量子コホモロジーの整構造について
(INTEGRAL STRUCTURES IN QUANTUM COHOMOLOGY)

入谷　寛
(HIROSHI IRITANI)

Abstract. We discuss integral structures in the space of solutions to quantum cohomology differential equations (quantum D-modules) associated to quantum cohomology. In mirror symmetry, the quantum D-module of a manifold X becomes isomorphic to the (semi-infinite) variation of Hodge structures (VHS for short) of the mirror. The VHS of the mirror is equipped with an integral local system, so a natural question is "what is the integral structure in the quantum D-module corresponding to the mirror?" We study this problem in the case where X is a toric orbifold and see that the integral structure coming from the mirror can be described only in terms of the K-group $K(X)$ and a certain characteristic class ($\hat{\Gamma}$-class). This article is a résumé of the results on integral structures in [8].

1. 序

本稿では量子コホモロジーに付随する微分方程式系 (量子 D 加群) の解空間における整構造について論じる．ここで考える整構造はたとえば整数環係数のコホモロジー群 $H^*(X,\mathbb{Z})$ とは直接の関係はないが，ミラー側に移ると自然に見ることのできるいわば「隠された」整構造である．

超弦理論におけるミラー対称性によれば，Calabi-Yau 多様体 X に対してあるミラー Calabi-Yau 多様体 $X^\vee$ があって，X の量子コホモロジーから定まる Hodge 構造の変動 (A 模型 VHS) と $X^\vee$ の複素構造の変形の定める Hodge 構造の変動 (B 模型 VHS) とが同型になると予言されている．ここで，B 模型 VHS における局所系，すなわち Gauss-Manin 接続の平坦切断の空間は $H^n(X^\vee,\mathbb{C})$ であり，整部分格子 $H^n(X^\vee,\mathbb{Z})$ を自然に含んでいる．一方，A 模型 VHS における局所系は X の量子微分方程式の解空間として定まるが，ここにはアプリオリに自然な整格子は存在しないように見える．ミラー側で自然に存在する整構造を量子コホモロジー側に引き戻すとどのように見えるか，というのが本研究の動機となっている．

本稿の構成は以下のとおりである．まず軌道体量子コホモロジーを導入し，トーリック軌道体のミラーである Landau-Ginzburg 模型を記述する．次にこのトーリックのミラー (Landau-Ginzburg 模型) から引き戻される整構造を具体的に記述する．この場合，量子コホモロジーに引き戻された整構造はトーリック軌道体の位相不変量 (K 群とある特別な特性類) だけによって記述される．

本稿は論文 [8] の整構造に関する結果の要約である．

2. 軌道体量子コホモロジー

本稿では一般に軌道体にたいする量子コホモロジーを考える．量子コホモロジーは種数が 0 の Gromov-Witten 理論により定義されるが，軌道体 Gromov-Witten 理論

はシンプレクティック幾何学の文脈では Chen-Ruan [5, 6] により，代数幾何学においては Abramovich-Graber-Vistoli [1] により開発された．軌道体コホモロジーおよびその量子コホモロジーの詳しい解説はこれらの文献に譲る．$\mathcal{X}$ を滑らかな Deligne-Mumford stack でその coarse moduli space X が射影的であるものとする．$I\mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ の慣性スタックとする．$I\mathcal{X}$ の点は $\mathcal{X}$ の点 $x \in \mathcal{X}$ とその自己同型群の元 $g \in \mathrm{Aut}(x)$ の組 (x, g) で代表される．以下では g を stabilizer とも呼ぶ．T を慣性スタックの連結成分の添え字集合とし，$I\mathcal{X}$ を次のように成分に分解する．

$$I\mathcal{X} = \bigsqcup_{v \in \mathsf{T}} \mathcal{X}_v = \mathcal{X}_0 \sqcup \bigsqcup_{v \in \mathsf{T}'} \mathcal{X}_v$$

ここで，$\mathsf{T} = \mathsf{T}' \sqcup \{0\}$ であり，$\mathcal{X}_0$ は自明な自己同型 $g = 1$ に対応する $I\mathcal{X}$ の成分をあらわし，$\mathcal{X}_0 \cong \mathcal{X}$ である．各慣性スタックの成分 $\mathcal{X}_v$ には age と呼ばれる有理数 ι_v が定まる．軌道体コホモロジー $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ は

$$H^p_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}) = \bigoplus_{v \in \mathsf{T}, p - 2\iota_v \in 2\mathbb{Z}} H^{p-2\iota_v}(\mathcal{X}_v)$$

で定義される．ここで p は一般に有理数である．本稿では慣性スタック上の偶数次のコホモロジー類のみを考えることにする (すなわち $p - 2\iota_v$ が偶数)．$\mathrm{inv} : I\mathcal{X} \to I\mathcal{X}$ を (x, g) を (x, g^{-1}) に送る対合とする．inv は添え字集合の間の写像 $\mathrm{inv}\colon \mathsf{T} \to \mathsf{T}$ を誘導する．ここで $\mathrm{inv}(\mathcal{X}_v) = \mathcal{X}_{\mathrm{inv}(v)}$ である．軌道体 Poincaré ペアリングは次で定義される．

$$(\alpha, \beta)_{\mathrm{orb}} = \int_{I\mathcal{X}} \alpha \cup \mathrm{inv}^* \beta$$

種数 0 の軌道体 Gromov-Witten 理論は軌道体コホモロジー上のある n 重線型な写像 (相関函数) を定める．

$$\langle \cdot, \ldots, \cdot \rangle_{0,n,d} : H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})^{\otimes n} \to \mathbb{C}.$$

ここで，$d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ は coarse moduli space X 上の 2 次の整ホモロジー類である．$\mathrm{Eff}_{\mathcal{X}} \subset H_2(X, \mathbb{Z})$ を X 内の effective curve の代表する整ホモロジー類によって生成される半群とする．Gromov-Witten 相関函数は正則曲線を数え上げる不変量であり，$d \in \mathrm{Eff}_{\mathcal{X}}$ のときに限り 0 でない値を持つことができる．軌道体量子コホモロジーとは軌道体コホモロジー上の可換環の構造の族 $(H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}), \circ_\tau)$ として与えられる．ここで $\circ_\tau$ は $\tau \in H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ でパラメトライズされる積であって，種数 0 の Gromov-Witten 不変量を使って次のように定義される．

$$(\alpha \circ_\tau \beta, \gamma)_{\mathrm{orb}} = \sum_{d \in \mathrm{Eff}_{\mathcal{X}}} \sum_{n \ge 0} \frac{1}{n!} \left\langle \alpha, \beta, \gamma, \overbrace{\tau', \ldots, \tau'}^{n \text{ times}} \right\rangle_{0,n+3,d} e^{\langle \tau_{0,2}, d \rangle}.$$

ここで，$\tau = \tau_{0,2} + \tau'$ であって $\tau_{0,2} \in H^2(\mathcal{X}_0)$ は τ の $H^2(\mathcal{X}_0)$ 成分をあらわす．この積 $\circ_\tau$ は τ' に関しては形式的冪級数，$\tau_{0,2}$ に関しては形式的 Fourier 級数とみなすことができる．一般にこの級数の収束は知られていないが，本稿では $\circ_\tau$ はある開集合 $U \subset H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ 上で収束すると仮定する．U は十分大きい $M > 0$ と十分小さい $\epsilon > 0$ に対し次のような形の領域を含む．これは極大体積極限 (large radius limit) の近傍と呼ばれる．

$$\{\tau \,;\, \Re\langle \tau_{0,2}, d \rangle < -M,\ \forall d \in \mathrm{Eff}_{\mathcal{X}} \setminus \{0\},\ \|\tau'\| < \epsilon\}.$$

3. 量子微分方程式

$\{\phi_i\}_{i=1}^N$ を $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ の斉次な基底とし，t^i をこの基底に双対な $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ 上の線型座標とする．$\tau = \sum_{i=1}^N t^i\phi_i$ によって $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ の一般の点をあらわす．$\{\phi^i\}_{i=1}^N$ を軌道体 Poincaré ペアリングに関して $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ と双対な基底とする．量子微分方程式 (量子 D 加群) は自明なベクトル束 $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}) \times H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}) \to H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ 上のパラメータ $z \in \mathbb{C}$ を持つ平坦接続 ∇ により定まる．

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial t^i} + \frac{1}{z}(\phi_i \circ_\tau). \tag{1}$$

コホモロジーに値をとる函数 $s(\tau, z)$ に対する微分方程式 $\nabla_i s(\tau, z) = 0$ を量子微分方程式と呼ぶことにする．この平坦接続 ∇ はさらにパラメータ z の方向に拡張され，ベクトル束 $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}) \times (H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}) \times \mathbb{C}^*) \to H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}) \times \mathbb{C}^*$ 上の平坦接続 $\widehat{\nabla}$ を定める．

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_i &= \frac{\partial}{\partial t^i} + \frac{1}{z}(\phi_i \circ_\tau) \\ \widehat{\nabla}_{z\partial_z} &= z\partial_z - \frac{1}{z}E \circ_\tau + \mu \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $\mu \in \mathrm{End}(H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}))$ および Euler ベクトル場 E は

$$\mu(\phi_i) = (\frac{1}{2}\deg\phi_i - \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{X})\phi_i,$$

$$E = \sum_{i=1}^N (1 - \frac{\deg\phi_i}{2})t^i\phi_i + c_1(\mathcal{X}),$$

で与えられる．方程式 $\widehat{\nabla}s = 0$ も量子微分方程式と呼ぶ．2 次のコホモロジー類 $\tau_{0,2} \in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ の $H^2_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ への作用を

$$\tau_{0,2} \cdot \tau = \mathrm{pr}^*(\tau_{0,2}) \cup \tau$$

で定義する．ここで $\mathrm{pr}\colon I\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ は自然な射影である．量子微分方程式 (1) の基本解は gravitational descendant と呼ばれる Gromov-Witten 不変量によって与えられる．

Proposition 3.1. $\mathrm{End}(H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X}))$ に値をとる函数 $L(\tau, z)$ を次で定義する．

$$L(\tau, z)\phi = e^{-\tau_{0,2}/z}\phi - \sum_{(d,l)\neq(0,0),\ d\in\mathrm{Eff}_{\mathcal{X}}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{l!}\left\langle \frac{e^{-\tau_{0,2}/z}\phi}{z+\psi_1}, \tau', \dots, \tau', \phi_k \right\rangle_{0,l+2,d}^{\mathcal{X}} \phi^k.$$

ここで，$(z+\psi_1)^{-1}$ は z^{-1} の冪級数 $\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{-n-1}\psi_1^n$ に展開するものとする[1]．これは $\nabla_i L(\tau, z)\phi = 0$ を満たし，∇ の平坦切断の基本解を与える．さらに，$L(\tau, z)z^{-\mu}z^{\rho}\phi$ は $\widehat{\nabla}_i(L(\tau, z)z^{-\mu}z^{\rho}\phi) = 0$, $\widehat{\nabla}_{z\partial_z}(L(\tau, z)z^{-\mu}z^{\rho}\phi) = 0$ を満たし，$\widehat{\nabla}$ の平坦切断の基本解を与える．ここで，$\rho := c_1(T\mathcal{X}) \in H^2(\mathcal{X})$ であり，$z^{-\mu}z^{\rho} = e^{-\mu\log z}e^{\rho\log z}$ である．

---

[1] 一般に非負整数 $k_1, \dots, k_r$ と $\alpha_i \in H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ に対して $\left\langle \alpha_1\psi_1^{k}, \alpha_2\psi_2^{k_2}, \dots, \alpha_r\psi_r^{k_r} \right\rangle_{0,r,d}^{\mathcal{X}}$ の形の不変量が定義され，gravitational descendant と呼ばれる．ψ_i は i 番目の点での余接直線束 $\mathcal{L}_i$ の第一 Chern 類をあらわす．ここで $\mathcal{L}_i$ は安定写像のモジュライ空間上の直線束であって，ひとつの安定写像におけるファイバーは曲線の i 番目の名前つき点での余接空間で与えられる．

量子微分方程式 $\widehat{\nabla}s=0$ の解空間 $\mathcal{S}$ にペアリング $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{S}}$ を導入する．量子微分方程式の解 $s_1(\tau,z), s_2(\tau,z)$ に対して

$$(s_1,s_2)_{\mathcal{S}} := (s_1(\tau,e^{\pi\mathtt{i}}z), s_2(\tau,z))_{\mathrm{orb}}$$

とおく．ここで，$s_1(\tau,e^{\pi\mathtt{i}}z)$ は $s_1(\tau,z)$ を道 $[0,1]\ni\theta\mapsto e^{\pi\mathtt{i}\theta}z$ に沿って解析接続したものを表す．s_1,s_2 は平坦ゆえ，右辺は τ,z によらない複素数になる．このペアリングは一般には対称でも反対称でもないが，$\mathcal{X}$ が Calabi-Yau($\rho=c_1(\mathcal{X})=0$) のときは $\mathcal{X}$ の次元 n の偶奇に応じて対称または反対称になる．

Definition 3.2. 軌道体量子コホモロジーにおける整構造とは量子微分方程式 $\widehat{\nabla}s=0$ の解空間 $\mathcal{S}$ (N 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間) の整格子 $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}^N$ であって，上のペアリング $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{S}}$ の $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ への制限が $\mathbb{Z}$ に値をとり，完全 (perfect) ペアリングになる (同型 $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}\cong\mathrm{Hom}(\mathcal{S}_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z})$ を誘導する) ものと定義される．

$$(\cdot,\cdot)_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}\times\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}\longrightarrow\mathbb{Z}.$$

この定義だけでは整構造は一意には決まらず，この定義を満たす多くの整構造があると思われる．ここでは簡単のため省略したが，[8] では整構造に対して，極大体積極限のまわりでの局所モノドロミーで保存される，という条件も課しており，これは整構造の強い制約を与える．(ただし，この条件を課してもやはり一意ではない．) 以下ではそのようなひとつの整構造の例を挙げる．

4. 整構造の例

$K(\mathcal{X})$ を位相的な軌道体複素ベクトル束 (orbifold vector bundle; orbibundle) の Grothendieck 群とする．$I\mathcal{X}$ 上の軌道体ベクトル束 V と $I\mathcal{X}$ の成分 $\mathcal{X}_v$ に対して，$V|_{\mathcal{X}_v}$ への $\mathcal{X}_v$ の stabilizer の作用に関する固有分解を次のようにおく．

$$V|_{\mathcal{X}_v} = \bigoplus_{0\le f<1} V_{v,f}.$$

ここで，$\mathcal{X}_v$ の stabilizer は $V_{v,f}$ に $\exp(2\pi\mathtt{i}f)$ で作用する．軌道体複素ベクトル束に対する Chern 指標 $\widetilde{\mathrm{ch}}\colon K(\mathcal{X})\to H^*(I\mathcal{X})$ は次で定義される．

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(V) := \bigoplus_{v\in\mathsf{T}}\sum_{0\le f<1} e^{2\pi\mathtt{i}f}\,\mathrm{ch}((\mathrm{pr}^*V)_{v,f})$$

ここで $\mathrm{pr}\colon I\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ は自然な射影である．$\mathcal{X}$ 上の軌道体ベクトル束 V に対して，$\delta_{v,f,i}$, $i=1,\dots,l_{v,f}$ を $(\mathrm{pr}^*V)_{v,f}$ の Chern roots とする．Todd 類 $\widetilde{\mathrm{Td}}\colon K(\mathcal{X})\to H^*(I\mathcal{X})$ は次で定義される．

$$\widetilde{\mathrm{Td}}(V) = \bigoplus_{v\in\mathsf{T}}\prod_{0<f<1,1\le i\le l_{v,f}}\frac{1}{1-e^{-2\pi\mathtt{i}f}e^{-\delta_{v,f,i}}}\prod_{f=0,1\le i\le l_{v,0}}\frac{\delta_{v,0,i}}{1-e^{-\delta_{v,0,i}}}.$$

軌道体ベクトル束が正則ベクトル束の構造を持つとき，コホモロジー群 $H^i(\mathcal{X},V)$ が定義されるが，正則オイラー標数 $\chi(V):=\sum_{i=1}^n(-1)^i\dim H^i(\mathcal{X},V)$ は次の川崎-Riemann-Roch 公式 [9] で与えられる．

$$\chi(V) = \int_{I\mathcal{X}}\widetilde{\mathrm{ch}}(V)\cup\widetilde{\mathrm{Td}}(T\mathcal{X}). \tag{3}$$

$\chi(V)$ は定義から整数である．$\mathcal{X}$ 上の軌道体ベクトル束 V の $\hat{\Gamma}$ 類を次で定める．

$$\hat{\Gamma}(V) := \bigoplus_{v\in\mathsf{T}} \prod_{0\le f<1} \prod_{i=1}^{l_{v,f}} \Gamma(1-f+\delta_{v,f,i}) \in H^*(I\mathcal{X}).$$

ここで $\delta_{v,f,i}$ は上と同じものである．右辺に現れる Gamma 函数は $1-f>0$ での Taylor 級数に展開されていると考える．また $\hat{\Gamma}_{\mathcal{X}} := \hat{\Gamma}(T\mathcal{X})$ とおく．

ここで，次の仮定をおく．

(A1) 写像 $\widetilde{\mathrm{ch}}\colon K(\mathcal{X}) \to H^*(I\mathcal{X})$ は $\mathbb{C}$ をテンソルすると同型になる．
(A2) 川崎-Riemann-Roch 公式の右辺 (3) は任意の位相的な軌道体ベクトル束 V に対して整数である．一般の (正則とは限らない) 軌道体ベクトル束 V に対して $\chi(V)$ を (3) の右辺で定義する．
(A3) $K(\mathcal{X})$ のペアリング $(V_1,V_2)\mapsto\chi(V_1\otimes V_2)$ は全射 $K(\mathcal{X})\to\mathrm{Hom}(K(\mathcal{X}),\mathbb{Z})$ を誘導する．

これらの性質は多様体に関しては正しい．また軌道体が位相軌道体として M/G（M はコンパクト多様体，G はコンパクト Lie 群で G の M への作用の固定部分群は有限）の形を持つとき，(A1) は Adem-Ruan の分解定理 [2]，(A2) は川崎による指数定理 [10] から従う．

Definition 4.1. 滑らかな Deligne-Mumford stack $\mathcal{X}$ に対して条件 (A1), (A2), (A3) を仮定する．K 群から量子微分方程式の解空間 $\mathcal{S}$ への写像 Ψ を次で定める．

$$\begin{aligned}\Psi\colon K(\mathcal{X}) &\longrightarrow \mathcal{S}\\ [V] &\longmapsto L(\tau,z)z^{-\mu}z^{\rho}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\hat{\Gamma}_{\mathcal{X}}(2\pi\mathtt{i})^{\deg/2}\,\mathrm{inv}^*\,\widetilde{\mathrm{ch}}(V)\right).\end{aligned}$$

ここで，$L(\tau,z)z^{-\mu}z^{\rho}$ は Proposition 3.1 であたえた $\widehat{\nabla}$ の基本解であり，$(2\pi\mathtt{i})^{\deg/2}$ は $H^{2p}(I\mathcal{X})$ 上で $(2\pi\mathtt{i})^p$ 倍として定義される $\mathrm{End}(H^*(I\mathcal{X}))$ の元である．仮定 (A1) の下で $\Psi(K(\mathcal{X}))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}=\mathcal{S}$ であり $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{S}$ の整格子を与える．写像 Ψ は

$$(\Psi(V_1),\Psi(V_2))_{\mathcal{S}} = \chi(V_1\otimes V_2^{\vee})$$

を満たし，解空間のペアリング $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{S}}$ は向井ペアリングに対応する．したがって仮定 (A2)，(A3) の下で $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{S}}$ の $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ への制限は $\mathbb{Z}$ に値をとる完全ペアリングになる．この整格子 $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ の定める整構造を $\hat{\Gamma}$-整構造と呼ぶ.

写像 Ψ がペアリングを保つことは川崎-Riemmann-Roch とガンマ函数の函数等式 $\Gamma(1-z)\Gamma(1+z)=\pi z/\sin(\pi z)$ から従う．この函数等式は $\hat{\Gamma}$ 類が Todd 類の二乗根の類似であり，$\Psi(V)$ は向井ベクトルの類似であることを示している．しかし，$\hat{\Gamma}$ 類は Todd 類の二乗根と異なり有理数体上定義された特性類ではない (オイラー定数 γ やゼータ函数の値 $\zeta(3),\zeta(5),\ldots$ 等を含むので，おそらく超越的であろう).

5. トーリック軌道体

記号を定めるため，本節ではトーリック軌道体の一つの定義を与える．トーリック軌道体を次のデータから構成したい.

- r 次元の代数的トーラス $\mathbb{T}\cong(\mathbb{C}^*)^r$．$\mathbb{L}:=\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*,\mathbb{T})$ とおく．

- m 個の (順序付けられた) 元 $D_1, \ldots, D_m \in \mathbb{L}^\vee = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$ で $\mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{R} = \sum_{i=1}^m \mathbb{R} D_i$ を満たすもの.
- 元 $\eta \in \mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{R}$.

$D_1, \ldots, D_m$ は準同型 $\mathbb{T} \to (\mathbb{C}^*)^m$ を定める．トーラス $\mathbb{T}$ をこの準同型により $\mathbb{C}^m$ に作用させる．

$$\mathcal{A} := \{I \subset \{1, \ldots, m\} \ ; \ \sum_{i \in I} \mathbb{R}_{>0} D_i \ni \eta\}.$$

とおき，商スタック $\mathcal{X}$ を次で定める．

$$\mathcal{X} = [\mathcal{U}_\eta / \mathbb{T}], \quad \mathcal{U}_\eta := \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{A}} \mathbb{C}^I,$$

ここで $\mathbb{C}^I := \{(z_1, \ldots, z_m) \ ; \ z_i = 0 \text{ for } i \notin I\}$ とおいた．このままでは $\mathcal{X}$ はコンパクトかつ (stack の意味で) 滑らかなトーリック軌道体になるとは限らない．そこで最初のデータに次の条件を課す．

(A) $\{1, \ldots, m\} \in \mathcal{A}$.
(B) $\sum_{i \in I} \mathbb{R} D_i = \mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{R}$ for $I \in \mathcal{A}$.
(C) $\{(c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m_{\geq 0} \ ; \ \sum_{i=1}^m c_i D_i = 0\} = \{0\}$.

条件 (A), (B), (C) は $\mathcal{X}$ が非空，固定部分群が有限，$\mathcal{X}$ がコンパクトであることにそれぞれ対応する．$\mathcal{X}$ の次元は $n := m - r$ である．

$D_1, \ldots, D_m$ は次の完全列を定める．

(4)
$$0 \longrightarrow \mathbb{L} \xrightarrow{(D_1, \ldots, D_m)} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\beta} \boldsymbol{N} \longrightarrow 0,$$

ここで $\boldsymbol{N}$ は 2 番目の写像 $(D_1, \ldots, D_m)$ の余核として定まる有限生成アーベル群である．$f_1, \ldots, f_m$ を $\mathbb{Z}^m$ の標準的な基底とし，b_i を f_i の $\boldsymbol{N}$ における像 $\beta(f_i)$ とする．必要なら番号を付け替えて，$1 \leq i \leq m'$ に対しては $\{1, \ldots, m\} \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$ であり，$m' < i \leq m$ に対しては $\{1, \ldots, m\} \setminus \{i\} \notin \mathcal{A}$ であると仮定する．Borisov-Chen-Smith の意味での $\mathcal{X}$ の stacky fan は次で与えられる．

- $\boldsymbol{N}$ のベクトル $b_1, \ldots, b_{m'}$.
- 一次元錘の集合が $\{\mathbb{R}_{\geq 0} b_1, \ldots, \mathbb{R}_{\geq 0} b_{m'}\}$ に一致する $\boldsymbol{N} \otimes \mathbb{R}$ 内の完備な単体的扇 Σ. $\sigma_I = \sum_{i \notin I} \mathbb{R}_{\geq 0} b_i$ が Σ の錘であることと $I \in \mathcal{A}$ は同値.

Borisov-Chen-Smith [3] はトーリック Deligne-Mumford stack をこの stacky fan から構成した．実は，我々の構成は coarse moduli space が射影的である全てのトーリック Deligne-Mumford stack を与えることもわかる．

$\mathbb{L}^\vee = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$ の元 ξ は $\mathcal{X}$ 上の軌道体直線束 L_ξ を定める．

$$L_\xi = \mathcal{U}_\eta \times \mathbb{C} / (z, a) \sim (t \cdot z, \xi(t) a), t \in \mathbb{T}.$$

対応 $\xi \mapsto L_\xi$ により全射 $\mathbb{L}^\vee \to \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \cong H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ が定まる．この全射の核は $\sum_{i > m'} \mathbb{Z} D_i$ である．この全射による $D_i \in \mathbb{L}^\vee$ の $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ における像を $\overline{D}_i$ であらわす．また，$\mathbb{L}^\vee$ の整基底 $p_1, \ldots, p_r$ であって $p_{r'+1}, \ldots, p_r$ が $\sum_{i > m'} \mathbb{R} D_i \cap \mathbb{L}^\vee$ の整基底をなすものをとっておく．このときある整数成分の行列 (m_{ia}) に対して $\overline{D}_i = \sum_{a=1}^{r'} m_{ia} \overline{p}_a$, $1 \leq i \leq m'$ とかける．ここで同様に $\overline{p}_a \in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ は $p_a \in \mathbb{L}^\vee$ の像である．

$\mathbb{L}\otimes\mathbb{Q}$ の部分集合 $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_{\mathrm{eff}}$ を次で定める．

$$\mathbb{K}=\{d\in\mathbb{L}\otimes\mathbb{Q}\,;\,\{i\in\{1,\dots,m\}\,;\,\langle D_i,d\rangle\in\mathbb{Z}\}\in\mathcal{A}\},$$
$$\mathbb{K}_{\mathrm{eff}}=\{d\in\mathbb{L}\otimes\mathbb{Q}\,;\,\{i\in\{1,\dots,m\}\,;\,\langle D_i,d\rangle\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}\in\mathcal{A}\}.$$

$\mathbb{K}$ および $\mathbb{K}_{\mathrm{eff}}$ は足し算では閉じていないが，$\mathbb{K}$ には $\mathbb{L}$ が作用する．次の集合 Box を定義する．

$$\mathrm{Box}=\{v\in\boldsymbol{N}\,;\,v=\sum_{k\notin I}c_kb_k\text{ in }\boldsymbol{N}\otimes\mathbb{Q},\ c_k\in[0,1),\ I\in\mathcal{A}\}.$$

$d\in\mathbb{K}$ は Box の元 $v(d)$ を定める．

$$v(d):=\sum_{i=1}^{m}\lceil\langle D_i,d\rangle\rceil b_i\in\boldsymbol{N}.$$

この写像 $d\mapsto v(d)$ は $\mathbb{K}\to\mathbb{K}/\mathbb{L}$ を通じて分解し，これにより $\mathbb{K}/\mathbb{L}$ と Box は同一視される．$v(d)\in\mathrm{Box}$ は慣性スタック $I\mathcal{X}$ の成分 $\mathcal{X}_{v(d)}$ を定める．

$$\mathcal{X}_{v(d)}=\{[z_1,\dots,z_m]\in\mathcal{X}\,;\,z_i=0\text{ if }\langle D_i,d\rangle\notin\mathbb{Z}\}$$

$\mathcal{X}_{v(d)}$ の stabilizer は $\exp(-2\pi\sqrt{-1}d)\in\mathbb{L}\otimes\mathbb{C}^*\cong\mathbb{T}$ により与えられるものと定義する．$\mathcal{X}_{v(d)}$ は d のとり方によらず，Box の元 $v(d)$ のみに依存して決まる．$\mathcal{X}_{v(d)}$ の age は

$$\iota_{v(d)}:=\mathrm{age}(\mathcal{X}_{v(d)})=\sum_{i=1}^{m}\{-\langle D_i,d\rangle\}=\sum_{i=1}^{m'}\{-\langle D_i,d\rangle\}.$$

で与えられ，

$$I\mathcal{X}=\bigsqcup_{v\in\mathrm{Box}}\mathcal{X}_v,\quad H^i_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})=\bigoplus_{v\in\mathrm{Box}}H^{i+2\iota_v}(\mathcal{X}_v)$$

である．$H^*(\mathcal{X}_v)$ は単位元 $\mathbf{1}_v\in H^*(\mathcal{X}_v)$ により 2 次のコホモロジー類 $\overline{D}_1,\dots,\overline{D}_{m'}\in H^2(\mathcal{X},\mathbb{C})$ の作用で生成される．

6. Landau-Ginzburg 模型

完全列 (4) に完全函手 $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{C}^*)$ を適用して完全列

$$(5)\quad 1\longrightarrow\mathrm{Hom}(\boldsymbol{N},\mathbb{C}^*)\longrightarrow Y:=(\mathbb{C}^*)^m\xrightarrow{\ \mathrm{pr}\ }\mathcal{M}:=\mathrm{Hom}(\mathbb{L},\mathbb{C}^*)\longrightarrow 1$$

を得る．前節で定義したトーリック軌道体にミラー双対な Landau-Ginzburg 模型は左から 3 番目の射 $\mathrm{pr}\colon Y\to\mathcal{M}$ によって与えられる代数的トーラスの族と次のポテンシャル函数 $W\colon Y\to\mathbb{C}$ の組である．

$$W=w_1+\cdots+w_m,\quad(w_1,\dots,w_m)\in(\mathbb{C}^*)^m=Y.$$

ポテンシャル W は pr の各ファイバーに制限すると Laurent 多項式を与える．$\mathbb{L}^\vee$ の基底 $p_1,\dots,p_r$ に双対な $\mathcal{M}=\mathrm{Hom}(\mathbb{L},\mathbb{C}^*)=\mathbb{L}^\vee\otimes\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^*$ 値の座標を $q_1,\dots,q_r$ とおく．射影 pr のファイバーを $Y_q=\mathrm{pr}^{-1}(q)$ とおき，$W_q=W|_{Y_q}$ とおく．Y_q は $|\boldsymbol{N}_{\mathrm{tor}}|$ 個の連結成分からなり，各々は $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{free}},\mathbb{C}^*)\cong(\mathbb{C}^*)^n$ と同型である．ここで $n=\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{X}$．完全列 (5) は一般には分裂しないが，pr の多価な切断 $(q_1,\dots,q_r)\mapsto(q^{\ell_1},\dots,q^{\ell_m})$ をとることができる．ここで $q^{\ell_i}=\prod_{a=1}^{r}q^{\ell_{ia}}$ であり，ℓ_{ia} は一般には有理数である．$\boldsymbol{N}_{\mathrm{free}}$ の任意の基底 $e_1,\dots,e_n$ を取り，$y_1,\dots,y_n$ を $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{free}},\mathbb{C}^*)$ の対応する座標と

する．これは平行移動により Y_q の各連結成分の座標を与える．さらに，$\boldsymbol{N}_{\mathrm{free}}$ において $b_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}e_j$ が成り立つとする．このとき W_q は以下の表示を持つ．

$$W_q = W|_{Y_q} = q^{\ell_1}y^{b_1} + \cdots + q^{\ell_m}y^{b_m}, \quad q^{\ell_i} = \prod_{a=1}^r q_a^{\ell_{ia}}, \quad y^{b_i} = \prod_{j=1}^n y_j^{b_{ij}}. \tag{6}$$

ここで多価函数 q^{ℓ_i} の枝は Y_q の連結成分に依存することに注意されたい．

次にある Zariski 開な部分集合 $\mathcal{M}^{\mathrm{o}} \subset \mathcal{M}$ が存在して，Landau-Ginzburg 模型は $\mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \mathbb{C}^*$ 上の局所系を定めることを説明する．

Definition 6.1. $\hat{S}$ を $b_1, \ldots, b_m \in \boldsymbol{N} \otimes \mathbb{R}$ の凸包として得られる多面体とする．Laurent 多項式 $W_q(y)$ (6) が無限遠で非退化であるとは $\hat{S}$ の余次元が 1 以上の全ての面 Δ に対して $W_{q,\Delta}(y) := \sum_{b_i \in \Delta} q^{\ell_i}y^{b_i}$ が $y \in (\mathbb{C}^*)^n$ 上で臨界点を持たないことである．W_q が無限遠で非退化であるような q 全体のなす $\mathcal{M}$ の部分集合を $\mathcal{M}^{\mathrm{o}}$ とおく．

点 $(q, z) \in \mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \mathbb{C}^*$ に対して次の相対ホモロジー群を考える．

$$R^\vee_{\mathbb{Z},(q,z)} := H_n(Y_q, \{y \in Y_q, \ ; \ \Re(W_q(y)/z) < M\}; \mathbb{Z}), \quad M \ll 0$$

ここで右辺は十分小さい M のとり方によらない．生成的な q に対しては $y \mapsto \Re(W_q(y)/z)$ は Y_q 上の Morse 函数を与え，各臨界点の指数は n である．また Kouchnirenko の定理 [11] により，臨界点の個数 N は $\hat{S}$ の体積に $n!|\boldsymbol{N}_{\mathrm{tor}}|$ をかけたものに等しい．全ての臨界値の虚部が互いに異なるとき，$R^\vee_{\mathbb{Z},(q,z)}$ は各臨界点 $\sigma \in Y_q$ の不安定多様体 Γ_σ:

$$\Gamma_\sigma = \{y \in Y_q \ ; \ \lim_{t \to -\infty} \phi_t(y) = \sigma\}, \quad \phi_t(y) \text{ は } \Re(W_q(y)/z) \text{ の勾配流}$$

たちによって生成される自由アーベル群 $\bigoplus_\sigma \mathbb{Z}\Gamma_\sigma$ である．これらの相対ホモロジーを束ねてできる $R_{\mathbb{Z}} := \bigcup_{(q,z) \in \mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \mathbb{C}^*} R^\vee_{\mathbb{Z},(q,z)}$ は $\mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \mathbb{C}^*$ 上のランク N の局所系をなすことが示される．ただし $y \mapsto \Re(W_q(y)/z)$ は固有写像ではないので，モース理論を使うためにはいわゆる Palais-Smale 条件を検証しないといけない．実際 $q \notin \mathcal{M}^{\mathrm{o}}$ の時は，Y_q の無限遠に逃げるサイクルがありモース理論がうまく働かない．

相対ホモロジーの間の交差形式は次の完全ペアリングを定める．

$$R^\vee_{\mathbb{Z},(q,-z)} \times R^\vee_{\mathbb{Z},(q,z)} \to \mathbb{Z}.$$

$R_{\mathbb{Z},(q,z)} = \mathrm{Hom}(R^\vee_{\mathbb{Z},(q,z)}, \mathbb{Z})$ とおき，$R_{\mathbb{Z}}$ を $R^\vee_{\mathbb{Z}}$ に双対な局所系とする．上記のペアリングは完全ペアリング $R_{\mathbb{Z},(q,-z)} \times R_{\mathbb{Z},(q,z)} \to \mathbb{Z}$ を誘導する．$R_{\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \mathbb{C}^*$ 上の局所自由層 $\mathcal{R}$ と可積分接続 $\widehat{\nabla}$ を定める．

$$\mathcal{R} = R_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \mathbb{C}^*}, \quad \widehat{\nabla} = \text{局所系 } R \text{ の定める } \mathcal{R} \text{ の可積分接続}.$$

ここで $\mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \mathbb{C}^*}$ は解析的構造層である．振動積分は $\mathcal{R}$ の特別な切断 ζ を定める．

$$\zeta \colon R^\vee_{\mathbb{Z},(q,z)} \ni \Gamma \mapsto \frac{1}{(-2\pi z)^{n/2}} \frac{1}{|\boldsymbol{N}_{\mathrm{tor}}|} \int_\Gamma e^{W_q(y)/z} \frac{dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n}{y_1 \cdots y_n} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \mathbb{C}^*}. \tag{7}$$

Proposition 6.2. $\mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \mathbb{C}^*$ 上の局所自由層 $\mathcal{R}$ は $\mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \mathbb{C}$ 上の局所自由層 $\mathcal{R}^{(0)}$ に拡張され，(7) に与えた切断 ζ は $\mathcal{R}^{(0)}$ の切断に拡張される．$\mathcal{R}^{(0)}$ 上の可積分接続 $\widehat{\nabla}$ は $\mathcal{M}^{\mathrm{o}} \times \{0\}$ に沿って高々2位の極を持つ[2]．また $R_{\mathbb{Z}}$ のペアリングは $\mathcal{M} \times \mathbb{C}$ 上で正則なペアリン

[2] Poincare rank 1 の接続とも呼ばれる．局所枠で接続を表示したときにその主要部が $(A_2 z^{-2} + A_1 z^{-1})dz$ の形をとることである．

グ $(-)^*\mathcal{R}^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}^o\times\mathbb{C}}} \mathcal{R}^{(0)} \to \mathcal{O}_{\mathcal{M}^o\times\mathbb{C}}$ に拡張される．ここで $(-)\colon \mathcal{M}^o \times \mathbb{C} \to \mathcal{M}^o \times \mathbb{C}$ は (q,z) を $(q,-z)$ に写す写像．

$\mathcal{R}$ の $\mathcal{M}^o \times \mathbb{C}$ への拡張 $\mathcal{R}^{(0)}$ は Landau-Ginzburg 模型の定める半無限 Hodge 構造の変形において最も本質的な情報である．以下に述べるミラー対称性ではこの拡張 $\mathcal{R}^{(0)}$ と量子 D 加群とが同一視される．$\mathcal{R}^{(0)}$ の $\mathcal{M}^o \times \mathbb{C}^*$ への制限 $\mathcal{R}$ は整数上の局所系を自然に含んでいるので，その整構造を量子コホモロジー側に引き戻すことができる．

7. ミラー対称性と引き戻された整構造

I 函数と呼ばれる $H^*_{\rm orb}(\mathcal{X})$ に値をとる $\mathcal{M}^o$ 上の多価函数を次で定める．

$$I(q,z) = e^{\sum_{a=1}^r \overline{p}_a \log q_a/z} \sum_{d\in\mathbb{K}_{\rm eff}} q^d \frac{\prod_{i;\langle D_i,d\rangle<0}\prod_{\langle D_i,d\rangle\le\nu<0}(\overline{D}_i + (\langle D_i,d\rangle-\nu)z)}{\prod_{i;\langle D_i,d\rangle>0}\prod_{0\le\nu<\langle D_i,d\rangle}(\overline{D}_i + (\langle D_i,d\rangle-\nu)z)} \mathbf{1}_{v(d)}\,.$$

ここで， $d \in \mathbb{L}\otimes\mathbb{Q}$ に対して $q^d = q_1^{\langle p_1,d\rangle}\dots q_r^{\langle p_r,d\rangle}$ であり，ν は整数を動く．また，$(q_1,\dots,q_r)$ は前節に与えた $\mathcal{M}$ の座標である．ミラー対称性を述べるためにトーリック軌道体に次の条件を課す．

(D) $\hat{\rho} := D_1 + \cdots + D_m \in \mathbb{L}^\vee$ は任意の $I \in \mathcal{A}$ に対して $\hat{\rho} \in \sum_{i\in I}\mathbb{R}_{\ge 0}D_i$ を満たす．

Proposition 7.1. 条件 (D) の下で I 函数は q の級数として収束冪級数であり，次の展開を持つ．

$$I(q,z) = 1 + \frac{\tau(q)}{z} + O(z^{-2}).$$

ここで，$\tau(q)$ は $\mathcal{M}^o$ のある開集合 U' で収束する $H^{\le 2}_{\rm orb}(\mathcal{X})$ 値の多価函数．

量子コホモロジーに付随する量子微分方程式は $H^*_{\rm orb}(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^*}$ 上の可積分接続 $\widehat{\nabla}$ (2) により定義されたことを思い出そう．ここで，U は量子積が収束する $H^*_{\rm orb}(\mathcal{X})$ の開集合であった．この可積分接続は (自明な方法で) $U \times \mathbb{C}$ 上の $z=0$ に沿って 2 次の極を持つ有理形接続 $\widehat{\nabla}$ に拡張される．トーリック軌道体に対するミラー対称性は次のように述べられる．

Conjecture 7.2. $\mathcal{X}$ を条件 (D) を満たすデータから定義されるトーリック軌道体とする．$(H^*_{\rm orb}(\mathcal{X})\otimes\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}, \widehat{\nabla})$ を $\mathcal{X}$ の量子微分方程式を定める可積分接続とし，$(\mathcal{R}^{(0)}, \widehat{\nabla})$ を $\mathcal{X}$ にミラー双対な *Landau-Ginzburg* 模型の定める $\mathcal{M}^o \times \mathbb{C}$ 上の可積分接続とする．I 函数の z 展開の z^{-1} の係数が定める多価写像を $\tau\colon \mathcal{M}^o \supset U' \to H^{\le 2}_{\rm orb}(\mathcal{X})$ とおく．必要なら U' を小さくとり $\tau(U') \subset U$ としてよい．次の同型 Mir が存在する．

$$\mathrm{Mir}\colon (\mathcal{R}^{(0)}, \widehat{\nabla})|_{U'\times\mathbb{C}} \cong \tau^*(H^*_{\rm orb}(\mathcal{X})\otimes\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}, \widehat{\nabla})$$

Mir は $\mathcal{R}^{(0)}$ の切断 ζ を $H^*_{\rm orb}(\mathcal{X})\otimes\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}$ の単位元切断 1 に写し，かつ Mir が誘導する $\mathcal{M}^o \times \mathbb{C}^*$ 上の局所系の間の同型 $\mathrm{Mir}\colon R_{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{C} \to \mathcal{S}$ はペアリングを保つ．さらに，*Proposition 3.1* に与えた基本解 $L(\tau,z)$ に対して

$$I(q,z) = L(\tau(q),z)^{-1}(1) = L(\tau(q),z)^{-1}(\mathrm{Mir}(\zeta))$$

が成り立つ．

τ は多価写像であるが，量子 D 加群 $(H^*_{\rm orb}(\mathcal{X})\otimes\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}, \widehat{\nabla})$ の自己同型があるため τ による引き戻しは well-defined になっている．

Theorem 7.3. *Conjecture 7.2* が成立すると仮定する．$\mathcal{X}$ を条件 (D) を満たすデータから定義されるトーリック軌道体とし，$\mathcal{X}$ は *4* 節の仮定 (A3) を満たすとする．ミラー同型 $\mathrm{Mir}\colon R_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \cong \mathcal{S}$ の与える $\mathcal{S}$ の整格子 $\mathrm{Mir}(R_{\mathbb{Z}})$ は *Definition 4.1* における $\hat{\Gamma}$-整構造 $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ と一致する．

証明の最も鍵となるステップは I 函数と振動積分を比較することである．$\mathcal{M}$ の実部を $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} := \mathrm{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{R}_{>0})$ とおく．$q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ に対してはファイバー Y_q は実部分多様体 $\Gamma_{\mathbb{R}} := \mathrm{Hom}(\boldsymbol{N}, \mathbb{R}_{>0})$ を含み，$z < 0$ のとき相対ホモロジーの元 $[\Gamma_{\mathbb{R}}] \in R^{\vee}_{\mathbb{Z},(q,z)}$ を与える．$q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ かつ $z < 0$ のとき次が成り立つ．

$$\zeta(\Gamma_{\mathbb{R}}) = \int_{I\mathcal{X}} H(q,z) \cup \widetilde{\mathrm{Td}}(T\mathcal{X}), \quad H(q,z) := (2\pi)^{n/2}\,\mathrm{inv}^*(2\pi\mathtt{i})^{-\frac{\deg}{2}}\hat{\Gamma}_{\mathcal{X}}^{-1}(z^{-\rho}z^{\mu}I(q,z)).$$

ここで左辺の $\zeta(\Gamma_{\mathbb{R}})$ は (7) で与えられる振動積分．右辺は $H(q,z)$ と構造層 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ の向井ペアリングに等しいので，この等式はホモロジカルミラー対称性において Y_q の Lagrangian $\Gamma_{\mathbb{R}}$ が構造層 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ に対応することを示唆している．$\Gamma_{\mathbb{R}}$ は Y_q の Lagrangian torus fibration $|\cdot|\colon Y_q \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{N}, \mathbb{R}_{>0})$ (絶対値を取る写像) における Lagrangian section とみなすと，この対応は Strominger-Yau-Zaslow の描像と合致する．

K 群とミラーに現れる整構造との関係は細野 [7] および Borisov-Horja [4] などにおいてもすでに指摘されている．たとえば，細野 [7] で指摘されている $\mathbb{P}^4$ 内の 5 次超曲面の量子微分方程式の整構造はここで挙げた $\hat{\Gamma}$-整構造と一致しているようである．また，Borisov-Horja では非コンパクトなトーリック Calabi-Yau 多様体の場合に K 群の複素化を対応する GKZ 系の解空間と同一視し，さらに K 群の間の Fourier-Mukai 変換が GKZ 系の解析接続に対応することを示している．

References

1. Abramovich, Dan; Graber, Tom; Vistoli, Angelo *Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks.* preprint, arXiv:math.AG/0603151.
2. Adem, Alejandro; Ruan, Yongbin *Twisted orbifold K-theory* Comm. Math. Phys. 237 (2003), no. 3, pp.533–556.
3. Borisov, Lev A.; Chen, Linda; Smith, Gregory G. *The orbifold Chow ring of toric Deligne-Mumford stacks.* J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 1, pp.193–215.
4. Borisov, Lev A.; Horja, R. Paul *Mellin-Barnes integrals as Fourier-Mukai transforms.* Adv. Math. 207 (2006), no. 2, pp.876–927.
5. Chen, Weimin; Ruan, Yongbin, *A new cohomology theory of orbifold.* Comm. Math. Phys. B 359 (1991) no.1, pp.1–31.
6. Chen, Weimin; Ruan, Yongbin *Orbifold Gromov-Witten theory.* Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), Contemp. Math., vol. 310, Amer. Math. Soc., Province, RI, 2002, pp.25-85.
7. Hosono, Shinobu *Central charges, symplectic forms, and hypergeometric series in local mirror symmetry.* Mirror symmetry. V, pp.405–439, AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
8. Iritani, Hiroshi *Real and integral structures in quantum cohomology I: toric orbifolds.* preprint, math.AG/0712.2204.
9. Kawasaki, Tetsuro, *The Riemann-Roch theorem for complex V-manifolds.* Osaka J. Math., 16, 1979, pp.151–159.
10. Kawasaki, Tetsuro, *The index of elliptic operators over V-manifolds.* Nagoya Math. J., 84, 1981, pp.135–157
11. Kouchnirenko, A. G., *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor.* Invent. Math. 32 (1976), no. 1, pp.1–31.

812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1 九州大学大学院数理学研究院
E-mail address: iritani@math.kyushu-u.ac.jp