

複素ベクトル束 $E \rightarrow X$ をとり, その射影化 $p: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ を考える. $\mathbb{P}(E)$ 上のベクトル束の完全列

$$0 \rightarrow L \rightarrow p^*E \rightarrow Q := p^*E/L \rightarrow 0$$

がある. X はパラコンパクトハウスドルフと仮定しているから E には計量が入り, p^*E にも計量が入る. 従って

$$p^*E \cong L \oplus Q$$

なる直和分解ができる. このとき自然性と和公式を使うと,

$$p^*\tilde{c}(E) = \tilde{c}(p^*E) = \tilde{c}(L)\tilde{c}(Q).$$

ここで $\tilde{c}(L) = 1 + e(L) = 1 - x$ である. $\tilde{c}(Q) = 1 + y_1 + \cdots + y_{r-1}$, $\tilde{c}(E) = 1 + \tilde{c}_1 + \cdots + \tilde{c}_r$ とおくと, (加群構造を与える p^* は省略してかくと)

$$1 + \tilde{c}_1 + \cdots + \tilde{c}_r = (1 - x)(1 + y_1 + \cdots + y_{r-1})$$

両辺に $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots \in \prod_{p=0}^{\infty} H^{2p}(\mathbb{P}(E))$ を掛けて $2r$ 次を比較すると,

$$x^r + \tilde{c}_1 x^{r-1} + \cdots + \tilde{c}_r = 0$$

これはすなわち $\tilde{c}_i = c_i(E)$ であることを意味する. □

4.3 分裂原理

定理 4.9. $E \rightarrow X$ をランク r の複素ベクトル束とする. ある位相空間 F と連続写像 $f: F \rightarrow X$ が存在して, 次が成り立つ.

- (1) f^*E は直線束の和に分解する.
- (2) $f^*: H^*(X) \rightarrow H^*(F)$ は単射.

Proof. CW 近似定理により, X はパラコンパクトハウスドルフと仮定してよい. F として次のような flag bundle を取ればよい.

$$\begin{aligned} F &= \text{Fl}(E) \\ &= \bigcup_{x \in X} \{(V_1, \dots, V_r) \mid 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = E_x, \dim V_i = i\} \end{aligned}$$

¹⁸任意の位相空間 X に対して, パラコンパクトハウスドルフ空間 (例えば CW 複体) Y と弱ホモトピー同値 $f: Y \rightarrow X$ が存在する (注 2.45 を見よ). 従って, Y 上のベクトル束について $c = \tilde{c}$ が分かっているとき, 自然性から X 上のベクトル束についても $c = \tilde{c}$ が分かる. ここで弱ホモトピー同値 f に対して, $f^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(Y, \mathbb{Z})$ は同型であることを使っている.

$f: F = \text{Fl}(E) \rightarrow X$ を射影とする. 各ファイバー $\text{Fl}(E_x)$ は旗多様体 (flag variety) となっている.

$F = \text{Fl}(E)$ 上の tautological bundle \mathcal{V}_i を次で定義する.

$$\mathcal{V}_i = \{(0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = E_x), v \in \text{Fl}(E) \times E \mid v \in V_i\}$$

これはベクトル束の flag をなしている.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \hookrightarrow & \mathcal{V}_1 & \hookrightarrow & \mathcal{V}_2 & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & \mathcal{V}_r = f^*E \\ & & \searrow & & \downarrow & & & & \swarrow \\ & & & & \text{Fl}(E) & & & & \\ & & & & \downarrow f & & & & \\ & & & & X & & & & \end{array}$$

(X はパラコンパクトハウスドルフなので) E に計量を入れると, f^*E にも計量が入り,

$$f^*E \cong \mathcal{V}_1 \oplus (\mathcal{V}_2/\mathcal{V}_1) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{V}_r/\mathcal{V}_{r-1})$$

を得る. つまり, f^*E は確かに直線束の和となる.

最後に $f^*: H^*(X) \rightarrow H^*(F)$ が単射であることを示そう. これは $\text{Fl}(E)$ が射影化の繰り返しで得られることと Leray-Hirsch の定理からわかる.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xleftarrow{p_1} & \mathbb{P}(E) & \xleftarrow{p_2} & \mathbb{P}(Q_1) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \mathbb{P}(Q_{r-2}) = \text{Fl}(E) \\ & & \uparrow Q_1 & & \uparrow Q_2 & & & & \uparrow Q_{r-1} \\ & & \parallel & & \parallel & & & & \\ & & p_1^*E/L & & p_2^*Q_1/L & & & & \end{array}$$

Leray-Hirsch の定理より, 射影化束 p_i による引き戻しは単射である. □

2025.7.8 ここまで

4.4 和公式の証明

本節では和公式 $c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F)$ を 2 段階に分けて証明する.

4.4.1 Step 1

まず, 直線束 L_i を用いて $E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_r$ と書けるとき $c(E) = c(L_1)c(L_2)\cdots c(L_r)$ を示そう.

$L \rightarrow \mathbb{P}(E)$ を射影束上の tautological line bundle とし, $x = -c_1(L)$ とおく.

$$\begin{array}{c} L \longrightarrow \mathbb{P}(E) \\ \downarrow p \\ X \end{array}$$

$\ell \in \mathbb{P}(E_y)$ に対して, 包含写像 $L_\ell = \ell \subset E_y = L_{1,y} \oplus \cdots \oplus L_{r,y}$ が存在し, これは $\text{Hom}(L, p^*E)$ の至る所消えない切断を与えている. 従って $\text{Hom}(L, p^*E)$ のオイラー類はゼロである.

$$\begin{aligned}
0 &= e(\text{Hom}(L, p^*E)) \\
&= \prod_{i=1}^r e(\text{Hom}(L, p^*L_i)) && \text{(Euler 類の和公式, §3.5)} \\
&= \prod_{i=1}^r e(L^* \otimes p^*L_i) \\
&= \prod_{i=1}^r (x + p^*c_1(L_i)) && \text{(注 4.1)}
\end{aligned}$$

Chern 類の定義により, この式の x^{r-i} の係数が $p^*c_i(E)$ に等しい. 従って $c_i(E)$ は $c_1(L_1), \dots, c_1(L_r)$ の i 次の基本対称式であることがわかり, 特に

$$c(E) = (1 + c_1(L_1)) \cdots (1 + c_1(L_r)) = c(L_1) \cdots c(L_r)$$

が従う.

4.4.2 Step 2

$E_1 \rightarrow X, E_2 \rightarrow X$ を任意の複素ベクトル束とする. 定理 4.9 を 2 回繰り返し適用することにより, E_1, E_2 が共に直線束の和になるような空間 F が存在する. つまり $f: F \rightarrow X$ であって

$$\begin{aligned}
f^*E_i &= L_{i,1} \oplus L_{i,2} \oplus \cdots \oplus L_{i,r_i} \\
f^*: H^*(X) &\rightarrow H^*(F) \text{ は単射}
\end{aligned}$$

を満たすものが存在する. このとき

$$\begin{aligned}
f^*c(E_1 \oplus E_2) &= c(f^*E_1 \oplus f^*E_2) && \text{(自然性)} \\
&= c(L_{1,1} \oplus \cdots \oplus L_{1,r_1} \oplus L_{2,1} \oplus \cdots \oplus L_{2,r_2}) \\
&= c(L_{1,1}) \cdots c(L_{1,r_1})c(L_{2,1}) \cdots c(L_{2,r_2}) && \text{(Step 1)} \\
&= c(f^*E_1)c(f^*E_2) && \text{(Step 1)} \\
&= f^*(c(E_1)c(E_2)) && \text{(自然性)}
\end{aligned}$$

f^* は単射ゆえ, $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \cup c(E_2)$. 以上により和公式が示された. \square

系 4.10. r を複素ベクトル束 $E \rightarrow X$ のランクとすると, $c_r(E) = e(E)$.

Proof. 分裂原理より, E が直線束の和である場合に示せば十分である. $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ とすると, Euler 類に対する和公式から

$$e(E) = e(L_1) \cdots e(L_r)$$

また $c(E) = c(L_1) \cdots c(L_r)$ の最高次を見て

$$c_r(E) = c_1(L_1) \cdots c_1(L_r)$$

定義より $e(L_i) = c_1(L_i)$ であったから、結論が従う。 \square

4.5 分裂原理の使い方

和公式の証明でも見たように、分裂原理 (splitting principle, 定理 4.9) により、Chern 類の計算において、ベクトル束は直線束の和に分解されていると仮定して計算することができる。

ベクトル束 $E \rightarrow X$ を仮想的に $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ と直線束の和に分解したとき、 $\delta_i = c_1(L_i)$ とおくと、

$$c(E) = (1 + c_1(L_1)) \cdots (1 + c_1(L_r)) = (1 + \delta_1) \cdots (1 + \delta_r)$$

と書ける。つまり $c_i(E)$ は $\delta_1, \dots, \delta_r$ の i 次基本対称式となる。この $\delta_i = c_1(L_i)$ のことを E の **Chern root** という。Chern root は X のコホモロジー類ではないが、定理 4.9 にあるような空間 F のコホモロジー類と解釈できる。

問 4.11. E, F をランク 2 の複素ベクトル束とする。 $c(E \otimes F)$ を $c_i(E), c_j(F)$ を使って表せ。

(解) $E = E_1 \oplus E_2, F = F_1 \oplus F_2$ と仮定して計算する。 $e_i = c_1(E_i), f_i = c_1(F_i)$ とおく。これらは E, F の Chern root である。このとき

$$c(E \otimes F) = c\left(\bigoplus_{i,j} E_i \otimes F_j\right) = \prod_{i,j} c(E_i \otimes F_j) = \prod_{i,j} (1 + e_i + f_j)$$

これは e_1, e_2 の入れかえ、 f_1, f_2 の入れかえについて対称であるから、 e_1, e_2 の基本対称式 $c_i(E)$ および f_1, f_2 の基本対称式 $c_j(F)$ の多項式として書くことができる。これを実行すると

$$c_1(E \otimes F) = 2c_1(E) + 2c_1(F)$$

$$c_2(E \otimes F) = c_1(E)^2 + 2c_2(E) + c_1(F)^2 + 2c_2(F) + 3c_1(E)c_1(F)$$

$$c_3(E \otimes F) = c_1(F)(c_1(E)^2 + 2c_2(E) + 2c_2(F)) + c_1(E)(c_1(F)^2 + 2c_2(F) + 2c_2(E))$$

$$c_4(E \otimes F) = c_2(E)^2 + c_2(F)^2 + (c_2(E) + c_2(F))c_1(E)c_1(F) + c_2(F)c_1(E)^2 + c_2(E)c_1(F)^2 - 2c_2(E)c_2(F)$$

となる (確認せよ)。

命題 4.12. E をランク r の複素ベクトル束とする。

$$(1) \quad c_1(E) = c_1(\wedge^r E)$$

$$(2) \ c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$$

ここで $\bigwedge^r E$ は $\det(E)$ と書かれる

Proof. $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ と仮定してよい. $\delta_i = c_1(L_i)$ とおく.

(1): $\bigwedge^r E = L_1 \otimes \cdots \otimes L_r$ であるから,

$$c_1(E) = \delta_1 + \cdots + \delta_r = c_1(\bigwedge^r E)$$

(2): $E^* = L_1^* \oplus \cdots \oplus L_r^*$ であるから,

$$c(E^*) = c(L_1^*) \cdots c(L_r^*) = (1 - \delta_1) \cdots (1 - \delta_r)$$

これから明らかである. □

問 4.13. $E \rightarrow X$ をランク n のベクトル束とするとき, 次を示せ.

$$\begin{aligned} c_1(\bigwedge^2 E) &= (n-1)c_1(E) \\ c_2(\bigwedge^2 E) &= \binom{n-1}{2} c_1(E)^2 + (n-2)c_2(E) \end{aligned}$$

4.6 例: $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の接束

$\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ は複素多様体の構造を持つため, その接束 $T\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ は複素ベクトル束の構造を持っている.

命題 4.14. $\ell \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ に対して (ここで ℓ は \mathbb{C}^{n+1} の 1次元部分空間とみなしている), $T_\ell \mathbb{C}\mathbb{P}^n \cong \text{Hom}(\ell, \mathbb{C}^{n+1}/\ell)$.

Proof. \mathbb{C}^{n+1} の標準エルミート計量をとり, $\mathbb{C}^{n+1}/\ell \cong \ell^\perp$ とみなす. $\varphi \in \text{Hom}(\ell, \mathbb{C}^{n+1}/\ell) \cong \text{Hom}(\ell, \ell^\perp)$ に対して, ℓ を通る曲線 $c_\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ が

$$c_\varphi(t) = \{v + t\varphi(v) \mid v \in \ell\} \quad (\mathbb{C}^{n+1} \text{ の 1次元部分空間})$$

で定義される. φ に対してこの曲線の微分

$$\varphi \mapsto \left. \frac{d}{dt} c_\varphi(t) \right|_{t=0} \in T_\ell \mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

を対応させる写像は同型である.

実際, $v \in \ell \setminus \{0\}$ をとるとき, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の ℓ を含む (複素多様体としての) チャートが

$$\ell^\perp \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n, \quad w \mapsto \mathbb{C}(v + w)$$

で与えられるが, このチャートの下で曲線 $t \mapsto c_\varphi(t)$ は $t \mapsto t\varphi(v)$ と表示され, その $t=0$ での微分は $\varphi(v) \in \ell^\perp$ である. □

問 4.15. 上に構成した同型 $T_\ell \mathbb{C}P^n \cong \text{Hom}(\ell, \mathbb{C}^{n+1}/\ell)$ はエルミート計量の取り方によらないことを示せ. (ただし, 曲線 $c_\varphi(t)$ はエルミート計量の取り方によっている.)

$L \rightarrow \mathbb{C}P^n$ を tautological line bundle とする. $\underline{\mathbb{C}^{n+1}}$ で $\mathbb{C}P^n$ 上の自明束 $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ を表すこととすると, L は $\underline{\mathbb{C}^{n+1}}$ の部分束とみなせる. $Q := \underline{\mathbb{C}^{n+1}}/L$ とおくと, 完全列

$$0 \rightarrow L \rightarrow \underline{\mathbb{C}^{n+1}} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

を得る. 上の命題から

$$T\mathbb{C}P^n \cong \text{Hom}(L, Q) \cong L^* \otimes Q$$

である. 上の完全列に L^* をテンソルして

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow (L^*)^{\oplus(n+1)} \rightarrow T\mathbb{C}P^n \rightarrow 0 \quad (1)$$

従って和公式から

$$c(L^*)^{n+1} = c(\underline{\mathbb{C}})c(T\mathbb{C}P^n)$$

$x = c_1(L^*) = -c_1(L)$ とおくと, $c(\underline{\mathbb{C}}) = 1$ であるから

$$c(T\mathbb{C}P^n) = (1+x)^{n+1}$$

を得る. つまり $c_i(T\mathbb{C}P^n) = \binom{n+1}{i} x^i$ である.

注 4.16. $\mathbb{C}P^n$ は $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ の \mathbb{C}^\times 作用による商であることを使うと, 完全列 (1) は次のように理解できる. $\pi: (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ を射影とする. 完全列 (1) を π で引き戻したものは, 次と同一視できる.

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow T(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \rightarrow \pi^* T\mathbb{C}P^n \rightarrow 0$$

ここで $(\pi^* L^*)^{\oplus(n+1)} \cong T(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ であり, 部分ベクトル束の埋め込み $\underline{\mathbb{C}} \hookrightarrow T(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ は \mathbb{C}^\times 軌道の接空間である.

問 4.17. $T\mathbb{C}P^n$ が複素直線束を部分束として持つ $\iff n$ は奇数, を示せ. また p が素数のとき, $T\mathbb{C}P^{p-1}$ は非自明な部分ベクトル束を持たないことを示せ¹⁹. 前半のヒント: $T\mathbb{C}P^n = L \oplus L^\perp$ として Chern 類を比較せよ.

4.7 例: $\mathbb{C}P^n$ の複素超曲面

$k \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathbb{C}P^n$ 上の複素直線束 $\mathcal{O}(k)$ を次で定義する.

$$\mathcal{O}(k) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}/(x_0, \dots, x_n, v) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n, \lambda^k v), \quad \lambda \in \mathbb{C}^\times$$

射影 $\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ は $[x_0, \dots, x_n, v] \mapsto [x_0, \dots, x_n]$ で与える.

¹⁹より一般に n が偶数のとき $T\mathbb{C}P^n$ は非自明な部分ベクトル束を持たないことが知られている. Glover-Homer-Stong “Splitting the Tangent Bundle of Projective Space”

注 4.18. $\mathcal{O}(k)$ は本来, 代数幾何・複素幾何で局所自由層 (さらに正確には可逆層) を表す記号であるが, 本講義では対応するベクトル束を表すことにする.

問 4.19. 次を示せ.

- $\mathcal{O}(-1)$ は tautological line bundle と同型である.
- $\mathcal{O}(-k) \cong \mathcal{O}(k)^*$.
- $\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(l) \cong \mathcal{O}(k+l)$.

$k > 0$ に対して, k 次斉次多項式 $F(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ は $\mathcal{O}(k)$ の切断を次のように定める.

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{O}(k), \quad [x_0, \dots, x_n] \mapsto [x_0, \dots, x_n, F(x_0, \dots, x_n)]$$

この切断が transversal であるとき, $V = F^{-1}(0) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ は滑らかな複素部分多様体となる. これを k 次の滑らかな超曲面 (smooth hypersurface of degree k) と呼ぶ.

$k = 1$ のとき, 1 次式 $F \neq 0$ に対して $F^{-1}(0) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ を超平面 (hyperplane) という. これは $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ と (複素多様体として) 同型な部分多様体である. このとき

$$\text{超平面 } F^{-1}(0) \text{ の Poincaré dual} = e(\mathcal{O}(1)) = -c_1(L) = x$$

と書いていた (L は tautological line bundle). これは問 4.3 の $j = 1$ のときの答えである.

$k \geq 2$ とし, F が $\mathcal{O}(k)$ の transversal な切断を定めるものとする. $V = F^{-1}(0)$ に対して, 命題 3.22 より完全列

$$0 \rightarrow TV \rightarrow T\mathbb{C}\mathbb{P}^n|_V \rightarrow N_{V/\mathbb{C}\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}(k)|_V \rightarrow 0$$

がある. 和公式より

$$\begin{aligned} c(TV) &= \frac{c(T\mathbb{C}\mathbb{P}^n)|_V}{c(\mathcal{O}(k))|_V} = \frac{(1+x)^{n+1}}{1+kx} \Big|_V \\ &= 1 + (n+1-k)x + (k^2 + \binom{n+1}{2} - k(n+1))x^2 + \dots \end{aligned}$$

と計算できる.

定理 4.20. 滑らかな k 次の超曲面 $V \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ に対してそのオイラー数は

$$\chi(V) = n + 1 + \frac{1}{k}((1-k)^{n+1} - 1)$$

で与えられる.

Proof. 定理 3.32 を使ってオイラー数を計算する.

$$\begin{aligned}\chi(V) &= \int_V e(TV) = \int_V c(TV) = \int_V \frac{(1+x)^{n+1}}{1+kx} \\ &= \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} \frac{(1+x)^{n+1}}{1+kx} \wedge \eta_V \\ &= \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} \frac{(1+x)^{n+1}}{1+kx} \wedge kx\end{aligned}$$

途中で $V = F^{-1}(0)$ の Poincaré dual η_V は $e(\mathcal{O}(k)) = kx$ に等しいことを使った. x^n は 1 点の Poincaré dual だから (問 4.3), $\int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} x^n = 1$ である. 従って最後の積分は x^n の係数を取り出すことと同じであり,

$$\text{Res}_{x=0} \frac{(1+x)^{n+1}}{1+kx} \frac{kx}{x^{n+1}} dx$$

と書き直せる. これを $x = \infty$ と $x = -1/k$ での留数の和に書き直せば, 定理を得る (詳細は演習). \square

例 4.21. $n = 2, k > 0$ として $F(x_0, x_1, x_2)$ を $\mathcal{O}(k)$ の transversal section とする. このとき $V = F^{-1}(0) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ は連結であることが知られている. つまり V は Riemann 面 (連結コンパクト 1 次元複素多様体) である. $g := \frac{1}{2} \dim H^1(V)$ を V の種数とすると, $\dim H^0(V) = \dim H^2(V) = 1$ であることから,

$$\chi(V) = 2 - 2g$$

これと上の定理の結果を合わせると

$$g = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

を得る.

問 4.22. $F(x_0, x_1, y_0, y_1) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ を (x_0, x_1) に関して k 次斉次, (y_0, y_1) に関して l 次斉次である多項式とする. F の定める $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 内の超曲面を考える.

$$C = \{([x_0, x_1], [y_0, y_1]) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 : F(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0\}$$

F が $\mathcal{O}(k) \boxtimes \mathcal{O}(l) := p_1^* \mathcal{O}(k) \otimes p_2^* \mathcal{O}(l)$ の切断として横断的 (transversal) であり, また C が連結であると仮定する. ここで $p_i: \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ は第 i 成分への射影である. このとき C は Riemann 面となるが, C の種数 $g = \frac{1}{2} \dim H^1(C, \mathbb{R})$ を求めよ.

4.8 Chern 指標

複素ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対して, Chern 指標とよばれる \mathbb{Q} 上の特性類を導入する.

$E \rightarrow X$ の Chern root を $\delta_1, \dots, \delta_r$ とする. このとき

$$c(E) = (1 + \delta_1) \cdots (1 + \delta_r)$$

であった. Chern 指標 $\text{ch}(E)$ とは

$$\text{ch}(E) = e^{\delta_1} + \cdots + e^{\delta_r} \in \prod_{n=0}^{\infty} H^{2n}(X, \mathbb{Q})$$

で定義されるコホモロジー類である. $\text{ch}(E) = \text{ch}_0(E) + \text{ch}_1(E) + \text{ch}_2(E) + \cdots$, $\text{ch}_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{Q})$ と次数に分解すると

$$\text{ch}_k(E) = \frac{1}{k!}(\delta_1^k + \cdots + \delta_r^k)$$

となる. 右辺は $\delta_1, \dots, \delta_k$ の対称多項式であるから, 基本対称式 $c_1(E), \dots, c_r(E)$ の多項式として表すことができる. 例えば

$$\begin{aligned} \text{ch}_0(E) &= r = \text{rank } E \\ \text{ch}_1(E) &= \delta_1 + \cdots + \delta_r = c_1(E) \\ \text{ch}_2(E) &= \frac{1}{2}(\delta_1^2 + \cdots + \delta_r^2) = \frac{1}{2}(\delta_1 + \cdots + \delta_r)^2 - \sum_{i < j} \delta_i \delta_j \\ &= \frac{1}{2}c_1(E)^2 - c_2(E) \end{aligned}$$

注 4.23. 対称多項式の言葉では, $k! \text{ch}_k(E)$ は power sum $p_k = \sum_i \delta_i^k$ に対応し, $c_k(E)$ は基本対称式 (elementary symmetric polynomial) $e_k = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \delta_{j_1} \cdots \delta_{j_k}$ に対応する.

Chern 指標は積と和を両方保つという著しい性質を持っている. (全 Chern 類は和を積に写すが, テンソル積に対する振る舞いは複雑だった.)

命題 4.24. ベクトル束 $E \rightarrow X, F \rightarrow X$ について, 次が成り立つ.

- (1) $\text{ch}(E \otimes F) = \text{ch}(E) \text{ch}(F)$
- (2) $\text{ch}(E \oplus F) = \text{ch}(E) + \text{ch}(F)$
- (3) $\text{ch}_i(E^*) = (-1)^i \text{ch}_i(E)$

Proof. 証明は分裂原理による. $\{e_i\}, \{f_j\}$ を各々 E, F の Chern root とするとき, $\{e_i + f_j\}$ は $E \otimes F$ の Chern root となるから,

$$\text{ch}(E \otimes F) = \sum_{i,j} e^{e_i + f_j} = \sum_{i,j} e^{e_i} e^{f_j} = \sum_i e^{e_i} \sum_j e^{f_j} = \text{ch}(E) \text{ch}(F)$$

従って (1) が示された. (2), (3) も同様. □

5 Stiefel-Whitney 類

参考文献：[Milnor-Stasheff]

ここでは実ベクトル束に対する $\mathbb{Z}/2$ 係数の特性類である，Stiefel-Whitney 類（略して SW 類）を論じる．

SW 類とは，ランク r の実ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対して $\mathbb{Z}/2$ 係数の特異コホモロジー類

$$w(E) = 1 + w_1(E) + \cdots + w_r(E) \in H^*(X, \mathbb{Z}/2), \quad w_i(E) \in H^i(X, \mathbb{Z}/2)$$

を対応させるものである．

5.1 $\mathbb{Z}/2$ 係数の Euler 類

以前の議論を $\mathbb{Z}/2$ 係数で行うことにより，任意の rank r の実ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対して $\mathbb{Z}/2$ 係数の Euler 類 $e_{\mathbb{Z}/2}(E) \in H^r(X, \mathbb{Z}/2)$ が定義できる．これは最高次の SW 類 $w_r(E)$, $r = \text{rank } E$ に対応する．ここで $E \rightarrow X$ は向きづけられている必要はない²⁰．

以下に3つの定義を紹介する．

Čech コホモロジー類としての定義： X を good open cover $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ を持つパラコンパクト・ハウスドルフ空間とする． X 上の実直線束 $L \rightarrow X$ に対して $L|_{U_\alpha}$ の自明化をとり，対応する変換関数を $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{R}^\times$ とする．このとき

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & g_{\alpha\beta} > 0 \text{ のとき} \\ 1 & g_{\alpha\beta} < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

により $\mathbb{Z}/2$ 係数の Čech cocycle $\{\epsilon_{\alpha\beta}\} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/2)$ が定まる．このコホモロジー類 $[\{\epsilon_{\alpha\beta}\}] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/2)$ は自明化の取り方によらず， $e_{\mathbb{Z}/2}(L) = w_1(L)$ を定める．

障害類としての定義： X を一般の位相空間とし， $L \rightarrow X$ を実直線束とする． X の各点 x ごとに $L_x \setminus \{0\}$ の連結成分 L_x^+ を選んでおく．特異1単体 $\tau: [0, 1] \rightarrow X$ に対して $\tau^*L \cong [0, 1] \times \mathbb{R}$ であるが，

$$e(\tau) = \begin{cases} 0 & L_{\tau(0)}^+ \text{ と } L_{\tau(1)}^+ \text{ が } \tau^*L \setminus (\text{ゼロ切断}) \text{ の同じ連結成分に属するとき} \\ 1 & L_{\tau(0)}^+ \text{ と } L_{\tau(1)}^+ \text{ が } \tau^*L \setminus (\text{ゼロ切断}) \text{ の異なる連結成分に属するとき} \end{cases}$$

とおくと $\tau \mapsto e(\tau) \in \mathbb{Z}/2$ は特異 1-cocycle を定める．このコホモロジー類 $[e]$ は取り方によらず， $e_{\mathbb{Z}/2}(L) = w_1(L)$ を定める．

$\mathbb{Z}/2$ 係数の Thom 類の引き戻し： $E \rightarrow X$ をランク r の実ベクトル束とする． $\mathbb{Z}/2$ 係数の Thom 同型

$$H^*(X, \mathbb{Z}/2) \cong H^{*+r}(E, E \setminus X, \mathbb{Z}/2)$$

²⁰全ての実ベクトル束は， $\mathbb{Z}/2$ 係数の意味では向きづけられている．すなわち，ランク r の実ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対して $\mathbb{Z}/2$ ベクトル空間の局所系 $\bigcup_x H^r(E_x, E_x \setminus \{0\}; \mathbb{Z}/2)$ は自明である．

による $1 \in H^0(X, \mathbb{Z}/2)$ の像を $\mathbb{Z}/2$ 係数の Thom 類という. Thom 類は各ファイバーに制限すると $H^r(E_x, E_x \setminus \{0\}, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ の (ただ一つの) 非自明な元になるコホモロジー類として特徴づけられる. $\mathbb{Z}/2$ 係数の Thom 類を $\Theta_{\mathbb{Z}/2} \in H^r(E, E \setminus X, \mathbb{Z}/2)$ で表すとき, ゼロ切断 $s_0: X \rightarrow E$ による Thom 類の引き戻し $e_{\mathbb{Z}/2}(E) = s_0^* \Theta_{\mathbb{Z}/2} \in H^r(X, \mathbb{Z}/2)$ を $\mathbb{Z}/2$ 係数の Euler 類という.

問 5.1. これらの Euler 類 $e_{\mathbb{Z}/2}$ の定義が, 定義域の共通部分で, 等価であることを確認せよ. ヒント: 障害類としての定義と Thom 類の引き戻しとしての定義が実直線束 $L \rightarrow X$ に対して等しいことを示すには, $\Theta_{\mathbb{Z}/2}$ が次の特異 cochain で与えられることを観察すればよい. 上記のように, 各ファイバー L_x に対して $L_x \setminus \{0\}$ の連結成分 L_x^+ を選んでおく. もう一方の連結成分を L_x^- と書くことにする. 点 $y \in L$ に対して $\epsilon_y \in \mathbb{Z}/2$ を

$$\epsilon_y := \begin{cases} 0 & y \notin L_{\pi(y)}^- \text{ のとき} \\ 1 & y \in L_{\pi(y)}^- \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めておく. このとき特異 1 単体 $\tau: [0, 1] \rightarrow L$ に対して

$$\Theta_{\mathbb{Z}/2}(\tau) = \epsilon_{\tau(0)} + \epsilon_{\tau(1)} + e(\pi_* \tau) \in \mathbb{Z}/2$$

と定める. ここで $\pi: L \rightarrow X$ は射影で $\pi_* \tau$ は底空間 X の特異 1 単体. また $e(\dots)$ は上記の障害類を定めるコチェイン.

問 5.2. good cover を持つパラコンパクトハウスドルフ空間 X について, 全単射

$$X \text{ 上の実直線束の同型類の集合} \cong H^1(X, \mathbb{Z}/2), \quad L \mapsto e_{\mathbb{Z}/2}(L)$$

が存在することを示せ. さらに $e_{\mathbb{Z}/2}(L_1 \otimes L_2) = e_{\mathbb{Z}/2}(L_1) + e_{\mathbb{Z}/2}(L_2)$ を示せ.

5.2 SW 類の構成

Chern 類を複素直線束の Euler 類から構成したのと全く同じ方法で, SW 類は実直線束の $\mathbb{Z}/2$ 係数 Euler 類 $e_{\mathbb{Z}/2} = w_1$ から構成できる.

ランク r の実ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対して実射影化束 $\mathbb{P}(E) \rightarrow X$ が同様に定義される. $\mathbb{P}(E)$ は実の tautological line bundle $L \rightarrow \mathbb{P}(E)$ を持つ. $x = e_{\mathbb{Z}/2}(L) = w_1(L)$ とおき (ここでは $x = -x$ であることに注意したい), $\mathbb{Z}/2$ 係数の Leray-Hirsch の定理

$$H^*(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z}/2) \cong \bigoplus_{j=0}^{r-1} H^*(X, \mathbb{Z}/2) x^j$$

より, 次を満たす $w_i(E) \in H^i(X, \mathbb{Z}/2)$ がただ一つ存在することが言える.

$$x^r + w_1(E)x^{r-1} + \dots + w_r(E) = 0$$

5.3 SW 類の公理

Chern 類のときと同様に SW 類は次の公理を満たす. 証明は Chern 類のときと同様なので省略する (確かめよ).

1. (同型) 実ベクトル束 $E \rightarrow X, F \rightarrow X$ が同型ならば $w_i(E) = w_i(F)$
2. (自然性) $w(f^*E) = f^*w(E)$
3. (和公式) $w(E \oplus F) = w(E) \cup w(F)$.
4. 実直線束 $L \rightarrow X$ に対して, $w(L) = 1 + e_{\mathbb{Z}/2}(L)$.

次の定理も同様に証明できる (演習問題).

定理 5.3. ランク r の実ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対して $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジー類 $w(E) = 1 + w_1(E) + \cdots + w_r(E) \in H^*(X, \mathbb{Z}/2)$, $w_i(E) \in H^i(X, \mathbb{Z}/2)$ を対応させる規則で, 上の公理を満たすものがただ一つ存在する.

実ベクトル束に対する分裂原理も同様 (それを述べて, 証明せよ).

5.4 例と性質

例 5.4. S^n の接束を調べる. 埋め込み $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ により, 完全列

$$0 \rightarrow TS^n \rightarrow T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n} \rightarrow N_{S^n/\mathbb{R}^{n+1}} \rightarrow 0$$

が存在する. ここで $T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n} \cong \mathbb{R}^{\oplus(n+1)}$ であり, $N_{S^n/\mathbb{R}^{n+1}} \cong \mathbb{R}$ である. 従って

$$w(TS^n)w(\mathbb{R}) = w(\mathbb{R}^{\oplus(n+1)})$$

よって $w(TS^n) = 1$ である. ただし接束 TS^n は自明とは限らない. (例えば, n が偶数のときは, $\int_{S^n} e(TS^n) = \chi(S^n) = 2$ より $e(TS^n) \neq 0$ であり, 自明ではない.)

TS^n が自明なのは $n = 1, 3, 7$ に限られることが知られている.

例 5.5. $\mathbb{R}P^n$ の接束は $\mathbb{C}P^n$ の場合と同様に

$$T\mathbb{R}P^n \cong \text{Hom}(L, \mathbb{R}^{\oplus(n+1)}/L)$$

で与えられる. ここで $L \rightarrow \mathbb{R}P^n$ は実の tautological line bundle. 従って, 複素のときと同じ計算により,

$$w(T\mathbb{R}P^n) = (1 + x)^{n+1}$$

ここで $x \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2)$ は生成元.

$$w(T\mathbb{R}P^n) = 1 \iff n + 1 \text{ が } 2 \text{ の冪}$$

を示そう. このことは, $(a+b)^2 \equiv a^2 + b^2$ を使うと, $n+1 = 2^k q$, q は奇数, と書いたとき,

$$(1+x)^{1+n} = (1+x^{2^k})^q = 1 + qx^{2^k} + \dots$$

であることから従う. 特に $T\mathbb{R}P^n$ が自明ならば, $n+1$ は 2 の冪である.

TS^n の時と同様に, 実は, $T\mathbb{R}P^n$ が自明なのは $n = 1, 3, 7$ に限られることが知られている.

問 5.6. $T\mathbb{R}P^n$ が自明ならば TS^n も自明であることを観察せよ.

問 5.7 (Stiefel の定理, [Milnor-Stasheff, Theorem 4.7]). \mathbb{R}^n が \mathbb{R} 上双線形でゼロ因子をもたない積 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を持つとする²¹. このとき $T\mathbb{R}P^{n-1}$ は自明であることを示せ. とくに n は 2 の冪である. (複素数 \mathbb{C} , 四元数 \mathbb{H} , ケーリー数 (八元数) \mathbb{O} の存在と関係している.)

問 5.8. good open cover をもつパラコンパクトハウスドルフ空間 X に対して, X 上の実ベクトル束 $E \rightarrow X$ が向きづけ可能 $\iff w_1(E) = 0$, を示せ. ヒント: $w_1(E) = w_1(\wedge^r E)$, $r = \text{rank } E$ を示して, 直線束の場合に帰着させる.

問 5.9. ランク r の実ベクトル束に対して, $e_{\mathbb{Z}/2}(E) = w_r(E)$ を示せ. さらに, E が至る所消えない切断を持てば, $w_r(E) = 0$ を示せ. ヒント: 前半は分裂原理より. 後半は Thom 類の引き戻しとしての $e_{\mathbb{Z}/2}(E)$ の定義を使う.

2025.7.15 ここまで

この講義でやり残したこと (そのうちいくつかは以下の演習問題に載せている):

- \mathbb{Z} 係数での Thom 同型, 定理 3.13 の \mathbb{Z} 係数版 (問 6.1 参照), \mathbb{Z} 係数での Poincaré 双対, 局所化された Euler 類
- spectral sequence (Leray, Serre)
- Gysin sequence, $\mathbb{C}P^n$ の \mathbb{Z} 係数のコホモロジー, Leray-Hirsch の定理の証明
- Pontrjagin 類
- グラスマン多様体のコホモロジー, ベクトル束の分類空間
- ランク $r > 1$ のベクトル束の曲率, Chern-Weil 理論

6 演習問題

問 6.1. 一般の位相空間 X 上の複素直線束 $\pi: L \rightarrow X$ に対して, その \mathbb{Z} 係数の Thom 類を特異コホモロジー類として構成しよう. 構成したいのはコホモロジー類 $[\theta] \in H^2(L, L \setminus X, \mathbb{Z})$ であって, 各ファイバーに制限すると $H^2(L_x, L_x \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の正の生成元を与えるものである.

問 2.9 と同様に, 次のデータを選んでおく.

²¹ゼロ因子を持たないとは, $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対して, $v \neq 0$, $w \neq 0$ ならばそれらの積 $v \cdot w$ がゼロでないことである. ここで積の可換性や結合性, 単位元を持つことは要求しない.

1. X の各点 x に対して, L_x のゼロでない元 e_x を選んでおく.
2. 各特異1単体 $\tau: [0, 1] \rightarrow X$ に対して, τ^*L の至るところ消えない切断 s_τ であつて, $s_\tau(0) = e_{\tau(0)}, s_\tau(1) = e_{\tau(1)}$ となるものをとる. ただし, τ の向きを逆にした単体 $\tau'(t) = \tau(1-t)$ に対しては, s_τ の向きを逆にした切断 $s_{\tau'}(t) = s_\tau(1-t)$ を対応させるものと仮定しておく. また, τ が定値写像であるときは, $s_\tau(t) = e_{\tau(0)}, \forall t \in [0, 1]$ ととる.

特異1単体 $\tau: [0, 1] \rightarrow L$ に対して数 $n_\tau \in \mathbb{Z}$ を次のように定める. τ がゼロ切断と交わるとき, $n_\tau = 0$ とする. τ がゼロ切断と交わらないときは, ある連続関数 $\theta_\tau: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $\tau(t) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\theta_\tau(t)} s_{\pi_*\tau}(t)$. ここで $\pi_*\tau = \pi \circ \tau$ は X の特異1単体. このとき $n_\tau = \lceil \frac{\theta_\tau(1)}{2\pi} \rceil - \lceil \frac{\theta_\tau(0)}{2\pi} \rceil$ と定める. n_τ は θ_τ の取り方によらない.

特異2単体 $\sigma: \Delta^2 \rightarrow L$ に対して

$$\Theta(\sigma) = \mathbf{e}(\pi_*\sigma) + \sum_{i=0}^2 (-1)^i n_{\partial_i\sigma} \in \mathbb{Z}$$

とおく. ここで \mathbf{e} は問2.9で定義した Euler 類を代表するコサイクル. Θ は $(L, L \setminus X)$ の相対コチェインを与えることを示せ. また Θ はコサイクルであり, そのコホモロジー類は Thom 類になることを確かめよ. 最後にゼロ切断 $s_0: X \rightarrow L$ に対して, $s_0^*\Theta = \mathbf{e}$ を確かめよ.

問 6.2. 4次元球面 S^4 は四元数射影空間 $\mathbb{H}\mathbb{P}^1$ とみなすことができる. ここで $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ は関係式 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ で定まる四元数体であり,

$$\mathbb{H}\mathbb{P}^1 = \{ \ell \subset \mathbb{H}^2 \mid \ell \text{ は } \mathbb{H} \text{ 上の } 1 \text{ 次元部分ベクトル空間} \}$$

である. ここで \mathbb{H}^2 には右からの \mathbb{H} の作用により右 \mathbb{H} ベクトル空間の構造を入れている. $S^4 \cong \mathbb{H}\mathbb{P}^1$ とみなしたとき, その上に自然に定まる tautological bundle

$$L = \{ (\ell, v) \in \mathbb{H}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{H}^2 \mid v \in \ell \}$$

を考える. L のファイバーは1次元 \mathbb{H} ベクトル空間であり, それは \mathbb{C} 上の2次元ベクトル空間ともみなされる.

- (1) L を rank 2 の複素ベクトル束とみなし, $\int_{S^4} c_2(L)$ を求めよ.
- (2) S^4 上の階数2の複素ベクトル束 $E \rightarrow S^4$ は $c_2(E) \in H^4(S^4; \mathbb{Z})$ で分類されることを示せ. つまり, S^4 上の階数2の複素ベクトル束 E の同型類と $H^4(S^4; \mathbb{Z})$ の元とは $E \mapsto c_2(E)$ により一対一に対応する.

問 6.3. 自然数 $r \leq n$ に対して $(\mathbb{C}^n)^r$ の開集合 $V(r, n)$ を次で定める.

$$V(r, n) := \{ (v_1, \dots, v_r) \in (\mathbb{C}^n)^r : v_1, \dots, v_r \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の一次独立なベクトル} \}$$

このとき次を示せ.

$$\pi_i(V(r, n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 2n - 2r + 1 \text{ のとき} \\ 0 & 1 \leq i \leq 2n - 2r \text{ のとき.} \end{cases}$$

問 6.4. 写像 $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$ によって \mathbb{C}^n を \mathbb{C}^{n+1} の部分集合とみなす. この写像は問 6.3 に現れる空間 $V(r, n)$ の間の包含写像 $V(r, n) \hookrightarrow V(r, n+1)$ を誘導する. $V(r, n)$ の帰納的極限

$$V(r, \infty) = \varinjlim_n V(r, n) = \bigcup_{n \geq r} V(r, n)$$

に次の位相 (帰納的極限に入る標準的な位相) を入れる.

$$U \subset V(r, \infty) \text{ が open} \iff U \cap V(r, n) \text{ が } V(r, n) \text{ の open } (\forall n)$$

$V(r, \infty)$ は可縮であることを示せ.

問 6.5 ([Milnor-Stasheff, §5] 参照). $G(r, n) = \{V \subset \mathbb{C}^n : \dim V = r\}$ を \mathbb{C}^n 内の r 次元部分空間のなす複素グラスマン多様体とする. 全射 $\pi: V(r, n) \rightarrow G(r, n)$ を $\pi(v_1, \dots, v_r) = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ で定める ($V(r, n)$ は問題 6.3 に与えたもの). この写像 π によって $G(r, n)$ に $V(r, n)$ からの商位相を入れる. $G(r, n)$ 上の tautological bundle

$$\mathcal{V} = \{(V, v) \in G(r, n) \times \mathbb{C}^n : v \in V\}, \quad p: \mathcal{V} \rightarrow G(r, n), \quad p(V, v) := V$$

が局所自明性を持つ (つまりベクトル束である) ことを示せ.

さらに $G(r, \infty) = \varinjlim_n G(r, n)$ に帰納的極限の位相を入れ, tautological bundle $\mathcal{V} \rightarrow G(r, \infty)$ を $G(r, \infty) \times \mathbb{C}^{\oplus \infty}$ の部分空間として同様に定義するとき, $\mathcal{V} \rightarrow G(r, \infty)$ は局所自明性を持つことを示せ.

問 6.6 ([Milnor-Stasheff, §6] 参照). 複素 Grassmann 多様体 $G(r, n)$ の胞体分割 (cell decomposition) を具体的に与えよ. またそれを用いて Betti 数 $b_i = \dim H_i(G(r, n))$ を求めよ.

問 6.7. $\mathcal{V} \rightarrow G(r, n)$ を tautological bundle, $Q \rightarrow G(r, n)$ を universal quotient bundle (つまり $Q = \underline{\mathbb{C}^n}/\mathcal{V}$) とする. 複素 Grassmann 多様体のコホモロジー環は

$$H^*(G(r, n)) \cong \mathbb{Z}[c(\mathcal{V}), c(Q)] / (c(\mathcal{V})c(Q) - 1)_{\text{hom}}$$

で与えられる. ここで $\mathbb{Z}[c(\mathcal{V}), c(Q)] = \mathbb{Z}[c_1(\mathcal{V}), \dots, c_r(\mathcal{V}), c_1(Q), \dots, c_{n-r}(Q)]$ であり, $(c(\mathcal{V})c(Q) - 1)_{\text{hom}}$ は $c(\mathcal{V})c(Q) - 1$ の $n+1$ 個の斉次部分が生成するイデアルを表す. このことを認めて, 次を示せ. $-x_1, \dots, -x_r$ を \mathcal{V} の Chern root とするとき (すなわち $c(\mathcal{V}) = \prod_{i=1}^r (1 - x_i)$)

$$H^*(G(r, n)) \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r]^{S_r} / \langle h_{n-r+1}, \dots, h_n \rangle$$

である. ただし $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r]^{S_r}$ は x_1, \dots, x_r の対称多項式環を表し,

$$h_i = \sum_{1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_i \leq r} x_{k_1} \cdots x_{k_i}$$

は完全対称多項式である.

問 6.8. 問 6.7 における $H^*(G(r, n))$ の表示の下で次を示せ.

$$\int_{G(r, n)} f(x) = \frac{1}{r!} (\text{多項式 } D(x)f(x) \text{ の } x_1^{n-1} \cdots x_r^{n-1} \text{ の係数})$$

ただし $f(x) = f(x_1, \dots, x_r)$ は x_1, \dots, x_r の対称多項式で, $D(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$ は差積の 2 乗. また $G(r, n)$ には複素多様体としての自然な向きを入れている.

問 6.9. $G(r, n)$ の接ベクトル束 $TG(r, n)$ を考える. Chern 類 $c(TG(r, n))$ を問 6.7 に現れる \mathcal{V} の Chern roots $-x_1, \dots, -x_r$ たちを用いて表せ.

問 6.10. $X \subset \mathbb{C}P^3$ を滑らかな複素 3 次曲面とする. $\mathbb{C}P^3$ 内の直線とはある複素 2 次元部分空間 $V \subset \mathbb{C}^4$ に対して

$$\mathbb{P}(V) = \{\ell \in \mathbb{C}P^3 : \ell \text{ は } \mathbb{C}^4 \text{ の 1 次元部分空間で, } \ell \subset V \text{ を満たす.}\}$$

の形にかける $\mathbb{C}P^3$ の部分集合 ($\mathbb{C}P^1$ と同相になる) のことを指すものとする. X は少なくとも一つの直線を含むことを示せ²². (ヒント: $\mathbb{C}P^3$ の直線全体のなす集合はグラスマン多様体 $G(2, 4)$ と同一視できる.)

問 6.11. $\mathbb{C}P^1$ 上の階数 2 の複素ベクトル束 $E_{a,b} = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ (a, b は整数) について次の問いに答えよ.

- (1) (位相的) 複素ベクトル束として $E_{a,b} \cong E_{a',b'}$ であることと, $a + b = a' + b'$ とは同値であることを示せ.
- (2) (位相的) 実ベクトル束として $E_{a,b} \cong E_{a',b'}$ であることと, $a + b \equiv a' + b' \pmod{2}$ とは同値であることを示せ.

問 6.12. X をコンパクトハウスドルフ空間とする.

- (1) 任意の複素ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対して, ある十分大きい自然数 $N > 0$ が存在して, E は自明束 $X \times \mathbb{C}^N$ の部分ベクトル束と同型になることを示せ.
- (2) 任意のランク r の複素ベクトル束 $E \rightarrow X$ に対して, ある連続写像 $f: X \rightarrow G(r, \infty)$ が存在して $E \cong f^*\mathcal{V}$ となることを示せ. ただし, $G(r, \infty) = \varinjlim_n G(r, n)$ であり, \mathcal{V} は tautological bundle を表す.
- (3) (2) で定まる f はホモトピーを除いて一意であることを示せ.

問 6.13. $\mathbb{C}P^\infty = G(1, \infty) = \varinjlim_n \mathbb{C}P^n$ を無限次元射影空間とする. $L \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ を tautological line bundle とする.

$$m: \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

を $p_1^*L \otimes p_2^*L$ の分類写像 (すなわち $m^*L \cong p_1^*L \otimes p_2^*L$ を満たす) とし,

$$i: \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

²² より正確には, 任意の滑らかな 3 次曲面はちょうど 27 本の直線を含むことが知られている.

を L^{-1} の分類写像 (すなわち $i^*L \cong L^{-1}$ を満たす) とする. m, i を具体的な連続写像として与えよ. ただし $p_i: \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ は第 i 成分への射影.

注: $\mathbb{C}P^\infty$ は m を積, i を逆元写像とする, 可換で結合的な H 空間になる. すなわち $\mathbb{C}P^\infty$ は可換群の公理で等号 $=$ をホモトピック \sim にしたものをすべて満たす.

参考文献

- [Bott-Tu] Raoul Bott and Loring Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*
- [Dold] Albrecht Dold, *Partitions of unity in the theory of fibrations*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 223–255.
- [Gray] Brayion Gray, *Homotopy Theory: an Introduction to Algebraic Topology*
- [Guillemin-Pollack] Victor Guillemin and Alan Pollack, 「微分位相幾何学」
- [Hatcher] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, available at <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Husemöller] Dale Husemöller, *Fibre Bundles*
- [Milnor-Stasheff] John W. Milnor and James D. Stasheff, *Characteristic classes*
- [服部] 服部晶夫, 「多様体」
- [森田] 森田茂之, 「微分形式の幾何学」