Fano多様体のガンマ予想
Gamma conjecture for Fano manifolds

京都大学大学院理学研究科　入谷 寛*
Hiroshi Iritani
Department of Mathematics, Kyoto University

1 序

本稿では Sergey Galkin, Vasily Golyshev と著者 [10] が最近提案したガンマ予想について述べる．**ガンマ予想 I** とは Fano 多様体の量子コホモロジー微分方程式から定まるある特性類 $A_F \in H^*(F)$（F の**主漸近類**という）が F の**ガンマ類** $\widehat{\Gamma}_F$ と一致する

$$A_F = \widehat{\Gamma}_F$$

という予想である．ここで主漸近類 A_F は Givental の J 関数の比の極限

$$A_F = \lim_{t \to \infty} \frac{J(t)}{J^0(t)}$$

として与えられ，解析的に定義される．一方ガンマ類 $\widehat{\Gamma}_F$ は Todd 類あるいは $\widehat{A}$ 類のある種の平方根であることから，ガンマ予想は「**指数定理の平方根**」とみなすことができる．さらに量子コホモロジー環が半単純であるとき，高次の漸近類 $A_{F,i}$, $i = 1, \ldots, N$ が定義される．この状況で，**ガンマ予想 II** とは連接層の導来圏の full exceptional collection $E_1, \ldots, E_N$ が存在して

$$A_{F,i} = \widehat{\Gamma}_F \operatorname{Ch}(E_i)$$

が成立する，という予想である．ガンマ予想 II は Dubrovin 予想の一部を精密化したものになっている．

*iritani@math.kyoto-u.ac.jp

主漸近類 A_F の primitive 成分は数列の極限としても書くことができる．すなわちホモロジー類 $\gamma \in H_*(F)$ で $c_1(F) \cap \gamma = 0$ を満たすものに対して

$$\langle \gamma, A_F \rangle = \lim_{k\to\infty} \frac{\langle \gamma, J_{rk} \rangle}{J^0_{rk}}$$

が成り立つ[1]．この数列を使った極限公式は Apéry による $\zeta(3)$ の無理数性の証明と関わる [1, 11, 8]．実際，ガンマ類は Riemann ゼータ関数の特殊値 $\zeta(n)$, $n \geq 2$ を含んでおり，直交 Grassmann 多様体 $OG(5, 10)$ に対して上の数列を考えると $\zeta(3)$ の速い近似（Apéry によるものと同じ）を与えることが分かる．他のゼータ値 $\zeta(5), \zeta(7), \ldots$ に対しても同じく速い近似を与える Fano 多様体が見つかるかどうかは大変興味深い問題である．

ガンマ予想 I・II は射影空間や (A 型の)Grassmann 多様体に対して成立し，Fano トーリック多様体やその完全交差に対してはガンマ予想 I をある条件の下で示すことができる．また超平面切断を取る操作でガンマ予想 I の成立が保たれることを部分的に示すことができる．しかしながら一般の Fano 多様体に対してガンマ予想が成立するかどうかは不明であり，現段階では一つの仮説に過ぎない．

数年前に著者および Katzarkov-Kontsevich-Pantev[14, 16] は量子コホモロジーの微分方程式の解空間にガンマ類を使った整構造（ガンマ整構造と呼ぶ）を導入した．この観点から言えば，ガンマ予想は，ガンマ整構造が量子微分方程式の Stokes 構造と整合的であるべき，という予想を Fano 多様体に対して述べたものということができる.（ガンマ整構造は Fano 多様体に限らず一般の多様体の量子コホモロジーに対して定義される.）ガンマ整構造がミラー対称性と整合的であることは多くの例で観察されており [13, 3, 14, 15]，これもガンマ予想の証拠あるいは動機となっている．

2　ガンマ類

X を複素多様体とする．$\delta_1, \ldots, \delta_n$ を TX の Chern 根とする（$n = \dim X$）．X の（接束の）ガンマ類 [17, 14, 16] は

$$\widehat{\Gamma}_X = \widehat{\Gamma}(TX) = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 + \delta_j)$$

[1] ここで J_k は J 関数の展開係数で，r は Fano 指数．右辺の極限の存在は一般には不明だが，存在すればこの式が成り立つ．正確な命題は後述．

で与えられる．但し $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ は Euler のガンマ関数．ガンマ関数についての良く知られた Taylor 展開の公式を使うと

$$\widehat{\Gamma}_X=\exp\left(-\gamma c_1(X)+\sum_{k\geq 2}(-1)^k(k-1)!\zeta(k)\operatorname{ch}_k(TX)\right)$$

と書けることが分かる．ここで $\gamma=0.57721\ldots$ は Euler の定数.

ガンマ類にはループ空間を使った解釈があり，量子コホモロジーとの密接な関係を示唆している．$LX=C^\infty(S^1,X)$ を自由ループ空間とする．元の空間 X は定数ループ全体のなす空間として LX に埋め込まれている．LX にループの回転による S^1 作用を考えたとき，X の LX における法束 $\mathcal{N}$ は S^1 表現として正の部分と負の部分とに分解する $\mathcal{N}=\mathcal{N}_+\oplus\mathcal{N}_-$．$z$ を 1 点の S^1 同変コホモロジーの生成元とする．同変オイラー類 $e_{S^1}(\mathcal{N}_+)$ は無限積で与えられるが，ζ 関数正則化の方法を使って正則化すると，

$$\frac{1}{e_{S^1}(\mathcal{N}_+)}\sim z^{-\mu}z^{c_1(X)}\widehat{\Gamma}_X$$

なる関係が得られる [18]．ここで $\mu\in\operatorname{End}(H^*(X))$ は $\mu(\phi)=(\frac{\deg\phi}{2}-\frac{n}{2})\phi$ で与えられる次数付け作用素である．

ガンマ類のもう一つの意味は，Todd 類あるいは $\widehat{A}$ 類の平方根を与えることである．Hirzebruch-Riemann-Roch の定理

$$\chi(E,F)=\int_X\operatorname{ch}(E^*)\operatorname{ch}(F)\operatorname{td}_X$$

において Todd 類 td_X の平方根をとることを考えてみる．ただし E,F は X 上のベクトル側で $\chi(E,F)=\sum_{i=0}^n(-1)^i\dim\operatorname{Ext}^i(E,F)$．関数等式

$$\frac{x}{1-e^{-x}}=\frac{x}{e^{x/2}-e^{-x/2}}e^{x/2}=\Gamma\left(1+\frac{x}{2\pi\mathtt{i}}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2\pi\mathtt{i}}\right)e^{x/2}$$

は特性類の間の関係

$$\operatorname{Td}_X=\widehat{\Gamma}_X^*\widehat{\Gamma}_X e^{\pi\mathtt{i}c_1(X)} \tag{1}$$

を与える．ここで $\widehat{\Gamma}_X^*=(-1)^{\deg/2}\widehat{\Gamma}_X$, $\operatorname{Td}_X=(2\pi\mathtt{i})^{\deg/2}\operatorname{td}_X$ とおいた．これを使うと

$$\chi(E,F)=\left[\widehat{\Gamma}_X\operatorname{Ch}(E),\widehat{\Gamma}_X\operatorname{Ch}(F)\right) \tag{2}$$

と書けることが分かる．但し $\operatorname{Ch}(E)=(2\pi\mathtt{i})^{\deg/2}\operatorname{ch}(E)$ で，

$$[\alpha,\beta)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_X(e^{\pi\mathtt{i}c_1(X)}e^{\pi\mathtt{i}\mu}\alpha)\cup\beta \tag{3}$$

は $H^*(F)$ 上の（一般には対称でも反対称でもない）双線形型式である．Witten と Atiyah によるループ空間上の局所化を使った指数定理の「説明」に出てくるように，$e_{S^1}(\mathcal{N})^{-1}$ は多様体の $\widehat{A}$ 類を与えている．分解 $e_{S^1}(\mathcal{N}) = e_{S^1}(\mathcal{N}_+)e_{S^1}(\mathcal{N}_-)$ はちょうど式 (1) に対応している．

3　量子コホモロジーと量子接続

F を Fano 多様体とする．考えるコホモロジー類は偶数次数のものに限り，$H^*(F)$ は F のコホモロジーの偶数部分をあらわすものとする．また簡単のためここでは Fano 多様体の小量子コホモロジーのみを考える．コホモロジー群上の（小）量子積 $\star_0$ は次の式で与えられる．

$$(\alpha \star_0 \beta, \gamma) = \sum_{d \in H_2(F,\mathbb{Z})} \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{0,3,d}.$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma \in H^*(F)$ で $(\cdot,\cdot)$ は Poincaré ペアリングをあらわし，$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{0,3,d}$ は種数 0，3 点付き，次数 d の Gromov-Witten 不変量である（大雑把に言うと α, β, γ に Poincaré 双対な 3 つのサイクルを通る次数 d の有理曲線の数）．F が Fano であることから右辺の和は有限和であり，量子コホモロジー環 $(H^*(F), \star_0)$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された有限次元代数になる．

注意 3.1 一般に $\tau \in H^*(F)$ に対して大量子コホモロジー積 $\star_\tau$ が定義されるが，$\tau \notin H^{\le 2}(F)$ の時は形式冪級数となり収束するかどうかは分からない．

量子接続(quantum connection) とは $\mathbb{P}^1$ 上のコホモロジーをファイバーとする自明束 $H^*(F) \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ に定まる次の有理型接続である．

$$\nabla_{z\partial_z} = z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z}(c_1(F)\star_0) + \mu$$

ここで z は $\mathbb{P}^1$ の非斉次座標で μ は次数付け作用素．量子接続は（底空間が一次元なのでこの場合は自明であるが）平坦接続であり，$z=0$ で不確定特異点（極の位数が 2），$z=\infty$ で確定特異点（対数的極）を持っている．また $z=0$（あるいは $z=\infty$）の周りで（一般には非自明な）モノドロミーを持つ．Frobenius の方法により，$z=\infty$ の周りの多価平坦切断はコホモロジー類と一対一に対応する．一方で $z=0$ の周りでは Stokes 現象が起きる．

$z=\infty$ の周りの解については次の命題がよく知られている．

命題 3.2 ([6, 14]) 量子接続の $z=\infty$ の周りの基本解 $S(z)z^{-\mu}z^{c_1(F)}$ であって

$$\begin{aligned}
&\nabla\left(S(z)z^{-\mu}z^{c_1(F)}\phi\right)=0, \quad \forall\phi\in H^*(F)\\
&S(z)=\mathrm{id}+S_1z^{-1}+S_2z^{-2}+S_3z^{-3}+\cdots\\
&z^{\mu}S(z)z^{-\mu}\ \text{は}\ z=\infty\ \text{で正則で}\ z^{\mu}S(z)z^{-\mu}\big|_{z=\infty}=\mathrm{id}
\end{aligned}$$

を満たすものが唯一つ存在する．ここで $S(z)$ は複素平面全体で収束する $\mathrm{End}(H^*(F))$ 値級数である．

この命題により $z=\infty$ の周りの多価平坦切断は $\phi\mapsto S(z)z^{-\mu}z^{c_1(F)}\phi$ によって $H^*(F)$ の元と一対一に対応する．

注意 3.3 descendant Gromov-Witten 不変量を用いると $S(z)$ は次の形で与えられる．

$$(S(z)\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)+\sum_{d\in H_2(F,\mathbb{Z}),d\neq 0}\left\langle\frac{\alpha}{-z-\psi},\beta\right\rangle_{0,2,d}$$

ここで ψ は 1 番目の marked point での普遍余接束の第一 Chern 類である．

4 ガンマ予想 I

すでに見たように $z=0$ は量子接続の不確定特異点である．$z=0$ の周りでの解の振る舞いは大まかには第一 Chern 類の量子積 $(c_1(F)\star_0)$ の固有値で決まる．$(c_1(F)\star_0)$ の固有値を

$$\mathrm{Spec}(c_1(F)\star_0)=\{u_1,\ldots,u_N\}$$

をおく．ただし $N=\dim H^*(F)$. 固有値 u_i に属する $(c_1(F)\star_0)$ の固有ベクトルを Ψ_i と書くとき，$z=0$ の周りで

$$s_i(z)\sim e^{-u_i/z}\Psi_i$$

となる平坦切断 $s_i(z)$ の存在が期待できる．より正確にはこのような漸近展開が成り立つ角領域（sector）を選ぶ必要がある．また $u_1,\ldots,u_N$ に重複がある場合は事情はより複雑になる．

ガンマ予想 I では平坦切断のうち最も小さい漸近展開をもつものに注目する．ガンマ予想 I の前提となる予想として次の予想 $\mathcal{O}$ を考える．

予想 4.1 (予想 $\mathcal{O}$ [10]) 実数 $T \in \overline{\mathbb{Q}}$ を次で定める.

$$T := \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_N|\} \tag{4}$$

このとき

(1) T は $(c_1(F)\star_0)$ の固有値であり，その重複度は 1 である.

(2) $u \in \mathbb{C}$ が $(c_1(F)\star_0)$ の固有値であり $T = |u|$ であれば，ある $0 \le k < r$ に対して $u = e^{2\pi \mathtt{i} k/r}T$. ただし r は F の Fano 指数.

注意 4.2 Perron-Frobenius の定理によれば，非負の成分からなる既約な正方行列 C は絶対値の一番大きい正の固有値を持ち，その固有値の重複度は 1 である．ここで行列が既約であるとは不変な座標部分空間を持たないことである．量子積 $(c_1(F)\star_0)$ は有理曲線の数え上げで定義されるので，適当な「正の」基底を取れば $(c_1(F)\star_0)$ を表現する行列は非負の成分になるはずである．従って予想 $\mathcal{O}$ の (1) は多くの場合成り立つと考えられる[2]．このことは小野薫氏により指摘された.

注意 4.3 予想 $\mathcal{O}$ の (2) について．命題「$u \in \mathrm{Spec}(c_1(F)\star_0)$ であれば $e^{2\pi \mathtt{i}/r}u \in \mathrm{Spec}(c_1(F)\star_0)$」は量子積の定義から従う.

以下この予想 $\mathcal{O}$ を仮定する．予想 $\mathcal{O}$ の下では「最も小さい」漸近展開を持つ平坦切断の空間は 1 次元になる.

命題 4.4 ([10]) Fano 多様体 F は予想 $\mathcal{O}$ を満たすとする．正の実軸に沿って最も小さい漸近展開をもつ平坦切断のなす空間 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} := \left\{ s\colon \mathbb{R}_{>0} \to H^*(F) : \begin{array}{l} \nabla s(z) = 0, \\ \|e^{T/z}s(z)\| = O(z^{-m}) \text{ as } z \to 0 \ (\exists m) \end{array} \right\}$$

で定める．このとき $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = 1$ である.

さらに任意の $s \in \mathcal{A}$ に対して $\lim_{z\to+0} e^{T/z}s(z)$ が存在して $(c_1(F)\star_0)$ の固有値 T の固有ベクトルになることも示される.

予想 4.5 (ガンマ予想 I [10]) 命題 4.4 の空間 $\mathcal{A}$ は平坦切断 $S(z)z^{-\mu}z^{c_1(F)}\widehat{\Gamma}_F$ で生成される.

---

[2] ただし Fano 軌道体の場合には予想 $\mathcal{O}$ には反例 $\mathbb{P}^2/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ がある.（この場合既約性が成り立たない.）

ガンマ予想Iにはz平面での解析接続が関わっている．つまり$\mathcal{A}$は$z=0$の周りでの漸近的な振る舞いで定義されるのに対して，命題3.2での基本解は$z=\infty$の周りで定義されている．ガンマ予想Iは$z=0$の周りで最も小さい漸近展開を持つ平坦接続を正の実軸に沿って$z=\infty$まで解析接続すると$\sim z^{-\mu}z^{c_1(X)}\widehat{\Gamma}_X$なる漸近形をもつ，ということを意味する．

ガンマ予想は量子接続の解であるJ関数の言葉で述べることもできる．GiventalのJ関数は次で与えられるコホモロジー値関数である．

$$\begin{aligned}J(t) &= J(c_1(F)\log t, z=1)\\ &= e^{c_1(F)\log t}\left(1+\sum_{i=1}^{N}\sum_{d\in H_2(F,\mathbb{Z})}\left\langle \frac{\phi_i}{1-\psi}\right\rangle_{0,1,d} t^{c_1(F)\cdot d}\phi^i\right)\end{aligned}$$

ただし$\{\phi_i\}$, $\{\phi^i\}$は$H^*(F)$の基底でPoincaréペアリングに関して双対なものである．命題3.2の基本解を使うと

$$J(t) = z^{\frac{n}{2}}z^{-c_1(F)}z^{\mu}S(z)^{-1}1$$

と書くことができる．但し$z=t^{-1}$. このとき次の極限公式が成り立つ．

定理 4.6 ([10]) Fano多様体Fが予想$\mathcal{O}$を満たすと仮定する．このとき次は同値である．

(1) Fはガンマ予想Iを満たす．

(2) $J^0(t) := \langle [\mathrm{pt}], J(t)\rangle$を$J(t)$の$H^0(F)$成分とするとき，

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{J(t)}{J^0(t)} = \widehat{\Gamma}_F \tag{5}$$

極限公式(5)の左辺の定める特性類をFの**主漸近類**(principal asymptotic class)とよび，A_Fと書く．$S(z)z^{-\mu}z^{c_1(F)}A_F$は一次元空間$\mathcal{A}$の生成元を与えていることも分かる．

上の極限公式において連続極限$t\to+\infty$はテイラー係数の比の離散極限に置き換えることができる．正確には次が成り立つ．

定理 4.7 ([10]) Fano多様体Fが予想$\mathcal{O}$およびガンマ予想Iを満たすと仮定する．$J(t)=e^{c_1(F)\log t}\sum_{k=0}^{\infty}J_k t^k$とおく．このとき任意のホモロジー類$\gamma\in H_*(F)$で$c_1(F)\cap\gamma=0$を満たすものに対して

$$\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{\langle\gamma, J_{rk}\rangle}{J^0_{rk}} - \langle\gamma,\widehat{\Gamma}_F\rangle\right| = 0$$

が成立する．ここでrはFのFano指数．

注意 4.8 ここでの$\liminf$は$\lim$に置き換えられると期待される．

5　Fano トーリック多様体に対するガンマ予想 I

Fano 多様体 F がトーリック多様体の場合，ガンマ予想 I は予想 $\mathcal{O}$ に相当する予想を仮定すれば，ミラー対称性を使って示すことができる．トーリック多様体の中の Fano 完全交差に対しても同様の議論ができるが，やや複雑になるので本稿では省略する．詳しくは [10] を参照されたい．

Fano トーリック多様体 F のミラーは次の Landau-Ginzburg 模型 $f\colon (\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{C}$ で与えられる．

$$f(x) = x^{b_1} + \cdots + x^{b_m}$$

ここで $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Z}^n$ は F を定める扇（fan）の一次元錘の原始的生成元であり，$x = (x_1, \ldots, x_n)$ は $(\mathbb{C}^\times)^n$ の座標である $(n = \dim F)$．Landau-Ginzburg 模型で量子接続に対応するものは，f の twisted de Rham 複体のコホモロジー $\mathcal{H}_f$ である．

$$\mathcal{H}_f = \Omega^n_{(\mathbb{C}^\times)^n}[z]/(zd + df\wedge)\Omega^{n-1}_{(\mathbb{C}^\times)^n}[z]$$

$\mathcal{H}_f$ は z 平面上のベクトル束を定め，さらに z 方向に関して Gauss-Manin 接続が与えられている．この Gauss-Manin 系の解は次の振動積分で与えられる．

$$\int_\Gamma e^{f(x)/z} \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}.$$

ここで Γ は非コンパクトなサイクルであり，無限遠で $\Re(f(x)/z) \to -\infty$ となるものである．サイクル Γ としては関数 $\Re(f(x)/z)$ に関する descending Morse cycle （あるいは f の Lefschetz thimble）を考える．

ミラー対称性により，Fano 多様体 F の J 関数の成分は振動積分として書かれる．さらに $(c_1(F)\star_0)$ の固有値の集合は関数 f の臨界値の集合と一致することも分かる．臨界値 u_i に付随する Morse cycle Γ_i を振動積分のサイクルにとったとき振動積分は $z \to +0$ で

$$\int_{\Gamma_i} e^{-f(x)/z} \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n} \sim (2\pi z)^{n/2} \frac{e^{-u_i/z}}{\sqrt{\operatorname{Hess} f(\sigma_i)}}(1 + O(z))$$

なる漸近展開を持つ．ここで $\operatorname{Hess} f(\sigma_i)$ は対応する臨界点 σ_i での Hessian であり，$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \log x_k \partial \log x_l}(\sigma_i)\right)_{k,l}$ で与えられる．つまり振動積分の $z \to +0$ での漸近的振る舞いは容易にわかる．このことを利用してガンマ予想 I を示すことができる．

またミラーを用いると予想 $\mathcal{O}$ に現れる数 T の候補が次で与えられる．

補題 5.1 ([9]) $f\colon (\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{C}$ を F のミラーとする．このとき f の $(\mathbb{R}_{>0})^n$ への制限 $f|_{(\mathbb{R}_{>0})^n}$ は唯一つの臨界点 $x_{\mathrm{con}} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ を持つ．さらに x_{con} において $f|_{(\mathbb{R}_{>0})^n}$ は最小値 $T_{\mathrm{con}} = f(x_{\mathrm{con}})$ をとり，x_{con} は f の非退化臨界点である．また臨界点 x_{con} に付随する Morse cycle は $(\mathbb{R}_{>0})^n$ である．

この補題は Hessian $\frac{\partial^2 f}{\partial \log x_k \partial \log x_l}$ が $(\mathbb{R}_{>0})^n$ の全ての点で正定値であることから容易に従う．この補題は任意の正の係数を持つ convenient Laurent 多項式に対して成り立つ.

注意 5.2 臨界点 x_{con} を conifold point と呼ぶ.

Fano トーリック多様体に対して予想 $\mathcal{O}$ の類似を考えよう.

予想 5.3 (予想 $\mathcal{O}$ の類似 [10]) Fano トーリック多様体のミラー f に対して次が成り立つ.

- 全ての f の臨界値 u は $|u| \le T_{\mathrm{con}}$ を満たす.
- x_{con} は $f^{-1}(T_{\mathrm{con}})$ に含まれる唯一の臨界点である.

定理 5.4 ([10]) Fano トーリック多様体 F が予想 5.3 を満たすとする．このとき F はガンマ予想 I を満たす.

この定理は著者による次の結果 [14] から直ちに従う．コホモロジー類 $\phi \in H^*(F)$ に対して対応するミラーの微分形式 $[\varphi_\phi(x,z)dx_1 \cdots dx_n/(x_1\cdots x_n)] \in \mathcal{H}_f$ をとると

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(\phi, S(z)z^{-\mu}z^{\rho}\widehat{\Gamma}_F\right) = \frac{1}{(2\pi z)^{n/2}}\int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \varphi_\phi(s,-z)e^{-f(x)/z}\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_n}{x_n}$$

が成立する．予想 5.3 を仮定すると平坦切断 $S(z)z^{-\mu}z^{c_1(F)}\widehat{\Gamma}_F$ は $z \to +0$ において最も小さい漸近展開 $\sim e^{-T/z}$ を持つことが示される.

6 量子 Lefschetz 原理とガンマ予想 I

ここではガンマ予想 I が超平面切断を取る操作と整合的であることを説明する．X を Fano 指数 $r \ge 2$ の Fano 多様体とし，$-K_X = rH$ とおく．ここで H は豊富な因子である．Y を次数 a の超平面切断とする．つまり $Y \in |aH|$.

$0 < a < r$ ならば Y は Fano 多様体である．量子 Lefschetz 原理 [5] によれば X と Y の J 関数は次で関係付けられる．X の J 関数を

$$J_X(t) = e^{rH\log t}\sum_{k=0}^{\infty} J_{X,rk}t^{rk}$$

と展開したとき Y の J 関数は

$$J_Y(t) = e^{(r-a)H\log t - c_0 t}\sum_{k=0}^{\infty}(aH+1)\cdots(aH+ak)(i^*J_{X,rk})t^{(r-a)k}$$

で与えられる．ここで $i\colon Y \to X$ は包含写像であり c_0 は

$$c_0 = \begin{cases} a!\sum_{H\cdot d=1}\langle[\mathrm{pt}]\psi^{r-2}\rangle_{0,1,d}^{X} & a-r=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられる定数．X がガンマ予想 I を満たすとき J_X は $t \to +\infty$ で次の漸近的な振る舞いをすることが分かる．

$$J_X(t) \sim (\mathrm{const})\, t^{-\dim X/2} e^{T_X t}\widehat{\Gamma}_X(1+O(t^{-1}))$$

また量子 Lefschetz 原理は Laplace 変換を使うと次の形に書くことができる．

$$J_Y(u^{a/(r-a)}) = \frac{e^{-c_0 u^{a/(r-a)}}}{\Gamma(1+aH)u}\int_0^{\infty} i^*J_X(q^{a/r})e^{-q/u}dq$$

上の二つの式を使い stationary phase method を J_Y の計算に形式的に適用すると J_Y の漸近的な振る舞い

$$J_Y(t) \sim (\mathrm{const})\, t^{-\dim Y/2} e^{(T_0-c_0)t}\widehat{\Gamma}_Y(1+O(t^{-1}))$$

が導ける．ここで T_0 は $(\frac{T_0}{r-a})^{r-a} = a^a(\frac{T_X}{r})^r$ を満たす正の実数．ここでの要点はガンマ類の間の関係

$$\widehat{\Gamma}_Y = \frac{i^*\widehat{\Gamma}_X}{\Gamma(1+aH)}$$

である．特に $T_Y = T_0 - c_0$ が予想される．

定理 4.7 で考えた離散的な極限を考えると，量子 Lefshcetz との整合性はより明確に述べられる．

定理 6.1 ([8]) Fano 多様体 X に対して定理 4.7 と類似の次の極限公式が成り立つとする．

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\langle\gamma, J_{X,rk}\rangle}{J^0_{X,rk}} = \langle\gamma,\Gamma_X\rangle, \quad \forall\gamma\in H_*(X)\cap\operatorname{Ker}c_1(X)$$

このとき Fano である超平面切断 $Y\subset X$ について

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\langle\gamma', J_{Y,(r-a)k}\rangle}{J^0_{Y,(r-a)k}} = \langle\gamma',\Gamma_Y\rangle, \quad \forall\gamma'\in H_*(Y)\cap\operatorname{Ker}c_1(Y)$$

が成立する．

証明は $r-a\geq 2$ の時はほとんど明らかである．実際 $\gamma = i_*\gamma'$ に対して極限公式の両辺が X と Y とで同じである．$r-a=1$ の場合は J_Y に e^{-c_0t} の寄与があるが，それは極限をとるとき寄与しないことが分かる．

7 ガンマ予想 II

ガンマ予想 II は量子コホモロジー環が半単純であるような Fano 多様体に関する予想である．ここでは簡単のため小量子コホモロジー環 $(H^*(F),\star_0)$ が半単純であり，さらに $(c_1(F)\star_0)$ の固有値 $u_1,\dots,u_N$ が互いに異なる場合[3]に限って予想を述べる.（予想自体は $(H^*(F),\star_\tau)$ が半単純になるような任意の $\tau\in H^*(F)$ で述べることができる.）以下この節では $u_1,\dots,u_N$ は互いに異なるものと仮定する．

まず，不確定特異点 $z=0$ の周りで量子接続の形式解を構成する．半単純 Frobenius 多様体の文脈で次の定理は良く知られている．

命題 7.1 ([6]) $z=0$ における量子接続の形式的基本解で

$$\Psi R(z)e^{-U/z}$$

なる形のものが，符号つき置換の右からの掛け算を除いて唯一つ存在する．ここで，

$\Psi = [\Psi_1,\dots,\Psi_N]$,
Ψ_iは固有値 u_i に属する $(c_1(F)\star_0)$ の固有ベクトルで長さが 1 のもの
$R(z) = \mathrm{id} + R_1z + R_2z^2 + \cdots \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^N)[\![z]\!]$
$U = \operatorname{diag}[u_1,\dots,u_N]$

であり各 $1\leq i\leq N$ に対して $\nabla(\Psi R(z)e^{-U/z}e_i) = \nabla(e^{-u_i/z}\Psi R(z)e_i) = 0$.

[3] もし $u_1,\dots,u_N$ が互いに異なるならば $(H^*(F),\star_0)$ は自動的に半単純である．

この命題で符号付き置換は長さ1の固有ベクトルたちの順序および符号の不定性 $(\Psi_1,\dots,\Psi_N)\to(\pm\Psi_{\sigma(1)},\dots,\pm\Psi_{\sigma(N)})$ から来ている．

さらに角領域（sector）を選ぶことで形式解を真の解に持ち上げることができる．任意の $i\neq j$ に対して固有値の差 u_i-u_j が $e^{\mathtt{i}\phi}$ と平行でないとき，$e^{\mathtt{i}\phi}$ を**認容方向**(admissible direction) と呼ぶことにする．

命題 7.2 ([6]) $e^{\mathtt{i}\phi}$ を認容方向とする．量子接続の $z=0$ の周りでの解析的基本解 $Y_\phi(z)=[y_1^\phi(z),\dots,y_N^\phi(z)]$ であって，π よりわずかに大きい角領域 $|\arg(z)-\phi|<\frac{\pi}{2}+\epsilon$ の中で z が 0 に近づくときに

$$Y_\phi(z)\sim\Psi R(z)e^{-U/z}$$

なる漸近展開を持つものが存在する．ここで $\Psi R(z)e^{-U/z}$ は命題 7.1 の形式的基本解である．また，このような基本解 $Y_\phi(z)$ は（$\Psi_1,\dots,\Psi_N$ の順序と符号を固定すれば）一意である．

$\mathbb{C}^\times$ の普遍被覆において $\arg(z)=\phi$, $|z|\ll 1$ なる点と $\arg(z)=0$, $|z|\gg 1$ なる点を結ぶ道をとり，命題 7.2 における $Y_\phi(z)$ をその道に沿って解析接続するとき，高次の漸近類 $A^\phi_{F,i}$, $i=1,\dots,N$ が次の式で同定される．

$$y_i^\phi(z)\Big|_{\substack{\text{analytically}\\ \text{continued}}}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}S(z)z^{-\mu}z^{c_1(F)}A^\phi_{F,i}$$

高次の漸近類は認容方向 $\phi\in\mathbb{R}$ に依存し，また符合を除いて決まる．最大の固有値 $T(4)$ が $T=u_1$ であるとし，また $|\phi|<\frac{\pi}{2}$ であれば，対応する漸近類 $A^\phi_{F,1}$ は主漸近類 A_F と一致する．

ガンマ予想 II は次のように述べられる．

予想 7.3 (ガンマ予想 II [10]) Fano 多様体 F の量子積 $\star_0$ が半単純で $(c_1(F)\star_0)$ の固有値 $u_1,\dots,u_N$ が互いに異なるとする[4]．さらに F の連接層の導来圏 $D^b(F)$ は full exceptional collection を持つとする．認容方向 $\phi\in\mathbb{R}$ に対してある full exceptional collection $E_1^\phi,\dots,E_N^\phi$ が存在して

$$A^\phi_{F,i}=\widehat{\Gamma}_F\,\mathrm{Ch}(E_i^\phi)$$

が成立する．

注意 7.4 さらに一般の量子積 $\star_\tau$ から出発すれば[5]，τ および ϕ に依存する高次の漸近類 $A^{\tau,\phi}_{F,i}$ が得られる．固有値を $u_1,\dots,u_N$ を $\Im(e^{-\mathtt{i}\phi}u_1)>\Im(e^{-\mathtt{i}\phi}u_2)>$

[4] すでに述べたように，ある τ に対して $\star_\tau$ が半単純と仮定するだけでよい．

[5] 一般の τ では量子接続に現れる $(c_1(F)\star_0)$ を Euler ベクトル場の量子積 $(E\star_\tau)$ で置き換える必要がある．また $u_1,\dots,u_N$ も $(E\star_\tau)$ の固有値である．

$\cdots > \Im(e^{-\mathtt{i}\phi}u_N)$ となるように順序付けることにする．漸近類 $A_i = A_{F,i}^{\tau,\phi}$ は τ,ϕ が変化するときに不連続に変化するが，その変化は次の形の mutation の合成で与えられる．

$$(A_1,\ldots,\overset{i}{A_i},\overset{i+1}{A_{i+1}},\ldots,A_N) \to (A_1,\ldots,\overset{i}{A_{i+1}},\overbrace{A_i-[A_i,A_{i+1})A_{i+1}}^{i+1},\ldots,A_N)$$

ここで $[\cdot,\cdot)$ は (3) で与えられた双線形形式である．上の mutaion は $e^{\mathtt{i}\phi}$ の方向に向かって固有値 u_i が u_{i+1} の後ろを横切るとき（right mutation）の変化を与える．Hirzebruch-Riemann-Roch 公式 (2) によってこれは導来圏の full exceptional collection の mutation と対応する．特にガンマ予想 II の成立は τ,ϕ のとり方によらないことが分かる．

8 Dubrovin 予想

ここではガンマ予想 II と Dubrovin 予想の関係を説明する．Dubrovin [7] は 1998 年に Fano 多様体 F に対して次を予想した．

(1) F の量子コホモロジーが (ある τ で) 半単純であることと，F の導来圏が full exceptional collection を持つことは同値である．

さらに F の量子コホモロジーが半単純であるとき，導来圏のある full exceptional collection $E_1,\ldots,E_N$ が存在して，

(2) F の量子微分方程式の Stokes 行列 (S_{ij}) は導来圏のある exceptional collection の Euler ペアリング $\chi(E_i,E_j)$ で与えられる．

(3) F の量子微分方程式の中心接続行列 (central connection matrix) は $C = C'C''$ と分解され，C'' の列ベクトルは $\mathrm{Ch}(E_1),\ldots,\mathrm{Ch}(E_N)$ で与えられ，$C'\colon H^*(F)\to H^*(F)$ は $C'(c_1(F)\alpha) = c_1(F)C'(\alpha)$ を満たす線形作用素．

ここで Dubrovin の中心接続行列とは，我々の言葉では高次の漸近類 $A_{F,1},\ldots,A_{F,N}$ を列ベクトルとする行列である．従ってガンマ予想 II は (3) における線形作用素 C' が

$$C'(\alpha) = \widehat{\Gamma}_F \cup \alpha$$

で与えられる，とする予想である．さらに Stokes 行列は漸近類を使うと

$$S_{ij} = [A_{F,i}, A_{F,j})$$

と書けることが簡単な微分方程式の考察で分かる．従って Dubrovin 予想の (2) もガンマ予想 II と Hirzebruch-Riemann-Roch 公式 (2) から従うことが分かる．

9　トーリック多様体に対するガンマ予想 II

著者のトーリックミラー対称性に関する定理 [14] を使うと，弱い形のガンマ予想 II がトーリック多様体に対して成り立つことが分かる．トーリック多様体の量子コホモロジーは Fano であるかどうかに関わらず (generic な τ について）半単純である．半単純であれば高次漸近類 $A_{F,i}$ は定義されるので，次の定理では Fano であることは必要ない.（ただし証明では技術的な仮定として $c_1(F)$ が nef であることを使う.）以下の定理はトーリック軌道体の軌道体量子コホモロジーに対しても（ガンマ類や Chern 類に適当な修正を施して）成立する．

定理 9.1 ([14]) F を $c_1(F)$ が nef であるトーリック多様体とし，$A_{F,i}$, $i = 1, \ldots, N$ を（ある量子積のパラメータ $\tau \in H^*(F)$ と認容方向 ϕ に関する）高次の漸近類とする．このとき F の K 群の元 $[E_1], \ldots, [E_N]$ が存在して

(1) $A_{F,i} = \widehat{\Gamma}_F \operatorname{Ch}([E_i])$.

(2) $(\chi([E_i], [E_j]))_{i,j}$ は対角成分が 1 の上半三角行列である．

ただし $E\star_\tau$ の固有値 $u_1, \ldots, u_N$ は $\Im(e^{-\mathtt{i}\phi}u_1) > \Im(e^{-\mathtt{i}\phi}u_2) > \cdots > \Im(e^{-\mathtt{i}\phi}u_N)$ となるように順序付けられているとする．

従って残された問題はこれらの K 群の類 $[E_1], \ldots, [E_N]$ が導来圏のある full exceptional collection から来ることを示すことである．

10　Grassmann 多様体に対するガンマ予想 I・II

我々の論文 [10] における主定理の一つは Grassmann 多様体に対するガンマ予想 I・II の証明である．$G(r, N)$ を $\mathbb{C}^N$ の中の r 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体とする．

定理 10.1 Grassmann 多様体 $G(r, N)$ はガンマ予想 I・II を満たす．さらに Kapranov による full exceptional collection の mutation が $G(r, N)$ の高次漸近類に対応する．

ここで Kapranov による exceptional collection とは $G(r, N)$ 上のランク r の普遍部分束 $V \to G(r, N)$ の双対 V^* に対して Schur 関手を適用して得られるベクトル束たちの集まり $\{S^\nu V^*\}$ である．ここで $\nu = (\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_r)$ は $\nu_1 \leq N - r$, $\nu_{r+1} = \nu_{r+2} = \cdots = 0$ を満たす分割全体を動く．

証明は Bertram–Ciocan-Fontanin–Kim–Sabbah [2, 4] らによるアーベル商・非アーベル商対応および Golyshev-Manivel による量子佐武対応 [12] を

用いる．詳細は [10] に譲るが，大雑把には次の通りである．まずこれらの対応を使うと $G(r,N)$ の量子接続が $\mathbb{P}^{N-1}$ の量子接続の r 次の交代積で与えられることが分かる．

$$\mathrm{QConn}(G(r,N)) \cong \bigwedge^r \mathrm{QConn}(\mathbb{P}^{N-1})$$

ここで QConn は量子接続を意味する．一方，Kapranov の exceptional collection に対応するガンマ基底は Beilinson の exceptional collection $\{\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(N-1)\}$ に対応するガンマ基底の交代積であたえられることも分かる．

$$\left\{ \widehat{\Gamma}_{G(r,N)} \operatorname{Ch}(S^\nu V^*) \right\}_\nu \cong \bigwedge^r \left\{ \widehat{\Gamma}_{\mathbb{P}^{N-1}} \operatorname{Ch}(\mathcal{O}(i)) \right\}_{0 \le i \le N-1}$$

射影空間 $\mathbb{P}^{N-1}$ に対するガンマ予想は本質的に Dubrovin の議論 [6] からわかるが，それと上のことから $G(r,N)$ に対するガンマ予想が従う．

注意 10.2 証明の技術的な点は，量子接続の等モノドロミー変形 (isomonodromic deformaion, τ 方向の変形) を扱う部分である．まず $(c_1(G(r,N))\star_0)$ の固有値は重複をもつことが多い[6]．その場合も τ を 0 でない値に変形すれば固有値が互いに異なるようにできる．また Kapranov の exceptional collection に対応する高次漸近類を得るためには，τ を 0 から十分離れた遠くの点にまで変形する必要がある．従って $G(r,N)$ および $\mathbb{P}^{N-1}$ の大量子コホモロジーに付随する量子接続を考える必要が出てくる．

References

[1] Gert Almkvist, Duco van Straten andWadim Zudilin: *Apéry limits of differential equations of order 4 and 5*, Yui, Noriko (ed.) et al., Modular forms and string duality. Proceedings of a workshop, Banff, Canada, June 3–8, 2006. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Toronto: The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences. Fields Institute Communications 54, 105–123 (2008)., 2008.

[2] Aaron Bertram, Ionut Ciocan-Fontanine, and Bumsig Kim: *Two proofs of a conjecture of Hori and Vafa*, Duke Math. J. 126, No. 1, 101–136 (2005), arXiv:math.AG/0304403.

[6] $r!$ と N が互いに素であれば固有値は互いに異なる．また量子積 $\star_0$ 自体は半単純である

[3] Lev Borisov and Richard Paul Horja: *Mellin-Barnes integrals as Fourier-Mukai transforms*, Adv. Math. 207 (2006), no. 2, 876–927, arXiv:math/0510486.

[4] Ionut Ciocan-Fontanine, Bumsig Kim, and Claude Sabbah: *The abelian/non-abelian correspondence and Frobenius manifolds*, Invent. Math. 171 (2008), no. 2, 301–343, arXiv:math/0610265.

[5] Tom Coates and Alexander Givental: *Quantum Riemann-Roch, Lefschetz and Serre*, Ann. of Math. (2) 165 (2007), no. 1, pp.15–53, arXiv:math/0110142.

[6] Boris Dubrovin: *Painlevé transcendents and two-dimensional topological field theory*, In The Painlevé property, CRM Ser. Math. Phys., 287–412. Springer, New York, 1999, arXiv:math/9803107.

[7] Boris Dubrovin: *Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds*, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), 315–326, arXiv:math/9807034.

[8] Sergey Galkin: *Apery constants of homogeneous varieties*, preprint SFB45 (2008).

[9] Sergey Galkin: *The conifold point*, arXiv:1404.7388v1.

[10] Sergey Galkin, Vasily Golyshev and Hiroshi Iritani: *Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: Gamma Conjectures*, arXiv:1404.6407v1.

[11] Vasily Golyshev: *Deresonating a Tate period*, arXiv:0908.1458.

[12] Vasily Golyshev and Laurent Manivel: *Quantum cohomology and the Satake isomorphism*, arXiv:1106.3120.

[13] Shinobu Hosono: *Central charges, symplectic forms, and hypergeometric series in local mirror symmetry*, Mirror symmetry. V, pp.405–439, AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, arXiv:hep-th/0404043.

[14] Hiroshi Iritani: *An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds*, Adv. Math. 222 (2009), no. 3, 1016–1079, arXiv:0903.1463.

[15] Hiroshi Iritani: *Quantum Cohomology and Periods*, Ann. Inst. Fourier 61, No. 7, 2909–2958 (2011), arXiv:1101.4512.

[16] Ludmil Katzarkov, Maxim Kontsevich, and Tony Pantev: *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry*, in: From Hodge Theory to Integrability and TQFT tt^*-geometry, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 87–174, arXiv:0806.0107.

[17] Anatoly S. Libgober: *Chern classes and the periods of mirrors*, Math. Res. Lett., 6 (1999), 141–149, arXiv:math/9803119.

[18] Rongmin Lu: *The $\widehat{\Gamma}$-genus and a regularization of an S1-equivariant Euler class*, J. Phys. A 41 (2008), no.42, 425204 (13pp), arXiv:0804.2714