

超弦理論からの動機 (お話)

時空 $\mathbb{R}^4 \times X^6$
10次元

Calabi-Yau 多様体 (実6次元 = \mathbb{C} 3次元)

X : Calabi-Yau 3-fold $\left\{ \begin{array}{l} \bullet X \text{ は複素 3次元 Kähler 多様体} \\ \bullet K_X = \wedge^3 T^*X \end{array} \right.$

1次元 CY: 楕円曲線

が 正則直線束 \mathcal{L} に 自明

2次元 CY: K3 曲面

- Gromov-Witten 不変量

$$n_{g,d} = \# \left\{ \begin{array}{l} \text{図} \xrightarrow{u} X \mid \left. \begin{array}{l} u \text{ は 正則} \\ u_*[\Sigma] = d \end{array} \right\} \right.$$

$n_{g,d} \in \mathbb{Q}$

固定 \rightarrow S^1
 \mathbb{Z}

分配関数 (GW potential)

$$\mathcal{Z} = \exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} \underbrace{F_g(x)}_{\text{red wavy}} t^{g-1} \right)$$

$$F_g(x) = \underbrace{\sum_{d=1}^{\infty} n_{g,d} \underbrace{e^{dx}}_{\text{blue box}}}_{\downarrow 0} + \left(\text{perturbative term} \right)$$

x の多項式

d は π_2 の和 : 4次元可及と思わなければならない $\rightsquigarrow F_g(x)$ は 正則関数

g : 発散 $\rightsquigarrow t$ に π_2 の 漸近級数

$x \in H^2(X; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ とおいて. これは X の「大きさ」を測るパラメータ

Kähler parameter

- $\text{Re}(x) \rightarrow +\infty$ のとき : 極大体積 極限

これは F_g は 自明になる

量子化 (Witten) 「 \mathcal{L} は $F_0(x)$ の 量子化 」

$g=0$: $F_0(x)$ の 微分 の グラフ

($\hbar \rightarrow 0$ の limit)

$$\mathcal{L} = \left\{ (x, p) \in \mathbb{C}^2 \mid p = \frac{dF_0}{dx}(x) \right\}$$

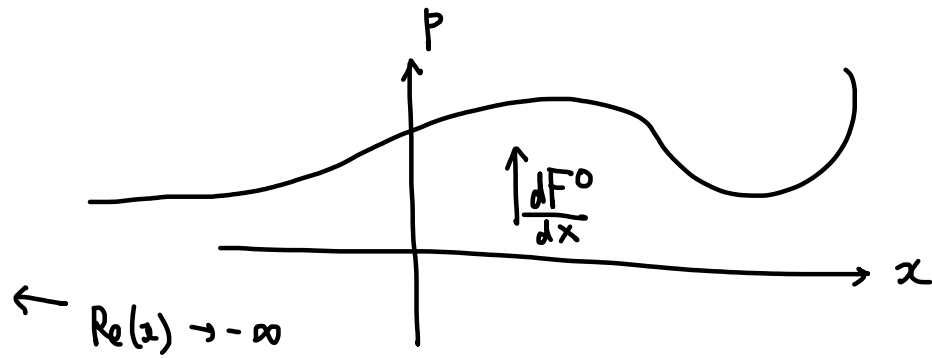
↑ Lag 部分多様体

Rep 1 \mathbb{C}^2 上の 2-form $dx \wedge dp$: symplectic form

$$i: \mathcal{L} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$$

$i^* \omega = 0$ ε 示せ

Lagrangian



all genus

$$\mathcal{Z} = e^{\sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{g-1} F_g(x)}$$

$$\xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\hbar} F_0 + F_1 + \dots}$$

は $(\mathbb{C}^2, dx \wedge dp)$ を量子化して得られる

Hilbert space (Fock space) の元と見られる。

今日

$$X = \text{local } \mathbb{C}P^2$$

= $\mathbb{C}P^2$ 上の canonical line bundle, 全空間。

$$\mathbb{C}P^2 = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \sim$$

$$\mathbb{C} \downarrow \quad \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / (x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

$$X = K_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} / (x, y, z, v) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda^{-3} v) \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

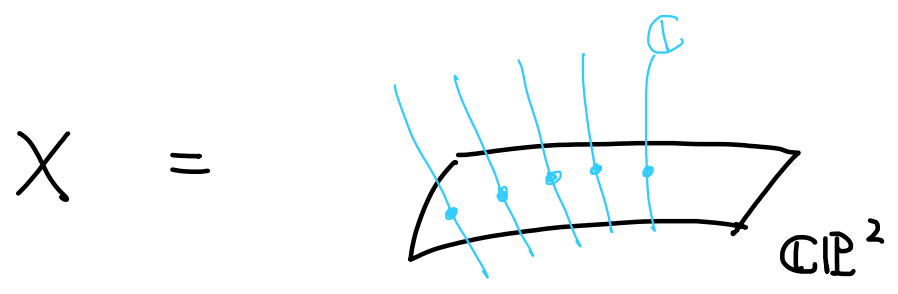
non-compact CY mfd

[Rep 2
Rep 3]

$$X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}\mathbb{P}^2, \quad [x, y, z, v] \mapsto [x, y, z]$$

π の fiber ($\pi^{-1}(p), p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$) は \mathbb{C} と同視できることを示せ

X は 多様体の構造を λ によ



$\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の上の line bundle

X の中 $z: \mathbb{C}P^2$ (零切断 ε) ε 1 点に μ_3 と 特異点 ε も $\mathbb{C}P^2$ 空間
 3, 6 個ある

$$\mu_3 = \{ \lambda \in \mathbb{C}^\times \mid \lambda^3 = 1 \} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$\mu_3 \curvearrowright \mathbb{C}^3 \quad \lambda \cdot (x, y, z) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \varepsilon \text{ 作用させる.}$$

$$\mathbb{C}^3 / \mu_3 = \mathbb{C}^3 / (x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \lambda \in \mu_3$$

$$\varphi: X \longrightarrow \underbrace{\mathbb{C}^3 / \mu_3}_{\text{orbifold (多様体 } \varepsilon \text{ 有限群 } \mu_3 \text{ の作用)}} \quad \varepsilon = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ による}$$

$$\varphi([x, y, z, v]) = [x v^{1/3}, y v^{1/3}, z v^{1/3}] \quad \text{well-defined}$$

$\lambda \quad \lambda \quad \lambda \quad \lambda^3$

$$\left[\text{Rep 4} \quad \varphi^{-1}([0, 0, 0]) = \mathbb{C}P^2 \subset X \quad \varepsilon \text{ あり} \right]$$

この φ は crepant 解消 である。

Rep 5 \mathbb{C}^3/μ_3 上の 3-form $dx \wedge dy \wedge dz$ は φ を引き戻せば
 $[x, y, z]$ 上の X 上の \mathbb{P}^1 形式に帰着できることを示せ

X \mathbb{C}^3/μ_3 X の 大きな 変形 とうりあり
 (Kähler form)

$-Re(x) \rightarrow \infty$ $Re(x) = 0$

予想 (弦理論)
 Y. Ruan

Crepant 解消の下で 分岐点の数はかわらない。
 (解析接続とうりあり)
 \mathbb{R}^3 の μ_3 -singularity $\cong \mathbb{C}/\mu_3$

$$N_{g,k}^{\text{orb}} = \text{"\#"} \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram of a genus } g \text{ surface with } k \text{ marked points} \\ \xrightarrow{u} \mathbb{C}^3 / \mu_3 \end{array} \right\}$$

$$F_g^{\text{orb}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} N_{g,k}^{\text{orb}} \frac{t^k}{k!}$$

$$Z^{\text{orb}}(t) = \exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{g-1} F_g^{\text{orb}}(t) \right)$$

分岐問題

Z と Z^{orb} の関係は？

$g=0$

$$\mathcal{L} = \left\{ (x, p) \in \mathbb{C}^2 \mid p = \frac{dF_0}{dx}(x) \right\}$$

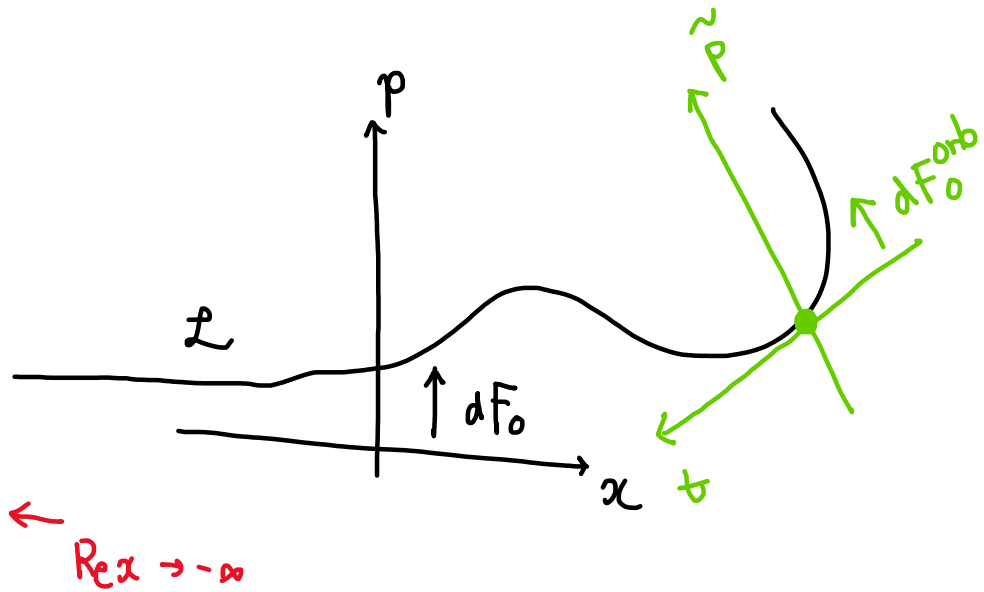
$$\mathcal{L}^{\text{orb}} = \left\{ (t, \tilde{p}) \in \mathbb{C}^2 \mid \tilde{p} = \frac{dF_0^{\text{orb}}}{dt}(t) \right\}$$

∃ affine-linear isom $U: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$

s.t. $U(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{orb}$

$U^*(\underbrace{dt \wedge d\tilde{p}}) = \underbrace{dx \wedge dp}$

← symplectic isomorphism



全種数

: \mathcal{L} と \mathcal{L}^{orb} は \widehat{U} 量子化変換でつながる。

量子化

$(\mathbb{C}^2, dx \wedge dp)$ symplectic vector space

Poisson bracket : $\{x, p\} = 1$

ε $[\hat{x}, \hat{p}] = i\varepsilon$ になる

∴ \hat{x}, \hat{p} は あるベクトル空間 \mathcal{H} の作用素

$$\hat{x}, \hat{p} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

← この \hat{x}, \hat{p} を
ε に対して $\varepsilon \rightarrow 0$ 量子化

Schrödinger 表現

$$\mathcal{H} = \{ f(x) : x \text{ の 滑らかな関数} \}$$

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = x \text{ に対して} \\ f(x) \mapsto x \cdot f(x) \end{array} \right.$

$$(*) \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\text{とある} \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

さらに一般に T による表現

$$(**) \quad \begin{cases} \hat{x} = a x + b \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \hat{p} = c x + d \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases}$$

$$\left[\text{Rep 6} \quad ad - bc = 1 \text{ ならば } [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \text{ 成立する} \text{ こと check} \right]$$

異なる表現をつなぐ変換 (intertwining operator)

① Fourier 変換 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$\int_{-\infty}^{\infty} i x p / \dots$

$$f(x) \longmapsto \tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} f(x) dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = x \quad \longleftrightarrow \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \\ \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \longleftrightarrow \quad -p \end{array} \right.$$

Rep 7

(*) と (**) の表現 $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ の変換 ε (形式的に) は

次の形式で与えよ。

$$f(x) \longmapsto \tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iS(x,x')/\hbar} f(x') dx'$$

$S(x, x')$: x と x' の双線形形式

量子古典対応

$$f(x) = \frac{1}{\hbar} F_0(x) + F_1(x) + \hbar F_2(x) + \dots$$

の形, a と x

以下では $h \ll \tau$
 h はおきかえる

$$\tilde{F}f(x) = \int e^{-xy/h} f(y) dy$$

a 漸近尾端

$$= \int e^{\frac{1}{h} (F_0(y) - xy) + F_1(y) + \dots} dy$$

この関数の臨界点

の近く h の寄与が h と h^2 と

$$\left[y \mapsto F_0(y) - xy \text{ の臨界点 } y^* : \frac{dF_0}{dy}(y^*) = x \right]$$

x に依存

$$\sim e^{\frac{1}{h} (F_0(y^*) - xy^*)} + \dots$$

計算はさる

$$\check{F}_0(x) = F_0(y^*) - xy^* \quad : \text{Legendre 変換}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Report } \delta \\ \left\{ p = \frac{d\check{F}_0}{dx}(x) \right\} \quad \varepsilon \quad \left\{ \check{p} = \frac{d\check{F}_0(\check{x})}{d\check{x}} \right\} \quad \text{は} \\ \text{座標変換} \quad \left\{ \begin{array}{l} \check{x} = p \\ \check{p} = -x \end{array} \right. \quad \text{さうりあうことを見よ} \end{array} \right]$$

• もとの設定にもとづいて

$$\mathcal{Z}(x) \in \left\{ x \mapsto x, p \mapsto \hbar \frac{\partial}{\partial x} \text{ なる表現} \right\} \quad \downarrow \hat{U}$$

$$\mathcal{Z}^{\text{orb}}(t) \in \left\{ t \mapsto t, \tilde{p} \mapsto \hbar \frac{\partial}{\partial t} \text{ なる表現} \right\}$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{Z}^{\text{orb}}(t) = \hat{U} \mathcal{Z}(x) \quad \text{が成立する}$$

[Coates - $\lambda^{1/2}$]