

位相幾何学 期末試験

10:30 – 11:50 (80 分) 担当：入谷 寛

持ち込み不可．学生証・筆記用具・時計以外は机の上に出さないで下さい．携帯・スマートフォン・タブレット・パソコン等の電子機器は電源を切ってかばんの中に入れ、かばんの口はしっかり閉めること．また机の中にも何も入れないこと．(これらの注意事項を守っていない場合、不正行為とみなす可能性があります．)

注意． 必要ならば C^∞ 級多様体 M が良い開被覆 (good open cover) を持つことや三角形分割を持つことを使ってもよい．また特に断りがなければコホモロジー理論は各自の好きなもの (単体, 特異, de Rham, Čech, 等々) を用いてよい．

問題 1 (10 点). $\mathbb{CP}^n$ を複素射影空間とする．

- (1) $\mathbb{CP}^n$ 上の同語反復複素直線束 (tautological complex line bundle) $L \rightarrow \mathbb{CP}^n$ の定義を与えよ．(ただし変換関数以外の方法で定義すること．)
- (2) $\mathbb{CP}^n$ の適当な開被覆をとり、 L の変換関数を求めよ．

問題 2 (10 点). 位相空間の間の連続写像 $p: E \rightarrow X$ が被覆ホモトピー性質 (covering homotopy property) を満たす、とはどういうことか説明せよ．(被覆ホモトピー性質はホモトピー持ち上げ性質 (homotopy lifting property) とも呼ばれる．)

問題 3 (10 点). M をコンパクト C^∞ 級多様体とする．

- (1) M 上の (位相的) 主 S^1 束の定義を述べよ．
- (2) S^3 上の任意の主 S^1 束は自明である．この理由を述べよ．

問題 4 (10 点). M をコンパクト C^∞ 級多様体とする．

- (1) M 上の C^∞ 級複素直線束 L のオイラー類 $e(L)$ の定義を一つ与えよ．(複素直線束のオイラー類は第一 Chern 類 $c_1(L)$ でもある．)
- (2) (1) で与えた定義に基づき、 $e(L_1 \otimes L_2) = e(L_1) + e(L_2)$ を示せ．ただし L_1, L_2 は M 上の C^∞ 級複素直線束．

問題 5 (10 点). $L \rightarrow \mathbb{CP}^n$ を問題 1 にある tautological complex line bundle とし、 $x = -e(L) \in H^2(\mathbb{CP}^n)$ とおく．

- (1) 複素射影空間の接束 $T\mathbb{CP}^n$ の全 Chern 類 $c(T\mathbb{CP}^n)$ は $(1+x)^{n+1}$ に等しいことを示せ．
- (2) $F(z_0, \dots, z_3) \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2, z_3]$ を斉次 3 次多項式とする． F の定める $\mathbb{CP}^3$ 内の 3 次超曲面

$$V = \{[z_0, \dots, z_3] \in \mathbb{CP}^3 : F(z_0, \dots, z_3) = 0\}$$

が $\mathbb{CP}^3$ の滑らかな部分多様体である¹とき、 V のオイラー数 $\chi(V)$ を求めよ．

問題 6 (10 点). $G(n, 2n)$ を $\mathbb{C}^{2n}$ 中の n 次元複素部分ベクトル空間全体のなすグラスマン多様体とする． $\mathcal{V} \rightarrow G(n, 2n)$ を tautological bundle, $\mathcal{Q} \rightarrow G(n, 2n)$ を universal quotient bundle (すなわち $\mathcal{Q} = \mathbb{C}^{2n}/\mathcal{V}$) とする．

- (1) 連続写像 $f: G(n, 2n) \rightarrow G(n, 2n)$ であって $f^*\mathcal{V} = \mathcal{Q}$ を満たすものが存在することを示せ．
- (2) 線形写像 $f^*: H^*(G(n, 2n), \mathbb{R}) \rightarrow H^*(G(n, 2n), \mathbb{R})$ のトレースを計算せよ．

¹つまり $F(z_0, \dots, z_3) = \frac{\partial F}{\partial z_0}(z_0, \dots, z_3) = \dots = \frac{\partial F}{\partial z_3}(z_0, \dots, z_3) = 0$ を満たす点が原点 $(z_0, \dots, z_3) = (0, \dots, 0)$ のみ．