位相幾何学　期末試験 解答例

担当：入谷 寛

問題 1. (1) $L=\{(\ell,v)\in\mathbb{CP}^n\times\mathbb{C}^{n+1} : v\in\ell\}$, $L\to\mathbb{CP}^n$ は第一射影．

(2) $\mathbb{CP}^n$ の開被覆 $U_i=\{[x_0,\dots,x_n] : x_i\neq 0\}$, $i=0,\dots,n$ を考える．U_i 上での局所自明化を

$$\varphi_i\colon L|_{U_i}\ni(\ell,v=(v_0,\dots,v_n))\mapsto(\ell,v_i)\in U_i\times\mathbb{C}$$

と定める．このとき写像

$$U_{ij}\times\mathbb{C}\xrightarrow{\varphi_j^{-1}}L|_{U_{ij}}\xrightarrow{\varphi_i}U_{ij}\times\mathbb{C}$$

の下で元 $(\ell,v)\in U_{ij}\times\mathbb{C}$ は

$$(\ell,v)\mapsto(\ell,v(x_0/x_j,\dots,x_n/x_j))\mapsto(\ell,vx_i/x_j)$$

と写る．ただし $\ell\in U_{ij}\subset\mathbb{CP}^n$ の斉次座標を $[x_0,x_1,\dots,x_n]$ とした．従って変換関数は $g_{ij}=x_i/x_j$ で与えられる．

問題 2 (10 点)**.** $p\colon E\to X$ が被覆ホモトピー性質 (covering homotopy property) を満たすとは，任意の位相空間 Y，任意の連続写像 $f\colon Y\times I\to X$ および任意の $f|_{Y\times\{0\}}$ の E への持ち上げ $g\colon Y\times\{0\}\to E$(すなわち $p\circ g=f|_{Y\times\{0\}}$ を満たす) に対して，連続写像 $\tilde f\colon Y\times I\to E$ が存在して $p\circ\tilde f=f$, $\tilde f|_{Y\times\{0\}}=g$ を満たすこと．

$$\begin{tikzcd}
Y\times\{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
Y\times I \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dotted, "\tilde f"] & X
\end{tikzcd}$$

問題 3 (10 点)**.** (1) M 上の主 S^1 束とは，S^1 作用の与えられた位相空間 E と連続写像 $p\colon E\to M$ の組であって次を満たすもの．任意の点 $x\in M$ に対して x の開近傍 $U\subset M$ および同相写像

$$\varphi\colon p^{-1}(U)\cong U\times S^1$$

が存在して

- φ は次の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & U\times S^1 \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

  ただし π_1 は第一成分への射影．
- φ は S^1 同変である．ただし $U\times S^1$ への S^1 作用は第二成分への掛け算で定める．

(2) 一般に M 上の主 S^1 束の同型類の集合は $H^2(M,\mathbb{Z})$ と同一視される．ここで $H^2(S^3,\mathbb{Z})=0$ であるから S^3 上の主 S^1 束は自明である．

(別解) S^3 上の主 S^1 束は D^3 上の自明な主 S^1 束 2 つを境界の S^2 に沿って張り合わせたものと考えることができる．張り合わせの変換関数は $S^2\to S^1$ なる写像で与えられるが，このような写像は定値写像にホモトピックである．主 S^1 束のホモトピー性質から S^3 上の任意の S^1 束は自明となる．

問題 4 (10 点). $L \to M$ にエルミート計量を入れて単位円束 $S(L) \to M$ を考える．これは主 S^1 束になる．M の good open cover $\{U_\alpha\}$ をとり，$g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to S^1$ を $S(L)$ の変換関数とする．$U_{\alpha\beta}$ は可縮であるから $g_{\alpha\beta} = e^{\sqrt{-1}\varphi_{\alpha\beta}}$ を満たす $\mathbb{R}$ 値関数 $\varphi_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}$ が存在する．また $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$ であるから，$\varphi_{\alpha\beta} = -\varphi_{\beta\alpha}$ となるようにとることができる．ここで Čech 2-cocycle $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ を $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$ なる (α, β, γ) に対して

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi}(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\alpha})$$

と定める．$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ より $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ は $\mathbb{Z}$ に値をとる．このとき，$\{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\}$ の Čech コホモロジー類を $e(L)$ と定義する．

(2) M の good open cover $\{U_\alpha\}$ を固定する．直線束 L_1, L_2 に適当なエルミート計量を入れて得られる S^1 値の変換関数を $g^{(1)}_{\alpha\beta}, g^{(2)}_{\alpha\beta}$ とし，$g^{(i)}_{\alpha\beta} = e^{\varphi^{(i)}_{\alpha\beta}}$ なる実数値関数 $\varphi^{(i)}_{\alpha\beta}$ (ただし $\varphi^{(i)}_{\alpha\beta} = -\varphi^{(i)}_{\beta\alpha}$ を満たす) をとる．このとき $e(L_i)$ は Čech cocycle

$$\epsilon^{(i)}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi}(\varphi^{(i)}_{\alpha\beta} + \varphi^{(i)}_{\beta\gamma} + \varphi^{(i)}_{\gamma\alpha})$$

により代表される 2 次コホモロジー類である．テンソル積 $L_1 \otimes L_2$ に対応する同様のデータを構成しよう．$L_1 \otimes L_2$ の変換関数は L_1, L_2 の変換関数の積 $g^{(1)}_{\alpha\beta}g^{(2)}_{\alpha\beta}$ で与えられ，$g^{(1)}_{\alpha\beta}g^{(2)}_{\alpha\beta} = e^{\varphi^{(1)}_{\alpha\beta}+\varphi^{(2)}_{\alpha\beta}}$ が成立する．ここで $\varphi^{(1)}_{\beta\alpha} + \varphi^{(2)}_{\beta\alpha} = -(\varphi^{(1)}_{\alpha\beta} + \varphi^{(2)}_{\alpha\beta})$ である．従って $e(L_1 \otimes L_2)$ を代表する Čech コサイクルは

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi}(\varphi^{(1)}_{\alpha\beta} + \varphi^{(2)}_{\alpha\beta} + \varphi^{(1)}_{\beta\gamma} + \varphi^{(2)}_{\beta\gamma} + \varphi^{(1)}_{\gamma\alpha} + \varphi^{(2)}_{\gamma\alpha}) = \epsilon^{(1)}_{\alpha\beta\gamma} + \epsilon^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}$$

で与えられる．以上から $e(L_1 \otimes L_2) = e(L_1) + e(L_2)$ が示された．

問題 5. (1) $\mathbb{CP}^n$ の接束は $T\mathbb{CP}^n = \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{C}^{n+1}}/L)$ で与えられる．また $\mathbb{CP}^n$ 上のベクトル束の完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \underline{\mathbb{C}^{n+1}} \longrightarrow \underline{\mathbb{C}^{n+1}}/L \longrightarrow 0$$

に $\mathrm{Hom}(L, -)$ を施して

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(L, L) = \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow (L^*)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{C}^{n+1}}/L) = T\mathbb{CP}^n \longrightarrow 0$$

を得る．したがって

$$c((L^*)^{\oplus(n+1)}) = c(\underline{\mathbb{C}})c(T\mathbb{CP}^n)$$

であり，$c(L^*) = 1 + x$，$c(\underline{\mathbb{C}}) = 1$ より $c(T\mathbb{CP}^n) = (1 + x)^{n+1}$.

(2) F が滑らかな部分多様体を定めるという条件から F は $\mathcal{O}(3) \to \mathbb{CP}^3$ の切断としてゼロ切断と横断的 (transversal) であることが分かる．このとき完全列

$$0 \longrightarrow TV \longrightarrow T\mathbb{CP}^3|_F \longrightarrow N_{V/\mathbb{CP}^3} \cong \mathcal{O}(3) \longrightarrow 0$$

より

$$c(TV) = \frac{c(T\mathbb{CP}^3)}{c(\mathcal{O}(3))} = \frac{(1 + x)^4}{1 + 3x}$$

が分かる．また V の Poincaré 双対は $e(\mathcal{O}(3)) = 3x$ で与えられる．したがって

$$\chi(V) = \int_V e(TV) = \int_V c(TV) = \int_{\mathbb{CP}^3} c(TV)e(\mathcal{O}(3)) = \int_{\mathbb{CP}^3} \frac{(1 + x)^4}{1 + 3x} 3x$$

ここで $H^*(\mathbb{CP}^3)$ において $x^4=0$ に注意すると，

$$\begin{aligned}3x\frac{(1+x)^4}{1+3x} &= 3x(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)(1-3x+9x^2-\cdots) \\ &= 3x(1+x+3x^2+\cdots) = 3x+3x^2+9x^3.\end{aligned}$$

従って

$$\chi(V)=9.$$

問題 6. (1) $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的なエルミート内積をとる．写像 $f\colon G(n,2n)\to G(n,2n)$ を次で定義すればよい．

$$f(V)=V^\perp$$

ここで $V\subset\mathbb{C}^{2n}$ は n 次元部分空間であり，$V^\perp$ は V の直交補空間．$\mathcal{Q}$ は自明束 $\underline{\mathbb{C}^{2n}}$ における $\mathcal{V}$ の直交補束と同一視されるから，$f^*(\mathcal{V})\cong\mathcal{Q}$ である．

(2) 連続写像 $f\colon G(n,2n)\to G(n,2n)$ が $f^*(\mathcal{V})\cong\mathcal{Q}$ を満たすとき，Chern 類の自然性から

$$f^*(c_i(\mathcal{V}))=c_i(\mathcal{Q})$$

が成り立つ．$G(n,2n)$ のコホモロジー環は $c_i(\mathcal{V})$ で生成されるから，コホモロジーに誘導される線形写像 $f^*\colon H^*(G(n,2n),\mathbb{R})\to H^*(G(n,2n),\mathbb{R})$ は条件 $f^*\mathcal{V}\cong\mathcal{Q}$ から一意に定まる．

特に f を (1) で定義したものと仮定してもよい．$\{\phi_i\}_{i=1}^N$ を $H^*(G(n,2n),\mathbb{R})$ の基底とし，$\{\phi^i\}_{i=1}^N$ を Poincaré ペアリングに関する双対基底，すなわち $\int_{G(n,2n)}\phi_i\cup\phi^j=\delta_i^j$ を満たすものとする．複素グラスマン多様体のコホモロジー類は全て偶数次数であることに注意する．ここでトレースの定義から

$$\operatorname{tr}(f^*)=\sum_{i=1}^N\int_{G(n,2n)}\phi_i\cup f^*(\phi^i)$$

である．$\Delta\subset G(n,2n)\times G(n,2n)$ を対角集合，$\Gamma(f)=\{(x,f(x)) : x\in G(n,2n)\}\subset G(n,2n)\times G(n,2n)$ を f のグラフとするとき，

$$\operatorname{tr}(f^*)=\int_{\Gamma(f)}\sum_{i=1}^N\phi_i\otimes\phi^i=\int_{\Gamma(f)}\eta_\Delta.$$

ここで $\phi_i\otimes\phi^i$ は $G(n,2n)\times G(n,2n)$ のコホモロジーの元を表し[1]，授業で説明したように $\eta_\Delta=\sum_{i=1}^N\phi_i\otimes\phi^i$ は Δ の Poincaré 双対である．一方 (1) で定義した f は固定点を持たないので

$$\Delta\cap\Gamma(f)=\emptyset.$$

従って η_Δ の代表元としてその台が $\Gamma(f)$ と交わらない閉微分形式をとることができる．よって

$$\operatorname{tr}(f^*)=0$$

が従う．

注意. 最後の問題 6 の (2) は Lefschetz の固定点定理と呼ばれるものの例です．詳しくは Bott-Tu の Exercise 11.26 を見てください．

[1] これは Künneth 同型 $H^*(G(n,2n)\times G(n,2n))\cong H^*(G(n,2n))\otimes H^*(G(n,2n))$ の下での表示．$\alpha\otimes\beta=p_1^*\alpha\cup p_2^*\beta$ である．