1　ベクトル束，ファイバー束，主 G 束

1.1　ベクトル束の定義

参考文献：[Bott-Tu, §6], [服部, 第 3 章, §1]

定義 1.1. $p\colon E \to M$ がランク n の（位相的）**複素ベクトル束** (complex vector bundle) であるとは,

(0) E と M は位相空間で p は連続全射

(1) $\forall x \in M$ に対して $E_x := p^{-1}(x)$ には n 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の構造が与えられている.（E_x をファイバー (fiber) という.）

(2) $\forall x \in M$, $\exists U$: x の開近傍, 同相写像 $\exists \varphi\colon E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ (局所自明化, local trivialization という)

$$\begin{tikzcd} E|_U := p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong", "\varphi"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

s.t.

- $p = \pi_1 \circ \varphi$,
- φ がファイバーに誘導する写像 $\varphi_x\colon E_x \to \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型.

ここで $\pi_1(x, v) = x$ は第一射影.

注 1.2. 実ベクトル束も同様に定義される.

注 1.3. M が C^∞ 級多様体のとき，$p\colon E \to M$ が C^∞ 級複素ベクトル束 $\iff$ E は C^∞ 級多様体，p は C^∞ 級写像であって，上の (1), (2) を満たす．ただし，(2) において局所自明化 φ は diffeo であることを要求する.

問 1.4. C^∞ 級複素ベクトル束 $p\colon E \to M$ は沈めこみであることを示せ.

注 1.5. $p\colon E \to M$ をベクトル束とする．$N \subset M$ を部分位相空間とするとき，$E|_N = p^{-1}(N) \to N$ はベクトル束になる.

例 1.6 (自明なベクトル束). $p\colon E = M \times \mathbb{C}^n \to M$, $p(x, v) = x$ はランク n のベクトル束．これを自明なベクトル束（あるいは単に自明束）という.

例 1.7 (接ベクトル束，あるいは接束). M: C^∞ 級多様体.

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$$

には C^∞ 級多様体の構造が自然に入る (演習)．$p\colon TM \to M$ を $p(T_xM) = \{x\}$ となるように定める．局所座標系 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ に対して局所自明化が

$$\begin{aligned} TM|_U &\xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^m \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p &\longmapsto (p, e_i) \end{aligned}$$

により定まり，TM は実ベクトル束の構造を持つ．

例 1.8. M を複素多様体とする．(局所的に $\mathbb{C}^n$ の開集合と同相で，座標変換が双正則）このとき TM は複素ベクトル束の構造を持つ．(さらに正則ベクトル束の構造を持っている．)

定義 1.9. rank 1 のベクトル束を直線束（line bundle）という．

定義 1.10 (ベクトル束の同型)**.** ベクトル束 $p\colon E \to M$, $q\colon F \to M$ が同型であるとは，同相写像 $\varphi\colon E \to F$ が存在して，次が成り立つこと．

(1) $q \circ \varphi = p$, i.e.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(2) $\forall x \in M$, $\varphi_x\colon E_x \to F_x$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型．

ベクトル束 $E \to M$ が自明 $\iff$ E は自明なベクトル束 $M \times \mathbb{C}^n \to M$ と同型．

例 1.11 (Möbius の帯)**.** 自明でない直線束の例を挙げよう．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times [0,1]/(x,0) \sim (-x,1) \arrow[d] \\ ([0,1]/0 \sim 1) \cong S^1 \end{tikzcd}$$

は自明でない実直線束（何故か？）．もし，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に変えたらどうなるか？

例 1.12 (tautological line bundle)**.** 複素射影空間

$$\mathbb{CP}^n = \{\ell \subset \mathbb{C}^{n+1} : \ell \text{ は 1 次元 } \mathbb{C} \text{ 部分空間}\}$$

上の tautological line bundle とは

$$\begin{tikzcd} L := \{(\ell, v) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : v \in \ell\}, \quad p(\ell, v) = \ell \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

- $L_\ell = \{(\ell, v) : v \in \ell\} \cong \ell$ がファイバーになっている．

- 局所自明化は $U_0 = \{[1, z_1, \ldots, z_n] : (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n\}$ 上で

$$\begin{aligned} L|_{U_0} &\longrightarrow U_0 \times \mathbb{C} \\ (\ell, v) &\longmapsto (\ell, v_0) \end{aligned}$$

  により与えられる．ただし $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ とした．$\ell = [1, z_1, \ldots, z_n]$ とするとき，$v \in \ell$ より，$v = (v_0, v_0 z_1, \ldots, v_0 z_n)$ に注意する．

これが複素直線束になっていることは演習とする．

例 1.13. 実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ 上の tautological line bundle も同様に定義される（実直線束になる）．$\mathbb{RP}^1 = S^1$ 上の tautological line bundle は実は先ほどの Möbius の帯である（check せよ）．

ベクトル束より一般の構造として，fiber 束がある．

定義 1.14 (ファイバー束)**.** $p\colon E \to M$ が F をファイバーとするファイバー束であるとは,

(0) E, F, M は位相空間で p は連続全射.

(1) $\forall x \in M$, $\exists U$: x の開近傍，同相写像 $\exists \varphi\colon E|_U \cong U \times F$ (局所自明化, local trivialization)

$$\begin{tikzcd} E|_U \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

さらに各ファイバー $E_x := p^{-1}(x)$ が何らかの構造を持ち，$\varphi_x\colon E_x \cong F$ がその構造を保つことを要請することもある．

1.2 変換関数によるベクトル束の構成

参考文献：[Bott-Tu, §6], [服部, 第 3 章, §1]

$E \to M$ を $\mathbb{C}$ ベクトル束とする．M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ および，各 U_α 上での局所自明化 $\varphi_\alpha\colon E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ をとる．

$U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ とおく．2 つの同型の合成

$$U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi_\beta^{-1}} E|_{U_{\alpha\beta}} \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n$$

は各ファイバーごとには線形同型写像なので,

$$(x, v) \longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$$

の形をしている．ここで,

$$g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{C})$$

は $U_{\alpha\beta}$ 上の行列値関数で，変換関数 (transition function) と呼ばれる．

問 1.15. $g_{\alpha\beta}$ は連続関数であることを示せ.

命題 1.16 (コサイクル条件). 変換関数は次の性質を持つ.

(a) $g_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{id}$.

(b) $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x)^{-1}$.

(c) $\forall x \in U_{\alpha\beta\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して，$g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x) = \mathrm{id}$.

命題 1.17. 上の性質 (a)-(c) を満たす連続関数の族 $\{g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{C})\}$ が与えられたとき，これを変換関数とするベクトル束が存在する.

Proof.

$$E := \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{C}^n) \Big/ \sim$$

ただし，$(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ と $(y, w) \in U_\beta \times \mathbb{C}^n$ に対して，

$$(x, v) \sim (y, w) \iff x = y \text{ かつ } v = g_{\alpha\beta}(x)w$$

と定義する．$p\colon E \to M$ を $p([x, v]) = x$ と定めればよい．上の性質 (a)-(c) を使うと，$\sim$ が同値関係になることが分かる．自然な射影 $U_\alpha \times \mathbb{C}^n \to E|_{U_\alpha}$ は全単射で同相写像になることがチェックできる．詳細は演習とする． □

命題 1.18. 変換関数 $\{g_{\alpha\beta}\}$, $\{g'_{\alpha\beta}\}$ が同型なベクトル束を定める $\iff \exists \lambda_\alpha\colon U_\alpha \to GL_n(\mathbb{C})$ *s.t.* $g'_{\alpha\beta}(x) = \lambda_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x)\lambda_\beta(x)^{-1}$ *for* $x \in U_{\alpha\beta}$.

Proof. ($\Rightarrow$) E, E' を各々$\{g_{\alpha\beta}\}$, $\{g'_{\alpha\beta}\}$ を変換関数とするベクトル束とする．仮定により E と E' は同型

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\lambda", "\cong"'] \arrow[dr] & & E' \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

である．これが（局所自明化を通じて）誘導する次の写像を考える.

$$U_\alpha \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\lambda} E'|_{U_\alpha} \xrightarrow{\varphi'_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^n$$

ただし，$\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha$ は各々$E|_{U_\alpha}$, $E'|_{U_\alpha}$ の自明化．これは，ある $\lambda_\alpha\colon U_\alpha \to GL_n(\mathbb{C})$ を用いて，

$$(x, v) \longmapsto (x, \lambda_\alpha(x)v)$$

の形に書ける．各 $x \in U_{\alpha\beta}$ に対して，次の可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[rr, "\lambda_\alpha(x)"] & & \mathbb{C}^n \\ & E_x \arrow[ul, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dl, "\varphi_\beta"] \arrow[r, "\cong", "\lambda_x"'] & E'_x \arrow[ur, "\varphi'_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi'_\beta"'] & \\ \mathbb{C}^n \arrow[uu, "g_{\alpha\beta}(x)"] \arrow[rr, "\lambda_\beta(x)"'] & & \mathbb{C}^n \arrow[uu, "g'_{\alpha\beta}(x)"'] \end{tikzcd}$$

より $g'_{\alpha\beta}(x)\lambda_\beta(x) = \lambda_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x)$.

($\Leftarrow$) 局所自明化により，λ_α により U_α 上の同型 $E|_{U_\alpha} \cong E'|_{U_\alpha}$ を作る．これが張り合うことを見ればよい.（詳細略） □

系 1.19. 変換関数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ が自明なベクトル束を定める $\Longleftrightarrow$ $g_{\alpha\beta}(x) = \lambda_\alpha(x)\lambda_\beta(x)^{-1}$ を満たす $\lambda_\alpha\colon U_\alpha \to GL_n(\mathbb{C})$ が存在する．

もし各 U_α 上でベクトル束が自明になることが分かっているとすると（例えば U_α が可縮であればそうなる），集合

$$\{\text{変換関数}\,\{g_{\alpha\beta}\}\}/\{g_{\alpha\beta}\} \sim \{\lambda_\alpha g_{\alpha\beta}\lambda_\beta^{-1}\}$$

は M 上のベクトル束の同型類の集合を与える．これは後で出てくる Čech コホモロジーの非アーベル版である．複素直線束（$n = 1$）のときは $GL_n(\mathbb{C})$ はアーベル群となり，この集合はコホモロジー群 $H^2(M;\mathbb{Z})$ と同一視される．

例 1.20. 接束 $TM \to M$ の変換関数．M を座標近傍 $(U_\alpha; x_1^\alpha, \ldots, x_m^\alpha)$ たちで覆う．各座標近傍は $TM|_{U_\alpha}$ の自明化を定める．変換関数は Jacobi 行列で与えられる．

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left(\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta}\right)_{i,j}$$

注 1.21. M が C^∞ 級多様体，$E \to M$ が C^∞ 級ベクトル束なら，変換関数 $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{C})$ は C^∞ 級にとれる．

M が複素多様体，$E \to M$ が正則ベクトル束なら，変換関数 $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{C})$ は正則関数にとれる．

2025.4.7 ここまで

1.3 自明なベクトル束の判定方法

自明なベクトル束 $E \to M$ とは $M \times \mathbb{C}^n \to M$ と同型なベクトル束のことであった．

定義 1.22. ベクトル束（あるいはもっと一般に fiber 束でもよい）$p\colon E \to M$ の切断 (section) とは，連続写像 $s\colon M \to E$ であって，$p \circ s = \mathrm{id}$ を満たすもののこと．

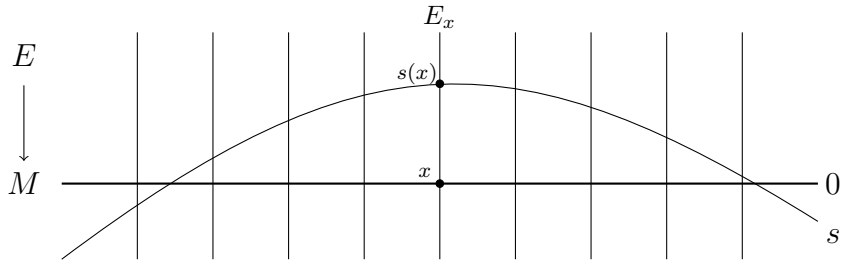

図 1: 切断 s とゼロ切断 0

定義 1.23. ベクトル束のゼロ切断 $0\colon M \to E$ とは各点 $x \in M$ に対してその点のファイバーのゼロベクトル $0 \in E_x$ を対応させる切断のことである.（問：0 切断は連続か？）しばしば，ゼロ切断により M を E の部分集合と思う.

定義 1.24. $E \to M$ をランク n のベクトル束とする．$U \subset M$ を部分集合とする．$E|_U$ の切断の組 $s_1, \ldots, s_n$ が，E の U 上の枠 (frame) であるとは，任意の $x \in U$ に対して $\{s_1(x), \ldots, s_n(x)\}$ が E_x の基底となること.

命題 1.25. ベクトル束 $E \to M$ が自明 $\Longleftrightarrow$ E の M 全体での枠 $s_1, \ldots, s_n$ が存在する.

Proof. ($\Longrightarrow$) $E \cong M \times \mathbb{C}^n$ のとき，$s_i\colon M \to M \times \mathbb{C}^n$, $s_i(x) = (x, e_i)$ は枠となる.
($\Longleftarrow$) $\{s_1, \ldots, s_n\}$ を M 上の枠とする．写像 $\Phi\colon M \times \mathbb{C}^n \to E$ を

$$\Phi\left(x, \sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i s_i(x)$$

と定めると，

- Φ は各ファイバーの線形写像を誘導する.
- Φ は同相になる（問：E の局所自明化をもちいてこれを確かめよ）.

従って E は自明である. □

系 1.26. 直線束 $L \to M$ が自明 $\Longleftrightarrow$ 至る所 0 でない（つまり $\forall x \in M,\ s(x) \neq 0$）切断 $s\colon M \to L$ が存在する.

例 1.27. Möbius の帯は至る所 0 でない切断を持たず，従って非自明な直線束である.
[Möbius の帯の絵を描く]
定義から，Möbius の帯の section とは，連続関数 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ であって $f(0) = -f(1)$ を満たすものである．$f(0) = 0$ ならゼロ点を持つし，$f(0) \neq 0$ なら，中間値の定理より $f(x)$ はゼロ点を持つ.

問 1.28. Tautological line bundle $L \to \mathbb{CP}^1$ は至る所消えない切断を持たないことを示せ．ヒント：もしあれば，s は $s\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ を定める．自然な射影 $\pi\colon \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^1$ に対して，$\pi \circ s = \mathrm{id}$ が成立する．π, s がコホモロジーに誘導する写像を考えて矛盾を導け.

1.4 ベクトル束の計量

複素ベクトル束 $E \to M$ の（Hermite）計量 h とは各ファイバーに正定値エルミート計量 $h_x\colon E_x \otimes \overline{E_x} \to \mathbb{C}$ が与えられたもので，次の意味で x について連続であるもの.

局所自明化 $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ の下で，h_x は $\mathbb{C}^n$ の計量を誘導する．それを再び h_x と書くと，$h_x(e_i, e_j)$ は x の連続関数となる．

注 1.29. C^∞ 級ベクトル束に対しては，C^∞ 級計量が定義できる．実ベクトル束の実計量も同様に定義される．

命題 1.30. *paracompact Hausdorff* 空間 M 上のベクトル束は計量を持つ．

Proof. M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ および自明化 $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ をとる．パラコンパクトハウスドルフ空間の性質より，次を満たす連続な 1 の分割 $\rho_\alpha \colon M \to [0,1]$ が存在する：

$$\operatorname{Supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha, \quad \{\operatorname{Supp} \rho_\alpha\} \text{ は locally finite}, \quad \sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$$

各 U_α 上では自明化（と $\mathbb{C}^n$ の標準計量）を用いて計量 h_α を定めることができる．$u, v \in E_x$ に対して，

$$h_x(u,v) := \sum_\alpha \rho_\alpha(x) h_\alpha(u,v)$$

とおくと，これは E_x の正定値エルミート計量になる．実際，$u \neq 0$ に対して

$$h_x(u,u) = \sum_\alpha \rho_\alpha(x) h_\alpha(u,u) > 0$$

h_x は x について連続に依存し（何故か？），計量を定める． □

問 1.31. エルミート計量の代わりに，非退化な $\mathbb{C}$-bilinear ペアリング

$$Q_x \colon E_x \otimes E_x \to \mathbb{C}$$

であって，x について連続に依存するもの，はどんなベクトル束についても作れるか？また，上の命題でハウスドルフの仮定を落とすとどうなるか？

命題 1.32 (正規直交枠の存在)**.** $E \to M$ をエルミート（あるいは実）計量 h が与えられた複素（実）ベクトル束とする．$\forall x \in M$, $\exists U$：x の開近傍, $\exists\ s_1, \ldots, s_n$：$E|_U$ の枠, *s.t.* $h(s_i(x), s_j(x)) = \delta_{i,j}$.

Proof. x のある開近傍 U 上での局所自明化が取れる．つまり，$E|_U$ の枠 $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$ が存在する．この $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$ に対して，Gram-Schmidt の直交化法を施すとよい．

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= \frac{\tilde{s}_1(x)}{\|\tilde{s}_1(x)\|} \\
s_2(x) &= \frac{\tilde{s}_2(x) - h(\tilde{s}_2(x), s_1(x)) s_1(x)}{\|\tilde{s}_2(x) - h(\tilde{s}_2(x), s_1(x)) s_1(x)\|} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ここで $\|u\| = \sqrt{h_x(u,u)}$ はベクトル $u \in E_x$ の長さ． □

系 1.33. $E \to M$ を *paracompact Hausdorff* 空間 M 上の $\mathbb{C}$（あるいは $\mathbb{R}$）ベクトル束とする．その局所自明化を上手くとれば，変換関数は全て $U(n)$（あるいは $O(n)$）に値をとるようにできる．

Proof. E に計量を入れて，正規直交枠に付随する局所自明化をとればよい． □

変換関数が値をとる群を**構造群** (structure group) と呼ぶ．上の系は任意の $\mathbb{C}$ ベクトル束の構造群が（一般には $GL_n(\mathbb{C})$ であるが）$U(n)$ に取り直せることを言っている．これを構造群の $U(n)$ への還元 (reduction) という．

1.5 よりみち：fiber 束の構造群

$E \to M$ を F をファイバーとするファイバー束とする．M のある開被覆 $\{U_\alpha\}$ および U_α 上での局所自明化 $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times F$ をとると，ベクトル束のときと同様に，変換関数

$$g_{\alpha\beta} \colon U_{\alpha\beta} \to \mathrm{Homeo}(F)$$

が定義される．ここで $\mathrm{Homeo}(F)$ は F の自己同相写像のなす群．$g_{\alpha\beta}$ が部分群 $G \subset \mathrm{Homeo}(F)$ に値をとるとき，G はこのファイバー束の構造群であるという．

例 1.34. $E \to M$ を計量 h をもつ複素ベクトル束とする．このベクトル束に関して次のファイバー束が構成できる．

- 単位球面束（sphere bundle）

$$S(E) = \bigsqcup_{x \in M} \{v \in E_x \mid \|v\| = 1\}$$

  ファイバーは S^{2n-1}.

- 円盤束（disc bundle）

$$D(E) = \bigsqcup_{x \in M} \{v \in E_x \mid \|v\| \leq 1\}$$

  ファイバーは D^{2n}.

- 枠束（frame bundle）

$$\mathrm{Fr}(E) = \bigsqcup_{x \in M} \{(v_1, \ldots, v_n) \in E_x^n \mid (v_1, \ldots, v_n) \text{ は } E_x \text{ の基底}\}$$

  ファイバーは $GL_n(\mathbb{C})$.

これらのファイバー束の構造群は $U(n)$ である（演習）．

1.6 ベクトル束に対する操作

1.6.1 引き戻し (pull-back)

$p\colon E \to X$ をベクトル束とする（ファイバー束でもよい）．$f\colon Y \to X$ を連続写像とする．このとき

$$f^*E = \{(y, e) \in Y \times E \mid f(y) = p(e)\}$$

とおき，$\tilde{p}\colon f^*E \to Y$ を $\tilde{p}(y, e) = y$ と定める．

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

このとき，$\tilde{p}$ は Y 上のベクトル束となる（演習）．さらに $y \in Y$ でのファイバーは

$$(f^*E)_y = E_{f(y)}$$

注 1.35. $Y \subset X$ のとき，包含写像 $i\colon Y \to X$ に関する引き戻しは，Y への制限と同じ：

$$i^*E \cong E|_Y.$$

2025.4.15 ここまで

1.6.2 Whitney 和

$p\colon E \to X$, $q\colon F \to X$ をベクトル束（あるいはファイバー束）とする．

$$E \oplus F = \{(e, f) \in E \times F \mid p(e) = q(f)\} \ni (e, f) \mapsto p(e) = q(f) \in X$$

はベクトル束になる．ファイバー束の場合は，$E \times_X F$ と書く．

注 1.36. 引き戻しと Whitney 和はどちらも「ファイバー積」として理解される．

1.6.3 部分ベクトル束

$p\colon E \to X$, $q\colon F \to X$ をベクトル束とする．位相空間の埋め込み $i\colon F \hookrightarrow E$（つまり，$i\colon F \to i(F)$ が同相）が次を満たすとき，F を E の部分ベクトル束という．

(1) 次が可換

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

(2) i はファイバーの間の線形写像 $i_x\colon F_x \to E_x$ を誘導する

問 1.37. 連続写像 $f\colon F \to E$ が上の可換図式 (1) を満たし，ファイバーに誘導する写像 $f_x\colon F_x \to E_x$ が線形単射という条件を満たすとき，f は埋め込みであることを示せ．

1.6.4　商ベクトル束

$E \to X$ をベクトル束，$F \to X$ をその部分ベクトル束とする．このとき

$$E/F = \bigsqcup_{x \in X} E_x/F_x$$

とおき，商ベクトル束という．これはベクトル束の構造を持つ．

部分ベクトル束 $F \subset E$ に対して，

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow E/F \longrightarrow 0$$

の形の列（と同型な列）をベクトル束の小完全列という．

例 1.38. M を C^∞ 級多様体，$S \subset M$ を部分多様体とする．このとき TS は $TM|_S$ の部分ベクトル束．さらに商ベクトル束

$$N_{S/M} := TM|_S/TS$$

を S の法ベクトル束 (normal vector bundle) という．

1.6.5　直交補束

$E \to X$ を計量を持つベクトル束，$F \to X$ をその部分ベクトル束とする．このとき

$$F^\perp = \bigsqcup_{x \in X} F_x^\perp$$

はベクトル束となる．さらにこの時，

$$E \cong F \oplus F^\perp, \qquad E/F \cong F^\perp$$

が成立する．

命題 1.39. パラコンパクトハウスドルフ空間上のベクトル束の小完全列は分裂する．

Proof. 小完全列 $0 \to F \to E \to E/F \to 0$ に対して，E に計量を入れると，$E \cong F \oplus F^\perp$．ここで $F^\perp \cong E/F$ であるから，$E \cong F \oplus E/F$. □

1.6.6　双対，テンソル積，Hom，外積

$E \to X$，$F \to X$ を複素ベクトル束とする．E の双対束が

$$E^* := \bigsqcup_{x \in X} E_x^*, \qquad E_x^* = \mathrm{Hom}(E_x, \mathbb{C})$$

で与えらえる．E と F のテンソル積束は

$$E \otimes F := \bigsqcup_{x \in X} E_x \otimes F_x$$

で与えられ，Hom 束は

$$\mathrm{Hom}(E,F) := \bigsqcup_{x\in X} \mathrm{Hom}(E_x,F_x) \cong E^* \otimes F$$

で与えられる．E の p 次外積束は

$$\bigwedge^p E := \bigsqcup_{x\in X} \bigwedge^p E_x$$

で与えられる．例えば，多様体 M に対して，余接束 T^*M は接束 TM の双対束であり，M 上の p 次微分形式は T^*M の p 次外積束 $\bigwedge^p T^*M$ の切断である．

問 1.40. 底空間の開被覆 $\{U_\alpha\}$ を固定する．E が変換関数 $g_{\alpha\beta}$ で与えられるベクトル束，F が変換関数 $h_{\alpha\beta}$ で与えられるベクトル束であるとき，E^* は変換関数 ${}^t g_{\alpha\beta}^{-1}$ で与えられるベクトル束，$E\otimes F$ は変換関数 $g_{\alpha\beta}\otimes h_{\alpha\beta}$ で与えられるベクトル束であることを観察せよ．

1.7 ファイバー束のホモトピー性質

この節では次の定理を示すことを目標とする．$I=[0,1]$ とおく．この節の証明は [Husemöller, Chapter 4, §9] を参照した．

定理 1.41. X をパラコンパクトハウスドルフ空間，$E\to X\times I$ を *fiber* 束とする．$\pi\colon X\times I\to X$ を射影とする．このとき $X\times I$ 上のファイバー束の同型

$$\phi\colon E \xrightarrow{\cong} \pi^*(E|_{X\times\{1\}}) = E|_{X\times\{1\}}\times I$$

であって，$\phi|_{X\times\{1\}}=\mathrm{id}$ となるものが存在する．特に，$E|_{X\times\{0\}}\cong E|_{X\times\{1\}}$.

証明のために幾つかの Lemma を用意する．

補題 1.42. $E\to X\times[a,c]$ をファイバー束とする．$a\le b\le c$ とする．もし $E|_{X\times[a,b]}$ と $E|_{X\times[b,c]}$ が共に（ファイバー束として）自明ならば，E も自明である．

Proof. F をファイバーとする．仮定より自明化

$$\phi_1\colon E|_{X\times[a,b]} \cong (X\times[a,b])\times F$$
$$\phi_2\colon E|_{X\times[b,c]} \cong (X\times[b,c])\times F$$

が存在する．$X\times\{b\}$ に沿った変換関数

$$g\colon X\times F \xrightarrow{(\phi_2|_{X\times\{b\}})^{-1}} E|_{X\times\{b\}} \xrightarrow{\phi_1|_{X\times\{b\}}} X\times F$$

を考えて，ϕ_2 を次の合成で与えられる自明化 $\tilde\phi_2$ に取り換える．

$$\begin{tikzcd}
\tilde\phi_2\colon E|_{X\times[b,c]} \arrow[r, "\phi_2"] & (X\times[b,c])\times F \arrow[r] \arrow[d, equal] & (X\times[b,c])\times F \arrow[d, equal] \\
& X\times F\times[b,c] \arrow[r, "g\times\mathrm{id}"] & X\times F\times[b,c]
\end{tikzcd}$$

このとき定義から

$$\tilde{\phi}_2|_{X\times\{b\}} = \phi_1|_{X\times\{b\}}$$

が分かるので，ϕ_1 と $\tilde{\phi}_2$ を張り合わせて同型写像

$$\phi\colon E \cong (X \times [a,c]) \times F$$

を得ることができる． □

注 1.43. ϕ が同相写像であることは，次の事実 ϕ および ϕ^{-1} に適用することで分かる．$f\colon X \to Y$ が連続 $\Leftrightarrow \exists X_1, \exists X_2$: X の閉集合，s.t. $X = X_1 \cup X_2$, $f|_{X_i}\colon X_i \to Y$ は連続 $(i = 1, 2)$.

補題 1.44. *$E \to X \times I$ をファイバー束とする．$\forall x \in X$, $\exists U \subset X$: x の開近傍 s.t. $E|_{U\times I}$ は自明.*

Proof. 各 $t \in I$ に対して，x の開近傍 $\exists U(t) \subset X$, t を含む連結開集合 $\exists J(t) \subset I$ s.t. $E|_{U(t)\times J(t)}$ は自明． I のコンパクト性から，有限個の $t_1, \ldots, t_k \in I$ が存在して，

$$I = J(t_1) \cup \cdots \cup J(t_k)$$

となる．ここで

$$U = U(t_1) \cap \cdots \cap U(t_k)$$

とおく．各 i に対して $E|_{U\times J(t_i)}$ は自明なので，Lemma 1.42 より $E|_{U\times I}$ も自明であることが分かる． □

定理 *1.41* の証明. 補題 1.44 より，X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在して，$E|_{U_\alpha\times I}$ は自明である．

$$h_\alpha\colon (U_\alpha \times I) \times F \cong E|_{U_\alpha\times I}$$

を自明化とする．

以下では，まず $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が有限被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ である場合に証明し， あとで無限被覆の場合に議論をどのように修正すればよいかを説明する．

$\{\rho_\alpha\}$ を $\{U_\alpha\}$ に付随する連続な 1 の分割とする．ここで $\rho_\alpha\colon X \to [0,1]$ は $\operatorname{Supp}\rho_\alpha \subset U_\alpha$ を満たす．また

$$\tau_0(x) := 0, \qquad \tau_\alpha(x) := \rho_1(x) + \cdots + \rho_\alpha(x)$$

とおく．$\tau_\alpha\colon X \to [0,1]$ は $0 = \tau_0 \le \tau_1 \le \cdots \le \tau_m = 1$ を満たす関数列である．さらに $r_\alpha\colon X \times I \to X \times I$ を

$$r_\alpha(x,t) := (x, \max(\tau_\alpha(x), t))$$

と定義する．[写像 r_α を図示] $r_0 = \mathrm{id}$, $r_m(x,t) = (x,1)$ に注意する．以下での目標は $X \times \{1\}$ 上で恒等写像である同型

$$E \cong r_1^*E \cong r_2^*E \cong \cdots \cong r_m^*E = \pi^*(E|_{X\times\{1\}})$$

を順次構成することである．

同型 $r_{\alpha-1}^*E \cong r_\alpha^*E$ の構成を説明する．アイデアは図 2 にある通り．

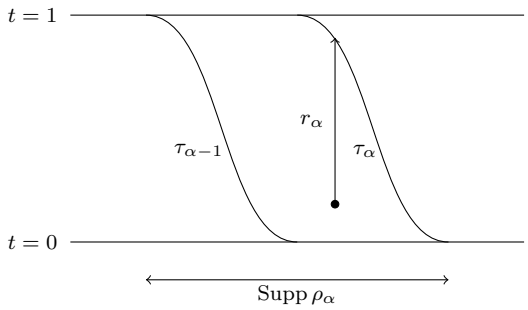

図 2: $\operatorname{Supp}(\rho_\alpha)\times I$ 上の自明化を使って $r_{\alpha-1}^*E\cong r_\alpha^*E$ を構成する．

- $U_\alpha\times I$ 上では

$$\begin{aligned} r_{\alpha-1}^*E|_{U_\alpha\times I} &\xrightarrow{\cong} (U_\alpha\times I)\times F \xrightarrow{\cong} r_\alpha^*E|_{U_\alpha\times I} \\ (x,t,h_\alpha(r_{\alpha-1}(x,t),f)) &\mapsto (x,t,f)\mapsto (x,t,h_\alpha(r_\alpha(x,t),f)) \end{aligned}$$

  により同型を定める．

- $(\operatorname{Supp}\rho_\alpha)^c\times I$ 上では，$r_{\alpha-1}=r_\alpha$ であるから，恒等写像

$$r_{\alpha-1}^*E|_{(\operatorname{Supp}\rho_\alpha)^c\times I}\cong r_\alpha^*E|_{(\operatorname{Supp}\rho_\alpha)^c\times I}$$

  が同型を与える．

この二つの同型は張り合う．また $X\times\{1\}$ 上では恒等写像であることに注意する．

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が無限被覆のとき．A に整列順序を入れておく．局所有限な 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}$ をとる．$\tau_\alpha(x):=\sum_{\beta\le\alpha}\rho_\alpha(x)$ と定め，$r_\alpha\colon X\times I\to X\times I$ を同様に定める．$x\in X$ の開近傍 U を十分小さくとると，$U\cap\operatorname{Supp}\rho_\alpha\neq\emptyset$ となる α は有限個 $\alpha_1\le\cdots\le\alpha_k$ であり，上と同様に同型

$$E\cong r_{\alpha_1}^*E\cong r_{\alpha_2}^*E\cong\cdots\cong r_{\alpha_k}^*E\cong\pi^*(E|_{X\times\{1\}})$$

が $U\times I$ 上で構成される．これらの同型は張り合う． □

系 1.45. X をパラコンパクトハウスドルフ空間，$E\to Y$ をファイバー束とする．$f,g\colon X\to Y$ がホモトピックであるとき，$f^*E\cong g^*E$.

Proof. f と g の間のホモトピーを $H\colon X\times I\to Y$ とする．ここで $f=H|_{X\times\{0\}}$, $g=H|_{X\times\{1\}}$ である．このとき

$$f^*E=H^*E|_{X\times\{0\}}\cong H^*E|_{X\times\{1\}}\cong g^*E$$

□

系 1.46. X をパラコンパクトハウスドルフ空間で，可縮であるとする．このとき，X 上の任意のファイバー束は自明である．

Proof. X が可縮 $\Leftrightarrow$ X は 1 点とホモトピー同値．従って，$\exists c\colon \mathrm{pt}\to X,\ \pi\colon X\to\mathrm{pt}$ s.t. $c\circ\pi\sim\mathrm{id}_X$．($\pi\circ c=\mathrm{id}_{\mathrm{pt}}$ は自明に成り立つ.）X 上のファイバー束 $E\to X$ に対して，$E=\mathrm{id}_X^*E\cong(c\circ\pi)^*E=\pi^*(E|_c)\cong F\times X$. □

2025.4.22 ここまで

1.8 ベクトル束のホモトピー性質

前節の結果をベクトル束に応用する．

定理 1.47. X をパラコンパクトハウスドルフ空間とする．$E \to X \times I$ をベクトル束とする．このときベクトル束の同型

$$\phi\colon E \cong \pi^*(E|_{X\times\{1\}})$$

であって $\phi|_{X\times\{1\}} = \mathrm{id}$ となるものが存在する．

Proof. 同型がベクトル束の同型にとれることを示したい．そのために次のファイバー束を考える．$F = \pi^*(E|_{X\times\{1\}})$ とおく．ファイバー束 $\mathrm{Iso}(E,F) \to X \times I$ を点 (x,t) でのファイバーが

$$\mathrm{Iso}(E,F)_{(x,t)} = \{\varphi\colon E_{(x,t)} \cong F_{(x,t)} : \text{線形同型}\}$$

で与えられるものとする．$E|_{X\times\{1\}} \cong F|_{X\times\{1\}}$ より $\mathrm{Iso}(E,F)$ は $X \times \{1\}$ 上で切断を持つ．定理 1.41 より，

$$\mathrm{Iso}(E,F) \cong \mathrm{Iso}(E,F)|_{X\times\{1\}} \times I$$

であるから，この切断は $X \times I$ 上に拡張する．従って $E \cong F$ が従う． □

問 1.48. X が（パラコンパクトだが）ハウスドルフでないときに，上の定理の反例を作れ．

ファイバー束のときと同様に次の系を得る．

系 1.49. X をパラコンパクトハウスドルフ空間，$f \sim g\colon X \to Y$ をホモトピックな写像とする．Y 上の任意のベクトル束 $E \to Y$ に対して，$f^*E \cong g^*E$.

系 1.50. 可縮なパラコンパクトハウスドルフ空間上のベクトル束は自明である．

問 1.51. X と Y がホモトピー同値なパラコンパクトハウスドルフ空間のとき，X 上のベクトル束の同型類の集合と Y 上のベクトル束の同型類の集合の間に 1 対 1 の写像があることを示せ．

1.9 被覆ホモトピー性質

ファイバー束のホモトピー性質の系として，次の被覆ホモトピー性質 (covering homotopy property, CHP と略する）を得る．

定義 1.52. 連続写像 $p\colon E \to Y$ が位相空間 X に対して**被覆ホモトピー性質**（CHP）を持つとは，任意の連続写像 $g\colon X \times I \to Y$ および $g_0 := g|_{X\times\{0\}}$ の E へのリフト

$f\colon X \to E$（すなわち，$p \circ f = g_0$ を満たす写像）に対して，連続写像 $\tilde{f}\colon X \times I \to E$ であって，$\tilde{f}|_{X\times\{0\}} = f$, $p \circ \tilde{f} = g$ を満たすものが存在すること．

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

つまり，$g_0\colon X \to Y$ とそのリフト $f\colon X \to E$ が与えられ，g_0 をホモトピックに変形するとき，リフト f も共に変形できる．

定理 1.53. ファイバー束 $E \to Y$ は任意のパラコンパクトハウスドルフ空間 X に対して *CHP* を持つ．

Proof. $g, f, \tilde{f}$ を上の定義の通りとする．ファイバー束 $g^*E \to X \times I$ を考えよう．

$$f \text{ を与える} \iff g^*E \text{ の } X \times \{0\} \text{ 上の切断 } s \text{ を与える}$$
$$\tilde{f} \text{ を与える} \iff s \text{ の } X \times I \text{ への拡張を与える}$$

に注意する．定理 1.41 より $g^*E \cong (g^*E|_{X\times\{0\}}) \times I$ であるから結論が従う． □

注 1.54. 実は定理 1.53 は，X がパラコンパクトハウスドルフと仮定する代わりに，Y がパラコンパクトハウスドルフと仮定しても成立する．つまり，パラコンパクトハウスドルフ空間上のファイバー束は任意の位相空間に対して CHP を持つ．より一般には，numerable fiber bundle $E \to Y$ は任意の位相空間に対して CHP を持つ．

（説明）詳細は技術的になるため本講義では省略するが，[Husemöller, Chapter 4, §9]（あるいは原論文 [Dold]）を参照せよ．X の開被覆 $\{U_\alpha\}$ が *numerable* であるとは，ある連続な 1 の分割 $\rho_\alpha\colon X \to [0,1]$ が存在して，$\operatorname{Supp}\rho_\alpha \subset U_\alpha$ であり，集合族 $\{\operatorname{Supp}\rho_\alpha\}$ が局所有限となること．ファイバー束 $E \to X$ が *numerable* であるとは，ある numerable な開被覆 $\{U_\alpha\}$ が存在して，全ての α に対して $E|_{U_\alpha}$ が自明になることである．パラコンパクトハウスドルフ空間上のファイバー束は必ず numerable になる．

まず numerable fiber bundle は引き戻しで閉じている．つまり，$f\colon X \to Y$ が連続写像で $E \to Y$ が numerable fiber bundle であれば f^*E も numerable fibre bundle である [Husemöller, Proposition 9.3]．numerable という条件は，底空間がパラコンパクトハウスドルフという条件と違って，圏論的に閉じており扱いやすい．

次に $X \times I$ 上の numerable なファイバー束 $E \to X \times I$ に対して，X の numerable な開被覆 $\{U_\alpha\}$ であって，各 α に対して $E|_{U_\alpha \times I}$ が自明になるものが存在する．これは [Husemöller, Lemma 9.5] の議論から従う．このことを使うと，定理 1.41 および定理 1.53 の証明をファイバー束 E が numerable の場合に拡張できることが分かる．

定義 1.55. 任意の位相空間 X に対して CHP をもつ写像 $p\colon E \to Y$ を fibration という．全ての I^n に対して CHP をもつ写像 $p\colon E \to Y$ を Serre fibration という．

上の注意より，任意のファイバー束は fibration である．

定理 1.56 (ホモトピー長完全列)**.** $p\colon X \to Y$ を *Serre fibration* とする．$y \in Y$, $F = p^{-1}(y)$, $x \in F$ に対して，次の群の完全列[1]．

$$\to \pi_n(F,x) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X,x) \xrightarrow{p_*} \pi_n(Y,y) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F,x) \to \cdots \to \pi_0(Y,y)$$

[1]ただし，π_0 については群ではなく，基点付き集合である．基点付き集合への写像の核をその基点の逆像と定義することで，$\pi_1(Y,x) \to \pi_0(F,x) \to \pi_0(X,x) \to \pi_0(Y,y)$ の完全性が定義される．

がある．

ホモトピー群について非常に簡単に説明する．より詳しくは [Bott-Tu, Section 17] を参照．X を位相空間，$x \in X$ を基点とする．n 次ホモトピー群 $\pi_n(X,x)$ は

$$\begin{aligned}\pi_n(X,x) &:= \{\text{ 境界 } \partial I^n \text{ を } x \text{ にうつす連続写像 } f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X,x)\}/\sim \\ &= \{\text{ 基点を保つ連続写像 } f\colon (S^n, *) \to (X,x)\}/\sim\end{aligned}$$

と定義される[2]．ここで $\sim$ は homotopic の関係．例えば $f_1, f_2\colon (I^n, \partial I^n) \to (X,x)$ がホモトピックであるとは，連続写像 $(I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X,x)$ が存在して $f_1 = H(\cdot, 0)$, $f_2 = H(\cdot, 1)$ となること．$n = 0$ のときは $\pi_0(X,x)$ は X の弧状連結成分のなす集合である（$I^0 = \mathrm{pt}$, $\partial I^0 = \emptyset$ に注意）．

$n \geq 1$ のとき，$\pi_n(X,x)$ には写像の定義域である I^n を「よこに並べてつなぎ合わせること」により積が入る（絵を描いて説明）．$n \geq 2$ のとき，$\pi_n(X,x)$ はアーベル群であることが容易に分かる（絵を書いて説明）．$n = 1$ のときはアーベル群とは限らない．

ホモトピー長完全列に出てくる写像 $\partial\colon \pi_n(Y,y) \to \pi_{n-1}(F,x)$ について説明しよう．$\pi_n(Y,y)$ の元は写像 $g\colon (I^n, \partial I^n) \to (Y,y)$ によって代表される．I^n の「一番上の面」$I^{n-1} \times \{1\}$ **以外**の面の和集合 $B = (I^{n-1} \times \{0\}) \cup (\partial I^{n-1} \times I)$ を考えよう．g は B 上で y に値をとる定値写像である．同相写像 $I^n \cong B \times I$ であって，$B \subset I^n$ 上では，$B \times \{0\}$ への恒等写像になっているものが存在する．この同相写像により I^n を $B \times I$ と同一視しよう．$B \subset I^n$ 上での g のリフト f として x に値をとる定値写像を考え，CHP を適用すると，g のリフト写像 $\tilde{f}\colon I^n \to X$ であって，B 上では x に値をとる定値写像になっているものが存在する．ここで $\tilde{f}$ を一番上の面 $I^{n-1} \times \{1\}$ に制限したものは（g のリフトであることから）F に値をとることが分かり，$\partial I^{n-1} \times \{1\} \subset B$ 上では x への定値写像である．このとき $\partial[g] = [\tilde{f}|_{I^{n-1} \times \{1\}}]$ と定義する．

長完全列は CHP を使って比較的容易に示せる．詳細は [Hatcher, Theorem 4.41] を参照のこと．

本講義では fibration についてこれ以上あまり立ち入らないが，演習問題を幾つか出しておく．

問 1.57. $p\colon E \to Y$ を fibration とする．

(1) 連続な道で結ばれる任意の 2 点 $y_1, y_2 \in Y$ に対して，E_{y_1} と E_{y_2} はホモトピー同値であることを示せ．ただし $E_y = p^{-1}(y)$ は y でのファイバーを表す．

(2) 連続写像 $f\colon X \to Y$ による引き戻し $f^*E = X \times_Y E \to X$ は fibration であることを示せ．

問 1.58. 位相空間の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して

$$P_f = \{x \in X, p\colon [0,1] \to Y \mid p \text{ は連続}, p(0) = f(x)\}$$

[2]記号 $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X,x)$ は，写像 $f\colon I^n \to X$ であって，$f(\partial I^n) \subset \{x\}$ なるものを意味する．

とおく．ただし道の空間にはコンパクト開位相を入れるものとする．写像 $f\colon X \to Y$ を次のように分解する．

$$X \xrightarrow{i} P_f \xrightarrow{\pi} Y$$

ここで $i(x) = (x, f(x)$ への定値写像), $\pi(x,p) = p(1)$ と定める．このとき i はホモトピー同値，π は fibration であることを示せ．

問 1.59. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \le 1\}$, $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ とおく．写像 $f\colon E \to X$, $f(x,y) = x$ は fibration であることを示せ．（これはファイバー束ではない fibration の例である．）

1.10 主 G 束

G を位相群とする．つまり，位相が与えられた群 G であって，写像 $G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$, $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ が連続となるもの．本講義では，G として $GL_n(\mathbb{C}), U(n)$ などの Lie 群を考えることが多い．

定義 1.60. 主 G 束 (principal G-bundle) とは，G を fiber とするファイバー束 $P \to X$ であって次を満たすもの．

1. P は G の右作用を持つ．

$$P \times G \to P, \quad (p,g) \mapsto p \cdot g$$

ただし右作用とは，$p \cdot 1_G = p$, $p \cdot (g_1 g_2) = (p \cdot g_1) \cdot g_2$ が成立すること．

2. $\forall x \in X$, $\exists U$: x の開近傍, 局所自明化

$$\begin{tikzcd} \exists\phi\colon P|_U \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & U \times G \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

が存在して，$U \times G$ に右 G 作用を $(u,g) \cdot g' = (u, gg')$ と定めるとき，ϕ は G 同変である．つまり，$\phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot g$ が全ての $p \in P|_U$, $g \in G$ に対して成立する．

P への右 G 作用は自由であることに注意されたい．つまり，$p \cdot g = p$ ならば $g = 1_G$ である．

1.10.1 同伴ファイバー束

主 G 束からファイバー束を構成する方法を与える．G の連続な左作用 $G \times F \to F$ が与えられた位相空間 F を考える．$\pi\colon P \to X$ を主 G 束とする．このとき，F をファイバーとするファイバー束（同伴ファイバー束）が

$$P \times_G F := P \times F/(p \cdot g, f) \sim (p, g \cdot f)\ \forall g \in G$$
$$\pi\colon P \times_G F \to X, \quad \pi([p,f]) = \pi(p)$$

により定義される．局所的に $P|_U \cong U \times G$ と自明化しておくと，

$$P|_U \times_G F \cong (U \times G) \times_G F \cong U \times F$$

となるからファイバー束の局所自明性が分かる．2 番目の同型は $[(u,g),f]$ を $(u, g \cdot f)$ に送るもの．

問 1.61. 同伴ファイバー束 $P \times_G F$ の変換関数は「G に値をとる」ことを観察せよ．

1.10.2 ベクトル束と主 G 束

ここではランク n の複素ベクトル束が主 $GL_n(\mathbb{C})$ 束と同値であることを観察しよう．$GL_n(\mathbb{C})$ は自然な表現（ベクトル表現）

$$GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad (g,v) \mapsto gv$$

を持つことに注意する．これは $GL_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^n$ への左作用である．

主 $GL_n(\mathbb{C})$ 束 $P \to X$ が与えられると，同伴ベクトル束 $E := P \times_{GL_n(\mathbb{C})} \mathbb{C}^n$ が前節のように定義される．

逆にランク n のベクトル束 $E \to X$ に対して例 1.34 で導入された枠束 (frame bundle)

$$\mathrm{Fr}(E) = \bigsqcup_{x \in M} \{(v_1, \ldots, v_n) \in E_x^n \mid (v_1, \ldots, v_n) \text{ は } E_x \text{ の基底}\}$$

は主 $GL_n(\mathbb{C})$ 束の構造を持つ．実際 $GL_n(\mathbb{C})$ の右作用が

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto (v_1, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ & \ddots & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

により与えられる．ここで $(g_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C})$.

問 1.62. これが互いに逆の操作であることを確かめよ．

問 1.63. 上のように主 $GL_n(\mathbb{C})$ 束 $P \to X$ がベクトル束 $E \to X$ に対応するとき，

$$P \times_{GL_n(\mathbb{C})} \bigwedge^k \mathbb{C}^n \cong \bigwedge^k E$$

であることを確かめよ．ここで $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ は $GL_n(\mathbb{C})$ の表現とみている．

問 1.64. 定理 1.47 の証明と同様にして，主 G 束に対するホモトピー性質を示せ．つまり，X をパラコンパクトハウスドルフ空間とし，$P \to X \times I$ を主 G 束とするとき，主 G 束の同型 $\phi\colon P \cong \pi^*(P|_{X \times \{1\}})$ であって，$\phi|_{X \times \{1\}} = \mathrm{id}$ となるものが存在する．

参考文献

[Bott-Tu] Raoul Bott and Loring Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*

[Dold] Albrecht Dold, *Partitions of unity in the theory of fibrations*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 223–255.

[Hatcher] , Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, available at `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`.

[Husemöller] Dale Husemöller, *Fibre Bundles*

[服部] 服部晶夫,「多様体」

[森田] 森田茂之, 「微分形式の幾何学」