確率論と数理ファイナンス

重川 一郎

平成21 年8 月6 日

目 次

第1章　オプションの価格付け

1.　2項モデル

この節では，2 項モデルを中心にオプションの価格付けについて述べる．

オプション

時刻を $t = 0, 1, \ldots, T$ とし，株価を S_t とする．正確には S_t は一単位あたりの値段である．また株の売買は一単位以下のものも許すものとする．例えば 0.5 株買う，ということを認める．

コールオプション: 満期時 T に行使価格 K で，決められた数の株を買う権利
プットオプション: 満期時 T に行使価格 K で，決められた数の株を売る権利

数式で書けば

コールオプション: $H = (S_T - K)_+$
プットオプション: $H = (K - S_T)_+$

これらの時刻 0 における価格 $\pi(H)$ を決めることが問題．未来のものを，現在の時点で価格付けしなければばならない．

オプションのように，株式そのもの（これを原資産という）ではなく，それから派生証券を，**派生証券** (derivative secureity) と呼ぶ．また株価の変動に応じて支払いが変動するので，**条件付き請求権** (contingent claim) とも呼ばれる．

単期間モデル: コールオプションの例

時刻は 0 と 1 のみ．株価の変動を $\{S_t\}, t = 0, 1$ で表す．$S_0 = 10$ として

$$S_1 = \begin{cases} 20, & \text{確率 } p \\ 7.5, & \text{確率 } 1 - p \end{cases}$$

とした場合に，コールオプション $H = (S_1 - K)_+$ の $K = 15$ の場合の価格を考えよう．

価格を平均と考えると

$$E[(S_1 - K)_+] = (20 - 15) \times p + 0 \times (1 - p) = 5p$$

である．従来はこれが価格と考えられてきた．$p = 0.5$ ならば，2.5 が価格である．

実際には価格は 1 とすべきことを以下に述べる．

無裁定条件

「元手 0 から出発して正の利得を得る」という取引を**裁定取引** (arbitrage) という．裁定機会と呼ばれることもある．この様な裁定取引が存在しない，というのが経済の基本的な原則である．これを

- 無裁定条件 (no arbitrage)

と呼ぶ．

ポートフォリオ

株 S_t のほかに銀行からの資金の貸し借りも含めた状況を考える．銀行との取引を一種の証券と考え B_t で表す．B_t は**安全証券**と呼ばれることがある．これに対して株の方は**危険証券**と呼ばれる．B_t もやはり単価であり，B_t を買うことは，借金することに相当する．B_t はお金そのものと考えた方が分かりやすいので以下ではそのような解釈で話を進めていく．また以下では $B_t = (1+\rho)^t$ とする．ρ は利率である．B_t の保有量を η_t とし，S_t の保有量を θ_t とするとき (η_t, θ_t) を**ポートフォリオ**と呼ぶ．これは配分の比率を表している．さらに，

$$V_t = \eta_t B_t + \theta_t S_t$$

を価値過程と呼ぶ．資金の運用による，資産の状態を表している．ポートフォリオに対しては

$$\eta_t B_t + \theta_t S_t = \eta_{t+1} B_t + \theta_{t+1} S_t$$

を仮定する．これが満たされるとき**自己充足的**または**自己資金調達** (self financing) であるいう．別のところからの資金の貸し借りはない，ということである．このようにポートフォリオを組んで，満期時点で V_T を $H = (S_T - K)_+$ に等しくなるようにすることを考える．この操作を**複製** (duplication) という．

$V_T = H$ となるようなポートフォリオ (η_t, θ_t) が存在するとき，このときの V_0 がこのオプションの価格となる．このことを以下見ていくことにする．

単期間のポートフォリオ

単期間モデルの場合に戻る．また簡単のため $B_t = 1$ として，利率が 0 の場合を考える．今は $T = 1$ なので，(η_1, θ_1) だけ考えればいいので (η, θ) と表す．また簡単のため利率は 0 とする．即ち $B_t = 1$. すると

$$V_0 = \eta + \theta S_0$$
$$V_1 = \eta + \theta S_1$$

$H = V_1$ となる (η, θ) を求めたい．S_1 は二つの場合があるので

$$S_1(\omega_+) = 20,$$

$$S_1(\omega_-) = 7.5,$$

とすると

$$H(\omega_+) = 5,$$
$$H(\omega_-) = 0$$

である．

$$H(\omega) = \eta + \theta S_1(\omega)$$

を解けばよい．即ち

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 7.5\theta \end{cases}$$

図式的に表すと

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
S_0 & S_1 & H & \\
 & 20 & 5 & 5 = \eta + 20\theta \\
10 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & 7.5 & 0 & 0 = \eta + 7.5\theta
\end{tikzcd}$$

これを解いて

$$\eta = -3, \quad \theta = 0.4$$

$V_0 = \eta + \theta S_0$ に代入して

$$V_0 = -3 + 0.4 \times 10 = 1$$

が求める価格である．

- オプションを売る側 (writer) で考えてみる．
  - $t = 0$ のとき
    - ∗ オプションを 1 で売る　1
    - ∗ 銀行から 3 を借りる　3
    - ∗ 株を 0.4 株買う　0.4×10　-4
  - $t = 1$ のとき

$S_1 = 20$ のとき	
∗ 買い手がオプションを行使して 15 で株を買いに来る	15
∗ 株を 0.6 株買う　0.6×20	-12
∗ 銀行へ 3 返済	-3
∗ 1 株を買い手に引き渡す	
$S_1 = 7.5$ のとき	
∗ 0.4 株売る　0.4×7.5	3
∗ 銀行へ 3 返済する	-3

価格が $\pi(H) > 1$ であれば，1 を元手に上のことを実行すれば，$\pi(H) - 1$ が手許に残る．売り手有利．$\longrightarrow \pi(H) > 1$ ではありえない．

- 買い手 (buyer) 場合を考えてみる
  - $t = 0$ のとき
    - -0.4 株購入 $= 0.4$ 株売る (空売り)　0.4×10　4
    - 3 を銀行へ預金　-3
    - 1 でオプションを購入　-1
  - $t = 1$ のとき

$S_1 = 20$ のとき		
∗ 銀行から 15 借りる		15
∗ 15 でオプションを行使して 1 株買う		-15
∗ $1 - 0.4 = 0.6$ 株売る	0.6×20	12
∗ 銀行へ 12 返済		-12
$S_1 = 7.5$ のとき		
∗ 銀行から 3 引き出す		3
∗ 0.4 株買う	0.4×7.5	-3

最初の価格が $\pi(H) < 1$ であれば，手許に $1-\pi(H)$ 残るので買い手に有利 $\longrightarrow \pi(H) < 1$ ではありえない．

最後に注意として

$$S_1 = \begin{cases} 20, & \text{確率 } p \\ 5, & \text{確率 } 1-p \end{cases}$$

の場合を考えてみよう．先のものとの違いは，変動の幅が大きいことである．このとき

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 5\theta \end{cases}$$

を解いて

$$\eta = -\frac{5}{3}, \quad \theta = \frac{1}{3}$$

$V_0 = \eta + \theta S_0$ に代入して

$$V_0 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} \times 10 = \frac{5}{3}.$$

前の場合より，価格が高くなっている．このように，価格の変動が大きいと価格は一般に高くなる．

単期間 3 項モデル

　$S_0 = 10$ として

$$S_1 = \begin{cases} 20, & \text{確率 } p_1 \\ 10, & \text{確率 } p_2 \\ 7.5, & \text{確率 } p_3 \end{cases}$$

となる場合を考えてみよう．このとき行使価格を $K = 15$ としてコールオプション $S_1 - K_+$ の複製を作ることを考える．2 項の場合と同様にすると，次の方程式を解かなければならない．

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 10\theta, \\ 0 = \eta + 7.5\theta. \end{cases}$$

明らかにこの場合は解が存在しない．このように，複製が必ずしも可能でないものが存在するとき，**非完備市場**という．このときにはリスク中立測度は無限に存在し，別の基準を導入しなければ一意的には決まらない．このような場合は困難が伴うので，ここで扱うのはどんな複製も可能な**完備市場**のみを扱う．

リスク中立測度

　単期間二値モデルを一般的な枠組みで考える．安全証券の方は $B_t = (1+\rho)^t$ であるとする．$\beta = (1+\rho)^{-1} \leq 1$ を割引率という．異なった時間の価格はこの割引率を勘案した形で考える必要がある．S_0, S_1 を株価とする．S_1 は

$$S_1(\omega_+), \quad S_1(\omega_-)$$

の二値とする．$P(\omega_+) = p,\ P(\omega_-) = 1 - p$ とする．p は価格付けに直接には関係しない．オプションを H として H の価格付けを考える．

　価値過程は

$$\begin{aligned} V_0 &= \eta + \theta S_0 \\ V_1 &= \beta^{-1}\eta + \theta S_1. \end{aligned}$$

$V_1 = H$ としたいので $H = \beta^{-1}\eta + \theta S_1$.

$$H(\omega_+) = \beta^{-1}\eta + \theta S_1(\omega_+) \tag{1}$$

$$H(\omega_-) = \beta^{-1}\eta + \theta S_1(\omega_-) \tag{2}$$

これを解いて

$$\theta = \frac{H(\omega_+) - H(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}$$

また $(1) \times S_1(\omega_-) - (2) \times S_1(\omega_+)$ としてこれを解いて

$$S_1(\omega_-)H(\omega_+) - S_1(\omega_+)H(\omega_-) = \beta^{-1}\eta(S_1(\omega_-) - S_1(\omega_+))$$
$$\eta = \frac{\beta(S_1(\omega_+)H(\omega_-) - S_1(\omega_-)H(\omega_+))}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}$$

と求まる．従って V_0 は

$$\begin{aligned}
V_0 &= \eta + \theta S_0 \\
&= \frac{\beta(S_1(\omega_+)H(\omega_-) - S_1(\omega_-)H(\omega_+))}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} + \frac{H(\omega_+) - H(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} S_0 \\
&= \frac{S_0 - \beta S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} H(\omega_+) + \frac{\beta S_1(\omega_+) - S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} H(\omega_+) \\
&= \beta\left\{ \frac{\beta^{-1}S_0 - S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} H(\omega_+) + \frac{S_1(\omega_+) - \beta^{-1}S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} H(\omega_+) \right\} \\
&= \beta(qH(\omega_+) + (1-q)H(\omega_-)).
\end{aligned}$$

ここで

$$q = \frac{\beta^{-1}S_0 - S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}$$

とおいた (これは H には関係していないことに注意しよう)．即ち，確率 Q を

$$Q(\{\omega_+\}) = q, \quad Q(\{\omega_-\}) = 1 - q$$

と定めれば

$$\pi(H) = V_0 = E^Q[\beta H].$$

これは，価格がある確率に関する期待値で表されている，ということを意味している．但し，これはもともとの確率とは異なっている．この確率測度を**リスク中立測度**と呼ぶ．

この測度の意味を考えよう．そのために期待値 $E^Q[\beta S_1]$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
E^Q[\beta S_1] &= \beta S_1(\omega_+)q + \beta S_1(\omega_-)(1-q) \\
&= \beta S_1(\omega_+)\frac{\beta^{-1}S_0 - S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} + \beta S_1(\omega_-)\frac{S_1(\omega_+) - \beta^{-1}S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \\
&= \frac{S_1(\omega_+)S_0 - \beta S_1(\omega_+)S_1(\omega_-) + \beta S_1(\omega_-)S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \\
&= \frac{(S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-))S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \\
&= S_0
\end{aligned}$$

となり，これは $S_0, \beta S_1$ がマルチンゲールになっていることを意味する．即ち，リスク中立測度は，(割り引いた) 株価過程がマルチンゲールになる様な測度なのである．そのために**同値マルチンゲール測度**とも呼ばれる．

多期間 2 項モデル=CRR モデル

株価 $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_T$ を次で定める：

$$S_t = \begin{cases} (1+b)S_{t-1} & \text{確率 } p \\ (1+a)S_{t-1} & \text{確率 } 1-p \end{cases}$$

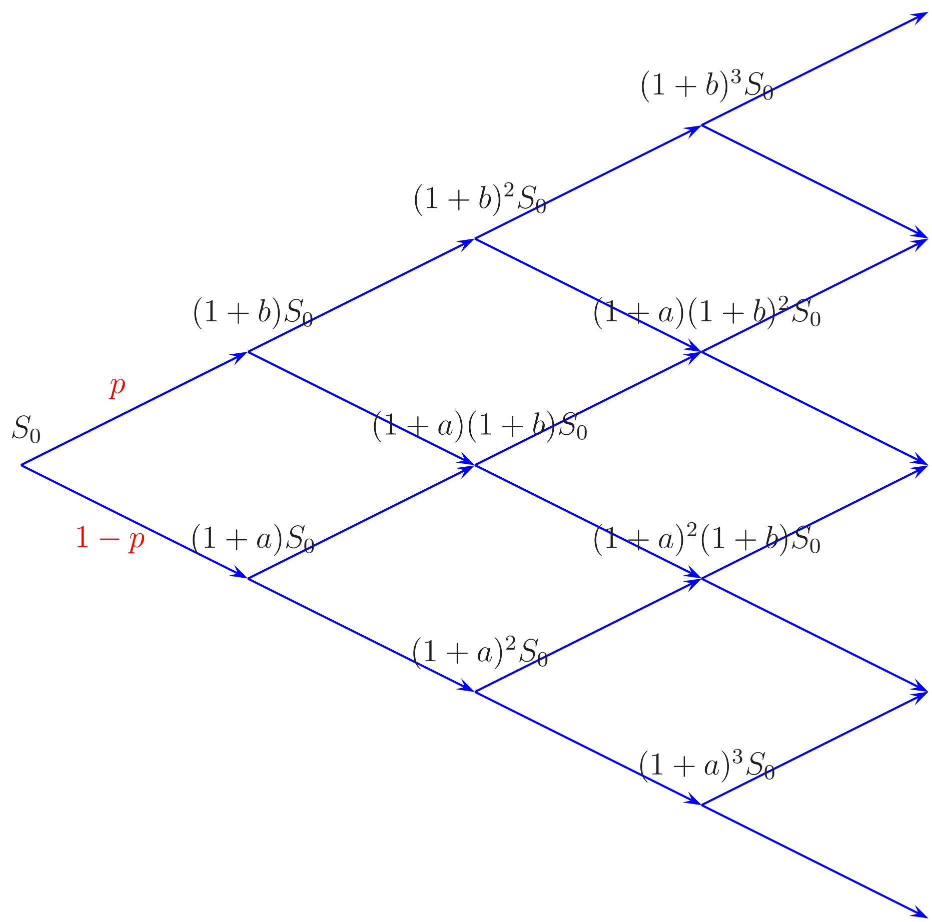

図 1.1: CRR モデル

単期間のときは

$$\beta = (1+\rho)^{-1}, \quad q = \frac{\rho - a}{b - a}$$

とおくと，単期間のときの価格は

$$V = E^Q[\beta H] = \beta(qH_b + (1-q)H_a)$$

であった．

これを 2 期間の時に次のように考える．

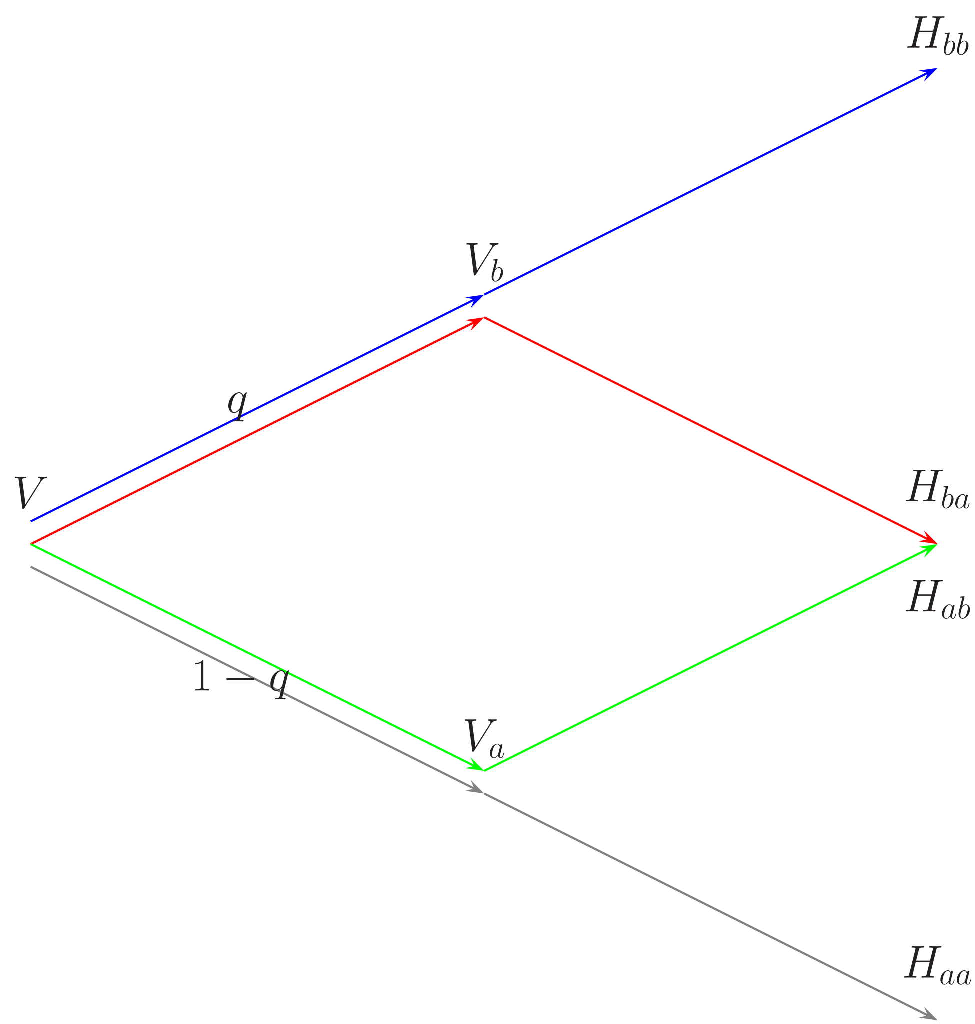

図 1.2: 2 期間 CRR モデル

オプション H の時刻 $T-2$ における価格を V_{T-2} を帰納的に求めることが出来る．まず時刻 $T-1$ のとき，図の V_a, V_b は

$$V_b = \beta(qH_{bb} + (1-q)H_{ba}) \tag{1.1}$$

$$V_a = \beta(qH_{ab} + (1-q)H_{aa}). \tag{1.2}$$

さらに V_b, V_a をオプションと見て，時刻 $T-2$ における価格は

$$V = \beta(qV_b + (1-q)V_a) \tag{1.3}$$

(1.3) へ (1.1), (1.2) を代入して

$$V = \beta^2(q^2 H_{bb} + q(1-q)H_{ba} + (1-q)qH_{ab} + (1-q)^2 H_{aa}) \tag{1.4}$$

が得られる．$S_{T-2} = S$ として，コールオプション $H = (S_T - K)_+$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} V = \beta^2\{ &q^2((1+b)^2 S - K)_+ + 2q(1-q)((1+a)(1+b)S - K)_+ \\ &+ (1-q)^2((1+a)^2 S - K)_+\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

が得られることになる．

<u>CRR 公式</u>

以上の手続きを繰り返すと，価格として次のものが得られる．

$$\begin{aligned} V_0 &= \beta^T \sum_{t=0}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t}((1+b)^t(1+a)^{T-t}S_0 - K)_+ \\ &= S_0\beta^T \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t(1-q)^{T-t}(1+b)^t(1+a)^{T-t}S_0 - K(1+\rho)^{-T}\sum_{t=A}^{T}\binom{T}{t} q^t(1-q)^{T-t}. \end{aligned}$$

ここで

$$A = \min\{k;\ S_0(1+b)^k(1+a)^{T-k} > K\}.$$

更に整理をしよう．

$$q = \frac{\rho - a}{b - a}, \quad q' = q\frac{1+b}{1+\rho}$$

とおく．

$$\begin{aligned} q\frac{1+b}{1+\rho} + (1-q)\frac{1+a}{1+\rho} &= q\frac{b-a}{1+\rho} + \frac{1+a}{1+\rho} \\ &= \frac{\rho-a}{b-a}\frac{b-a}{1+\rho} + \frac{1+a}{1+\rho} \\ &= \frac{\rho-a}{b-a}\frac{\rho-a}{1+\rho} + \frac{1+a}{1+\rho} = 1 \end{aligned}$$

であるから

$$q' \in (0,1), \quad 1 - q' = (1-q)\frac{1+a}{1+\rho}$$

である．従って

$$V_0 = S_0\Psi(A;T,q') - K(1+\rho)^{-T}\Psi(A;T,q) \tag{1.6}$$

ここで

$$\Psi(m;n,p) = \sum_{j=m}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}.$$

(1.6) は Cox-Ross-Rubinstein (CRR) の公式と呼ばれている

ヘッジ

$$\begin{aligned} V_t &= \beta^{T-t}\sum_{s=0}^{T-t}\binom{T-t}{s}q^s(1-q)^{T-t-s}((1+b)^s(1+a)^{T-t-s}S_t - K)_+ & (1.7)\\ &= S_t\Psi(A_t;T-t,q') - K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_t;T-t,q) & (1.8) \end{aligned}$$

が成り立つ．但し

$$A_t = \min\{k; S_t(1+b)^k(1+a)^{T-t-k} > K\}.$$

ここで $[t-1,t]$ でのポートフォリオを (η_t, θ_t) とすると

$$V_t = \eta_t(1+\rho)^t + \theta_t S_t$$

V_t は S_t から決まるが，S_t は S_{t-1} と，$[t-1,t]$ における変動で決まる．今の場合の 2 項モデルでは $S_t = (1+b)S_{t-1}$ か $S_t = (1+a)S_{t-1}$ のどちらになるかで決まる．対応する価格を V_t^b, V_t^a とすれば

$$\begin{aligned} V_t^b &= \eta_t(1+\rho)^t + \theta_t(1+b)S_{t-1},\\ V_t^a &= \eta_t(1+\rho)^t + \theta_t(1+a)S_{t-1} \end{aligned}$$

であるから

$$\theta_t = \frac{V_t^b - V_t^a}{(b-a)S_{t-1}}, \quad \eta_t = \frac{(1+b)V_t^a - (1+a)V_t^b}{(1+\rho)^t(b-a)} \tag{1.9}$$

となる．

多期間のリスク中立測度

多期間の場合のリスク中立測度 Q に付いて説明を加え，コールオプションの価値過程 V_t が

$$V_t = (1+\rho)^{-(T-t)}E^Q[((S_T-K)_+|S_t] \tag{1.10}$$

で与えられることを示す．ここで $E^Q[\ |S_t]$ は**条件付き期待値**である．

まずこの条件付き期待値から説明する．一般に確率を P とする．事象 A, B の二つを考え，B が与えられたときの，A の条件付確率 $P(A|B)$ を

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

で定義する．さらに確率変数 X に対して，条件付期待値 $E^P[X|B]$ が次のように定義できる．$X = \sum_k a_k 1_{A_k}$ と表すことが出来るので，

$$E^P[X|B] = \sum_k a_k P(A_k|B)$$

と定義する．

さて $E^Q[\ |S_t]$ の場合は，条件をつける方も確率変数になっている．この場合は S_t の値によって場合分けをすればよい．

$$E^Q[X|S_t] = \sum_k 1_{S_t=a_k} E^Q[X|S_t = a_k].$$

これは，関数 $F(x)$ を

$$F(x) = E^Q[X|S_t = x]$$

で定義して，この x のところに S_t を代入すればよい．即ち

$$E^Q[X|S_t] = F(S_t)$$

が成り立っている．

さて，元に戻ってリスク中立測度 Q の説明を続ける．

$$R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

と定める．Q は，この確率変数列 $R_1, R_2, \ldots, R_T$ が独立同分布になるようなもので，分布は

$$Q(R_t = 1 + b) = q, \quad Q(R_t = 1 + a) = 1 - q$$

で与えられる．

$$q = \frac{\rho - a}{b - a}$$

であったから

$$\begin{aligned} E^Q[R_t] &= (1+b)\frac{\rho - a}{b - a} + (1+a)\frac{b - \rho}{b - a} \\ &= \frac{\rho - a + b\rho - ba + b - \rho + ab - a\rho}{b - a} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(b-a)(1+\rho)}{b-a} \\
&= 1+\rho.
\end{aligned}
$$

これから

$$
\begin{aligned}
E^Q[\beta S_{t+1}|S_t = x] &= \beta E^Q[S_t R_{t+1}|S_t = x] \\
&= \beta x E^Q[R_{t+1}|S_t = x] \\
&= \beta x E^Q[R_{t+1}] \quad (\because \text{ 独立性}) \\
&= \beta x(1+\rho) = x.
\end{aligned}
$$

これは $\{\beta^t S_t\}$ がマルチンゲールになっていることを意味する:

$$
E^Q[\beta^{t+1} S_{t+1}|S_t] = \beta^t S_t.
$$

この測度 Q を用いると

$$
\begin{aligned}
&(1+\rho)^{-(T-t)} E^Q[(S_T - K)_+|S_t] \\
&\quad = (1+\rho)^{-(T-t)} E^Q[(S_t R_{t+1} \dots R_T - K)_+|S_t] \\
&\quad = (1+\rho)^{-(T-t)} \sum_{s=0}^{T-t} \binom{T-t}{s} q^s (1-q)^{T-t-s} (S_t (1+b)^s (1+a)^{T-t-s} - K)_+] = V_t.
\end{aligned}
$$

これで価値過程がリスク中立測度による条件付き期待値として表されることが確認できた.

2.　Black-Scholes モデル

多期間2項モデルの時間分割を細かくして行った極限として，連続時間の最も基本的なモデルである Black-Scholes モデルが得られる．そのことを以下に見ていく．

時間区間 $[0,T]$ を N 等分する．$h_N = \frac{T}{N}$ とおいて，時刻列 $\{0, h_N, 2h_N, \dots, Nh_N\}$ を取る．ここで N ステップの2項モデルを考える．パラメータとして，a, b, ρ があったが，これらは N に応じて変えていく．従って a_N のように依存性を明確にすべきであるが，かえって煩雑になるので単に a とかく．h_N も単に h とかく．定数として $r \geq 0, \sigma > 0$ を与え，これをパラメーターとして a, b, ρ が次の関係を満たすように N に依存して取る.

$$
\begin{aligned}
\rho &= rh \\
\log\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right) &= \sigma\sqrt{h} = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}, \\
\log\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right) &= -\sigma\sqrt{h} = -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}.
\end{aligned}
$$

ここで ρ に関して

$$
\lim_{N\to\infty}(1+\rho)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{rT}{N}\right)^N = e^{rT}
$$

が成り立つことに注意しておく．さらに u, d を次のように定める (やはり N に依存する)

$$u = 1 + b = \left(1 + \frac{rT}{N}\right) e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}$$
$$d = 1 + a = \left(1 + \frac{rT}{N}\right) e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}.$$

時刻 kh における株価を S_k と表し，

$$R_k = \frac{S_k}{S_{k-1}}$$

と定める (これらも N に依存するが，とくに明示しない)．リスク中立確率は次を満たした．

$$Q(R_k = 1 + b) = q = \frac{\rho - a}{b - a}, \quad Q(R_k = 1 + a) = 1 - q = \frac{b - \rho}{b - a}.$$

ここで新たな独立同分布の確率変数列 $\{Y_k\}_{k=1,\ldots,N}$ を次で定める．

$$Y_k = \log\left(\frac{R_k}{1 + \rho}\right).$$

これから

$$Z_N = \sum_{k=1}^{N} Y_k = \sum_{k=1}^{N} \log R_k - N \log(1 + \rho)$$

とおくと，時刻 $T = Nh$ における株価は

$$S_N = S_0 \prod k = 1^N R_k = S_0(1 + \rho)^N \exp\left\{\sum_{k=1}^{N} Y_k\right\} = S_0(1 + \rho)^N e^{Z_N}$$

と表される．よってコールオプション $C = (S_T - K)_+$ の価格は

$$\begin{aligned} V_0(C) &= \beta^N E^Q[(S_T - K)_+] \\ &= \beta^N E^Q[(S_0(1 + \rho)^N e^{Z_N} - K)_+] \\ &= E^Q[(S_0 e^{Z_N} - (1 + \rho)^{-N} K)_+] \end{aligned} \tag{2.1}$$

で得られる．ここで $N \to \infty$ の極限を取ることを次に考える．

Y_k の分布

Y_k の平均を μ, 分散を v として計算する．まず平均は

$$\begin{aligned} E^Q[Y_k] &= E^Q\left[\log\left(\frac{R_k}{1 + \rho}\right)\right] \\ &= \log\left(\frac{1 + b}{1 + \rho}\right) q + \log\left(\frac{1 + a}{1 + \rho}\right)(1 - q) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma\sqrt{h}q - \sigma\sqrt{h}(1-q) \\
&= (2q-1)\sigma\sqrt{h}.
\end{aligned}
$$

また 2 次のモーメントは

$$
\begin{aligned}
E^Q[Y_k^2] &= E^Q\left[\log\left(\frac{R_k}{1+\rho}\right)\right] \\
&= \left\{\log\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right)\right\}^2 q + \left\{\log\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right)\right\}^2 (1-q) \\
&= \sigma^2 hq + \sigma^2 h(1-q) = \sigma^2 h
\end{aligned}
$$

なので，分散は

$$
v = E^Q[Y_k^2] - E^Q[Y_k]^2 = \sigma^2 h - (2q-1)^2\sigma^2 h.
$$

それぞれの極限を求めるために q を調べよう．

$$
\begin{aligned}
1-q &= \frac{b-\rho}{b-a} \\
&= \frac{1+b-(1+\rho)}{1+b-(1+a)} \\
&= \frac{(1+\rho)e^{\sigma\sqrt{h}} - (1+\rho)}{(1+\rho)e^{\sigma\sqrt{h}} - (1+\rho)e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{e^{\sigma\sqrt{h}} - 1}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
2q-1 &= 1-2(1-q) \\
&= 1 - 2\frac{e^{\sigma\sqrt{h}} - 1}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}} - 2e^{\sigma\sqrt{h}} + 2}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{2 - e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{1-\cosh\sigma\sqrt{h}}{\sinh\sigma\sqrt{h}} \sim -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h}.
\end{aligned}
$$

以上により

$$
N\mu = N(2q-1)\sigma\sqrt{h} \sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h}\right)\sigma\sqrt{h} = -\frac{1}{2}\sigma^2 Nh = -\frac{1}{2}\sigma^2 T.
$$

また

$$
Nv = N\sigma^2 h - N(2q-1)^2\sigma^2 h = \sigma^2 T - (2q-1)^2\sigma^2 T \sim \sigma^2 T.
$$

ここで次の中心極限定理を使う．

定理 2.1. 各 $N \in \mathbb{N}$ に対して独立同分布の確率変数 $\{Y_k^N\}_{k=1,\ldots,N}$ が与えられている．さらに平均を μ_N, 分散を σ_N^2 とするとき，$N\mu_N \to \mu$, $N\sigma_N^2 \to \Sigma^2$ が成立している．このとき $Z_N = \sum_{k=1}^N Y_k^N$ は平均 μ, 分散 Σ^2 の正規分布に収束する．

これを我々の場合使うと Z_N が平均 $-\frac{1}{2}\sigma^2 T$, 分散 $\sigma^2 T$ の正規分布に収束する．この分布を持つ確率変数を Z とすると，プットオプションの極限での価格は (2.1) で $N \to \infty$ として

$$V_0(C) = E^Q[(S_0e^Z - e^{-rT}K)_+] \tag{2.2}$$

で与えられる．

<u>**Black-Scholes の公式**</u>

$$X = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(Z + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$$

とおくと，X は $N(0,1)$ に従う．書き換えると

$$Z = \sigma\sqrt{T}X - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

であるから，$V_0(C)$ の値は

$$V_0(C) = \int_{-\infty}^{\infty} (S_0e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

x の積分範囲は

$$\log\left(\frac{K}{S_0}\right) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x$$

をといて

$$x = \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

この右辺を γ とおくと，

$$\begin{aligned}
V_0(C) &= \int_{\gamma}^{\infty} (S_0e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \\
&= S_0\int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma\sqrt{T}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx - e^{-rT}K\int_{\gamma}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \\
&= S_0\int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx - e^{-rT}K(1-\Phi(\gamma)) \\
&= S_0\int_{\gamma-\sigma\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx - e^{-rT}K(1-\Phi(\gamma))
\end{aligned}$$

$$= S_0(1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})) - e^{-rT}K(1 - \Phi(\gamma)).$$

但し，Φ は $N(0,1)$ の分布関数である：

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy.$$

ここで $d^- = -\gamma$, $d^+ = d^- + \sigma\sqrt{T}$ とおくと

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(\gamma) &= \Phi(-\gamma) = \Phi(d^-) \\ 1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T}) &= \Phi(d^+) \end{aligned}$$

である．即ち

$$d^{\pm} = \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

である．これを使うと

$$V_0(C) = S_0\Phi(d^+) - e^{-rT}K\Phi(d^-).$$

これが Black-Scholes の公式と呼ばれるコールオプションの価格を与える式である．

同様に時刻 t における価格は

$$V_t(C) = S_t\Phi(d_t^+) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_t^-). \tag{2.3}$$

ただし

$$d_t^{\pm} = \frac{\log(\frac{K}{S_t}) - (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である．式 (2.3) は複製のためのポートフォリオを与えていることを注意しておく．