Lebesgue 積分

重川 一郎

平成 23 年 7 月 25 日

目 次

第1章　測度

1.　論理と集合論

次のような論理記号を使う.

$$
\begin{array}{lll}
\Rightarrow & \cdots & \text{ならば} \\
\Leftrightarrow & \cdots & \text{同値} \\
\wedge & \cdots & \text{かつ} \\
\vee & \cdots & \text{または} \\
\neg & \cdots & \text{否定} \\
\forall & \cdots & \text{すべて} \\
\exists & \cdots & \text{存在する}
\end{array}
$$

$\wedge, \vee$ は min, max の意味で使うことが多いので，かつ，または，の言葉遣いをする.

X を集合として，2^X で X の部分集合全体を表す．従って X の部分集合は，2^X の元である．X の部分集合を $A, B, C, \ldots$ で表す．次のような記号を用いる

$$
\begin{array}{rll}
A \cup B = \{x \in X;\, x \in A \text{ または } x \in B\} & \text{和集合} \\
A \cap B = \{x \in X;\, x \in A \text{ かつ } x \in B\} & \text{積集合・共通部分} \\
A^c = \{x \in X;\, x \notin A\} & \text{補集合} \\
A \setminus B = \{x \in X;\, x \in A \text{ かつ } x \notin B\} & \text{差集合}
\end{array}
$$

さらに集合の族 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ に対し

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \{x \in X;\ \text{ある } \lambda \text{ が存在して } x \in A_\lambda\}, \\
\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \{x \in X;\ \text{すべての } \lambda \text{ に対して } x \in A_\lambda\}.
\end{aligned}
$$

このとき次の **de Morgan の法則**が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)^c &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \\
\Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)^c &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c
\end{aligned}
$$

定義 1.1. 集合列 $\{A_n\}$ に対し

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k \tag{1.1}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k \tag{1.2}$$

をそれぞれ**上極限集合**，**下極限集合**という．一般に

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \varlimsup_{n\to\infty} A_n$$

であるが，特に $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n = A$ のとき A を $\{A_n\}$ の**極限**と呼び

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

と表す．

すべての n に対して $A_n \subseteq A_{n+1}$ のとき単調増大，$A_n \supseteq A_{n+1}$ のとき単調減少という．$\{A_n\}$ が単調増大のとき $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を

$$A_n \uparrow A$$

と表す．同様に $\{A_n\}$ が単調減少のとき $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を

$$A_n \downarrow A$$

と表す．いずれの場合も $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ である．

集合列 $\{A_n\}$ に対して次が成立する:

(1) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X;$ 有限個の n を除いて $x \in A_n\}$

(2) $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X;$ 無限個の n に対して $x \in A_n\}$

(3) $(\varliminf_{n\to\infty} A_n)^c = \varlimsup_{n\to\infty} A_n^c$

(4) $1_{\varlimsup_{n\to\infty} A_n} = \varlimsup_{n\to\infty} 1_{A_n}$

(5) $1_{\varliminf_{n\to\infty} A_n} = \varliminf_{n\to\infty} 1_{A_n}$

X, Y を集合として $f\colon X \mapsto Y$ を写像とする．このとき $A \subseteq X$ に対し

$$f(A) = \{f(x);\, x \in A\}$$

を f による A の**像**という．また $B \subseteq Y$ に対して

$$f^{-1}(B) = \{x \in X;\, f(x) \in B\}$$

を f による**逆像**という．このとき $\{A_\lambda\}$ を X の部分集合の族，$\{B_\lambda\}$ を Y の部分集合の族とするとき，次が成立する

(1) $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$

(2) $f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$

(3) $B_1,\, B_2 \subseteq Y$ ならば $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(4) $f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$

(5) $f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$

2. 測度の定義

X: a set

$\mathscr{C}$: a collection of subsets of X $\quad (\mathscr{C} \subseteq 2^X)$

$\mu\colon \mathscr{C} \to [0,\infty]$

$\mu(\emptyset) = 0$

μ が有限加法的 (finitely additive) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A_j \in \mathscr{C}$, $j = 1,\dots,n$, disjoint, $A = \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathscr{C}$ のとき

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

μ が s-加法的 (σ-additive) あるいは完全加法的 (completely additive) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A_j \in \mathscr{C}$, $j \in \mathbb{N}$, disjoint, $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathscr{C}$ のとき

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$$

上の加法性に関しては $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathscr{C}$, $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathscr{C}$ は仮定であって，たまたまこういうことが成り立つものに対して加法的だということである．ただ，この仮定は式が意味を持つためには当然仮定しなければならないことである．

定義 2.1. $\mathscr{A} \subseteq 2^X$.

$\mathscr{A}$ is called a ring $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\emptyset \in \mathscr{A}$

(ii) $A,\, B \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathscr{A}$

(iii) $A,\, B \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathscr{A}$

$\mathscr{A}$ is called an algebra $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathscr{A}$ is a ring and $X \in \mathscr{A}$.

$\mathscr{A}$ is called a σ-ring $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathscr{A}$ is a ring and

(iv) $A_1,\, A_2, \dots \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathscr{A}$.

$\mathscr{A}$ is called a σ-algebra $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathscr{A}$ is a σ-ring and $X \in \mathscr{A}$.

注意 2.1. $\mathscr{A}$ を ring とする．このとき $A, B \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathscr{A}$ $(\because\; A \cap B = A \setminus (A \setminus B))$. また $\mathscr{A}$ が σ-ring のとき $A_j \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{A}$.

このことは示しておこう．$B_j = A_1 \cap A_j$ とおくと $\bigcap_j A_j = \bigcap_j B_j$ である．あとは

$$\bigcap_j B_j = A_1 \setminus (A_1 \setminus \bigcap_j B_j) = A_1 \setminus (\bigcup_j (A_1 \setminus B_j))$$

に注意すればよい．

$\mathscr{C} \subseteq 2^X$ のとき $\sigma(\mathscr{C})$ で $\mathscr{C}$ を含む最小の σ-algebra を表わす．$\sigma(\mathscr{C})$ を $\mathscr{C}$ で生成された σ-algebra という．

$\mathscr{C}$ を含む最小の σ-ring も存在するが，こちらの方は特に記号を定めないことにする（そのつど断る）．

μ の加法性に対して簡単に注意をしておこう．

命題 2.2. μ を ring $\mathscr{A}$ 上で定義された非負値関数とする．このとき μ が有限加法的であれば，$A, B \in \mathscr{A}$, $A \subseteq B$ のとき $\mu(A) \leq \mu(B)$. $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ のとき

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \tag{2.1}$$

が成立する（劣加法性という）．

また μ が σ-加法的であれば，$A, A_j \in \mathscr{A}$, $j \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ のとき

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \tag{2.2}$$

が成立する（σ-劣加法性という）．さらに $A \in \mathscr{A}$, $A_j \in \mathscr{A}$, $A_j \uparrow A$ のとき $\mu(A_j) \uparrow \mu(A)$ が成り立つ．

証明　μ が有限加法的とする．$A, B \in \mathscr{A}$, $A \subseteq B$ ならば加法性から

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

非負性から $\mu(B) \geq \mu(A)$ である．

劣加法性については，σ-加法的な場合だけ示そう．

$$B_j = (A \cap A_j) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k$$

とおくと $\mathscr{A}$ が ring であるから $B_j \in \mathscr{A}$ で $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ である．B_j が disjoint であることに注意すれば

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

次に $A_j \uparrow A$ のとき，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+1} \setminus A_n$ に注意して σ-加法性から

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{k+1} \setminus A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1}).$$

□

定理 2.3. $\mathscr{A}$: a ring, $\mu\colon \mathscr{C} \to [0,\infty)$: finitely additive (常に有限値をとっていることは重要) このとき μ is σ-additive $\Leftrightarrow$ $A_j \in \mathscr{A}$, $A_j \downarrow \emptyset$ のとき $\mu(A_j) \downarrow 0$.

証明　μ を σ-additive で $A_j \downarrow \emptyset$, $A_j \in \mathscr{A}$ とする．このとき，$A_j \setminus A_{j+1}$ は disjoint で合併集合は A_1 である．

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j+1}) = \mu(A_1) < \infty.$$

さらに

$$\mu(A_n) = \sum_{j=m}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j+1})$$

であるから，収束条件から $\mu(A_n) \to 0$ である．

逆に B_n を disjoint とする．$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $A_n = B \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ とおくと $A_n \downarrow \emptyset$ である．よって仮定から $\mu(A_n) \to 0$ でる．あとは

$$\mu(B) - \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \mu(B) - \mu(\bigcup_{j=1}^{n} B_j) = \mu(A_n) \to 0.$$

これは σ-additive を意味する．　□

例 2.1. $X = (0,\infty)$. $\mathscr{A} = \{(a,b],\ (a,\infty),\ 0 \le a \le b < \infty$ およびこれらの dijoint union$\}$ とし, μ を次のように定める:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{無限区間を含まないとき} \\ 1, & \text{無限区間を含むとき} \end{cases}$$

このとき μ は有限加法的であるが σ-加法的ではない.

$$\mu((0,\infty)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu((n-1,n])$$

は成り立たない．また

$$\mu((n,\infty)) \to 0$$

も成立していない.

定義 2.4. $\mathscr{S}$: a σ-algebra, $\mu\colon \mathscr{S} \to [0,\infty]$: σ-additive. このとき μ を測度という．また $(X,\mathscr{S},\mu)$ を測度空間という．

測度の定義自体は簡単であるが，実際にこのようなものが存在するかは自明なことではない．以下実際にこのようなものが存在することを構成的に示していく．議論は一般的な枠組みで進めることが出来るが，一番基本的な1次元の場合を例として取り上げながら進める．

$X = \mathbb{R}$, $\mathscr{C} = \{(a,b];\ -\infty < a \le b < \infty\}$

$G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:　non-decresing, right-continuous, i.e.,
$x \le y \ \Rightarrow G(x) \le G(y)$, $G(x) = G(x+) := \lim_{y\downarrow x} G(y)$.

このとき $\mu = \mu_G$ を $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu((a,b]) = G(b) - G(a)$ で定める．

定理 2.5. μ は $\mathscr{C}$ 上で σ-加法的．

証明　claim 1. μ は有限加法的．
∵ $(a,b] = \bigcup_{j=1}^n (a_j,b_j]$ とする．$b_j = a_{j+1}$ としてよい．

$$\mu((a,b]) = G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^n (G(b_j) - G(a_j)) = \sum_{j=1}^n \mu((a_j,b_j]). \quad //$$

claim 2. μ は有限劣加法的．
∵

$$(a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^n (c_j,d_j] \ \Rightarrow \mu((a,b]) \le \sum_{j=1}^n \mu((c_j,d_j])$$

を n に関する帰納法で示していく．
$n=1$ のときは自明なので $n-1$ を仮定して n のときを示す．$\exists k$ s.t. $c_k < b \le d_k$. 番号を付け替えて $k=n$ とする．$(a,c_n] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1}(c_j,d_j]$ に注意しよう．

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(b) - G(c_n) + G(c_n) - G(a) \\ &\le G(b) - G(c_n) + \sum_{j=1}^{n-1} G(d_j) - G(c_j) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &\le G(d_n) - G(c_n) + \sum_{j=1}^{n-1} G(d_j) - G(c_j). \quad // \end{aligned}$$

claim 3. μ は σ-加法的．
∵ $(a,b] = \bigcup_{j=1}^\infty (c_j,d_j]$ とする．また $(c_j,d_j]$ は disjoint とする．$(a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^n (c_j,d_j]$ は有限個の左半開区間の和であるから，claim 1 より

$$\mu((a,b]) \ge \sum_{j=1}^n \mu((c_j,d_j]).$$

$n \to \infty$ として

$$\mu((a,b]) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu((c_j, d_j]).$$

逆向きの不等式を示そう．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．G は右連続だから δ_j を

$$G(d_j + \delta_j) \leq G(d_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

ととり，また $\delta > 0$ を $G(a+\delta) \leq G(a) + \varepsilon$ となるようにとる．$[a+\delta, b]$ は $(c_j, d_j + \delta_j)$ で被覆でき，コンパクト性から $[a+\delta, b]$ を被覆する有限個の $(c_{j_k}, d_{j_k} + \delta_{j_k}]$，$k = 1, \ldots, N$ が取れる．ここで claim 2 を使って

$$\begin{aligned}
G(b) - G(a) - \varepsilon &\leq G(b) - G(a+\delta) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \{G(d_{j_k} + \delta_{j_k}) - G(c_{j_k})\} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \{G(d_j + \delta_j) - G(c_j)\} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \{G(d_j) - G(c_j) + \varepsilon/2^j\} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \{G(d_j) - G(c_j)\} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから

$$G(b) - G(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \{G(d_j) - G(c_j)\}$$

が示せた．//　□

左半開区間の有限個の和で現されるもの全体は ring になる．μ はこの ring にまで自然に拡張され，上の定理から σ-加法的である．さらに，この ring から生成される σ-algebra に拡張できることを以下に示していく．手順として，まず外測度と呼ばれるものを構成し，それからさらに測度を構成する．そのために外測度の一般論をまず準備する．

3.　外測度

定義 3.1. $\mu^*\colon 2^X \to [0,\infty]$ が次の条件をみたすとき，外測度という：

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(iii) $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

(iii) の性質は σ-劣加法性と呼ばれている．これは σ-加法性とは異なる．ここでの問題は，適当な σ-algebra に制限することにより，測度になることを示す．

定義 3.2. $F \subseteq X$ が μ^*-可測 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall E \subseteq X: \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F). \tag{3.1}$$

μ^*-可測 な集合を $\mathscr{M}(\mu^*)$ とかく:

$$\mathscr{M}(\mu^*) := \{\text{the set of all } \mu^*\text{-measurable sets}\}. \tag{3.2}$$

(3.1) の条件は劣加法性から次と同値であるに注意しておこう:

$$\forall E \subseteq X: \quad \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F) \text{ when } \mu^*(E) < \infty$$

補題 3.3. $\mathscr{M}(\mu^*)$ は σ-algebra で μ^* は $\mathscr{M}(\mu^*)$ 上の測度になる．

証明　まず $X, \emptyset \in \mathscr{M}(\mu^*)$ は明らか．$F \in \mathscr{M}(\mu^*) \ \Leftrightarrow\ X \setminus F \in \mathscr{M}(\mu^*)$ も容易に分かる．

claim 1 $A, B \in \mathscr{M}(\mu^*) \ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathscr{M}(\mu^*)$.

$\because$ $E \subseteq X$ とする．

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad (\because\ A \in \mathscr{M}(\mu^*)) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \setminus B) + \mu^*(E \setminus A). \quad (\because\ B \in \mathscr{M}(\mu^*))\end{aligned}$$

ここで $E \setminus (A \cap B) = (E \cap A \setminus B) \cup (E \setminus A)$ に注意すれば劣加法性から

$$\mu^*(E \cap A \setminus B) + \mu^*(E \setminus A) \geq \mu^*(E \setminus (A \cap B)).$$

両者をあわせて

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \setminus (A \cap B)).$$

よって $A \cap B \in \mathscr{M}(\mu^*)$ である．//

今までのことを組み合わせれば $A, B \in \mathscr{M}(\mu^*) \ \Rightarrow\ A \cup B \in \mathscr{M}(\mu^*)$ も成り立つ．

claim 2 $A_j \in \mathscr{M}(\mu^*) \ \Rightarrow\ B = \bigcup_j A_j \in \mathscr{M}(\mu^*)$

$\because$ A_j の代わりに $A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k$ を考えることにより，A_j は disjoint としてよい．$B_j = \bigcup_{k=1}^{j} A_k$ とおく．任意に $E \subseteq X$ をとる．

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \setminus B_n) + \mu^*(E \cap B_n) \quad (\because\ B_n \in \mathscr{M}(\mu^*)) \\ &= \mu^*(E \setminus B_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \setminus A_n) \quad (\because\ A_n \in \mathscr{M}(\mu^*)) \\ &= \mu^*(E \setminus B_n) + \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{n-1} A_j)) \\ &= \mu^*(E \setminus B_n) + \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}).\end{aligned}$$

この操作を繰り返して

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \setminus B_n) + \mu^*(E \cap A_n) + \sum_{j=1}^{n-1} \mu^*(E \cap A_j)\\ &\geq \mu^*(E \setminus B) + \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j).\end{aligned}$$

$n \to \infty$ として

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \mu^*(E \setminus B) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j)\\ &\geq \mu^*(E \setminus B) + \mu^*(E \cap B). \quad (\because \text{ 外測度の } \sigma\text{-劣加法性})\end{aligned}$$

これは $B \in \mathscr{M}(\mu^*)$ を意味する．//

また上のことから

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \setminus B) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j)$$

ここで $E = B$ とすれば

$$\mu^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

よって μ が σ-加法的であることが示せた． □

命題 3.4. $\mu^*(A) = 0 \ \Rightarrow \ A \in \mathscr{M}(\mu^*)$.

証明 $E \subset X$ をとる．

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(A) \geq \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(E \cap A).$$

□

4. 測度の拡張

さて，ここで元に戻って，ring の上で定義されたものを拡張するという問題に戻ろう．$\mathscr{A}$: a ring, μ: $\mathscr{A} \to [0, \infty]$: σ-additive とする．これから外測度を作って，さらに測度を構成していく．

$\mathscr{A}$ 上の測度 μ から外測度を次のように定義する．$E \subseteq X$ を任意の集合とするとき

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_j \mu(A_j);\ A_j \in \mathscr{A},\ E \subseteq \cup_j A_j\}. \tag{4.1}$$

この定義で被覆 $E \subseteq \cup_j A_j$ が存在しないときは $\mu^*(E) = \infty$ と定義する．μ^* を μ から定まる**外測度**という．$\mu^*(\emptyset) = 0$ は明らかである．μ^* を外測度と呼んだが，実際に外測度の性質を持っていることを確かめる必要がある．

補題 4.1. $E_j \subseteq X,\ E \subseteq \cup_j E_j \ \Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_j \mu^*(E_j)$

証明　右辺が ∞ なら自明なので有限とする．$\forall \varepsilon > 0, \exists A_{j,k} \in \mathscr{A}$ s.t.

$$\mu^*(E_j) + \varepsilon 2^{-j} \geq \sum_k \mu(A_{j,k}).$$

$E \subseteq \bigcup_{j,k} A_{j,k}$ であり

$$\mu^*(E) \leq \sum_{j,k} \mu(A_{j,k}) \leq \sum_j \{\mu^*(E_j) + \varepsilon 2^{-j}\} = \sum_j \mu^*(E_j) + \varepsilon.$$

ε は任意だから

$$\mu^*(E) \leq \sum_j \mu^*(E_j).$$

これは σ-劣加法性を意味している． □

補題 4.2. $A \in \mathscr{A} \ \Rightarrow \ \mu^*(A) = \mu(A)$

証明　$\mu^*(A) \leq \mu(A)$ は明らかだから逆向きを示す．$A \subseteq \cup A_j,\ A_j \in \mathscr{A}$ とする．

$$B_k = (A \cap A_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$$

とおくと $B_k \in \mathscr{A}$ で $A = \cup B_k$. μ は $\mathscr{A}$ で σ-加法的だから

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

よって $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ となる． □

補題 4.3. $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}(\mu^*)$.

証明　$\mu^*(E) < \infty$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $A_j \in \mathscr{A}$ で

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

となるものが存在する．

$$E \cap A \subseteq \cup_j (A \cap A_j)$$
$$E \setminus A \subseteq \cup_j (A_j \setminus A)$$

であるから

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \sum_j \mu(A \cap A_j) + \sum_j \mu(A_j \setminus A) = \sum_j \mu(A_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E).$$

□

定理 4.4. $\mathscr{A}$: a ring, μ: $\mathscr{A} \to [0, \infty]$: σ-additive $\Rightarrow$ μ は $\mathscr{S} = \sigma(\mathscr{A})$ に σ-additive に拡張できる．

証明 補題 4.2, 補題 4.3 で $\mathscr{M}(\mu^*)$ は $\mathscr{A}$ を含み，μ^* は $\mathscr{A}$ 上では μ と一致している．また補題 3.3 で μ^* は $\mathscr{M}(\mu^*)$ 上では測度になっている．$\mathscr{M}(\mu^*)$ は σ-algebra だから $\sigma(\mathscr{A})$ を含んでいる．これで定理の主張が示せた． $\square$

以上で拡張の存在が示せたので，一意性の問題に移ろう．一意性を示すときには次の単調族を用いるのが便利である．

定義 4.5. $\mathscr{M} \subseteq 2^X$ が次を満たすとき単調族という

(i) $M_n \in \mathscr{M}$, $M_n \uparrow M \;\Rightarrow\; M \in \mathscr{M}$.

(ii) $M_n \in \mathscr{M}$, $M_n \downarrow M \;\Rightarrow\; M \in \mathscr{M}$.

定理 4.6. $\mathscr{A}$: a ring, $\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ を含む最小の σ-ring とする．このとき $\mathscr{M}$ が $\mathscr{A}$ を含む最小の単調族ならば，$\mathscr{M} = \mathscr{B}$. 特に $\mathscr{A}$ を含む単調族は $\mathscr{B}$ を含む.

また $\mathscr{A}$ が algebra のときは $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A})$ であるから $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{A})$ が成り立つ.

証明 <u>step 1.</u> $A \in \mathscr{A}$ をとり，

$$\mathscr{N}_A := \{E \in \mathscr{M};\, A \setminus E \in \mathscr{M}\}.$$

とおくと $\mathscr{N}_A = \mathscr{M}$.

$\because$ $\mathscr{A}$ が ring であるから $\mathscr{N}_A \supset \mathscr{A}$ であり，また $\mathscr{N}_A$ が単調族であることは $\mathscr{M}$ が単調族であることから従う．よって $\mathscr{N}_A = \mathscr{M}$ である． //

<u>step 2.</u>

$$\mathscr{N} := \{E \in \mathscr{M};\, E \setminus M \in \mathscr{M} \forall M \in \mathscr{M}\}.$$

とおくと $\mathscr{N} = \mathscr{M}$

$\because$ step 1 から $\mathscr{N} \supset \mathscr{A}$ である．また明らかに $\mathscr{N}$ は単調族だから $\mathscr{N} = \mathscr{M}$ が従う． //

次に，任意に $A \in \mathscr{A}$ を固定して

$$\mathscr{M}_A := \{E \subseteq X;\, E \cup A \in \mathscr{M}\}$$

とおくと，これはは $\mathscr{A}$ を含む単調族だから $\mathscr{M}_A \supseteq \mathscr{M}$.

また $E \in \mathscr{M}$ に対し

$$\mathscr{M}_E := \{F \subseteq X;\, F \cup E \in \mathscr{M}\}$$

とおくと，上のことから $\mathscr{M}_E$ は $\mathscr{A}$ を含む単調族だから $\mathscr{M}_E \supseteq \mathscr{M}$ が分かる．以上で

(i) $M_1, M_2 \in \mathscr{M} \;\Rightarrow\; M_1 \setminus M_2 \in \mathscr{M}$,

(ii) $M_1, M_2 \in \mathscr{M} \;\Rightarrow\; M_1 \cup M_2 \in \mathscr{M}$,

が成り立つ．$M_n \in \mathscr{M}$, $n = 1, 2, \ldots$ ならば $N_n = M_1 \cup \cdots \cup M_n \in \mathscr{M}$ で $N_n \uparrow \cup_n M_n \in \mathscr{M}$ が従う，よって $\mathscr{M}$ は σ-ring で $\mathscr{A}$ を含むから $\mathscr{M} \supseteq \mathscr{B}$. ところで $\mathscr{B}$ は $\mathscr{A}$ を含む単調族でもある．実際 $B_n \uparrow B$ のときは明らかだが，$B_n \downarrow B$ のときは $B_1 \setminus B_n \uparrow B_1 \setminus B$ なので $B_1 \setminus B \in \mathscr{B}$ が分かり，$B_1 \setminus (B_1 \setminus B) = B$ なので $B \in \mathscr{B}$ が分かる．以上で $\mathscr{M} = \mathscr{B}$ が示せた． □

単調族はクラスを広げていくときの証明の道具立てとして有効なものである．似たものとして次の形の定式化もある．応用上どちらを使っても同様に出来るときがほとんどである．

定義 4.7. 集合の族 $\mathscr{L}$ が次の性質をみたすとき，$\mathscr{L}$ を Dynkin 族 (または λ-system) と呼ぶ:

(i) $A, B \in \mathscr{L}$, $A \supseteq B$ のとき $A \setminus B \in \mathscr{L}$.

(ii) $A_n \in \mathscr{L}$, $A_n \uparrow A \;\Rightarrow\; A \in \mathscr{L}$.

定理 4.8. 集合族 $\mathscr{A}$ を ring とする．さらに，$\mathscr{A}$ を含む最小の σ-ring を $\mathscr{B}$ とする．このとき $\mathscr{L}$ を $\mathscr{A}$ を含む λ-system とすると $\mathscr{L} \supseteq \mathscr{B}$ である．

証明　$\mathscr{P}$ を $\mathscr{A}$ を含む最小の λ-system とするとき，$\mathscr{P} = \mathscr{B}$ を示す．そのためにまず $\mathscr{P}$ が積集合をとる演算で閉じていることを示す．

claim 1. $A \in \mathscr{A}$ をとり

$$\mathscr{N}_A := \{E \in \mathscr{P};\, A \cap E \in \mathscr{P}\}.$$

とおくと，$\mathscr{N}_A = \mathscr{P}$ である．

∵ $\mathscr{A}$ が積で閉じているから，$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{N}_A$ である．また $B, C \in \mathscr{N}_A$ が $B \subseteq C$ であれば

$$A \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus (A \cap B) \in \mathscr{P}.$$

また $B_n \in \mathscr{N}_A$ で $B_n \uparrow B$ のとき

$$A \cap B = A \cap \bigcup_n B_n = \bigcup_n (A \cap B_n) \in \mathscr{P}.$$

以上で $\mathscr{N}_A$ は $\mathscr{A}$ を含む λ-system で $\mathscr{P}$ の最小性より $\mathscr{N}_A = \mathscr{P}$ である． //

claim 2.

$$\mathscr{N} := \{E \in \mathscr{P};\, P \cap E \in \mathscr{P}, \quad \forall P \in \mathscr{P}\}$$

とおくと，$\mathscr{N} = \mathscr{P}$ である．

∵ claim 1 の結果から $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{N}$ である．また $B, C \in \mathscr{N}$ が $B \subseteq C$ であれば，$P \in \mathscr{P}$ に対し

$$P \cap (C \setminus B) = (P \cap C) \setminus (P \cap B) \in \mathscr{P}.$$

また $B_n \in \mathscr{N}$ で $B_n \uparrow B$ のとき，任意の $P \in \mathscr{P}$ に対し

$$P \cap B = P \cap \bigcup_n B_n = \bigcup_n (P \cap B_n) \in \mathscr{P}.$$

以上で $\mathscr{N}$ は $\mathscr{A}$ を含む λ-system で $\mathscr{P}$ の最小性より $\mathscr{N} = \mathscr{P}$ である．//

$\mathscr{P}$ は λ-system であり，積をとる演算で閉じていることが分かった．これから $A, B \in \mathscr{P}$ のとき

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathscr{P}$$

が従う．

次に $\mathscr{P}$ が和をとる演算でも閉じていることを示さなければならない．今までは $\mathscr{A}$ の性質は，積で閉じていることしか使っていないが，ここで $\mathscr{A}$ が ring であることが必要になる．その前に $\mathscr{P}$ の元は $\mathscr{A}$ の可算個の元で覆われることを注意しておこう．これは

$$\mathscr{Q} = \{A \subseteq X;\, A \subseteq \bigcup A_i,\ A_i \in \mathscr{A}\}$$

とおくと，$\mathscr{Q}$ が Dynkin 族の性質をみたすことは容易に確かめられる．また $\mathscr{Q}$ は $\mathscr{A}$ を含んでいるから，$\mathscr{P}$ の Dynkin 族としての最小性から $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$ となる．従って $\mathscr{P}$ の元は $\mathscr{A}$ の可算個の元で覆われる．

さて，$A, B \in \mathscr{P}$ とする．$\mathscr{A}$ の可算個の元 A_n がとれて

$$A,\ B \subseteq \bigcup A_i$$

とできる．$\mathscr{A}$ は ring だから，$B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$ に取り直せば，A_n は単調増大と仮定してもよい．

$$A_n \cap (A \cup B) = A_n \setminus \{(A_n \setminus A) \cap (A_n \setminus B)\}$$

なので今まで示したことから $A_n \cap (A \cup B) \in \mathscr{P}$．さらに

$$A_n \cap (A \cup B) \uparrow A \cup B$$

であるから $\mathscr{P}$ の性質から $A \cup B$ が示せる．

このことからさらに可算個の合併で閉じていることは，$\mathscr{P}$ 単調列で閉じているから従う．以上で $\mathscr{P}$ は σ-ring であることが示せた．従って $\mathscr{P} \supseteq \mathscr{B}$ である．また $\mathscr{B}$ は λ-system だから $\mathscr{P}$ の λ-system としての最小性から $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{B}$ でもある．以上で $\mathscr{P} = \mathscr{B}$ が示せた．□

上の証明で，$\mathscr{A}$ が積をとる演算で閉じていることだけで $\mathscr{P}$ も積について閉じていることがいえた．従って $\mathscr{P}$ がもし X を含んでいれば，和についても閉じていることがde Morgan の法則から容易にわかる．これを定理の形で書いておこう．

定理 4.9. 集合族 $\mathscr{A}$ を積集合をとる演算で閉じているとする: $A, B \in \mathscr{A} \ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathscr{A}$．このとき $\mathscr{L}$ を $\mathscr{A}$ を含む λ-system で $X \in \mathscr{L}$ ならば $\mathscr{L} \supseteq \sigma(\mathscr{A})$ である．

定理 4.10. $\mathscr{A}$: ring, μ: $\mathscr{A} \to [0,\infty)$: σ-additive とする．ここではすべての $A \in \mathscr{A}$ について $\mu(A) < \infty$ としていることに注意しよう．$\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ を含む最小の σ-ring とする．$\mathscr{B}$ 上で定義された非負値関数 α が σ-加法性をみたし，$\mathscr{A}$ 上では $\mu = \alpha$ が成り立っていれば，$\mathscr{B}$ 全体で $\mu = \alpha$ が成立する．

この定理は $\mathscr{B}$ への拡張の一意性を言っている．

証明　任意に $E \in \mathscr{A}$ をとり

$$\mathscr{L}_E = \{A \in \mathscr{B};\, \mu(A \cap E) = \alpha(A \cap E)\}$$

とおく．$\mathscr{A}$ は ring だから $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{L}_E$ は明らか．また $\mathscr{L}_E$ が単調族であることも α, μ の σ-加法性から確かめられる．よって 定理 4.6 から $\mathscr{L}_E = \mathscr{B}$ が示される．

さて，$\mathscr{B}$ が $\mathscr{A}$ の可算個で覆われるから，$A \in \mathscr{B}$ に対し $\mathscr{A}$ の可算増大列 E_n がとれて，$\bigcup E_n \supseteq A$ とできる．上の結果から

$$\mu(A \cap E_n) = \alpha(A \cap E_n)$$

だから $n \to \infty$ として $\mu(A) = \alpha(A)$ を得る． □

さて元の問題に戻って，μ を ring $\mathscr{A}$ 上の完全加法的な測度とする．これから外測度を作って $\mathscr{M}(\mu^*)$ を定義すると，μ^* は完全加法的な測度となる．また $\mathscr{A}_0$ を $\mathscr{A}$ の元 A で $\mu(A) < \infty$ となるもの全体とする．$\mathscr{A}_0$ も ring となることは容易に分かる．上の定理から μ の σ-加法的な拡張は $\mathscr{A}_0$ を含む最小の σ-ring (これを $\mathscr{S}$ とする) の上で一意的であることがわかる．

一意性は $\mathscr{A}_0$ を含む最小の σ-ring の上で成り立つ．$\mathscr{A} = \{(a,b];\, -\infty < a \leq b < \infty\}$ として，μ を空集合以外は ∞ と定義する．非常に極端な測度であるが，このときは $\mathscr{A}_0$ は空集合しか存在しない．$\mathscr{A}$ を含む最小の σ-ring は Borel σ-algebra となるが，この上には，空集合以外は無限大という測度と，counting measure という測度が存在する．両者は $\mathscr{A}$ 上では一致するので拡張の一意性の成立しない例になっている．

また $\mathscr{A}$ が σ-有限であれば $\mathscr{A}_0$ を含む最小の σ-ring $\mathscr{S}$ は $\mathscr{A}$ を含む．これは $A_n \uparrow X$ となる列 $A_n \in \mathscr{A}_0$ が存在するから，$B \in \mathscr{A}$ は $B \cap A_n \uparrow B$ となることからわかる．さらに $X \in \mathscr{S}$ も示せるから $\mathscr{S}$ は σ-algebra となり，$\mathscr{S} = \sigma(\mathscr{A})$ が成り立つ．従って μ は $\sigma(\mathscr{A})$ 上へ一意的に拡張できることがわかる．

ここで σ-有限の定義を与えておこう．$\mathscr{C} \subseteq 2^X$, μ: $\mathscr{C} \to [0,\infty]$.

μ is σ-有限 $\overset{\text{def}}{\iff} \exists A_n \in \mathscr{C}$ s.t. $\mu(A_n) < \infty$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

5. Semirings and Rings

$\mathscr{C} = \{(a,b]; -\infty < a \leq b < \infty\}$

$A, B \in \mathscr{C} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathscr{C}$, $A \setminus B$ は $\mathscr{C}$ の有限個の disjoint union で表される．

定義 5.1. $\mathscr{D} \subseteq 2^X$ is called a semirig $\overset{\text{def}}{\iff}$

(i) $\emptyset \in \mathscr{D}$.

(ii) $A,\, B \in \mathscr{D} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathscr{C}$

(iii) $A,\, B \in \mathscr{D} \;\Rightarrow\; A \setminus B$ は $\mathscr{D}$ の有限個の disjoint union で表される．

命題 5.2. $X = Y \times Z$, $\mathscr{A}$: a semiring of Y, $\mathscr{B}$: a semiring of Z, $\mathscr{D} = \{A \times B;\ A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{A}\}$ とすると，$\mathscr{D}$ は semiring.

証明 $\emptyset \in \mathscr{D}$ は明らか．$A,\, C \in \mathscr{A}$, $B,\, D \in \mathscr{B}$ のとき

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathscr{D}$$

は明らか．$E = (A \times B) \setminus (C \times D)$ として E が $\mathscr{D}$ の有限個の直和出かけることを示そう．

$$E = \{(A \setminus C) \times B\} \cup \{(A \cap C) \times (B \setminus D)\}$$

である．$A \setminus C$, $B \setminus D$ は $\mathscr{A}$ および $\mathscr{B}$ の有限個の直和でかけるから E は $\mathscr{D}$ の有限個の直和でかける． □

命題 5.3. $\mathscr{D}$: a semiring, $\mathscr{R}$: the set of all finite disjoint union of $\mathscr{D} \;\Rightarrow\; \mathscr{R}$ is a ring.

証明 $A,\, B \in \mathscr{R} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathscr{R}$ は明らか．$A,\, B \in \mathscr{R} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathscr{R}$ を示す．

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad A_k \in \mathscr{D},\ \text{disjoint},$$
$$B = \bigcup_{l=1}^{m} B_l, \quad B_l \in \mathscr{D},\ \text{disjoint}$$

とする．

$$A \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l)$$

である．semiring の性質から $A_k \setminus B_l \in \mathscr{R}$ で，$\mathscr{R}$ は有限個の intersection で閉じているから $A \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l \in \mathscr{R}$ である． □

命題 5.4. $\mathscr{D}$: a semiring, α: finitely additive on $\mathscr{D}$, $\mathscr{R}$: the ring generated by $\mathscr{D}$. $A \in \mathscr{R}$ に対し

$$\alpha(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(A_j), \quad \text{where } A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j,\ A_j \in \mathscr{D},\ \text{disjoint}.$$

とする．このとき α は well-defined で $\mathscr{R}$ 上で finitely additive.

さらに α が $\mathscr{D}$ 上で σ-additive ならば，$\mathscr{R}$ でも σ-additive であり，α は $\sigma(\mathscr{D}) = \sigma(\mathscr{R})$ に σ-additive に拡張できる．

証明　α が $\mathscr{D}$ で σ-additive ならば，$\mathscr{R}$ でも σ-additive であることだけ示す．$A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, A, $A_i \in \mathscr{R}$, A_i は disjoint とする．$\mathscr{R}$ の作り方から

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{N(i)} A_{i,j}, \quad A_{i,j} \in \mathscr{D}\text{: disjoint}$$

と表される．また A に対しても

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} B_k, \quad B_k \in \mathscr{D}\text{: disjoint}$$

と表される．

$$A = \bigcup_{k=1}^{N}\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{N(i)} (B_k \cap A_{i,j}) \quad \text{(disjoint union)}$$

であるから，$\mathscr{D}$ での σ-additivity から

$$\begin{aligned}
\alpha(A) &= \sum_{k=1}^{N} \alpha(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N(i)} \alpha(B_k \cap A_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N(i)} \alpha(B_k \cap A_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i). \quad \left(\because\ A_i = \bigcup_{k=1}^{N}\bigcup_{j=1}^{N(i)} (B_k \cap A_{i,j})\text{: disjoint union}\right)
\end{aligned}$$

これから定理 4.4 を使えば α は $\sigma(\mathscr{R})$ に σ-additive に拡張される．　□

さて，最初の問題に戻って $X=\mathbb{R}$, $\mathscr{C}=\{(a,b];\ -\infty<a\leq b<\infty\}$ $G\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を単調増大右連続，$\mu((a,b])=G(b)-G(a)$ の場合を考えると，今までの結果から μ は $\sigma(\mathscr{C})$ に σ-additive に拡張できる．

$\mathscr{O}$: $\mathbb{R}$ の開集合全体

$\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{O})$

<u>claim</u> $\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{C})$

$\because$ $\mathscr{O}$ の元は開区間の可算個の和集合で表される．また各階区間は $(a,b)=\bigcup_{j=1}^{\infty}(a,b-\frac{1}{j}]\in\sigma(\mathscr{C})$

$$(a,b) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(a, b-\frac{1}{j}] \in \sigma(\mathscr{C})$$

と表されるから $\mathscr{O} \subseteq \sigma(\mathscr{C})$．従って $\sigma(\mathscr{O}) \subseteq \sigma(\mathscr{C})$.

逆に $(a,b] \in \mathscr{C}$ は

$$(a,b] = \bigcap_{j=1}^{\infty}(a, b+\frac{1}{j}) \in \sigma(\mathscr{O})$$

と表されるから $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{O})$．従って $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \sigma(\mathscr{O})$.//

一般に位相空間 X に対して，開集合を含む最小の σ-algebra $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{O})$ を Borel σ-algebra とよぶ．$\mathscr{B}(X)$ とかくこともある．

定理 5.5. $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を単調増大右連続のとき $\mu((a,b]) = G(b) - G(a)$ となる測度が $\mathscr{B}$ 上に一意的に存在する．特に $G(x) = x$ のとき，即ち $\mu((a,b]) = b - a$ となる測度を Lebesgue 測度という．以後 Lebesgue 測度 (1 次元) を λ で表す.

証明　一意性は σ-有限に注意して定理 4.10 を用いればよい． □

6.　測度の完備化

$(X, \mathscr{S}, \mu)$: a measure space

X: a space

$\mathscr{S}$: a σ-algebra

μ: a measure on $\mathscr{S}$ (i.e., σ-additive)

$\triangle$: symmetric difference を次で定める．$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

定理 6.1. $(X, \mathscr{S}, \mu)$: a measure space. $\forall E \subseteq X$, $\exists C \in \mathscr{S}$ s.t. $E \subseteq C$, $\mu^*(E) = \mu(C)$．ここで μ^* は外測度である.

証明

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A);\, A \in \mathscr{S},\ A \supseteq E\}.$$

$\mu^*(E) < \infty)$ のときだけ示せばよい．$A_j \in \mathscr{S}$, $A_j \supseteq E$, $\mu(A_j) \downarrow \mu^*(E)$ とする．$C = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{S}$ とおくと $C \supseteq E$ で

$$\mu^*(E) \le \mu(C) \le \lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu^*(E).$$

□

$\mathscr{N}(\mu) := \{F \subseteq X;\ \mu^*(F) = 0\}$

$\mathscr{S} \vee \mathscr{N}(\mu) = \sigma(\mathscr{S} \cup \mathscr{N}(\mu))$: $\mathscr{S}$ と $\mathscr{N}(\mu)$ を含む最小の σ-algebra

$\mathscr{S}_\mu^* := \{E \subseteq X; , \exists B \in \mathscr{S}$ s.t. $\mu^*(E \triangle B) = 0\}$

命題 6.2. $\mathscr{S}_\mu^* = \mathscr{S} \vee \mathscr{N}(\mu)$.

証明　$N_j \in \mathscr{N}(\mu) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^\infty N_j \in \mathscr{N}(\mu)$ に注意する．

claim 1 $\mathscr{S}_\mu^* \subseteq \mathscr{S} \vee \mathscr{N}(\mu)$

∵ $E \in \mathscr{S}_\mu^*$ ならば $\exists B \in \mathscr{S}$ s.t. $E \triangle B \in \mathscr{N}(\mu)$.

$$E = (\underset{\substack{\cap \\ \mathscr{S}}}{B} \cup (\underset{\substack{\cap \\ \mathscr{N}}}{E \setminus B})) \setminus (\underset{\substack{\cap \\ \mathscr{N}}}{B \setminus E}) \in \mathscr{S} \vee \mathscr{N}. \quad //$$

claim 2 $\mathscr{S} \vee \mathscr{N}(\mu) \subseteq \mathscr{S}_\mu^*$.

∵ $\mathscr{S}$, $\mathscr{N}(\mu) \subseteq \mathscr{S}_\mu^*$ は明らか．$\mathscr{S}_\mu^*$ が σ-algebra であることを示す．$E_j \in \mathscr{S}_\mu^*$ とする．$\exists B_j \in \mathscr{S}$ s.t. $E_j \triangle B_j \in \mathscr{N}(\mu)$. ここで

$$(\bigcup_{j=1}^\infty E_j) \triangle (\bigcup_{j=1}^\infty B_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty (E_j \triangle B_j) \in \mathscr{N}(\mu).$$

よって $\bigcup_{j=1}^\infty E_j \in \mathscr{N}(\mu)$. □

$E \in \mathscr{S}_\mu^*$ に対し $A \in \mathscr{S}$ を $E \triangle A \in \mathscr{N}(\mu)$ ととり

$$\bar{\mu}(E) = \mu(A)$$

で定める．

定理 6.3. $(X, \bar{\mu}, \mathscr{S}_\mu^*)$ は測度空間である．

証明　まず $\bar{\mu}$ が well-defined であることを示す．$E \in \mathscr{S}_\mu^*$ に対し A, $B \in \mathscr{S}$ を $E \triangle A$, $E \triangle B \in \mathscr{N}(\mu)$ となるようにとる．すると

$$A \triangle B = (E \triangle A) \triangle (E \triangle B) \in \mathscr{N}(\mu).$$

これから $\mu(A) = \mu(B)$ が成り立つ．

次に $E_j \in \mathscr{S}_\mu^*$ を disjoint とする．また $A_j \in \mathscr{S}$ を $E_j \triangle A_j \in \mathscr{N}(\mu)$ となるようにとる．すると

$$A_i \cap A_j \subseteq (E_i \triangle A_i) \cup (E_j \triangle A_j) \in \mathscr{N}(\mu)$$

が成り立つ．$B_j = A_j \setminus (\cup_{i=1}^{j-1} A_i)$ とすると B_j は disjoint で $\mu(B_j) = \mu(A_j)$ となる．また $A = \cup_j A_j = \cup_j B_j$ である．よって

$$\bar{\mu}(E) = \mu(A) = \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \bar{\mu}(E_j).$$

□

$\bar{\mu}$ を μ の完備化という．$A \in \mathscr{S}_\mu^*$, $\bar{\mu}(A) = 0$ とする．すると任意の $B \subseteq A$ に対し $B \in \mathscr{S}_\mu^*$ となる．この性質を持つ測度を完備な測度という．上の手続きは，任意の測度から完備な測度を作る手続きを示しているわけである．

7.　Lebesgue 測度と非可測集合

C: the Cantor set

$C := \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n};\, x_n = 0 \text{ or } x_n = 2\}$

$C_N := \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n};\, x_n = 0 \text{ or } x_n = 2 \text{ for } n < N\}$

$C_1 : [0,1] \quad \lambda(C_1) = 1$

$C_2 : [0,\frac{1}{3}],\, [\frac{2}{3},1] \quad \lambda(C_2) = \frac{2}{3}$

$C_3 : [0,\frac{1}{9}],\, [\frac{2}{9},\frac{1}{3}],\, [\frac{2}{3},\frac{7}{9}],\, [\frac{8}{9},1] \quad \lambda(C_3) = (\frac{2}{3})^2$

$C_4 : \quad \lambda(C_4) = (\frac{2}{3})^3$

$C = \cap_{N=1}^{\infty} C_N, \quad \lambda(C_N) = (\frac{2}{3})^{N-1},\, \lambda(C) = \lim_{N\to\infty} \lambda(C_N) = 0$

C の濃度は $\mathbb{R}$ と同じ．この濃度を $\mathfrak{c}$ とかく．

定理 7.1. Lebesgue 可測集合 $\mathscr{M}(\lambda^*)$ の濃度は $2^{\mathfrak{c}}$.

証明　Cantor set C の部分集合はすべて $\mathscr{M}(\lambda^*)$ に属する． □

定理 7.2. Lebesgue 非可測集合が存在する．(但し，証明には選択公理が必要)

証明　$G = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ とする．G の濃度は $\mathbb{R}$ と同じ $\mathfrak{c}$. $g \in G$ の代表元 x_g を $[0,1)$ からとる（選択公理が必要）．$E = \{x_g;\, g \in G\}$ とおいてこれが非可測を示す．

<u>claim 1</u> $[0,1) \subseteq \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\|r|<1}} (E+r) \subseteq [-1,2)$

$\because$ $\forall x \in [0,1)$ に対し $\exists g \in G$ s.t. $x \in x_g + \mathbb{Q}$. $x,\, x_g \in [0,1)$ より $r = x - x_g$ とおけば $r \in \mathbb{Q},\, |r| < 1$ である．

$$\therefore\ x = x_g + r \in E + r, \quad \therefore\ [0,1) \subseteq \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\|r|<1}} (E+r).$$

また $\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\|r|<1}} (E+r) \subseteq [-1,2)$ は明らか.

<u>claim 2</u> $r,\, q \in \mathbb{Q},\, |r|,\, |s| < 1,\, r \neq s \Rightarrow E + r \cap E + s = \emptyset$.

$\because$ $x \in E + r \cap E + s$ をとる．$x = x_g + r = x_{g'} + s$. $x_g - x_{g'} = s - r \in \mathbb{Q}$. よって x_g と $x_{g'}$ は同じ同値類に属すことになり矛盾．//

E が可測ならば，$E + r$ も可測で $\lambda(E) = \lambda(E + r)$ である．

(1) $\lambda(E) = 0$ のとき

$1 = \lambda([0,1)) \leq \sum_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\|r|<1}} \lambda(E+r) = 0$. 矛盾.

(2) $\lambda(E) > 0$ のとき

$3 = \lambda([-1,2)) \geq \sum_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\|r|<1}} \lambda(E+r) = \infty$. 矛盾. □

第2章　積分

1.　単関数

$(X, \mathscr{S})$: a measurable space

X: a space

$\mathscr{S}$: a σ-algebra　(X が位相空間のときは Borel σ-algebra にとることが多い)

1_A: indicator function of a set A

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

$f\colon X \to \mathbb{R}$

f は単関数

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f = \sum_{\text{finite sum}} a_i 1_{B_i}, \quad a_i \in \mathbb{R},\ B_i \in \mathscr{S}$

μ: a measure

f は μ-単関数

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f = \sum_{\text{finite sum}} a_i 1_{B_i}, \quad a_i \in \mathbb{R},\ B_i \in \mathscr{S},\ \mu(B_i) < \infty$

注意 1.1. 上の B_i は disjoint に取ることができる.

単関数 $f = \sum_{\text{finite sum}} a_i 1_{B_i}$, $a_i \geq 0$ に対し μ による積分を

$$\int f d\mu = \sum a_i \mu(B_i) \in [0, \infty]$$

で定める. ($0 \cdot \infty = 0$ と規約する)

f, g を単関数, ≥ 0, $c \geq 0$ のとき次が成り立つ.

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

$$\int cf\, d\mu = c \int f\, d\mu$$

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$$

$$f \geq g \ \Rightarrow \ \int f\,d\mu \geq \int g\,d\mu.$$

$(X, \mathscr{S})$, $(Y, \mathscr{B})$: measurable spaces

$f\colon X \to Y$

f is measurable $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall B \in \mathscr{B}\colon\ f^{-1}(B) \in \mathscr{S}$

$Y = \mathbb{R}$ のとき $\mathscr{B}$ として Borel σ-algebra をとる．(以後特に断らない)

$(X, \mathscr{S}, \mu)$: a measure space

$f\colon X \to [0, \infty]$: measurable

$$\int f\,d\mu := \sup\{\int g\,d\mu;\, 0 \leq g \leq f,\ g\text{: simple}\} \tag{1.1}$$

命題 1.1. $f \geq 0$, measurable とする．このとき単関数列 $\{f_n\}$ で $0 \leq f_n \uparrow f$ となるものが存在する．またこの条件をみたす任意の列 $\{f_n\}$ に対し $\int f_n\,d\mu \uparrow \int f\,d\mu$ となる．

証明

$$E_{n,j} = f^{-1}((\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}), \quad j = 1, 2, \dots, n2^n - 1$$
$$E_n = f^{-1}((n, \infty])$$

と定め

$$f_n = n1_{E_n} + \sum_j \frac{j}{2^n} 1_{E_{n,j}}$$

とすると $f_n \uparrow f$ は明らかである．

<u>claim</u> f: measurable, g: μ-simple, $0 \leq g \leq f$, $h_n \uparrow f \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} \int h_n\,d\mu \geq \int g\,d\mu$

∵ $g = \sum_i a_i 1_{B_i}$, B_i: disjoint とする．

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n 1_{B_i}\,d\mu \geq \int g 1_{B_i}\,d\mu = a_i \mu(B_i)$$

を示せばよい．$\forall\varepsilon > 0$ に対し，$F_n = \{x \in B_i;\, h_n(x) > a_i - \varepsilon\}$ とおく．$h_n \uparrow f \geq g$ より $\cup_n F_n = B_i$. よって $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(B_i)$ となる．

$$\int h_n 1_{B_i}\,d\mu \geq \int (a_i - \varepsilon) 1_{F_n}\,d\mu = (a_i - \varepsilon)\mu(F_n).$$

従って

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n 1_{B_i}\,d\mu \geq (a_i - \varepsilon)\mu(B_i).$$

$\varepsilon > 0$ は任意であるから

$$\lim_{n\to\infty}\int h_n 1_{B_i}\, d\mu \geq a_i\mu(B_i).$$

□

集合の族 $\mathscr{R}$ が σ-ring とは次の条件をみたすことであった:

(i) $\emptyset \in \mathscr{R}$

(ii) $A,\, B \in \mathscr{R} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathscr{R}$

(iii) $A_n \in \mathscr{R},\, n = 1, 2, \ldots \;\Rightarrow\; \cup_n A_n \in \mathscr{R}$

注意 1.2. $X \in \mathscr{R}$ は仮定しない．もし $X \in \mathscr{R}$ ならば σ-algebra となる．

例 1.1. $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{R} = \{0$ を含まない Borel 集合全体$\}$ は σ-ring であるが σ-algebra ではない．

定理 1.2. $(X, \mathscr{S})$, $(Y, \mathscr{B})$ を可測空間．$\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C})$ とする．このとき

$$f \text{ が可測 } \Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{C}:\; f^{-1}(B) \in \mathscr{S}.$$

また $\mathscr{S}$, $\mathscr{B}$ が σ-ring の場合も同様．ただし，上の仮定は $\mathscr{B}$ が $\mathscr{C}$ を含む最小の σ-ring であるとする．

証明

$$\mathscr{D} = \{B \subseteq Y;\, f^{-1}(B) \in \mathscr{S}\}$$

とする．$\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ が仮定．$\mathscr{D}$ が σ-algebra であることを示せばよい．Y, $\emptyset \in \mathscr{D}$ は明らか．$A_n \in \mathscr{D}$ ならば

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathscr{S}$$

より $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}$ である．また $A \in \mathscr{D}$ のとき

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathscr{S}$$

より $Y \setminus A \in \mathscr{D}$ となる． □

$X = \mathbb{R}$ で $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ となる例．

$$\{(a, \infty);\, a \in \mathbb{R}\}$$
$$\{[a, \infty);\, a \in \mathbb{R}\}$$
$$\{(-\infty, a];\, a \in \mathbb{R}\}$$
$$\{(-\infty, a);\, a \in \mathbb{R}\}$$

従って f の可測性をいうには $\{x;\, f(x) > a\}$ が可測であることを示せばよい．

命題 1.3. $(X, \mathscr{S})$ を可測空間，$f_n\colon X \to [-\infty, \infty]$ を可測関数の列とする．このとき $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$, $\underline{\lim}_n f_n$, $\overline{\lim}_n f_n$ は可測である．

証明

$$(\inf_n f_n)^{-1}[-\infty, a) = \bigcup_n f_n^{-1}[-\infty, a)$$
$$(\sup_n f_n)^{-1}[-\infty, a] = \bigcap_n f_n^{-1}[-\infty, a]$$

であることに注意すれば $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$ の可測性が示せる． □

$(X, \mathscr{S})$, $(Y, \mathscr{B})$, $(Z, \mathscr{C})$ が可測空間のとき f, g: 可測 $\Rightarrow$ $g \circ f$: 可測:

$$(X, \mathscr{S}) \xrightarrow{\ f\ } (Y, \mathscr{B}) \xrightarrow{\ g\ } (Z, \mathscr{C})$$

また，$(Y, \mathscr{B})$, $(Z, \mathscr{C})$ が可測空間のとき

$$\mathscr{B} \otimes \mathscr{C} := \sigma(\{B \times C;\ B \in \mathscr{B},\ C \in \mathscr{C}\})$$

を product σ-algebra という．

$$f\colon (X, \mathscr{S}) \to (Y, \mathscr{B}) \text{ 可測}$$
$$g\colon (X, \mathscr{S}) \to (Z, \mathscr{C}) \text{ 可測}$$

このとき f と g を組にした関数

$$h = (f, g)\colon (X, \mathscr{S}) \to (Y \times Z, \mathscr{B} \otimes \mathscr{C})$$

も可測となる

$\because$ $B \in \mathscr{B}$, $C \in \mathscr{C}$ のとき $h^{-1}(B \times C) = f^{-1}(B) \cap g^{-1}(C) \in \mathscr{S}$ となるから．//

命題 1.4. $(X, \mathscr{T})$, $(Y, \mathscr{U})$ を位相空間，$Z = X \times Y$ に積位相 $\mathscr{V}$ を入れる．このとき $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) \subseteq \mathscr{B}(Z)$.（$\mathscr{T}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ は開集合の全体を表している．）また X, Y が第 2 可算公理をみたせば $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) = \mathscr{B}(Z)$ が成り立つ．

証明　$A \in \mathscr{T}$, $B \in \mathscr{U}$ ならば $A \times B \in \mathscr{V}$ (i.e., Z の開集合) であるから

$$\sigma(\{A \times B;\ A \in \mathscr{T},\ B \in \mathscr{U}\} \subseteq \sigma(\mathscr{V}) = \mathscr{B}(Z)$$
$$\therefore\ \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) \subseteq \mathscr{B}(Z).$$

また X, Y が第 2 可算公理をみたせば $C \in \mathscr{V}$ は

$$C = \bigcup_{i=1} (A_i \times B_i), \quad A_i \in \mathscr{T},\ B_i \in \mathscr{U}.$$

よって $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$ であるから

$$\mathscr{B}(Z) = \sigma(\mathscr{V}) \subseteq \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y).$$

□

$f,\, g\colon (X, \mathscr{S}) \longrightarrow \mathbb{R}$: 可測 $\Rightarrow f+g,\, f\times g$: 可測

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} & & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ni (x,y) \mapsto x+y \in \mathbb{R} \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \times \arrow[r, "+", "\times"'] & \mathbb{R} & \\ & \mathbb{R} & & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ni (x,y) \mapsto x\times y \in \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

同様に $f,\, g$ が可測ならば，f/g も可測となる．但し，このときは $g \neq 0$ とする．

命題 1.5. $(X, \mathscr{S}, \mu)$: a measure space, $f,\, g\colon X \to [0, +\infty]$ が可測ならば

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

証明 命題 1.1 より $f_n,\, g_n$: simple functions, $f_n \uparrow f,\, g_n \uparrow g$ をとる．明らかに $f_n + g_n \uparrow f+g$ だから

$$\int (f_n + g_n)\, d\mu \ \uparrow\ \int (f+g)\, d\mu.$$

ところで

$$\int (f_n + g_n)\, d\mu = \int f_n\, d\mu + \int g_n\, d\mu \ \uparrow\ \int f\, d\mu + \int g\, d\mu. \quad (\because\ \text{命題 } 1.1)$$

これから求める結果を得る． □

一般に $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ に対しては次で積分を定義する:

$$f_+ = f \vee 0,\ f_- = (-f) \vee 0,\ f = f_+ - f_-$$

と表す．ここで $x \vee y = \max\{x, y\}$ である．このとき

$$\int f\, d\mu = \int f_+\, d\mu - \int f_-\, d\mu \tag{1.2}$$

と定義する．但し，右辺のすくなくとも一方は有限であることを仮定し，$\int f_+\, d\mu = \int f_-\, d\mu = \infty$ のときには定義しない．さらに

$$\mathscr{L}^1(X, \mu) := \{f\colon X, \to \mathbb{R},\ \text{measurable},\ \int |f|\, d\mu < \infty\} \tag{1.3}$$

と定める．$f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$ のとき f を**可積分**であるという．

定義 1.6. $(X, \mathscr{S}, \mu)$: a measure space, $(Y, \mathscr{B})$: a measurable space, $T\colon X \to Y$: a measurable map. このとき

$$\mu{\circ}T^{-1}(A) := \mu(T^{-1}(A)), \quad A \in \mathscr{B}. \tag{1.4}$$

を μ の**像測度** (image measure) という．

定理 1.7. $f\colon Y \to [-\infty, \infty]$ を可測関数とする．このとき

$$\int_Y f\, d(\mu\circ T^{-1}) = \int_X (f\circ T)\, d\mu \tag{1.5}$$

が成立する．

証明　命題 1.1 より，単関数のときを示せばよい．線型性から特に $f = a1_B$ のときを示せばよい．

$$\int_Y f\, d(\mu\circ T^{-1}) = a(\mu\circ T^{-1}(B) = a\mu(T^{-1}(B)).$$

ところで $f\circ T = a1_B(T)$ で $T(x) \in B \;\Leftrightarrow\; x \in T^{-1}(B)$ に注意すれば

$$1_B(T(x)) = 1_{T^{-1}(B)}(x)$$

が成り立つ．よって

$$\int_X (f\circ T)\, d\mu = \int_X a1_{T^{-1}(B)}(x)\, d\mu = a\mu(T^{-1}(B)).$$

これで両辺が等しいことが示せた． □

2.　積分に対する収束定理

$(X, \mathscr{S}, \mu)$: a measure space
$x \in X$ に関する命題が
「ほとんど至るところ (a.e. = almost everywhere) 成立する」 $\Leftrightarrow$ $\mu(A) = 0$ となる集合 A が存在して $x \notin A$ のすべての x に対して成立する．
e.g., $f = g$ a.e. $\Leftrightarrow$ $\mu(\{f(x) \neq g(x)\}) = 0$
上のことを $\mu(f \neq g) = 0$ のように略記することが多い．

定理 2.1. (単調収束定理 (Monotone convergence theorem)

$$f_n \uparrow f,\ \int f_1 d\mu > -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

証明　$f_n - f_1$ を新たに f_n として $f_n \geq 0$ の場合を示す．命題 1.1 より単関数列 $f_{n,m}$ で $f_{n,m} \uparrow f_n$ となるものをとる．

$$\int f_{n,m}\, d\mu \uparrow \int f_n\, d\mu.$$

$g_n = f_{1,n} \vee f_{2,n} \vee \cdots \vee f_{n,n}$ とおく．すると

$$g_n \uparrow f, \quad \therefore \int g_n\, d\mu \uparrow \int f\, d\mu$$

一方 $g_n \leq f_n$ だから

$$\int g_n\, d\mu \leq \int g_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu$$

から $\int f_n\, d\mu \uparrow \int f\, d\mu$ が従う． □

定理 2.2. (Fatou's lemma) $f_n \geq 0$ ならば

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

証明　$g_n = \inf_{m \geq n} f_m$ とすると $g_n \uparrow \varliminf_{n\to\infty} f_n$. よって

$$\int g_n \, d\mu \uparrow \int \varliminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

ところで $\int f_n \, d\mu \geq \int g_n \, d\mu$ だから

$$\varliminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int \varliminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

□

定理 2.3. (Lebeque's dominated convergence therorem) $f_n, g \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{S}, \mu)$, $|f_n(x)| \leq g(x)$, $f_n \to f$ a.e. ならば $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{S}, \mu)$ で

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

証明

$$h_n = \inf\{f_m;\, m \geq n\}$$
$$j_n = \sup\{f_m;\, m \geq n\}$$

とおく．$h_n \leq f_n \leq j_n$. $h_n \uparrow f$, $h_1 \geq -|g|$ より $\int h_1 \, d\mu > -\infty$ である．よって単調収束定理より,

$$\int h_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu.$$

逆に $-j_n$ を考えれば $-j_n \uparrow -f$. $-j_n \geq -|g|$ より $-\int j_1 \, d\mu > -\infty$ である．

$$-\int j_n \, d\mu \uparrow -\int f \, d\mu.$$
$$\therefore \int j_n \, d\mu \downarrow \int f \, d\mu.$$

ところで

$$\int h_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu \leq \int j_n \, d\mu.$$

これから

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

が従う．　□

例 2.1. $X = (0, 1)$, $\mu = \lambda$, $f_n = n 1_{(0, \frac{1}{n})}$ とすると $f_n \to 0$ であるが

$$\int f_n \, d\mu = 1 \not\to 0.$$

($|f_n| \leq g$ となる $g \in \mathscr{L}^1$ は存在しない．)

Egoroff の定理

関数列 $\{f_n\}$ が概収束するときに次の Egoroff の定理が成り立つ．

定理 2.4. $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を有限測度空間とする．$\mathbb{R}$-値関数列 $\{f_n\}$ が f に概収束するとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$ となる集合 A が存在して，f_n は f に A 上で一様収束するように出来る．

証明　$m,n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_{m,n} = \{x \in X;\, |f_k(x) - f(x)| \le \frac{1}{m} \quad \forall k \ge n\}.$$

条件から m を固定するとき $\mu(X \setminus A_{m,n}) \downarrow 0$ である．(有限測度を使っている)．そこで m に対して $n = n(m)$ を選んで

$$\mu(A_{m,n(m)}) \le \frac{\varepsilon}{2^m}$$

ととる．$A = \bigcap_m A_{m,n(m)}$ とおくと

$$\mu(X \setminus A) \le \sum_m \mu(X \setminus A_{m,n(m)}) \le \sum_m \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.$$

A 上で一様収束していることは明らかだろう． □

有限測度の場合はこの定理を用いてdominated convergence theorem を証明することも可能である．

積分記号下での微分

さて，収束定理の応用として積分記号下での微分について述べよう．$(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間として，$t \in I = (\alpha, \beta)$ でパラメーター付けられた関数の族 $f(x,t)$ が与えられているとする．$f(x,t) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ を仮定して

$$F(t) = \int f(x,t)\, d\mu(x) \tag{2.1}$$

の微分可能性の問題を考える．

定理 2.5. 関数 $f(x,t)$ は x の関数としては可積分，t の関数として微分可能であるとし，さらに X 上の可積分関数 $\varphi(x)$ が存在して $|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}| \le \varphi(x)$ が成り立っているとする．このとき (2.1) で定義される関数 $F(t)$ は微分可能で

$$\frac{d}{dt} \int f(x,t)\, d\mu(x) = \int \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\, d\mu(x)$$

が成り立つ．

証明　任意の $t_0 \in I$ を固定すると，仮定から

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)}{h} = \frac{\partial f(x, t_0}{\partial t}$$

であるから，可測関数の極限として $\frac{\partial f(x,t_0}{\partial t}$ も可測である．また平均値の定理より

$$\frac{f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)}{h} = \frac{\partial f(x, t_0 + \theta h)}{\partial t}$$

となる $\theta \in (0, 1)$ が存在する．h は十分小さいところで考えればよいので θ は x, h に依存するが $t_0 + \theta h \in I$ である限り

$$\left| \frac{f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)}{h} \right| \leq \varphi(x)$$

が成り立つ．これから定理 2.3 を用いて

$$\lim_{h \to 0} \int \frac{f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)}{h} \, d\mu(x) = \int \frac{\partial f(x, t_0)}{\partial t} \, d\mu(x)$$

が示せる．h は連続的に動かしているが，0 に収束する任意の列についていえればよいのでこのことが示せる．　□

ここで一つ例を挙げよう．

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

とする．被積分関数を t で微分すると $-e^{-tx} \sin x$ だから t を (ε, ∞) で考えれば定理の条件をみたしている．例えば $\varphi(x)$ として $e^{-\varepsilon x}$ が取れる．従って t で微分して

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx.$$

ところで

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-tx} (\cos x + i \sin x) \, dx &= \int_0^\infty e^{-tx} e^{ix} \, dx = \int_0^\infty e^{(i-t)x} \, dx \\
&= \left[\frac{1}{i - t} e^{(i-t)x} \right]_0^\infty = -\frac{1}{i - t} = \frac{t + i}{t^2 + 1}.
\end{aligned}$$

これから

$$\int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

つまり $F'(t) = -\frac{1}{t^2+1}$. 原始関数を求めれば

$$F(t) = -\arctan t + C.$$

$t \to \infty$ として $F(t) \to 0$ なので $C = \frac{\pi}{2}$. よって

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

が示せる．

3.　積測度

$(X, \mathscr{S}, \mu)$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$: 測度空間

$\rho(A \times B) = \mu(A) = \nu(B)$ となる測度 ρ が構成できることを示す．この測度を**積測度** (product measure) という．ここでも $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ とする．

$\mathscr{R} = \{A \times B;\ A \in \mathscr{S},\ B \in \mathscr{B}\}$ は semiring である．

定理 3.1. ρ は $\mathscr{R}$ で完全加法的である．

証明　$A \in \mathscr{S}$, $B \in \mathscr{B}$ をとり

$$A \times B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \quad \text{(disjoint)}$$
$$A_i \in \mathscr{S},\ B_i \in \mathscr{B}$$

と表されたとする．

$$1_A(x)1_B(y) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i}(x)1_{B_i}(y)$$

である．x を固定して ν で積分して

$$\underbrace{\int_Y 1_A(x)1_B(y)\,d\nu(y)}_{= 1_A(x)\nu(B)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\int_Y 1_{A_i}(x)1_{B_i}(y)\,d\nu(y)}_{= \sum_i 1_{A_i}(x)\nu(B_i)} \quad \text{(monotone convergence theorem)}$$

さらに μ で積分して

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i).$$

□

$\mathscr{A}$ を $\mathscr{R}$ で生成される ring, 即ち $\mathscr{R}$ の元の finite disjoint union

$X \times Y$ より $\mathscr{A}$ は algebra となり第 1 章定理 4.4 より ρ は $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{S} \otimes \mathscr{B}$ に σ-加法的に拡張できる．さらに μ, ν が σ-finite ならば拡張は一意的である．

定理 3.2. $\mu(X) < \infty$, $\nu(Y) < \infty$ とする．このとき $E \in \mathscr{S} \otimes \mathscr{B}$ に対し，

$$\int_Y \left\{\int_X 1_E(x,y)\,d\mu(x)\right\} d\nu(y) = \int_X \left\{\int_Y 1_E(x,y)\,d\nu(y)\right\} d\mu(x). \tag{3.1}$$

(ここでは関数の可測性も定理の主張の中に含まれる)

証明

$$\mathscr{F}=\{E\in\mathscr{S}\otimes\mathscr{B};\int_Y\left\{\int_X 1_E(x,y)\,d\mu(x)\right\}d\nu(y)=\int_X\left\{\int_Y 1_E(x,y)\,d\nu(y)\right\}d\mu(x)\}$$

とおく．まず $E=A\times B$, $A\in\mathscr{S}$, $B\in\mathscr{B}$ のときは $E\in\mathscr{F}$ である．実際

$$\int_Y\left\{\int_X 1_A(x)1_B(y)\,d\mu(x)\right\}d\nu(y)=\mu(A)\int_Y 1_B(y)\,d\nu(y)=\mu(A)\nu(B).$$

同様に

$$\int_Y\left\{\int_X 1_A(x)1_B(y)\,d\mu(x)\right\}d\nu(y)=\mu(A)\int_Y 1_B(y)\,d\nu(y)=\mu(A)\nu(B).$$

$\mathscr{F}$ が $A\times B$ の形の有限個の直和でかけるものも含むことは明らか．

次に $\mathscr{F}$ は単調族である．実際 $E_n\in\mathscr{F}$, $E_n\uparrow E$ ならば単調収束定理より $E\in\mathscr{F}$ が分かる．もう少し説明すれば y を固定したとき $1_{E_n}(x,y)$ は x の可測関数で各点 x で $1_E(x,y)$ に収束する．従って x の関数として $1_E(x,y)$ は可測である．(つまり切断面 $E^y=\{x\in X;\,(x,y)\in E\}\in\mathscr{S}$.) さらに単調収束定理から

$$\int_X 1_{E_n}(x,y)\,d\mu(x)\to\int_X 1_E(x,y)\,d\mu(x)$$

左辺は y の可測関数であったから，その極限として右辺も可測関数になる．以上のような議論により $E\in\mathscr{F}$ が示せるわけである．

$E_n\in\mathscr{F}$, $E_n\downarrow E$ のときも $\mu(X)<\infty$, $\nu(Y)<\infty$ より $1_X\in\mathscr{L}^1(\mu)$, $1_Y\in\mathscr{L}^1(\nu)$ から Lebesgue's dominated convergence theorem から $E\in\mathscr{F}$ が示せる．

以上で $\mathscr{F}$ は $A\times B$ の形の集合およびその有限直和を含み，さらに単調族であるから第1章定理 4.6 から $\mathscr{S}\otimes\mathscr{B}$ に一致することがわかる．　□

定理 3.3. $(X,\mathscr{S},\mu)$, $(Y,\mathscr{B},\nu)$ を σ-有限測度空間．このとき ρ は $\mathscr{S}\otimes\mathscr{B}$ に一意的に拡張できるが，$E\in\mathscr{S}\otimes\mathscr{B}$ に対し

$$\rho(E)=\int_Y\left\{\int_X 1_E(x,y)\,d\mu(x)\right\}d\nu(y)=\int_X\left\{\int_Y 1_E(x,y)\,d\nu(y)\right\}d\mu(x).\tag{3.2}$$

証明　μ,ν が有限測度のとき

$$\alpha(E)=\int_Y\left\{\int_X 1_E(x,y)\,d\mu(x)\right\}d\nu(y)$$

で定めると，単調収束定理より α は σ-加法的である．また

$$\alpha(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$$

が成り立つ．拡張の一意性から $\rho=\alpha$ が成立する．

μ, ν が σ-有限のときは $A_n \uparrow X$, $B_n \uparrow Y$, $\mu(A_n) < \infty$, $\nu(B_n) < \infty$ となる A_n, B_n をとり，上の結果から

$$\begin{aligned}\rho(E \cap (A_n \times B_n)) &= \int_Y \left\{ \int_X 1_{E\cap(A_n\times B_n)}(x,y)\, d\mu(x) \right\} d\nu(y) \\ &= \int_X \left\{ \int_Y 1_{E\cap(A_n\times B_n)}(x,y)\, d\nu(y) \right\} d\mu(x).\end{aligned}$$

$n \to \infty$ として単調収束定理より

$$\rho(E) = \int_Y \left\{ \int_X 1_E(x,y)\, d\mu(x) \right\} d\nu(y) = \int_X \left\{ \int_Y 1_E(x,y)\, d\nu(y) \right\} d\mu(x).$$

□

定理 3.4. (Fubini-Tonelli) $(X, \mathscr{S}, \mu)$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ を σ-有限測度空間．$f\colon X \times Y \to [0,\infty]$: 可測，または $f \in \mathscr{L}^1(X \times Y, \mathscr{S} \otimes \mathscr{B}), \mu \times \nu)$ のとき

$$\int f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left\{ \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right\} d\nu(y) = \int_X \left\{ \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right\} d\mu(x). \tag{3.3}$$

ここで $f \in \mathscr{L}^1$ の場合は $\int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ は ν-a.e. で有限，$\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ は μ-a.e. で有限である．

証明　f が指示関数の場合は定理 3.3 で示した．これから単関数の場合も容易である．非負の場合は単調収束定理から成り立つ．$\mathscr{L}^1$ の場合は，正，負の部分に分けて考えれば明らかである． □

完備な測度を扱うときは Fubini の定理は多少注意が必要である．本質的なところは終わっているので概略だけ述べる．まず関数に関して次のことに注意しよう．

命題 3.5. $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とし，$(\mathscr{S}^*_\mu, \bar{\mu})$ を完備化とする．$f\colon X \to [-\infty, \infty]$ に対して次は同値:

(i) f は $\mathscr{S}^*_\mu$ 可測.

(ii) $\mathscr{S}$-可測関数 $\underline{f}$, $\overline{f}$ が存在し $\underline{f} \le f \le \overline{f}$, $\mu(\underline{f} \ne \overline{f}) = 0$.

証明　(i) ⇒ (ii)　$f \ge 0$ の場合を示せばよい．$\mathscr{S}^\mu$ 単関数の列 f_n が存在して $f_n \uparrow f$ とできる．f_n は単関数だから $f_n = c_{n,j} 1_{A_{n,j}}$ とかける．$\mathscr{S}^*_\mu$ は $\mathscr{S}$ の μ-完備化であるから $\underline{A}_{n,j}$, $\overline{A}_{n,j} \in \mathscr{S}$ で

$$\underline{A}_{n,j} \subseteq A_{n,j} \subseteq \overline{A}_{n,j}$$

かつ $\mu(\overline{A}_{n,j} \setminus \underline{A}_{n,j}) = 0$ となるものが存在する．そこで $\overline{f}_n = c_{n,j} 1_{\overline{A}_{n,j}}$, $\underline{f}_n = c_{n,j} 1_{\underline{A}_{n,j}}$ とおけば $\overline{f}_n \le f_n \le \underline{f}_n$ かつ $\overline{f}_n = \underline{f}_n$ μ-a.e. である．ここで

$$\overline{f} = \overline{\lim_n}\, \overline{f}_n$$

$$\underline{f} = \varliminf_n f_n$$

とおけば f_n が a.e. で収束するから $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$, $\overline{f} = \underline{f}$ μ-a.e. が成立している．

(ii) ⇒ (i)　条件から任意の c に対して $\{\underline{f} \geq c\} \subseteq \{f \geq c\} \subseteq \{\overline{f} \geq c\}$ である．仮定から $\mu(\{\overline{f} \leq c\} \setminus \{\underline{f} \geq c\}) = 0$ であるから $\{f \geq c\} \in \mathscr{S}_\mu^*$ が従う． □

$(X, \mathscr{S}, \mu)$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ を完備測度空間とする．さらに $\mathscr{S} \otimes \mathscr{B}$ の $\rho = \mu \times \nu$ による完備化を $\mathscr{M}$ とする．

命題 3.6. $E \in \mathscr{M}$ が $\rho(E) = 0$ をみたせば μ-a.e. x に対し $\nu(E_x) = 0$, ν-a.e. y に対し $\mu(E^y) = 0$. ここで $E_x = \{y \in Y;\, (x, y) \in E\}$, $E^y = \{x \in X;\, (x, y) \in E\}$.

証明　測度の完備化の成立から $B \supseteq E$ で $\rho(B) = \rho(E) = 0$ となる $B \in \mathscr{S} \otimes \mathscr{B}$ が存在する．よって定理 3.3 から

$$\mu\text{-a.e. } x \text{ に対して } \nu(E_x) \leq \nu(B_x) = 0$$
$$\nu\text{-a.e. } y \text{ に対して } \mu(E^y) \leq \mu(B^y) = 0$$

が成り立つ． □

完備化したものの Fubini の定理は次のように定式化される．証明は上の命題を使えば明らかであろう．

定理 3.7. $(X, \mathscr{S}, \mu)$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ を 完備 σ-有限測度空間．$(X \times Y, \mathscr{S} \otimes \mathscr{B}, \mu \times \nu)$ の完備化を $(X \times Y, \mathscr{M}, \rho)$ とする．

$f\colon X \times Y \to [0, \infty]$: $\mathscr{M}$-可測，または $f \in \mathscr{L}^1(X \times Y, \mathscr{M}, \rho)$ のとき μ-a.e. x に対し f_x は $\mathscr{B}$-可測，ν-a.e. y に対し f^y は $\mathscr{S}$-可測．さらに $y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ は $\mathscr{B}$-可測，$x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$ は $\mathscr{S}$-可測 で次が成立する:

$$\int f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left\{ \int_X f(x, y)\, d\mu(x) \right\} d\nu(y) = \int_X \left\{ \int_Y f(x, y)\, d\nu(y) \right\} d\mu(x). \tag{3.4}$$

ここで $f \in \mathscr{L}^1$ の場合は $\int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ は ν-a.e. で有限，$\int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$ は μ-a.e. で有限である．

今までは二つの測度の積を扱ったが，二つでなく一般の個数の直積に対しても同様のことが成り立つ．

定理 3.8. $(X_i, \mathscr{S}_i, \mu_i)$: σ-finite measure spaces, $i = 1, \ldots, n$. $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ 上で μ を

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \cdots \cdot \mu_n(A_n) \quad A_1 \in \mathscr{S}_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}_n \tag{3.5}$$

と定めると，μ は $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{S}_n$ に一意的に σ-加法的に拡張され $f \geq 0$ または $f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$ のとき

$$\int_X f\, d\mu = \int_{X_n} \left\{ \ldots \left\{ \int_{X_1} f(x_1, \ldots, x_n) d\mu(x_1) \right\} \ldots \right\} d\mu_n(x_n) \tag{3.6}$$

が成立する．

λ: the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$

$\lambda^n = \underbrace{\lambda \times \cdots \times \lambda}_{n}$: the Lebesgue mesure on $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度について測度論的に具体例を見ていく．$T_c\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $T_c x = cx$ $c > 0$ で定める (c 倍する).

claim 1. $\lambda \circ T_c^{-1} = c^{-n}\lambda$ (体積が c^{-n} される).

$\because$

$$\lambda \circ T_c^{-1}((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]) = \lambda((\frac{a_1}{c}, \frac{b_1}{c}] \times \cdots \times (\frac{a_n}{c}, \frac{b_n}{c}]) = \frac{1}{c^n}\lambda((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]).$$

これから $\lambda \circ T_c^{-1} = c^{-n}\lambda$ が従う．//

中心 a, 半径 r の閉球 を次の記号であらわす:

$$B_n(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - a| \leq r\}.$$

claim 2. $\lambda^n(B_n(0, r)) = r^n \lambda_n(B_n(0, r))$.

$\because$ $T_r^{-1}(B_n(0, r)) = B_n(0, r)$ だから

$$\begin{array}{c} (\lambda^n \circ T_c^{-1})(B_n(0, r)) = \lambda^n(B_n(0, 1)). \\ \| \\ r^{-n}\lambda^n(B_n(0, r)) \end{array}$$

よって $\lambda^n(B_n(0, r)) = r^n \lambda^n(B_n(0, 1))$. //

$v_n = \lambda^n(B_n(0, r))$ とおこう (n 次元単位球の体積).

$M\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ を $M(x) = |x|$ で定める．

claim 3. $d(\lambda^n \circ M^{-1})(r) = n v_n r^{n-1} dr$.

$\because$

$$(\lambda_n \circ M^{-1})((a, b]) = \lambda^n(B_n(0, b) \setminus B_n(0, a)) = v_n(b^n - a^n) = \int_a^b n v^n r^{n-1}\, dr.$$

よって

$$\lambda_n \circ M^{-1} = n v^n r^{n-1}\, dr.$$

この場合に定理 1.7 を適用すれば

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, d\lambda^n(x) = \int_0^\infty f(r) n v_n r^{n-1}\, dr.$$

半径だけの関数の積分は 1 次元に帰着できる．

v_n の値は？ $v_1 = 2$, $v_2 = \pi$, $v_3 = \frac{4}{3}\pi$. 一般の v_n の計算は正規分布を用いて計算できる.

$$\begin{array}{c} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}dx = \int_0^\infty e^{-r^2} n v_n r^{n-1}\, dr \\ \| \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\, dx_1 \ldots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2}\, dx_n \\ \| \\ \displaystyle\left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \right\}^n \end{array}$$

ここで Γ 関数が必要になる. 右辺で $t = r^2$ として変数変換すると

$$\int_0^\infty e^{-r^2} n v_n r^{n-1}\, dr = \int_0^\infty e^{-t} n v_n t^{(n-2)/2} \frac{1}{2}\, dt = \frac{n v_n}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1}\, dt = \frac{n v_n}{2} \Gamma(\frac{n}{2}).$$

ここで Γ は

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt$$

で定義される. 自然数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ となるので, 階乗の一般化である. 特に

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

である. 従って上の n のときの関係式は

$$\frac{n v_n}{2} = \pi^{n/2}.$$

$$\therefore\ v_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}.$$

注意 3.1. $n v_n$ は $n-1$ 次元球面の表面積である.

4. Daniell-Stone 積分

積分 $f \mapsto \int f d\mu$ は次の線形性をみたす:

$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\ (\text{or}\ \mathbb{C}).$$

f の関数と見れば線型汎関数である. この節では線型汎関数から測度が定まることを示すことを目標とする.

$$\text{測度} \longleftrightarrow \text{線型汎関数}$$

X を一般的な空間として

$\mathscr{L}$: X 上の実関数の集まり．

$\mathscr{L}$ が実ベクトル空間 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f,\, g \in \mathscr{L}$, $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ に対し $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}$.

$\mathscr{L}$ がベクトル束 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\mathscr{L}$ はベクトル空間

(ii) $f,\, g \in \mathscr{L} \;\Rightarrow\; f \vee g \in \mathscr{L}$

ここで $f \vee g = \max\{f, g\}$, $f \wedge g = \min\{f, g\}$.

例 4.1.　(1) $(X, \mathscr{S}, \mu)$ が測度空間のとき $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ はベクトル束である．

(2) X が位相空間のとき，$C_b(X)$ (有界連続関数全体) はベクトル束である．

定義 4.1. $I\colon \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ が次をみたすとき**前積分** (pre-integral) という:

(1) I は線型: $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$.

(2) I は非負: $f \geq 0 \;\Rightarrow\; I(f) \geq 0$.

(3) $f_n \downarrow 0 \;\Rightarrow\; I(f_n) \downarrow 0$　(一種の連続性)

(3) の条件は各点収束の意味である．

I がこれらの条件をみたすとき，測度 μ が存在して $I(f) = \int f\, d\mu$ と表されることを目標とする．

注意 4.1. K をコンパクトな空間として $\mathscr{L} = C(K)$ としたとき，(1), (2) から (3) は自動的に従う．

$\because$ $f_n \downarrow 0$ とする．Dini の定理から f_n は 0 に一様収束する．$c_n = \|f_n\|_\infty$ とおけば $c_n \downarrow 0$ である．よって

$$0 \leq I(f_n) \leq I(c_n 1_X) = c_n I(1_X) \to 0. \;//$$

$K = [0, 1]$, $f \in C([0, 1])$ に対し $I(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$ (Riemann 積分) としたとき，I は (1), (2) をみたし，従って (3) もみたす．従ってこれから測度が定まるが，これが Lebesgue 測度である．

さて，測度の構成のために準備をする．$\mathscr{L}$ から $X \times \mathbb{R}$ の部分集合を次のように定める: $f,\, g \in \mathscr{L}$, $f \leq g$ のとき

$$[f, g) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R};\; f(x) \leq t < g(x)\}. \tag{4.1}$$

これから

$$\mathscr{S} = \{[f, g);\; f,\; g \in \mathscr{L},\; f \leq g\} \tag{4.2}$$

とし，$\mathscr{S}$ 上の関数 ν を

$$\nu([f, g)) = I(g) - I(f) \tag{4.3}$$

で定める．逆に I は ν を用いて

$$I(f) = \nu([0, f_+)) - \nu([0, f_-)) \tag{4.4}$$

と表すことが出来る．

定理 4.2. ν は $\mathscr{S}$ 上 σ-加法的で，従って $\sigma(\mathscr{S})$ 上に σ-加法的に拡張できる．

証明 $\mathscr{S}$ が semiring であることは区間のときと同様．実際

$$[f,g)\cap[h,j)=[f\vee h, f\vee h\vee(g\wedge j))$$

であり

$$[f,g)\setminus[h,j)=[f, f\vee(g\wedge h))\cup[g\wedge(j\vee f), g)$$

となることから分かる．

次に ν が $\mathscr{S}$ 上 σ-加法的であることを示す．

$$[f,g)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f_n,g_n)\quad(\text{disjoint})$$

とする．点ごとに考えれば，区間の長さに関しては σ-加法的であった ($G(t)=t$ という関数に第 1 章定理 2.5 を用いればよい) から

$$g(x)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(g_n(x)-f_n(x))$$

が成り立つ．ここで

$$h_n(x)=g-f-\sum_{k=1}^{n}(g_k-f_k)$$

とおけば $h_n\in\mathscr{S}$ で $h_n\downarrow 0$ である．また線型性から

$$I(h_n)=I(g)-I(f)-\sum_{k=1}^{n}(I(g_k)-I(f_k))=\nu([f,g))-\sum_{k=1}^{n}\nu([f_k,g_k)).$$

ところで左辺は条件から $I(h_n)\to 0$ となるから $n\to\infty$ として

$$\nu([f,g))=\sum_{k=1}^{\infty}\nu([f_k,g_k))$$

が成り立つ． $\square$

$\mathscr{L}$ は Stone ベクトル束 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f\in\mathscr{L}\ \Rightarrow\ f\wedge 1\in\mathscr{L}$

$(X,\mathscr{B})$ で $\mathscr{B}$ が σ-ring のとき $f\colon X\to\mathbb{R}$ が $\mathscr{B}$-可測である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A\subseteq\mathbb{R}$, Borel, $0\notin A$ に対し $f^{-1}(A)\in\mathscr{B}$.

定理 4.3. $\mathscr{L}$ を Stone ベクトル束，I を前積分とするとき，次をみたす X 上の測度 μ が存在する:

$$I(f)=\int f\,d\mu,\quad f\in\mathscr{L}. \tag{4.5}$$

また μ は，すべての $\mathscr{L}$ を可測にする最小の σ-ring $\mathscr{B}$ 上で一意的である．さらに $1_X\in\mathscr{L}$ ならば μ はすべての $\mathscr{L}$ を可測にする σ-algebra で一意的である．

証明　$f \in \mathscr{L}$ をとる．

$$g_n = (n(f - f \wedge 1)) \wedge 1$$

とおくと $g_n \uparrow 1_{\{f>1\}}$ であるから

$$[0, cg_n) \uparrow \{f > 1\} \times [0, c).$$

よって $\{f > 1\} \times [0, c)$ は $\mathscr{L}$ で生成される σ-ring に属する．

ここで

$$\mathscr{C} = \sigma\text{-ring generated by } \{h > 1\},\ h \in \mathscr{L}$$

とおく．また ν を定理 4.2 で構成した測度とし，$A \in \mathscr{C}$ に対し

$$\mu(A) = \nu(A \times [0, 1))$$

と定める．μ は σ-ring $\mathscr{C}$ 上で σ-additive である．

<u>claim 1.</u> $c > 0$, $A \in \mathscr{C}$ に対し

$$\nu(A \times [0, c)) = c\mu(A).$$

$\because$ まず $c > 0$, $f \in \mathscr{L}$ に対し

$$\begin{aligned} \nu(\{f > 1\} \times [0, c)) &= \lim_{n\to\infty} \nu([0, cg_n)) = \lim_{n\to\infty} I(cg_n) = c \lim_{n\to\infty} I(g_n) \\ &= c\nu(\{f > 1\} \times [0, 1)) = c\mu(\{f > 1\}). \end{aligned}$$

次に $c > 0$, $f \in \mathscr{L}$ を固定して

$$\mathscr{D}_{c,f} = \{A \subseteq X;\ \nu(\{f > 1\} \cap A \times [0, c)) = c\mu(\{f > 1\} \cap A)\}$$

とおく．$g \in \mathscr{L}$ のとき $\{f > 1\} \cap \{g > 1\} = \{f \wedge g > 1\}$ であるから

$$\begin{aligned} \nu(\{f > 1\} \cap \{g > 1\} \times [0, c)) &= \nu(\{f \wedge g > 1\} \times [0, c)) \\ = c\mu(\{f \wedge g > 1\}) &= c\mu(\{f > 1\} \cap \{g > 1\}). \end{aligned}$$

即ち $\{g > 1\} \in \mathscr{D}_{c,f}$ である．また $\mathscr{D}_{c,f}$ が λ-system であることは容易に分かる．また $X \in \mathscr{D}_{c,f}$ も上のことから明らかである．さらに $\{g > 1\}$ という形の集合は積について閉じている．以上で第 1 章定理 4.9 から $\mathscr{D}_{c,f}$ は $\mathscr{C}$ を含む．

さて次に $A \in \mathscr{C}$ をとると，A は $\{f > 1\}$ の形の可算個の集合で覆える: $A \subseteq \bigcup_j \{f_j > 1\}$. $g_j = f_1 \vee \cdots \vee f_n$ とおけば $\{g_j > 1\}$ は単調増大で A を覆っている．

$$\nu(\{g_j > 1\} \cap A \times [0, c)) = c\mu(\{g_j > 1\} \cap A\}).$$

なので $j \to \infty$ とすれば求める結果を得る．　//

claim 2. $I(f)=\int f\,d\mu$, $f\in\mathscr{L}$.
∵ 一般に $\mathscr{C}$-simple function $h=\sum_i c_i 1_{A_i}$ (A_i: disjoint) に対し

$$\nu([0,h))=\sum_i \nu([0,c_i 1_{A_i})=\sum_i \nu(A_i\times[0,c_i))=\sum_i c_i\mu(A_i)=\int h\,d\mu.$$

次に $f\in\mathscr{L}$, $f\ge 0$ に対し $\mathscr{C}$-単関数 $f_n\uparrow f$ をとると $[0,f_n)\uparrow[0,f)$ だから

$$\begin{aligned}I(f)=\nu([0,f))&=\lim_{n\to\infty}\nu([0,f_n))\\&=\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu=\int f\,d\mu.\end{aligned}$$

一般の $f\in\mathscr{L}$ に対しては $f=f_+-f_-$ と分解すればよい． //
claim 3. μ は $\mathscr{C}$ 上で一意的に定まる．
∵

$$I(f)=\int f\,d\mu=\int f\,d\xi,\quad f\in\mathscr{L}$$

と二通りにかけたとする．$g_n=(n(f-f\wedge 1))\wedge 1$ として $g_n\uparrow 1_{\{f>1\}}$ より

$$\mu(f>1)=\lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\xi=\xi(f>1).$$

ここで $f\in\mathscr{L}$ に対して

$$\mathscr{D}_f=\{A\subseteq X;\,\mu(\{f>1\}\cap A)=\xi(\{f>1\}\cap A)\}$$

とおくと $\mathscr{D}_f$ は λ-system で X を含む．よって $\mathscr{D}_f$ は $\mathscr{C}$ を含んでいる．あとは $\mathscr{C}$ の元は $\{f>1\}$ という形の集合の可算個で覆われていることを使えば，claim 2 と同様に $\mathscr{C}$ 上で μ と ξ が一致することが分かる．これで一意性が示せた． □

関連図書

[1] R. M. Dudley, “*Real analysis and probability*,” Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1989.

[2] 伊藤 清三, ルベーグ積分入門, 裳華房, 東京, 1963.

[3] 吉田 伸生, ルベーグ積分入門, 遊星社, 東京, 2006.