格子スピン系の Witten Laplacian*

重川 一郎†
（京都大学大学院理学研究科）

1. 導入

格子有界スピン系のスペクトルの跳びの問題を考えよう．ここで扱うのはスピンの空間が $\mathbb{R}$ でコンパクトでないことが特徴である．非有界スピン系と呼ばれることもある．

$\mathbb{Z}^d$ 格子の上にスピンが乗っているモデルを考える．したがって配置空間は $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ である．スピンの配置は Gibbs 分布に従う．Gibbs 分布の正確な定義はここでは与えないが，次のような形式的な表現を持つ：

$$\nu = Z^{-1}\exp\Big\{-2\mathscr{J}\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}^d\\ i\sim j}}(x^i-x^j)^2 - 2\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}U(x^i)\Big\}\prod_{i\in\mathbb{Z}^d}dx^i. \tag{1.1}$$

この測度に対して Hodge-Kodaira 作用素を dd^*+d^*d を定めそのスペクトルの跳びを調べることがここでの目的である．

2. 有限次元の Witten Laplacian

興味があるのは無限次元の場合であるが，まず有限次元の場合を考察する．$\mathbb{R}^N$ 上で，C^2 関数 Φ を与え，測度 ν を

$$\nu(dx) = Z^{-1}e^{-2\Phi}dx \tag{2.1}$$

で定める．ただし $Z=\int_{\mathbb{R}^N}e^{-2\Phi}dx$ である．従って，ν は確率測度になる．さらに $L^2(\nu)$ 上の Dirichlet 形式を次で定める．

$$\mathscr{E}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla f,\nabla g)e^{-2\Phi}dx. \tag{2.2}$$

ここで $\nabla=(\partial_1,\dots,\partial_N)$ である．$(\nabla f,\nabla g)$ は ユークリッド内積を表すが，内積は $\nabla f\cdot\nabla g$ のように $\cdot$ で簡略に表す場合もある．$\mathscr{E}$ の定義域が何かは説明を要する．(2.2) は $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

*2005 年 6 月 20 日 (月)〜24 日 (金) 北海道大学大学院理学研究科数学専攻集中講義

†e-mail: `ichiro@math.kyoto-u.ac.jp`， URL: `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/`

に対しては well-defined であるから，ひとまず $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ で計算を進める．∂_j の共役作用素 ∂_j^* を求めよう．部分積分を用いて

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f g e^{-2\Phi} dx = -\int_{\mathbb{R}^N} f\partial_j(ge^{-2\Phi})dx = -\int_{\mathbb{R}^N} f(\partial_j g - 2\partial_j \Phi g)e^{-2\Phi}dx.$$

これは即ち

$$\partial_j^* = -\partial_j + 2\partial_j\Phi \tag{2.3}$$

を意味する．これから ∇ の共役作用素が稠密な定義域を持つから可閉であることが分かる．さらに

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(f,g) &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla f, \nabla g)e^{-2\Phi}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \sum_j \partial_j f \partial_j g e^{-2\Phi}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \sum_j \partial_j^* \partial_j f g e^{-2\Phi}\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \sum_j \{\partial_j^2 f - 2\partial_j\Phi\partial_j f\} g e^{-2\Phi} dx.
\end{aligned}$$

従って

$$\mathfrak{A} f = \sum_j (\partial_j^2 f - 2\partial_j \Phi \partial_j f) = \triangle f - 2(\nabla\Phi, \nabla f) \tag{2.4}$$

とおけば，$\mathfrak{A}$ が対応する生成作用素であり，

$$\mathscr{E}(f,g) = -(\mathfrak{A} f, g)$$

であるから，これから $(\mathscr{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^N))$ の可閉性が従う．閉包を取ることによって $\mathscr{E}$ は非負定値 closed bilinear form となる．定義域を明確に述べるとすれば，超関数としての微分 ∇f が $L^2(\nu)$ に属しているといえばよい．

次に生成作用素の方を考えてみよう．$\mathfrak{A}$ は非負定値 closed bilinear form に対応するから，自己共役な拡大 (Friedricks 拡大) を持つが，$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ で本質的自己共役であることまで示せる．これを示すために，Schrödinger 作用素の場合にまず示す．

Schrödinger 作用素

$\mathfrak{G} = \triangle - V$ を $\mathbb{R}^N$ 上の Schrödinger 作用素とする．V は $\mathbb{R}$ 値の関数でポテンシャルと呼ばれる．V には局所有界性を仮定しておく $\mathfrak{G}$ は $L^2(\mathbb{R}^N, dx)$ での作用素と見る．定義域はまず $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ にとる．本質的自己共役性を示していくが，そのために対応する双線型形式が下に有界であることを仮定する．即ち，対応する Dirichlet 形式 $\mathscr{E}$ が

$$\mathscr{E}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla f \cdot \nabla g\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V f g\, dx \tag{2.5}$$

で与えられるが，$\mathscr{E}$ が下に有界であることを仮定する．即ち $k \geq 0$ が存在し，

$$\mathscr{E}(f,f)_k := \mathscr{E}(f,f) + k\int_{\mathbb{R}^N} f^2\,dx \geq 0 \tag{2.6}$$

が成り立つことを仮定する．$\mathfrak{G} = \triangle - V$ の本質的自己共役性を示すために楕円型正則性定理が必要となる．

補題 2.1. f を超関数で $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(dx)$ に対し $\triangle f = g$ が成り立っているとする．すると，

i) $p < \frac{N}{2}$ のとき $q = \frac{Np}{N-2p}$ に対し $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(dx)$.

ii) $p = \frac{N}{2}$ のとき任意の $r < \infty$ に対し $f \in L^r_{\mathrm{loc}}(dx)$.

iii) $p > \frac{N}{2}$ のとき f は連続.

さらに

iv) $p < N$ のとき $q = \frac{Np}{N-p}$ に対し $\nabla f \in L^r_{\mathrm{loc}}(dx)$.

v) $p = N$ のとき 任意の $q < \infty$ に対し $\nabla f \in L^q_{\mathrm{loc}}(dx)$.

vi) $p > N$ のとき ∇f は連続.

証明 $N = 1$ のとき f が C^1 級になることは明らかだから，特に証明の必要はない．以下 $N \geq 2$ とする．ポテンシャル論的な証明をする．まず $\triangle$ の基本解 E が次で与えられることを思い出そう．$r = |x|$ として

$$E(x) = \begin{cases} -c_N r^{2-N}, & N \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi}\log r, & N = 2. \end{cases} \tag{2.7}$$

これはいわゆる Green 関数である．定数 c_N は具体的には次で与えられる：

$$c_N = \frac{1}{(N-2)\sigma_N}, \quad \sigma_N = \int_{S^{N-1}} d\omega = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

E が $\triangle$ の基本解であるとは $\triangle E = \delta$ が成立することである．$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ を 0 の近傍で 1 となる r のみの関数 (radial function) で $[0,1]$ に値をとり，さらに $\operatorname{supp}\chi \subset \{x; |x| \leq 1\}$ とする．$E - \chi E \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ だから

$$\zeta = \triangle(E - \chi E) = \delta - \triangle(\chi E) \in C_0^\infty$$

となる．

　さて，ここで $\triangle f = g$ だから，

$$f = \delta * f = (\triangle(\chi E) + \zeta) * f = (\chi E) * \triangle f + \zeta * f = (\chi E) * g + \zeta * f.$$

$\zeta * f \in C^\infty$ は明らかだから， $(\chi E) * g$ だけ考えればよい．以下半径 r 中心 x の開球を $B(x,r)$ で表わす．$|x| \le R$ のとき

$$|(\chi E) * g(x)| \le \int_{\mathbb{R}^N} \chi(y)|E(y)||g(x-y)|dy \le \int_{\mathbb{R}^N} |E(y)| 1_{B(0,R+1)}(x-y)|g(x-y)|\,dy$$

だから，$g \in L^p$ として，$E * g$ の可積分性を示せばよい．以下 $\|g\|_p = 1$ として計算を進める．

$$|(\chi E) * g(x)| \le \int_{|y|\le a} |E(y)||g(x-y)|dy + \int_{|y|>a} |E(y)||g(x-y)|dy =: I_1 + I_2$$

と二つに分ける．p' を p の共役指数とすると

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|y|>a} c_N |y|^{2-N} |g(y-x)|\,dy \\
&= c_N \left\{ \int_{|y|>a} |y|^{(2-N)p'} dy \right\}^{1/p'} \|g\|_p \\
&= c_N \left\{ \int_a^\infty r^{(2-N)p'} \sigma_N r^{N-1} dr \right\}^{1/p'} \|g\|_p \\
&= c a^{(N+(2-N)p')/p'} \\
&= c a^{-N/r}. \quad \left(\because\ \frac{N+(2-N)p'}{p'} = N(1-\frac{1}{p}) + 2 - N = -\frac{N-2p}{p} = -N/r \right)
\end{aligned}$$

I_1 の評価のために最大関数 $Mg(x)$ を次で導入する：

$$Mg(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{|y|<r} |g(x-y)\,dy. \tag{2.8}$$

$|B(0,r)|$ は体積を表わすが，今の場合は $\frac{N}{\sigma_N r^N}$ に等しい．従って Mg は球上で平均した積分の最大値を表わしている．$Mg(x)$ に関しては 不等式 $\|Mg\|_p \le c\|g\|_p$ が知られているのでこの事実を後で使う．さて最大関数を使うと

$$\int_{|y|\le a} |E(y)||g(x-y)|dy \le Mg(x) \int_{|y|\le a} |E(y)|dy$$

が成り立つ．これは $E(y)$ が radial function だから，$\sum_j a_j 1_{B(0,r_j)}$ の形の関数で近似できる．このときは

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y)| \sum_j a_j 1_{B(0,r_j)} dy &= \sum_j a_j \int_{B(0,r_j)} |g(x-y)|dy \\
&\le \sum_j a_j |B(0,r_j)| Mg(x) \\
&= Mg(x) \int_{\mathbb{R}^N} \sum_j a_j 1_{B(0,r_j)} dy
\end{aligned}$$

だから，一般の場合が従う．よって

$$I_1 \le c_N Mg(x) \int_{|y|\le a} |y|^{2-N} dy \le c_N Mg(x) \int_0^a r^{2-N} \sigma_N r^{N-1} dr \le ca^2 Mg(x).$$

両者から

$$|E * g(x)| \le ca^{-N/q} + ca^2 Mg(x)$$

a を動かして最適化すれば $a = \left(\frac{N}{2Mq}\right)^{q/(2q+N)}$ のとき右辺は最小であるから

$$|E * g(x)| \le c\left(\left(\frac{2q}{N}\right)^{(2q+1)/N} + \left(\frac{N}{2q}\right)^{2q/(2q+N)}\right)\left(\frac{N}{2Mg(x)q}\right)^{-N/(2q+N)} = cMg(x)^{N/(2q+N)}.$$

ここで $Nq/(2q+N) = p$ に注意して

$$\|E * g\|_q \le c\left\{\int_{\mathbb{R}^N} Mg(x)^p dx\right\}^{1/q} \le c\|g\|_p^{1/q} = c.$$

これで示せた．

ii) は任意に i) で 任意に q を大きく取れることから明らか．

iii) は条件 $p > \frac{N}{2}$ から関数 $\chi(x)r^{2-N}$ が $L^{p'}$ に属する．実際

$$r^{(2-N)p'} r^{N-1} = r^{(2-N)\frac{p}{p-1} + N-1} = r^{\frac{2p-N}{p-1} - 1}$$

であるから，原点近傍で可積分．あとは合成積の性質から明らか連続性が従う．

iv) に関しては

$$\partial_j(\chi E) * g(x) = (\partial_j \chi E) * g(x) + (\chi \partial_j E) * g(x)$$

で

$$\partial_j E(x) = -c_N(2-N) r^{1-N} \frac{x^j}{r}$$

に注意しよう．あとは i) の証明で r^{2-N} となるところを r^{1-N} とすればよい．残りも同様である． □

次に 作用素の本質的自己共役性を示す．

定理 2.2. Schrödinger 作用素 $\mathfrak{G} = \triangle - V$ はポテンシャル V は局所有界で対応する Dirichlet 形式 (2.5) は下に有界であるとする．このとき $\mathfrak{G} = \triangle - V$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上本質的自己共役である．

証明 Dirichlet 形式 $\mathscr{E}$ は下に有界だから，ある $k \geq 0$ が存在して (2.6) が成立しているとする．$(-\triangle + V + k)^* u = -u$ ならば $u = 0$ が成り立つことを示せばよい．$(-\triangle + V + k)^*$ は $(-\triangle + V + k, C_0^\infty(\mathbb{R}^N))$ の共役という意味なので，超関数の意味で $(-\triangle + V + k)u = -u$ が成り立つことに他ならない．即ち $\triangle u = (V + k + 1)u$. $u \in L^2$ で V は局所有界を仮定したから，補題 2.1 を使えば，u は C^1 級であることが示せる．u が C^1 級であることが分かったので，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対し

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(-\triangle + V + k)\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla\varphi + (V + k)u\varphi\,dx.$$

近似の議論により，この等式は $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ に対して成立する：

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla\varphi + (V + k)u\varphi\,dx, \quad \forall\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.9}$$

さて C^∞ 関数 $\chi\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ を次を満たすようにとる：

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

さらに $\chi_n(x) = \gamma(|x|/n)$ で定める．ここで $\varphi = \chi_n^2 u$ として (2.9) へ代入すると

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^N} u\chi_n^2 u\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \{\nabla u \cdot \nabla(\chi_n^2 u) + (V + k)u\chi_n^2 u\}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \{2\chi_n \nabla u \cdot \nabla\chi_n u + \chi_n^2 \nabla u \cdot \nabla u + (V + k)u\chi_n^2 u\}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \{\nabla(\chi_n u) \cdot \nabla(\chi_n u) - u^2 \nabla\chi_n \cdot \nabla\chi_n + (V + k)(\chi_n u)^2\}\,dx \\
&= \mathscr{E}(\chi_n u, \chi_n u) + \int_{\mathbb{R}^N} \{k(\chi_n u)^2 - u^2 \nabla\chi_n \cdot \nabla\chi_n\}\,dx.
\end{aligned}$$

従って

$$\mathscr{E}(\chi_n u, \chi_n u) + (k + 1)\int_{\mathbb{R}^N} (\chi_n u)^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \nabla\chi_n \cdot \nabla\chi_n.$$

$\nabla\chi_n = \frac{1}{n}\gamma'(|x|/n)\frac{x}{|x|}$ であるから右辺は 0 に収束し，特に有界であるから，$\chi_n u$ は $\mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ での有界列で弱収束する部分列を持つ．極限は明らかに u なので，結局 $u \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ が分かり，

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(u, u) + (k + 1)\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \{\mathscr{E}(\chi_n u, \chi_n u) + (k + 1)\int_{\mathbb{R}^N} (\chi_n u)^2\,dx\} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \nabla\chi_n \cdot \nabla\chi_n = 0.
\end{aligned}$$

ここで $\mathscr{E}$ の下に有界性 (2.6) を使えば $u = 0$ が従う． □

Witten Laplacian

さてここで測度 $\nu = Z^{-1}e^{-2\Phi}dx$ の場合に戻る．次の写像 $I\colon L^2(dx) \longrightarrow L^2(\nu)$ はユニタリー作用素である：

$$If(x) = e^{\Phi}f. \tag{2.10}$$

そこで次の図式を可換にする写像 X_j を求める．

$$\begin{array}{ccc} L^2(dx) & \xrightarrow{I} & L^2(\nu) \\ {\scriptstyle X_j}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \partial_j} \\ L^2(dx) & \xrightarrow{I} & L^2(\nu) \end{array} \tag{2.11}$$

これは容易で

$$X_j = e^{-\Phi}\partial_j e^{\Phi} = \partial_j + \partial_j\Phi$$

となる．X_j の L^2 での共役を $\tilde{X}_j$ とする．共役を $*$ を付けて表すのは $L^2(\nu)$ に限ることにして，$\tilde{X}_j$ は Lebesgue 測度に関する共役を表す．

$$\tilde{X}_j = -\partial_j + \partial_j\Phi.$$

これはまた $\tilde{X}_j = e^{-\Phi}\partial_j^* e^{\Phi}$ で計算してもよい．さらに生成作用素 $\mathfrak{A} = -\sum_j \partial_j^*\partial_j$ に対応する作用素は

$$\begin{aligned} A = e^{-\Phi}\mathfrak{A}e^{\Phi} &= -e^{-\Phi}(\sum_j \partial_j^*\partial_j)e^{\Phi} = -\sum_j \tilde{X}_j X_j \\ &= -\sum_j(-\partial_j + \partial_j\Phi)(\partial_j + \partial_j\Phi) = \sum_j(\partial_j^2 + \partial_j^2\Phi - (\partial_j\Phi)^2) = \triangle + \triangle\Phi - |\nabla\Phi|^2. \end{aligned}$$

定義 2.3. $A = \triangle + \triangle\Phi - |\nabla\Phi|^2$ を $L^2(dx)$ 上の Witten Laplacian と呼ぶ．

明らかに Witten Laplacian は Schrödinger 作用素の特別なものである．$\mathfrak{A}$ が非正だから A も非正である．これで Schrödinger 作用素との対応がついたので $\mathfrak{A}$ の本質的自己共役性を論じる準備ができた．

定理 2.4. $L^2(\nu)$ 上の作用素 $\mathfrak{A}$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ を定義域として本質的自己共役である．

証明 $f \in \mathrm{Ker}(1-\mathfrak{A})^*$ として $f = 0$ を示せばよい．条件から任意の $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(1-\mathfrak{A})ge^{-2\Phi}dx = 0$$

が成り立つ．近似により，この等式は $g \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ に対しても成立する．とくに $g = e^{\Phi}\varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ とすれば

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N}(e^{-\Phi}f)e^{-\Phi}(1-\mathfrak{A})(e^{\Phi}\varphi)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}(e^{-\Phi}f)(1-A)\varphi\,dx.$$

ここで $A = \triangle + \triangle\Phi - |\nabla\Phi|^2$ は非正の Schrödinger 作用素だから，定理 2.2 から $e^{-\Phi}f = 0$ が従うから，結局 $f = 0$ が得られる． □

次に作用素の交換関係について述べておく．

命題 2.5. $L^2(\nu)$ 上で次の交換関係が成り立つ．

$$[\partial_i, \partial_j] = 0, \tag{2.12}$$

$$[\partial_i, \partial_j^*] = 2\partial_i\partial_j\Phi, \tag{2.13}$$

$$[\partial_j^*, \partial_k^*] = 0. \tag{2.14}$$

また $L^2(dx)$ 上で次の交換関係が成り立つ．

$$[X_i, X_j] = 0, \tag{2.15}$$

$$[X_i, \tilde{X}_j] = 2\partial_i\partial_j\Phi, \tag{2.16}$$

$$[\tilde{X}_j, \tilde{X}_j] = 0. \tag{2.17}$$

証明　(2.12) (2.14) は明らか．(2.13) を示そう．

$$[\partial_i, \partial_j^*] = \partial_i(-\partial_j + 2\partial_j\Phi) - (-\partial_j + 2\partial_j\Phi)\partial_i = 2\partial_i\partial_j\Phi$$

より成立．

(2.15), (2.16), (2.16) は $X_i = e^{-\Phi}\partial_i e^{\Phi}$, $\tilde{X}_i = e^{-\Phi}\partial_i^* e^{\Phi}$ に注意すれば (2.12), (2.13), (2.14) に帰着できる． □

Notes

- 補題 2.1 は吉田・伊藤 [18, I 部 4 章 §2 問 9, p. 152] によった．この定理は V が滑らかなときはラプラス作用素の準楕円性を言ってることなので，よく知られたことであるが，V が局所有界で十分であることを確認した．途中使った $\|E * g\|q \le c\|g\|_p$ の形の定理は Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式と呼ばれる．ここでは最大関数を使った証明をつけてあるが，この証明は Stein [15, VIII.§4.2] や Bass [2, IV Theorem 3.11] にある．補間定理を使った証明も知られており，こちらは証明が Stein [14, V.§1 Theorem 1, p. 119], 伊藤・小松 [10, 第 3 章 §7 問題 1, p. 276] にある．さらに最大関数の L^p 評価は Bass [2, IV Theorem 1.1] に確率論的な証明があるが，結構複雑なので収録しなかった．

- 定理 2.2 の証明は Davies [4, Theorem 5.2.3, p. 151] からとった．いろいろ証明はあるらしいがこの証明は Calabi によると Davies [4] には書いてある．これらは多様体の上の話で，ここではユークリッドだからよく知られた事実である．Kato の不等式などを使っても証明できる．ただ後で Hodge-Kodaira Laplacian を扱うときはこの証明がそのまま使えてよい．

3.　確率論との関連

この節でいくつか確率論に関連することをまとめておく．

爆発問題

前節で $\mathbb{R}^N$ 上でハミルトニアン Φ を与えて測度 $\mu(dx) = Z^{-1}e^{-2\Phi}dx$ を定めた．さらに bilinear form

$$\mathscr{E}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla f, \nabla g)\mu(dx) \tag{3.1}$$

および生成作用素

$$\mathfrak{A}f = \triangle f - 2(\nabla\Phi, \nabla f) \tag{3.2}$$

を導入した．ここではこれに対応する確率過程のことを調べる．この確率過程は，次の確率微分方程式の解として与えられる：

$$\begin{cases} dX_t = \sqrt{2}dB_t - 2\nabla\Phi(X_t)dt, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{3.3}$$

ここに，(B_t) はブラウン運動である．

(3.3) は Φ を C^2 と仮定すれば係数が局所 Lipshitz であるから，爆発時間 ζ まで解は一意的に存在する．爆発が起こらないための十分条件を与えよう．そのために確率微分方程式の一般論を準備する．

$\mathbb{R}^N$ 上の関数 $\sigma^i_\alpha(x)$ を $b^i(x)$ を与える．但し $i = 1, \ldots, N$, $\alpha = 1, \ldots, d$ とする．$(B^\alpha_t)_{\alpha=1,\ldots,d}$ を d-次元 Brown 運動として $\mathbb{R}^N$ 上で次の確率微分方程式を考える．

$$\begin{cases} dX^i_t = \sum_\alpha \sigma^i_\alpha(X_t)dB^\alpha_t + b^i(X_t)dt, \quad i = 1, \ldots, N, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{3.4}$$

係数 $\sigma^i_\alpha(x)$ と $b^i(x)$ は局所 Lipshitz 連続であることを仮定する．したがって解 (X_t) は爆発時間 ζ まで一意に存在し，$\zeta < \infty$ のとき $\lim_{t\to\zeta} X_t = \infty$ が成り立つ (例えば Ikeda-Watanabe [9, Theorem IV.2.4, p. 173 および Lemma IV.2.1, p. 174] を見よ)．$a^{ij}(x) = \sum_\alpha \sigma^i_\alpha(x)\sigma^j_\alpha(x)$ とおく．

定理 3.1. 適当な定数 $K > 0$ と $L > 0$ が存在し，

$$\sum_i a^{ii}(x) + 2x \cdot b(x) \leq K|x|^2 + L \tag{3.5}$$

が成立しているとき，確率微分方程式 (3.4) の解は爆発しない．

証明 $\tau_N = \inf\{t \geq 0; |X_t|^2 \leq N\}$ とおく．$\zeta = \lim_{N\to\infty}\tau_N$ が爆発時間である．伊藤の公式から

$$|X_{t\wedge\tau_N}|^2 - |X_0|^2 = \int_0^{t\wedge\tau_N} 2\sum_i X^i_s\sigma^i_\alpha(X_s)dB^\alpha_s + \int_0^{t\wedge\tau_N} \sum_i \{a^{ii}(X_s) + 2X^i_s b^i(X_s)\}ds$$

$$\le \int_0^{t\wedge\tau_N} 2\sum_i X_t^i \sigma_\alpha^i(X_s)dB_s^\alpha + \int_0^{t\wedge\tau_N}(K|X_s|^2+L)ds.$$

平均を取って

$$\begin{aligned} E[|X_{t\wedge\tau_N}|^2] - E[|X_0|^2] &\le E[\int_0^{t\wedge\tau_N}(K|X_s|^2+L)ds] \\ &\le \int_0^t (KE[|X_{s\wedge\tau_N}|^2]+L)ds \\ &\le Lt + \int_0^t KE[|X_{s\wedge\tau_N}|^2 ds. \end{aligned}$$

ここで Gronwall の不等式（例えば Hille [8, p. 19, Theorem 1.5.7]）を使って

$$\begin{aligned} E[|X_{t\wedge\tau_N}|^2] &\le E[|X_0|^2] + Lt + K\int_0^t e^{K(t-s)}(E[|X_0|^2]+Ls)ds \\ &\le E[|X_0|^2] + Lt + [-e^{K(t-s)}(E[|X_0|^2]+Ls)]_0^t + \int_0^t e^{K(t-s)}Lds \\ &\le E[|X_0|^2] + Lt - (E[|X_0|^2]+Lt) + e^{Kt}E[|X_0|^2] + \frac{L}{K}[-e^{K(t-s)}]_0^t \\ &\le e^{Kt}E[|X_0|^2] + \frac{L}{K}(e^{Kt}-1). \end{aligned}$$

右辺は N に無関係だから $N\to\infty$ として

$$E[|X_{t\wedge\zeta}|^2] \le e^{Kt}E[|X_0|^2] + \frac{L}{K}(e^{Kt}-1).$$

$P[\zeta\le t]>0$ ならば左辺は ∞ だから $P[\zeta\le t]=0$．t は任意なので $P[\zeta=\infty]=1$ となり，解は爆発しないことが分かる． □

さてこれを使ってもとの問題を考えよう．$b=-2\nabla\Phi$ として考えればよい．

定理 3.2. 適当な定数 $c>0$ が存在して，$\nabla^2\Phi(x)\ge -c$ がすべての点 x で成り立っているとする．ここでこの不等式の意味は対称行列としての意味である．即ち任意の $\xi\in\mathbb{R}^N$ に対し

$$\sum_{i,j}\partial_i\partial_j\Phi(x)\xi^i\xi^j \ge -c|\xi|^2$$

が成立している．このとき確率微分方程式 (3.2) の解は爆発しない．

証明 $\sum_i \partial_i\Phi(tx)x^i$ $(t\in[0,1])$ を考えると

$$\frac{d}{dt}\sum_i \partial_i\Phi(tx)x^i = \sum_{i,j}\partial_j\partial_i\Phi(tx)x^jx^i \ge -c|x|^2.$$

t について 0 から 1 まで積分すれば

$$\sum_i \partial_i \Phi(x) x^i - \sum_i \partial_i \Phi(0) x^i \geq -c|x|^2.$$

従って

$$-\sum_i \partial_i \Phi(x) x^i \leq c|x|^2 - \sum_i \partial_i \Phi(0) x^i \leq c|x|^2 + \frac{1}{2}(|\nabla \Phi(0)|^2 + |x|^2).$$

これから $-2\nabla\Phi$ は定理 3.1 の条件を満たし，解が爆発しないことが分かる． □

再帰性

次に再帰性の問題を論じる．この節では Φ は $C^{2,\alpha}$ を仮定する．即ち Φ は C^2 で 2 階偏導関数が α 次の Hölder 連続性を持つ．ここでは解 (X_t) は爆発することはなく，再帰的であることを示す．P_x で初期条件が x となる解 (X_t) の法則を表す．$r > 0$ に対し開球を

$$D_r = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < r\}$$

で表し，D_r からの脱出時刻を

$$\tau_{D_r} = \inf\{t \geq 0; X_t \notin D_r\}$$

で定め，到達時刻を

$$\sigma_{D_r} = \inf\{t \geq 0; X_t \in \overline{D}_r\}$$

で定める．

さて $r < s$ として，u を

$$\begin{cases} \mathfrak{A}u = 0 & \text{on } D_s \setminus \overline{D}_r \\ u = 1 & \text{on } \partial D_r \\ u = 0 & \text{on } \partial D_s \end{cases} \tag{3.6}$$

となる解とする．この様な解は一意的に存在し，さらに次の変分問題の一意的な解になっている．

$$\inf_{\substack{u \in W^{1,2}(D_s \setminus \overline{D}_r) \\ u=1 \text{ on } \partial D_r \\ u=0 \text{ on } \partial D_s}} \int_{D_s \setminus \overline{D}_r} |\nabla u|^2 \mu(dx). \tag{3.7}$$

以上のことは一般の $C^{2,\alpha}$ 境界を持つ領域 D でも成立する．さて上の (3.6) を満たす u に対して，伊藤の公式を使えば

$$u(X_{t\wedge\sigma_{D_r}\wedge\tau_{D_s}}) = u(X_0) + \sqrt{2}\int_0^{t\wedge\sigma_{D_r}\wedge\tau_{D_s}} \nabla u(X_s) dB_s + \int_0^{t\wedge\sigma_{D_r}\wedge\tau_{D_s}} \mathfrak{A}u(X_s) ds$$

$$= u(X_0) + \sqrt{2}\int_0^{t\wedge\sigma_{D_r}\wedge\tau_{D_s}} \nabla u(X_s)dB_s.$$

ここで両辺の平均を取って

$$E_x[u(X_{t\wedge\sigma_{D_r}\wedge\tau_{D_s}})] = u(x).$$

u は $D_s \setminus \overline{D}_r$ で有界だから $t \to \infty$ として

$$u(x) = E_x[u(X_{t\wedge\sigma_{D_r}\wedge\tau_{D_s}})] = P_x[\sigma_{D_r} < \tau_{D_s}]. \tag{3.8}$$

この関係式を後で使う.

$\mu(\mathbb{R}^N) < \infty$ を仮定しているので，このことから (X_t) が再帰的であることを示す.

定理 3.3. (X_t) は再帰的である．即ち，任意の点から他の点の近傍へ確率 1 で到達する.

証明　まず

$$E(x) = e^{-2\Phi(x)}$$

とおき，さらに

$$\overline{E}(r) = \int_{S^{N-1}} E(r\theta)d\theta$$

とおく．S^{N-1} は単位球面で $d\theta$ はその上の Riemannian volume である.

$$\int_0^\infty \overline{E}(r)r^{N-1}dr = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\Phi(x)}dx < \infty$$

が成立している.

一般に $f > 0$ が $\int_{\mathbb{R}^N} fdx < \infty$ を満たせば

$$\infty = \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{f}\sqrt{f}^{-1}dx \le \left\{\int_{\mathbb{R}^N} fdx\right\}^{1/2}\left\{\int_{\mathbb{R}^N} f^{-1}dx\right\}^{1/2}$$

から $\int f^{-1}dx = \infty$ でなければならない．このことを使えば

$$\int_0^\infty \overline{E}(r)^{-1}r^{1-N}dr = \infty$$

となることに注意しよう.

さて関数 $\psi_n(x)$ を

$$\psi_n(x) = \frac{\int_{|x|}^n \overline{E}(r)^{-1}r^{1-N}dr}{\int_1^n \overline{E}(r)^{-1}r^{1-N}dr}, \quad 1 \le |x| \le n$$

とおくと，

$$\nabla\psi_n(x) = -\left\{\int_1^n \overline{E}(r)^{-1}r^{1-N}dr\right\}^{-1}\overline{E}(|x|)^{-1}|x|^{1-N}\cdot\frac{x}{|x|}.$$

よって，

$$\begin{aligned}
&\int_{D_s\setminus\overline{D}_r}|\nabla\psi_n(x)|^2e^{-2\Phi(x)}dx\\
&\qquad=\left\{\int_1^n \overline{E}(r)^{-1}r^{1-N}dr\right\}^{-2}\int_{D_s\setminus\overline{D}_r}|x|^{2-2N}\overline{E}(|x|)^{-2}e^{-\Phi(x)}dx\\
&\qquad=\left\{\int_1^n \overline{E}(r)^{-1}r^{1-N}dr\right\}^{-2}\int_1^n r^{2-2N}\overline{E}(r)^{-2}r^{N-1}dr\int_{S^{N-1}}e^{-\Phi(r\theta)}d\theta\\
&\qquad=\left\{\int_1^n \overline{E}(r)^{-1}r^{1-N}dr\right\}^{-2}\int_1^n \overline{E}(r)^{-1}r^{1-N}dr\\
&\qquad=\left\{\int_1^n \overline{E}(r)^{-1}r^{1-N}dr\right\}^{-1}.
\end{aligned}$$

ところで，$u_n(x) = P_x[\sigma_{D_1} < \tau\overline{D}_n]$ は変分問題の解であったから，

$$\begin{aligned}
\lambda_n := \int_{D_n\setminus\overline{D}_1}|\nabla u_n|^2\mu(dx) &\leq \int_{D_n\setminus\overline{D}_1}|\nabla\psi_n(x)|^2\mu(dx)\\
&\leq Z^{-1}\left\{\int_1^n \overline{E}(r)^{-1}r^{1-N}dr\right\}^{-1}\to 0 \quad \text{as } n\to\infty.
\end{aligned}$$

さらに $q\in W_0^{1,2}(D_n\setminus\overline{D}_1)$ に対し

$$\int_{D_n\setminus\overline{D}_1}(\nabla u_n,\nabla q)\mu(dx) = 0$$

が成り立つ．u_n は D_n^c では 0 と拡張すれば $u_n\in W^{1,2}(\mathbb{R}^N\setminus\overline{D}_1)$ とみなすことが出来るので，以後この様に考える．$k<n$ のとき $u_k-u_n=0$ on ∂D_n であるので，上のことから

$$\lambda_n = \int_{D_n\setminus\overline{D}_1}|\nabla u_n|^2\mu(dx) = \int_{D_n\setminus\overline{D}_1}(\nabla u_n,\nabla u_k)\mu(dx).$$

これから

$$\int_{D_n\setminus\overline{D}_1}|\nabla u_n-\nabla u_k|^2\mu(dx) = \lambda_k-\lambda_n. \tag{3.9}$$

ここで Hilbert 空間 H をノルム

$$\|u\|_H = \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{D}_1}|\nabla u|^2\mu(dx) + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{D}_1}u^2\mu(dx)$$

から定まるものとする．

$$u_\infty(x) = P_x[\sigma_{\overline{D}_1} < \infty]$$

とすれば，$u_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}_1} |u_n - u_\infty|^2 \mu(dx) = 0$$

が成立する．(3.9) とあわせれば，$\{u_n\}$ は H の Cauchy 列である．極限は u_∞ であるから ∇u_n は ∇u_∞ に $L^2(\mu)$ で収束する．よって

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}_r} |\nabla u_\infty|^2 \mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}_r} |\nabla u_n|^2 \mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

これから $u_\infty =$ constant が従う．$u_\infty = 1$ on ∂D_1 であるから，全体で $u_\infty = 1$. 即ち，任意の点から D_1 に確率 1 出到達する．D_1 は原点を中心とする球としてが，上の議論はどこを中心にとってもよい．以上で再帰性が示せた．□

再帰性が示されれば，爆発が起こらないことも同時に示せている．このことを証明しておこう．

命題 3.4. (X_t) は再帰的であれば，爆発しない．

証明 $\eta_1 = \inf\{t \ge 0; |X_t| \ge 2\}$ と定め，以後帰納的に $\sigma_n = \inf\{t \ge \eta_n; |X_t| \le 1\}$, $\eta_{n+1} = \inf\{t \ge \sigma_n; |X_t| \ge 2\}$ と定める．強マルコフ性と再帰性から $P[\sigma_n < \infty] = 1$, $P[\eta_n < \infty] = 1$ が成り立つ．もし爆発時間 $\zeta < \infty$ ならば，$\lim_{t\to\zeta} X_t = \infty$ となるから，ある n が存在して $\sigma_n = \infty$ とならなければならない．これは起こらないから，爆発することはない．□

Notes

- 定理 3.1 は，(a^{ij}) が単位行列のとき Stroock [16, Corollary 7.3.14, p. 397] にある．
- 定理 3.3 の証明は Pinsky [13, Theorems 6.4.1, 6.4.4] によった．定理 3.2 の非爆発の十分条件は Bakry [1] により，一般の条件の下で論じられている．より正確に言えば Bakry が論じているのは Riemman 多様体の場合で，Ricc+Hess Φ が下に有界という条件で爆発が起こらないことを示している．
- 命題 3.4 の証明は Pinsky [13, Lemma 2.7.1, p. 68] によった．

4. 微分形式に作用する Witten Laplacian

第 2 節 では関数に作用する Witten Laplacian を考察したが，ここでは微分形式に作用する Laplacian を導入する．

微分形式

まず簡単に外積代数について復習しておく．ユークリッド空間上の話なので線型代数の復習になる．以下 $\mathbb{R}^N$ 上の多重線型写像を扱う．t を p 重線型写像，s を q 重線型写像とするとき $p+q$ 重線型写像 $t\otimes s$ を次で定義する：

$$t\otimes s(v_1,\dots,v_p,v_{p+1},\dots,v_{p+q}) = t(v_1,\dots,v_p)s(v_{p+1},\dots,v_{p+q}). \tag{4.1}$$

さらに交代化写像 A を $\mathbb{R}^N$ 上の p 重線型写像 t に対し

$$At(v_1,\dots,v_p)) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\operatorname{sgn}\sigma\, t(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}) \tag{4.2}$$

で定義する．$\mathfrak{S}_p$ は p 次対称群で，$\operatorname{sgn}\sigma$ は符号を表す．さらに p 重線型写像 θ が $A\theta=\theta$ を満たすとき，p 次交代形式であるという．p 次交代形式全体を $\bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*$ とかく．また p 次交代形式 θ と q 次交代形式 η の外積 $\theta\wedge\eta$ を

$$\theta\wedge\eta = \frac{(p+q)!}{p!q!}A(\theta\otimes\eta) \tag{4.3}$$

で定義する．$\theta_1,\dots,\theta_N$ を $(\mathbb{R}^N)^*$ の正規直交基底とすれば p 次交代形式，即ち $\bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*$ の元は

$$\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_p} \tag{4.4}$$

の線型結合で表される．(4.4) の形の元全体が正規直交形になるように $\bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*$ に内積を入れておく．

$A^p(\mathbb{R}^N)=\mathbb{R}^N\times\bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*$ はベクトル束の構造を持ち，その切断を p 次微分形式と呼び，切断全体の集合を $\Gamma(A^p(\mathbb{R}^N))$ とかく．ベクトル束 $A^p(\mathbb{R}^N)$ は積の形の自明束だから，切断は $\mathbb{R}^N$ 上の $\bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*$ に値をとる関数と同一視できる．以下では $\bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*$ 値の関数として議論をする．p 次微分形式の中で滑らかなもの全体を $\Gamma^\infty(A^p(\mathbb{R}^N))$，さらに台がコンパクトなものを $\Gamma_0^\infty(A^p(\mathbb{R}^N))$ で表す．

生成，消滅演算子

$\bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*$ での作用素をいくつか導入する．まず $\theta\in(\mathbb{R}^N)^*$ に対し $\operatorname{ext}(\theta)\colon \bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*\longrightarrow\bigwedge^{p+1}(\mathbb{R}^N)^*$ を

$$\operatorname{ext}(\theta)\omega = \theta\wedge\omega \tag{4.5}$$

で定める．さらに $v\in\mathbb{R}^N$ に対し $\operatorname{int}(\theta)\colon \bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*\longrightarrow\bigwedge^{p-1}(\mathbb{R}^N)^*$ を

$$\operatorname{int}(v)\omega(v_1,\dots,v_{p-1}) = \omega(v,v_1,\dots,v_{p-1}) \tag{4.6}$$

で定義する．さらに $\{e_1,\dots,e_N\}$ を $\mathbb{R}^N$ の標準基底とし $\{\theta^1,\dots,\theta^N\}$ をその双対基底とする．そこで，作用素 a^i, $(a^i)^*$ を

$$a^i = \operatorname{int}(e_i) \tag{4.7}$$

$$(a^i)^* = \mathrm{ext}(\theta^i) \tag{4.8}$$

で定める．a^i, $(a^i)^*$ は外積代数 $\mathbb{R} \oplus (\mathbb{R}^N)^* \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^N)^* \oplus \dots$ 上で定義されていると考えた方が分かりやすいだろう．さらに次の交換関係を満たす．

$$[a^i, a^j]_+ = 0 \tag{4.9}$$

$$[a^i, (a^j)^*]_+ = \delta_{ij} \tag{4.10}$$

$$[(a^i)^*, (a^j)^*]_+ = 0 \tag{4.11}$$

ここで $[\ ,\ ]_+$ は反交換子で例えば $[a^i, a^j]_+ = a^i a^j + a^j a^i$ である．これらはすべて容易であるが (4.10) だけ見ておこう．

$$\begin{aligned}
(a^i(a^j)^* + (a^j)^* a^i)\omega &= (\mathrm{int}(e_i)\,\mathrm{ext}(\theta^j) + \mathrm{ext}(\theta^j)\,\mathrm{int}(e_i))\omega \\
&= \langle e_i, \theta^j \rangle \omega - \mathrm{ext}(\theta^j)\,\mathrm{int}(e_i)\omega + \mathrm{ext}(\theta^j)\,\mathrm{int}(e_i)\omega \\
&= \delta_{ij}\omega.
\end{aligned}$$

微分形式に対して共変微分 ∇ が定義できる．一般にテンソル場に対しても定義でき，次のように表される：

$$\nabla t = \sum_i \theta^i \otimes \partial_i t.$$

∇ の共役作用素 ∇^* は

$$\nabla^*(\sum_i \theta^i \otimes t_i) = \sum_i \partial_i^* t_i$$

と表され，従って

$$\nabla^* \nabla t = \sum_i \partial_i^* \partial_i t = -\sum_i (\partial_i^2 - 2\partial_i \Phi \partial_i) t$$

が成立する．

さらに微分形式に対しては，外微分が定義される．p 次微分形式 ω に対し，外微分 $d\omega$ は通常 $d\omega = (p+1)A\nabla\omega$ で定義されるが，今の枠組みでは

$$d = \sum_i \mathrm{ext}(\theta^i)\partial_i = \sum_i (a^i)^* \partial_i \tag{4.12}$$

と表され，従ってその共役作用素は

$$d^* = \sum_i a^i \partial_i^* \tag{4.13}$$

と表される．

この外微分を用いて Hodge-Kodaira Laplacian が $-(dd^* + d^*d)$ で定義される．この表現を与えるのが Weitzenböck formula である．

定理 4.1. 次の等式が成立する

$$dd^* + d^*d = \nabla^*\nabla + 2\sum_{i,j}(a^i)^* a^j \partial_i\partial_j\Phi. \tag{4.14}$$

証明 (4.12), (4.13) の d, d^* の表現から

$$\begin{aligned}
dd^* + d^*d &= \sum_{i,j}\{(a^i)^*\partial_i\, a^j\partial_j^* + a^j\partial_j^*\,(a^i)^*\partial_i\} \\
&= \sum_{i,j}\{(a^i)^*a^j\,\partial_i\partial_j^* - (a^i)^*a^j\,\partial_j^*\partial_i + (a^i)^*a^j\,\partial_j^*\partial_i + a^j(a^i)^*\,\partial_j^*\partial_i\} \\
&= \sum_{i,j}\{(a^i)^*a^j[\partial_i, \partial_j^*] + [(a^i)^*, a^j]_+\partial_j^*\partial_j\} \\
&= \sum_{i,j}\{2(a^i)^*a^j\partial_i\partial_j\Phi + \delta_{ij}\partial_j^*\partial_i\} \\
&= \sum_{i,j}2\partial_i\partial_j\Phi(a^i)^*a^j + \sum_i \partial_i^*\partial_i \\
&= \nabla^*\nabla + \sum_{i,j}2\partial_i\partial_j\Phi(a^i)^*a^j.
\end{aligned}$$

これが示すべきことであった. □

Lebesgue 測度の場合

今までは測度 ν の下での話であった．同型 $I\colon L^2(dx) \longrightarrow L^2(\nu)$ をそのまま微分形式に拡張できる．測度 ν の下での外微分と，その共役に対応する作用素は

$$D = e^{-\Phi}de^{\Phi}, \tag{4.15}$$
$$\tilde{D} = e^{-\Phi}d^*e^{\Phi} \tag{4.16}$$

となる．この場合も Hodge-Kodaira 型の作用素 $\tilde{D}D + D\tilde{D}$ が定義され，次のような表現を持つ：

定理 4.2. 次の等式が成立する

$$\tilde{D}D + D\tilde{D} = \sum_i \tilde{X}_iX_i + 2\sum_{i,j}(a^i)^*a^j\partial_i\partial_j\Phi. \tag{4.17}$$

ここで a^j, $(a^i)^*$ の作用は測度が ν であるか，Lebesgue 測度であるかに関わらず同じであるから，同じ記法にしたがっている．

証明 これはほぼ明らかで

$$\begin{aligned}
\tilde{D}D + D\tilde{D} &= e^{-\Phi}(dd^* + d^*d)e^{\Phi} \\
&= e^{-\Phi}\{\nabla^*\nabla + 2\sum_{i,j}(a^i)^*a^j\partial_i\partial_j\Phi\}e^{\Phi}
\end{aligned}$$

$$= \sum_i \tilde{X}_i X_i + 2\sum_{i,j}(a^i)^* a^j \partial_i \partial_j \Phi.$$

これが示すべきことであった. □

このように対応が付けられるので，次のことはスカラーの場合と同様に証明できる.

定理 4.3. $\tilde{D}D + D\tilde{D}$ は $L^2(dx; \bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*)$ の対称作用素とみなして定義域を $\Gamma_0^\infty(A^p(\mathbb{R}^N))$ として本質的自己共役である.

さらに $d^*d + d^*d$ は $L^2(\nu; \bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*)$ の対称作用素とみなし，定義域を $\Gamma_0^\infty(A^p(\mathbb{R}^N))$ として本質的自己共役である.

証明 これは全く定理 2.2 の証明と同じである．念のため $\tilde{D}D + D\tilde{D}$ の場合に概略だけ述べる．まず

$$\tilde{D}D + D\tilde{D} = \sum_i \tilde{X}_i X_i + 2\sum_{i,j}(a^i)^* a^j \partial_i \partial_j \Phi$$

および $\sum_i \tilde{X}_i X_i = \tilde{\nabla}\nabla + V$ に留意する.

超関数の意味で $(\tilde{D}D + D\tilde{D} + 1)\omega = 0$ のとき $\omega = 0$ を示せばよいが，この条件から楕円型正則性定理により ω が C^1 級であることが示せる．従って任意の $\eta \in \Gamma_0^\infty(A^p(\mathbb{R}^N))$ に対し

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^N} (\omega, (\tilde{D}D + D\tilde{D} + 1)\eta) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \{(\nabla\omega, \nabla\eta) + (\omega, (V + 2\sum_{i,j}(a^i)^* a^j \partial_i \partial_j \Phi)\eta)\} dx.
\end{aligned}$$

この式は $\eta \in \Gamma_0^1(A^p(\mathbb{R}^N))$ にまで容易に拡張でき $\eta = \chi_n^2\omega$ ととることができる．χ_n は 定理 2.2 の証明注意与えた近似のための関数である．従って

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^N} \{(\nabla\omega, \nabla(\chi_n^2\omega) + (\omega, (V + 2\sum_{i,j}(a^i)^* a^j \partial_i \partial_j \Phi)\chi_n^2\omega)\} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \{2\chi_n(\nabla\omega, \nabla\chi_n \otimes \omega) + \chi_n^2(\nabla\omega, \nabla\omega) + (\omega, (V + 2\sum_{i,j}(a^i)^* a^j \partial_i \partial_j \Phi)\chi_n^2\omega)\} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \{(\nabla(\chi_n\omega), \nabla(\chi_n\omega)) - \nabla\chi_n \cdot \nabla\chi_n(\omega, \omega) + (\chi_n\omega, (V + 2\sum_{i,j}(a^i)^* a^j \partial_i \partial_j \Phi)\chi_n\omega)\} dx.
\end{aligned}$$

よって,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \{(D(\chi_n\omega), D(\chi_n\omega)) + (\tilde{D}(\chi_n\omega), \tilde{D}(\chi_n\omega)) + (\chi_n\omega, \chi_n\omega)\} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\chi_n \cdot \nabla\chi_n(\omega, \omega)\, dx.$$

$n \to \infty$ のとき右辺は 0 に収束するので，このことから $\omega = 0$ が得られる. □

Notes

- 生成・消滅演算子については Cycon et al. [3] 参照．この本には超対称性を使った指数定理の証明がある.

5.　1 次元の場合の Witten Laplacian

1 次元の場合にスペクトルの具体的な評価を行う．後でこのことが重要になる．

以下空間は $\mathbb{R}$ で，変数は t を使う．測度は Lebesgue 測度．Φ とかいてきたハミルトニアンを ϕ とかいて特に区別する．以下 $\partial_t = \frac{d}{dt}$ と略記することにして，作用素 $X_\phi = \partial_t + \phi'$ を導入すれば Witten Laplacian はスカラーの場合

$$-\square_0 = \tilde{X}_\phi X_\phi \tag{5.1}$$

で 1-form の場合

$$-\square_1 = \tilde{X}_\phi X_\phi + 2\phi''(t) \tag{5.2}$$

と表される．1-form は fiber が 1 次元だからスカラーと同一視する．$-\square_1$ の最小固有値を具体的に評価すれことがここでの目的である．$-\square_1$ の最小固有値を $\lambda_1(\phi)$ とかく．(5.2) の形から ϕ が凸で $\phi''(t) \geq c$ ならば，$-\square_1$ の最小固有値 $\lambda_1(\phi)$ は $\lambda_1(\phi) \geq 2c$ を満たす．ここで $\tilde{X}_\phi = -\partial_t + \partial_t\phi$ であるから

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_\phi X_\phi - X_\phi \tilde{X}_\phi &= (-\partial_t + \phi')(\partial_t + \phi') - (\partial_t + \phi')(-\partial_t + \phi') \\
&= -\partial_t^2 - \phi'' - \phi'\partial_t + \phi'(\partial_t + \phi') + \partial_t^2 - \phi'' - \phi'\partial_t - \phi'(-\partial_t + \phi') \\
&= -2\phi''.
\end{aligned}$$

即ち

$$-\square_1 = X_\phi \tilde{X}_\phi \tag{5.3}$$

が成立している．

定義 2.3 にあるように

$$-\square_0 = \tilde{X}_\phi X_\phi = -\frac{d^2}{dt^2} + \phi'(t)^2 - \phi''(t) \tag{5.4}$$

であるから

$$-\square_1 = X_\phi \tilde{X}_\phi = -\frac{d^2}{dt^2} + \phi'(t)^2 + \phi''(t) \tag{5.5}$$

と表現される．

実は $\square_0$ と $\square_1$ を組にして考えると，超対称性の構造を持っている．$L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ で考えて，

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{X}_\phi \\ X_\phi & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

とすれば，Q は対称作用素で，

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \tilde{X}_\phi X_\phi & 0 \\ 0 & X_\phi \tilde{X}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\square_0 & 0 \\ 0 & -\square_1 \end{pmatrix}$$

を満たしている．このことから，0 を除けば，$-\square_0$ と $-\square_1$ は同じスペクトル構造を持っていることが次で分かる．

命題 5.1. 一般に T を Hilbert 空間 H 上の閉作用素とするとき，T^*T と TT^* は固有値 0 を除いて，同じスペクトル構造を持っている．

証明 作用素 U を

$$U\colon \sqrt{T^*T}u \mapsto Tu$$

で定めると U は $\mathrm{Ran}(\sqrt{T^*T})$ から $\mathrm{Ran}(T)$ への等距離作用素となる．実際

$$(\sqrt{T^*T}u, \sqrt{T^*T}u) = (T^*Tu, u) = (Tu, Tu)$$

よりこのことは明らか．U は $\overline{\mathrm{Ran}(\sqrt{T^*T})}$ から $\overline{\mathrm{Ran}(T)}$ へ一意的に拡張できる．さらに

$$U^{-1}TT^*U\sqrt{T^*T}u = U^{-1}TT^*Tu = \sqrt{T^*T}T^*Tu = T^*T\sqrt{T^*T}u$$

であるから，$\mathrm{Ran}(\sqrt{T^*T})$ 上で $U^{-1}TT^*U = T^*T$ が成立している．これは T^*T の 0 以外での固有値の空間で T^*T と TT^* が unitarily equivalent であることを示している． $\square$

1 次元の場合はこの特殊な構造から，$-\Box_0$ の 0 以外の固有値と $-\Box_1$ の 0 以外の固有値とが等しくなることが分かる．

次の補題は有界関数による摂動で，最小固有値の正値性が保存されることを示している．

補題 5.2. χ を有界関数とするとき，$\chi_{\sup}, \chi_{\inf}$ でそれぞれ χ の上限，下限を表せば，

$$\lambda_1(\phi) \geq e^{-2(\chi_{\sup}-\chi_{\inf})}\lambda_1(\phi+\chi) \tag{5.7}$$

が成立する．

証明 まず

$$e^{-\chi}(-\partial_t + \phi' + \chi')e^{\chi} = -e^{-\chi}\partial_t e^{\chi} + \phi' + \chi' = -e^{-\chi}(e^{\chi}\chi' + e^{\chi}\partial_t) + \phi' + \chi' = -\partial_t + \phi' = \tilde{X}_\phi$$

が成り立っているので

$$\begin{aligned}
(-\Box_1 u, u) &= (\tilde{X}_\phi u, \tilde{X}_\phi u) \\
&= ((-\partial_t + \phi')u, (-\partial_t + \phi')u) \\
&= (e^{-\chi}(-\partial_t + \phi' + \chi')e^{\chi}u, e^{-\chi}(-\partial_t + \phi' + \chi')e^{\chi}u) \\
&\geq e^{-2\chi_{\sup}}((-\partial_t + \phi' + \chi')e^{\chi}u, (-\partial_t + \phi' + \chi')e^{\chi}u) \\
&\geq e^{-2\chi_{\sup}}\lambda_1(\phi+\chi)\|e^{\chi}u\|_2^2 \\
&\geq e^{-2\chi_{\sup}}\lambda_1(\phi+\chi)e^{2\chi_{\inf}}\|u\|_2^2 \\
&= e^{-2(\chi_{\sup}-\chi_{\inf})}\lambda_1(\phi+\chi)\|u\|_2^2.
\end{aligned}$$

これは (5.7) を意味している． $\square$

上の (5.7) は

$$\lambda_1(\phi+\chi) \geq e^{-2(\chi_{\sup}-\chi_{\inf})}\lambda_1(\phi)$$

と書き直すことも出来る．これで ϕ が凸関数と有界関数の和にかけているとき，$-\Box_1$ の最小固有値が正で，さらに $-\Box_0$ がスペクトルの跳びを持つことが分かる．より具体的に言えば，$\phi = V + W$, $V'' \geq c$ のとき

$$\lambda_1(\phi) \geq 2ce^{-2(W_{\sup}-W_{\inf})}$$

の評価が得られる．

ϕ が double well のとき，別の評価が可能であることを最後に示しておく．

命題 5.3. $\phi(t) = at^4 - bt^2$ のとき

$$\lambda_1(\phi) \geq 2\sqrt{3a} - 2b \tag{5.8}$$

が成り立つ．

証明 (5.5) より

$$\begin{aligned}(-\Box_1 u, u) &= ((-\frac{d^2}{dt^2} + \phi''(t) + \phi'(t)^2)u, u)\\ &\geq ((-\frac{d^2}{dt^2} + 12at^2 - 2b)u, u).\end{aligned}$$

ここで $-\frac{d^2}{dt^2} + 12at^2$ は調和振動子だから，最小固有値は $2\sqrt{3a}$ である．よって，

$$(-\Box_1 u, u) \geq ((2\sqrt{3a} - 2b)u, u).$$

これが求める結果である．□

Notes

- 参考にしたのは Helffer [7]．補題 5.2 の証明は同書の Lemma 8.3.4 そのもの．スカラーの場合はよく知られているから 命題 5.1 と組み合わせてそれに帰着してもよい．
- 準古典近似の話が O. Matte and J. S. Møller [12] にある．

6. Witten Laplacian のスペクトルの跳び

スピン系

スピン系は $X = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ 上 Gibbs 測度によって規定される．この測度は自己ポテンシャル $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を与えて，Hamiltonian を次で定義する：

$$\Phi(x) = \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}^d\\ i\sim j}} \mathscr{J}(x^i - x^j)^2 + \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} U(x^i). \tag{6.1}$$

ここで $x=(x^i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ で $i\sim j$ は $|i-j|^2=(i_1-j_1)^2+\cdots+(i_1-j_1)^2=1$ を意味する．$(x^i-x^j)^2$ の部分は粒子の相互作用を意味するわけであるが，ここでは最近接相互作用のみを扱う．この相互作用をもっと一般化することも可能で，finite range であれば一般化することは難しくないが，簡単のために最近接相互作用に限ることにする．(6.1) は無限和であるので，形式的な意味しか持たない．Gibbs 測度は

$$\nu=Z^{-1}e^{-2\Phi(x)}dx \tag{6.2}$$

と表現したりするが，$\Phi(x)$ は発散しており，dx は仮想的な Lebesgue 測度であるからまったく意味を成さない．

そこで有限領域 Λ と境界条件 η を与え，finite Gibbs 測度を定義し，その極限としてとらえることが多い．Λ が $\mathbb{Z}^d$ の有限集合であるとき，$\Lambda\Subset\mathbb{Z}^d$ と表す．$\Lambda\Subset\mathbb{Z}^d$ と η に対し，ハミルトニアンを

$$\Phi_{\Lambda,\eta}(x)=\sum_{\substack{i,j\in\Lambda\\ i\sim j}}\mathscr{J}(x^i-x^j)^2+\sum_{i\in Z^d}U(x^i)+2\sum_{\substack{i\in\Lambda,j\in\Lambda^c\\ i\sim j}}\mathscr{J}(x^i-\eta^j)^2 \tag{6.3}$$

で定め， $\mathbb{R}^\Lambda$ 上の測度を

$$\nu_{\Lambda,\eta}=Z^{-1}e^{-2\Phi_{\Lambda,\eta}(x)}dx_\Lambda \tag{6.4}$$

で定める．dx_Λ は $\mathbb{R}^\Lambda$ 上の Lebesgue 測度を表す．(6.2) の測度 ν は任意の $\Lambda\Subset\mathbb{Z}^d$ に対し，Λ^c で条件付けた測度が $\nu_{\Lambda,\eta}$ に等しいこととして定義する．これは Dobrushin-Lanford-Ruelle の方程式と呼ばれる．数学的に書けば

$$E^\nu[\,\cdot\,|\omega_{\Lambda^c}=\eta_{\Lambda^c}]=\nu_{\Lambda,\eta}(d\omega_\Lambda)\otimes\delta_{\eta_{\Lambda^c}}(d\omega_{\Lambda^c}) \tag{6.5}$$

が満たされることである．$\delta_{\eta_{\Lambda^c}}$ は一点 η_{Λ^c} にのみ測度 1 を持つ $\mathbb{R}^{\Lambda^c}$ 上の Dirac 測度である．この様な測度 ν は存在および一意性は，一般には自明なことではない．自己ポテンシャル U に何らかの制限を付けなければならない．ここでは有限系のみを考察し，そのことから無限系の情報を引き出す方向で議論を進める．前節で述べたように Hodge-Kodaira 作用素 dd^*+d^*d が定義されるが，1 次以上の微分形式に対し，0 を固有値に持たないことを示すのがこれからの目標である．

$p\geq 1$ を固定して p 次微分形式の場合を考察する．指数 $I,J,\ldots$ で異なる p 個の Λ の元 $i_1,i_2,\ldots,i_p$ を表すことにする．さらにこのとき $|I|=p$ と定める．$I=\{i_1,\ldots,i_p\}$ のとき $dx^I=dx^{i_1}\wedge\ldots dx^{i_p}$ で定め p-form θ を成分を用いて $\theta=\sum_I\theta_I dx^I$ と表す．Weitzenböck の公式から

$$\begin{aligned}(\tilde{D}D+D\tilde{D})\theta&=\sum_i\tilde{X}_iX_i\sum_I\theta_Idx^I+2\sum_{i,j}\partial_i\partial_j\Phi\,(a^i)^*a^j\sum_I\theta_Idx^I\\&=\sum_I\sum_i\tilde{X}_iX_i\theta_Idx^I+2\sum_I\theta_I\sum_i\partial_i^2\Phi\,(a^i)^*a^idx^I\\&\quad+2\sum_I\theta_I\sum_{i\neq j}\partial_i\partial_j\Phi\,(a^i)^*a^jdx^I\end{aligned}$$

$$= \sum_I \sum_i \tilde{X}_i X_i \theta_I dx^I + 2\sum_I \theta_I \sum_{i\in I} \partial_i^2 \Phi dx^I + 2\sum_I \theta_I \sum_{i\neq j} \partial_i \partial_j \Phi\,(a^i)^* a^j dx^I.$$

従って

$$\begin{aligned}
&((\tilde{D}D + D\tilde{D})\theta, \theta) \\
&= (\sum_I \sum_i \tilde{X}_i X_i \theta_I dx^I + 2\sum_I \theta_I \sum_{i\in I} \partial_i^2 \Phi dx^I + 2\sum_I \theta_I \sum_{i\neq j} \partial_i \partial_j \Phi\,(a^i)^* a^j dx^I, \sum_J \theta_J dx^J) \\
&= \sum_I (\sum_i \tilde{X}_i X_i \theta_I, \theta_I) + 2\sum_I (\theta_I \sum_{i\in I} \partial_i^2 \Phi, \theta_I) + 2\sum_{I,J} (\theta_I \sum_{i\neq j} \partial_i \partial_j \Phi\,(a^i)^* a^j dx^I, \sum_J \theta_J dx^J) \\
&= \sum_I (\sum_{i\in I} \tilde{X}_i X_i \theta_I, \theta_I) + \sum_I (\sum_{i\notin I} \tilde{X}_i X_i \theta_I, \theta_I) + 2\sum_I (\theta_I \sum_{i\in I} \partial_i^2 \Phi, \theta_I) \\
&\quad + 2\sum_{I,J} (\theta_I \sum_{i\neq j} \partial_i \partial_j \Phi (a^i)^* a^j dx^I, \sum_J \theta_J dx^J) \\
&\geq \sum_I (\sum_{i\in I} \tilde{X}_i X_i \theta_I, \theta_I) + 2\sum_I (\theta_I \sum_{i\in I} \partial_i^2 \Phi, \theta_I) + 2\sum_{I,J} (\theta_I \sum_{i\neq j} \partial_i \partial_j \Phi\,(a^i)^* a^j dx^I, \sum_J \theta_J dx^J) \\
&= \sum_I \sum_{i\in I} ((\tilde{X}_i X_i + 2\partial_i^2 \Phi)\theta_I, \theta_I) + 2\sum_{I,J} (\theta_I \sum_{i\neq j} \partial_i \partial_j \Phi\,(a^i)^* a^j dx^I, \sum_J \theta_J dx^J).
\end{aligned}$$

ここでそれぞれを評価していけばよい．

最終的な結果を定理の形で述べておこう．

定理 6.1. U は $U = V + W$ と分解され，$V'' \geq c > 0$, W は有界であるとする．$W_{\sup}$, $W_{\inf}$ をそれぞれ W の上限，下限とする．このとき $2(c + 8d\mathscr{J})e^{-2(W_{\sup} - W_{\inf})} > 16d\mathscr{J}$ ならば p 形式上の $\tilde{D}D + D\tilde{D}$ の最小固有値は $\{2(c + 8d\mathscr{J})e^{-2(W_{\sup} - W_{\inf})} - 16d\mathscr{J}\}p$ より大きい．したがって調和形式は $p \geq 1$ のとき存在しない．

証明　第 1 項は実は 1 次元の作用素になっているので，評価がを 1 次元の場合に帰着できる．これが巧妙なところであるが，ことらの評価は後で行う．第 2 項の評価を先に行う．その前に $\partial_j \partial_i \Phi$ を計算しておこう．$i \neq j$ のとき

$$\begin{aligned}
\partial_i \partial_j \Phi(x) &= \partial_i \partial_j \Big\{ \sum_{\substack{k,l\in\Lambda^d \\ k\sim l}} \mathscr{J}(x^k - x^l)^2 + \sum_{k\in\Lambda^d} U(x^k) + 2\sum_{\substack{k\in\Lambda, l\in\Lambda^c \\ k\sim l}} \mathscr{J}(x^k - \eta^l)^2 \Big\} \\
&= \begin{cases} -4\mathscr{J}, & i \sim j \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき}. \end{cases}
\end{aligned}$$

また，$i = j$ のとき，

$$\partial_i^2 \Phi(x) = U''(x^i) + 8\mathscr{J} d$$

となっている．

$$2\sum_{I,J} (\theta_I \sum_{i\neq j} \partial_i \partial_j \Phi (a^i)^* a^j dx^I, \sum_J \theta_J dx^J) = -8\mathscr{J} \sum_{I,J} (\theta_I \sum_{i\sim j} (a^i)^* a^j dx^I, \theta_J dx^J)$$

$$
\begin{aligned}
&= -8\mathscr{J}\sum_{I,J}(\sum_{i\sim j}(a^i)^* a^j dx^I, dx^J)(\theta_I, \theta_J) \\
&= -8\mathscr{J}\sum_{I,J} c(I,J)(\theta_I, \theta_J).
\end{aligned}
$$

ここで $c(I,J) = (\sum_{i\sim j}(a^i)^* a^j dx^I, dx^J)$ とおいたわけであるが $c(I,J)$ は I と J が一つだけ異なっていて，その異なる元が隣接しているときのみ 1 または -1 で，それ以外はすべて 0 である．また I を固定したとき $c(I,J) \neq 0$ となる J は高々 $2dp$ 個である．このことに注意すれば

$$
\begin{aligned}
-8\mathscr{J}\sum_{I,J} c(I,J)(\theta_I, \theta_J) &\geq -4\mathscr{J}\sum_{I,J} |c(I,J)| \{\|\theta_I\|_2^2 + \|\theta_J\|_2^2\} \\
&\geq -4\mathscr{J}\sum_{I} 2dp\|\theta_I\|_2^2 - 4\mathscr{J}\sum_{J} 2dp\|\theta_J\|_2^2 \\
&= -16dp\mathscr{J}\sum_{I}\|\theta_I\|_2^2.
\end{aligned}
$$

最終的に第 2 項は

$$
2\sum_{I,J}(\theta_I \sum_{i\neq j}\partial_i\partial_j\Phi(a^i)^* a^j dx^I, \sum_J \theta_J dx^J) \geq -16dp\mathscr{J}\sum_I |\theta_I|^2
$$

で評価される． $\mathscr{J}$ が十分小さければ第 1 項がこれよりも大きくなることを示していく．

第 1 項は $((\tilde{X}_i X_i + 2\partial_i^2\Phi)\theta_I, \theta_I)$ を評価すればよいが，変数 x^i だけに注目して，他の変数は固定して考える．$\{x^j\}_{j\in\Lambda}$ の内，変数 x^i 以外のものを y^i とする．即ち

$$
y^i = \{x^j\}_{j\in\Lambda\setminus\{i\}}.
$$

すると

$$
\Phi(x) = \Phi(x^i, y^i) = U(x^i) + 4d\mathscr{J}(x^i)^2 - x^i\left\{\sum_{\substack{j\in\Lambda\\ j\sim i}} 4x^j + \sum_{\substack{j\in\Lambda^c\\ j\sim i}} 4\eta^j\right\} + \hat{\Phi}_i(y^i).
$$

よって，1 次元でハミルトニアンとして

$$
\phi(t) = U(t) + 4d\mathscr{J}t^2 - \alpha t
$$

の場合に，作用素 $\tilde{X}_\phi X_\phi + 2\phi''(t)$ の最小固有値を評価すればよい．ここに，$X_\phi = \partial_t + \phi'$ である．$\partial_t = \frac{d}{dt}$ と略記した．しかし，1 次元の計算は既に前節で行っている．これで $((\tilde{X}_i X_i + 2\partial_i^2\Phi)\theta_I, \theta_I)$ を評価する準備が出来た．

$\tilde{X}_i X_i + 2\partial_i^2\Phi$ は 1 次元の作用素でその最小固有値の評価は $(c + 8d\mathscr{J})e^{-2(W_{\sup} - W_{\inf})}$ で与えられる．

$$
((\tilde{D}D + D\tilde{D})\theta, \theta) \geq \sum_I \sum_{i\in I}((\tilde{X}_i X_i + 2\partial_i^2\Phi)\theta_I, \theta_I)
$$

$$+2\sum_{I,J}(\theta_I\sum_{i\neq j}\partial_i\partial_j\Phi\,(a^i)^*a^j dx^I,\sum_J\theta_J dx^J)$$

であったが，それぞれが評価されているので

$$\begin{aligned}\sum_I\sum_{i\in I}((\tilde{X}_iX_i+2\partial_i^2\Phi)\theta_I,\theta_I)&+2\sum_{I,J}(\theta_I\sum_{i\neq j}\partial_i\partial_j\Phi\,(a^i)^*a^j dx^I,\sum_J\theta_J dx^J)\\ &\geq\sum_I\sum_{i\in I}2(c+8d\mathscr{J})e^{-2(W_{\sup}-W_{\inf})}\|\theta_I\|_2^2-16dp\mathscr{J}\sum_I\|\theta_I\|_2^2\\ &=\sum_I 2p(c+8d\mathscr{J})e^{-2(W_{\sup}-W_{\inf})}\|\theta_I\|_2^2-16dp\mathscr{J}\sum_I\|\theta_I\|_2^2\\ &=p\{2(c+8d\mathscr{J})e^{-2(W_{\sup}-W_{\inf})}-16d\mathscr{J}\}\|\theta\|_2^2.\end{aligned}$$

これが即ち求める結果である． □

U が double well のときも同様な評価が可能である．

定理 6.2. $U(t)=at^4-bt^2$ のとき，$\sqrt{3a}-b-4d\mathscr{J}>0$ ならば，p 形式上の $\tilde{D}D+D\tilde{D}$ の最小固有値は $2(\sqrt{3a}-b-4d\mathscr{J})p$ より大きい．したがって調和形式は $p\geq 1$ のとき存在しない．

証明 前の定理の証明とほぼ同様．今の場合は

$$\phi(t)=at^4-bt^2+4d\mathscr{J}t^2-\alpha t$$

のとき，$\tilde{X}_iX_i+2\phi''(t)$ の最小固有値の評価をすればよいが，それは 命題 5.3 で $2\sqrt{3a}-2b+8d\mathscr{J}$ で評価できる．よって

$$\begin{aligned}((\tilde{D}D+D\tilde{D})\theta,\theta)&\geq\sum_I\sum_{i\in I}((\tilde{X}_iX_i+2\partial_i^2\Phi)\theta_I,\theta_I)+2\sum_{I,J}(\theta_I\sum_{i\neq j}\partial_i\partial_j\Phi\,(a^i)^*a^j dx^I,\sum_J\theta_J dx^J)\\ &\geq\sum_I\sum_{i\in I}(2\sqrt{3a}-2b-8d\mathscr{J})\|\theta_I\|_2^2-16dp\mathscr{J}\sum_I\|\theta_I\|_2^2\\ &=2(\sqrt{3a}-b-4d\mathscr{J})p\|\theta\|_2^2.\end{aligned}$$

これが示すべきことであった． □

Notes

- 参考にしたのは Helffer [7]．1-form の場合がこの本に議論してある．ここではそれを p-form に拡張したわけである．

7. Hodge-Kodaira の分解定理

微分形式は exact, coexact, harmonic の 3 つの部分に分解できるというのが Hodge-Kodaira の分解定理である．スペクトルの跳びが示されていれば，このことは容易に従うので，最後にそれをまとめておく．

その前に必要なことを述べておく．

命題 7.1. $T\colon H_1 \to H_2$ を Hilbert 空間 H_1 から H_2 への稠密に定義された閉作用素とする．このとき T^*T は自己共役作用素で $\mathrm{Dom}(T^*T)$ は $\mathrm{Dom}(T)$ で稠密．

証明

$$\mathscr{E}(u,v) = (Tu, Tv), \quad u, v \in \mathrm{Dom}(T)$$

で bilinear form $\mathscr{E}$ を定めれば，これは閉．対応する Friedrichs 拡大を S とすれば，$u \in \mathrm{Dom}(S)$, $v \in \mathrm{Dom}(T)$ に対し

$$(Su, v) = (Tu, Tv).$$

これは $Tu \in \mathrm{Dom}(T^*)$ で $T^*Tu = Su$ を意味する．即ち $S \subset T^*T$. T^*T が対称であることは明らかで，S は自己共役だから $S = T^*T$ が従う．

残りは明らか． □

これを使えば次の定理は容易に得られる．

定理 7.2. 次の Hodge-Kodaira の分解定理が成り立つ：$p = 0$ のとき

$$L^2(\mu) = \{ \text{ constant functions } \} \oplus \mathrm{Ran}(d^*). \tag{7.1}$$

$p \geq 1$ のとき

$$L^2(\mu; \textstyle\bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*) = \mathrm{Ran}(d) \oplus \mathrm{Ran}(d^*) \tag{7.2}$$

証明 証明はどの場合も同じだから $p \geq 1$ の場合のみ示す．

$$T = (d, d^*)\colon L^2(\mu; \textstyle\bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*) \to L^2(\mu; \bigwedge^{p+1}(\mathbb{R}^N)^*) \oplus L^2(\mu; \bigwedge^{p-1}(\mathbb{R}^N)^*)$$

とすれば，$-\square_p = T^*T$ である．これは明らかなことではないが，$\Gamma_0^\infty(A^p(\mathbb{R}^N))$ 上では $\square_p = T^*T$ が成立し，$\square_p$ は $\Gamma_0^\infty(A^p(\mathbb{R}^N))$ で本質的自己共役だから所与の結果が成り立つのである．

これを書き直せば

$$-\square_p = dd^* + d^*d$$

が成立している．スペクトルの跳びの条件から $\square_p$ は有界な逆作用素を持つ．それを G で表す．すると $\omega \in L^2(\mu; \bigwedge^p(\mathbb{R}^N)^*)$ に対して

$$\omega = (dd^* + d^*d)G\omega = d(d^*G\omega) + d^*(dG\omega).$$

$d(d^*G\omega)$ と $d^*(dG\omega)$ の直交性は $d^2 = 0$ より明らかである． □

Notes

- 命題 7.1 の証明は Kato [11, Example VI.2.13] から取った．同書 Theorem V.3.24 にも別の証明があり von Neumann の定理と呼ばれている．

参考文献

[1] D. Bakry, Un critère de non explosion pour certaines diffusions sur une variété riemannienne complète, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, **303** (1986), no. 1, 23–26.

[2] R. Bass, *Probabilistic techniques in analysis*," Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch and B. Simon, "*Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*," Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] E. B. Davies, "*Heat kernels and spectral theory*," Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[5] A. Friedman, "*Stochastic differential equations and applications*," Vol. 1, Academic Press, New York-London, 1975.

[6] A. Friedman, "*Stochastic differential equations and applications*," Vol. 2, Academic Press, New York-London, 1976.

[7] B. Helffer, "*Semiclassical analysis, Witten Laplacians, and statistical mechanics*," Series on Partial Differential Equations and Applications, 1, World Scientific, River Edge, NJ, 2002.

[8] E. Hille "*Lectures on ordinary differential equations*," Addison-Wesley, Massachusetts-London-Don Mills, 1969.

[9] N. Ikeda and S. Watanabe, "*Stochastic differential equations and diffusion processes*," second edition, North Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo, 1989.

[10] 伊藤清三・小松彦三郎 解析学の基礎, 岩波書店, 東京, 1977.

[11] T. Kato, "*Perturbation theory for linear operators. Second edition,*" Second edition, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[12] O. Matte and J. S. Møller On the spectrum of semi-classical Witten-Laplacians and Schrödinger operators in large dimension, *J. Funct. Anal.*, **220** (2005), no. 2, 243–264.

[13] R. G. Pinsky, "*Positive harmonic functions and diffusion*," Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[14] E. M. Stein, "*Singular integrals and differentiability properties of functions*," Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970.

[15] E. M. Stein, "*Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*," Princeton Mathematical Series, 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[16] D. W. Stroock, "*Probability theory, an analytic view*," Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[17] N. Yoshida, The log-Sobolev inequality for weakly coupled lattice fields, *Probab. Theory Related Fields*, **115** (1999), 1–40.

[18] 吉田耕作・伊藤清三, 関数解析と微分方程式, 岩波書店, 東京, 1976.

[19] B. Zegarlinski, The strong decay to equilibrium for the stochastic dynamics of unbounded spin systems on a lattice *Comm. Math. Phys.*, **175** (1996), no. 2, 401–432.