位相幾何学　期末試験問題

2021 年 7 月 27 日　10:30 – 12:00　担当：入谷　寛

持ち込み不可．携帯電話は電源を切ってかばんにしまうこと．かばんの口はしっかり閉じること．

注意. 以下の問題に現れる位相空間は全てパラコンパクトかつハウスドルフとする．

問題 1. 次の命題は正しいか．正しい場合は正しいとだけ答え，正しくない場合は反例を与えよ（反例になっていることの証明は不要である）．

(1) 可縮な空間 B 上の位相空間 F をファイバーとする位相的ファイバー束 $E \to B$ は (位相的ファイバー束として) 自明である．

(2) 位相空間 B 上の可縮な空間 F をファイバーとする位相的ファイバー束 $E \to B$ は (位相的ファイバー束として) 自明である．

問題 2. $E \to X$ をランク 2 の複素ベクトル束とする．X のある開被覆 $\{U_\alpha\}$ と $E|_{U_\alpha}$ の自明化に関する E の変換関数 $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL(2,\mathbb{C})$ が全て上三角行列に値をとるとき，E は 2 つの複素直線束の直和と同型であることを示せ．

問題 3. C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級主 S^1 束 $E \to M$ を考える．

(1) E の接続 (あるいは接続 1 形式) とは何か，定義を与えよ．

(2) E は接続を少なくとも一つ持つことを示せ．

問題 4. E をランク 2 の複素ベクトル束，F を複素直線束とするとき，ベクトル束 $\mathrm{Hom}(E,F)$ の第 2 Chern 類 $c_2(\mathrm{Hom}(E,F))$ を $s_1 = c_1(E)$, $s_2 = c_2(E)$, $t = c_1(F)$ の多項式として表せ．

問題 5. 複素射影空間 $\mathbb{CP}^4$ の 3 次超局面

$$V = \{[x_0,\dots,x_4] \in \mathbb{CP}^4 \mid x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0\}$$

は $\mathbb{CP}^4$ の滑らかな部分多様体である．V の複素多様体としての標準的な向きについて，$\int_V c_1(TV)c_2(TV)$ を求めよ．ただし，$x = c_1(\mathcal{O}(1))$ を超平面類 (hyperplane class) としたとき，$c(T\mathbb{CP}^4) = (1+x)^5$ であることは使ってよい．

問題 6. 4 次元球面 S^4 の接ベクトル束は位相的ベクトル束として自明でないことを示せ．

問題 7. $E \to X$ をランク n の複素ベクトル束，$1 \le i \le n$ とする．E が i 個の一次独立な切断 $s_1,\dots,s_i$ を持つとき（つまり，各点 $x \in X$ に対して $s_1(x),\dots,s_i(x)$ が E_x の一次独立なベクトルとなるとき），$c_n(E) = \cdots = c_{n-i+1}(E) = 0$ であることを示せ．(ヒント：$i=1$ または $i=n$ のときから考えよ.)

位相幾何学　期末試験解答例

問題 1. (1) 正しい

(2) 反例がある．反例は例えば Möbius の帯．

$$L = [0,1] \times \mathbb{R}/(0,v) \sim (1,-v) \longrightarrow [0,1]/0 \sim 1 \cong S^1$$

ファイバー $\mathbb{R}$ は可縮だが，任意の 2 つの切断は必ず交わるので，ファイバー束として自明ではない．

同様の理由で，Euler 類 $e(E)$ あるいは最高次の Stiefel-Whitney 類 $w_r(E)$, $r = \operatorname{rank} E$ がゼロでないベクトル束はファイバー束として自明ではない．

問題 2. 変換関数 $g_{\alpha\beta}$ は仮定より次の形をしている．

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} k_{\alpha\beta} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$k_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^\times$ はコサイクル条件を満たし，直線束 $L \to X$ を定める．L は自然に E の部分ベクトル束とみなせる．E にエルミート計量を入れると

$$E \cong L \oplus L^\perp$$

である．(ランクが一般のときも，全ての $g_{\alpha\beta}$ が上三角なら直線束の和になることが同様に言える．)

問題 3. (1) E の接続 1 形式とは 1 次微分形式 $\psi \in \Omega^1(E)$ であって，任意の $\lambda \in S^1$ の作用 $\lambda\colon E \to E$ に関して不変 $\lambda^*\psi = \psi$ であり，各ファイバー E_x に制限するとき $\psi|_{E_x} = d\theta$ を満たすもの．ここで $\theta \mapsto e^{i\theta}$ は S^1 の角度座標であり，局所自明化により E_x と S^1 を同一視した．(水平部分空間 $\operatorname{Ker}\psi_e \subset T_eE$ の S^1 不変な族を与えるという定義も可能.)

(2) M を開集合 U_α であって $E|_{U_\alpha}$ が自明になるもので覆う．$E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times S^1$ を自明化とし，$d\theta_\alpha$ を第 2 成分 S^1 の角度座標 θ_α から定まる $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times S^1$ 上の 1 形式とする．$\{\rho_\alpha\}$ を $\{U_\alpha\}$ に付随する滑らかな 1 の分割とし，$p\colon E \to M$ を射影とするとき，

$$\psi = \sum_\alpha (p^*\rho_\alpha) d\theta_\alpha$$

は接続 1 形式の条件を満たしている．

問題 4. 分裂原理により $E = E_1 \oplus E_2$，E_i は直線束，と仮定してよい．$e_i = c_1(E_i)$ とおく．このとき，$\operatorname{Hom}(E,F) \cong E^* \otimes F \cong E_1^* \otimes F \oplus E_2^* \otimes F$ であるから，

$$\begin{aligned} c(\operatorname{Hom}(E,F)) &= c(E_1^* \otimes F)c(E_2^* \otimes F) = (1+t-e_1)(1+t-e_2) \\ &= 1 + 2t - e_1 - e_2 + t^2 - (e_1+e_2)t + e_1e_2 \end{aligned}$$

従って $c_2(\operatorname{Hom}(E,F)) = t^2 - (e_1+e_2)t + e_1e_2 = t^2 - s_1t + s_2$ である．

問題 5. ベクトル束の完全列

$$0 \to TV \to T\mathbb{CP}^4 \to N_{V/\mathbb{CP}^4} \cong \mathcal{O}(3) \to 0$$

と $c(T\mathbb{CP}^4) = (1+x)^5$, $c(\mathcal{O}(3)) = 1 + 3x$ より，

$$c(TV) = \frac{c(T\mathbb{CP}^4)}{c(\mathcal{O}(3))} = \frac{(1+x)^5}{1+3x}$$

これを展開して

$$c(TV) = (1 + 5x + 10x^2 + \cdots)(1 - 3x + 9x^2 - \cdots) = 1 + 2x + 4x^2 + \cdots$$

すなわち，$c_1(TV) = 2x$, $c_2(TV) = 4x^2$ を得る．ここで，V の Poincaré 双対 η_V を使うと

$$\int_V c_1(TV)c_2(TV) = \int_V 8x^3 = \int_{\mathbb{CP}^4} 8x^3\eta_V$$

であるが，V は $\mathcal{O}(3)$ の横断的な切断 F のゼロ点であったから $\eta_V = e(\mathcal{O}(3)) = 3x$ であり，次を得る．

$$\int_V c_1(TV)c_2(TV) = \int_{\mathbb{CP}^4} 24x^4 = 24.$$

問題 6. S^4 は向き付け可能であり，従って TS^4 は向き付け可能なベクトル束であることに注意しておく．自明束であるとすれば，TS^4 にどのような向きを入れてもそのオイラー類は 0 である．一方で

$$\int_{S^4} e(TS^4) = \chi(S^4) = 2$$

より，$e(TS^4)$ はゼロでない．従って TS^4 は自明束ではない．

問題 7. E が i 個の一次独立な切断を持つとき，E は自明束 $\underline{\mathbb{C}^i} = X \times \mathbb{C}^i$ を部分ベクトル束として持つ．実際，

$$\underline{\mathbb{C}^i} \to E, \quad (x, (v_1, \ldots, v_i)) \mapsto \sum_{j=1}^{i} v_j s_j(x)$$

は部分ベクトル束の埋め込みを与えている．E にエルミート計量を入れると，$E \cong \underline{\mathbb{C}^i} \oplus F$，$F$ は $\underline{\mathbb{C}^i}$ の直行補ベクトル束，と分解できる．このとき，F のランクは $n-i$ なので，

$$c(E) = c(\underline{\mathbb{C}^i})c(F) = c(F) = 1 + c_1(F) + \cdots + c_{n-i}(F)$$

従って $c_n(E) = c_{n-1}(E) = \cdots = c_{n-i+1}(E) = 0$ である．