数学基礎 B 小テスト

重川 一郎

2012年度後期

$\boxed{1}$ 次の広義積分の収束性について，理由を述べよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x^4}\,dx$ は発散する．

[解答] $x=0$ の近傍で $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + 0(x^3)$ に注意すれば，$\frac{x-\sin x}{x^4} \sim \frac{1}{6x}$ となるから積分は発散． $\square$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx$ は収束する．

[解答] $x=1$ の近傍で $\log x \sim x-1$ なので $\frac{\log x}{1-x} \sim -1$ となり積分は収束． $\square$

$\boxed{2}$ 次の積分は $s \geq 2$ のとき発散し， $s<2$ のとき収束することを示せ．

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^s}\,dx$$

[解答] $x=0$ の近傍で $\sin x \sim x$ に注意すればよい． $\square$

$\boxed{3}$ 次の等式を示せ．ただし Γ はガンマ関数である．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$

[解答] $t=x^3$ とおけば $dt = 3x^2dx = 3t^{2/3}\,dx,\quad dx = \frac{1}{3}t^{-2/3}\,dt$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^3} &= \int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{3}t^{-2/3}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{(1/3)-1}e^{-t}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3}).\end{aligned}$$

$\square$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(\log x)^\alpha}{x^2}\,dx = \Gamma(\alpha+1).$

[解答] $x=e^t$ すなわち $t=\log x$ とおけば $dx = e^t\,dt$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{(\log x)^\alpha}{x^2}\,dx &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-2t}e^t\,dt \\ &= \int_0^\infty t^{\alpha+1-1}e^{-t}\,dt \\ &= \Gamma(\alpha+1).\end{aligned}$$

□

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^n(\log x)^m\,dx = (-1)^m\frac{\Gamma(m+1)}{(n+1)^{m+1}}$ (n, m は非負整数)

[解答] $x = e^{-kt}$ すなわち $-kt = \log x$ とおけば $dx = -ke^{-kt}\,dt$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n(\log x)^m\,dx &= \int_\infty^0 e^{-knt}(-kt)^m(-k)e^{-kt}\,dt\\ &= (-1)^m k^{m+1}\int_0^\infty t^m e^{-k(n+1)t}\,dt.\end{aligned}$$

従って $k = \frac{1}{n+1}$ ととれば

$$\begin{aligned}与式 &= (-1)^m\frac{1}{(n+1)^{m+1}}\int_0^\infty t^{m+1-1}e^{-t}\,dt\\ &= (-1)^m\frac{\Gamma(m+1)}{(n+1)^{m+1}}.\end{aligned}$$

□

$\boxed{4}$ 次のことを示せ.

(1) 曲線 $y = x^2$, $0 \le x \le a$ の長さ l は $a\sqrt{a^2+1/4} + (1/4)\log(a+\sqrt{a^2+1/4}) + (1/4)\log 2$ である.

[解答]

$$\begin{aligned}l &= \int_0^a \sqrt{(2x)^2+1}\,dx\\ &= 2\int_0^a \sqrt{x^2+1/4}\,dx\\ &= [x\sqrt{x^2+1/4} + (1/4)\log(x+\sqrt{x^2+1/4})]_0^a\\ &= a\sqrt{a^2+1/4} + (1/4)\log(a+\sqrt{a^2+1/4}) - (1/4)\log(1/2)\\ &= a\sqrt{a^2+1/4} + (1/4)\log(a+\sqrt{a^2+1/4}) + (1/4)\log 2.\end{aligned}$$

□

(2) 曲線 $y = \cosh x$, $0 \le x \le a$ の長さ l は $\sinh a$ である.

[解答]

$$\begin{aligned}l &= \int_0^a \sqrt{(\sinh x)^2+1}\,dx\\ &= \int_0^a \cosh x\,dx\\ &= [\sinh x]_0^a\\ &= \sinh a.\end{aligned}$$

□

(3) 曲線 $y = e^x$, $0 \le x \le \log a$ の長さ l は $\sqrt{1+a^2} - \sqrt{2} + \log\dfrac{\sqrt{1+a^2}-1}{a(\sqrt{2}-1)}$ である.

($t = \sqrt{e^{2x}+1}$ と変数変換してみよ)

[解答]

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{\log a} \sqrt{e^{2x}+1}\,dx \\
&\quad t=\sqrt{1+e^{2x}}, \quad dt = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{t^2-1}{t}dx \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} (1+\frac{1}{t^2-1})\,dt \\
&= \sqrt{1+a^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} (\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})\,dt \\
&= \sqrt{1+a^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[\log\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \\
&= \sqrt{1+a^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}(\log\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{\sqrt{1+a^2}+1}-\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}) \\
&= \sqrt{1+a^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}(\log\frac{(\sqrt{1+a^2}-1)^2}{a^2}-\log(\sqrt{2}-1)^2) \\
&= \sqrt{1+a^2}-\sqrt{2}+\log\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a(\sqrt{2}-1)}.
\end{aligned}
$$

$\square$

$\boxed{5}$ 次を示せ.

(1) 極表示された曲線 $r=a\theta,\ 0\le\theta\le\pi$ の長さ l は $\frac{a}{2}(\pi\sqrt{\pi^2+1}+\log(\pi+\sqrt{\pi^2+1})$ である.

[解答]

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2+a^2\theta^2}\,d\theta \\
&= a\int_0^{\pi} \sqrt{1+\theta^2}\,d\theta \\
&= \frac{a}{2}[\theta\sqrt{\theta^2+1}+\log(\theta+\sqrt{\theta^2+1})]_0^{\pi} \\
&= \frac{a}{2}(\pi\sqrt{\pi^2+1}+\log(\pi+\sqrt{\pi^2+1}).
\end{aligned}
$$

$\square$

(2) 極表示された曲線 $r=e^{\theta},\ -\pi\le\theta\le\pi$ の長さ l は $2\sqrt{2}\sinh\pi$ である.

[解答]

$$
\begin{aligned}
l &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{e^{2\theta}+e^{2\theta}}\,d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\theta}\,d\theta \\
&= \sqrt{2}[e^{\theta}]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 2\sqrt{2}\sinh\pi.
\end{aligned}
$$

$\square$

$\boxed{6}$ $n+1$ 次関数 $y=(x-a)(x-b)^n$ $(a<b)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}(b-a)^{n+2}$ であることを示せ.

[解答]

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)(x-b)^n\,dx &= \frac{1}{n+1}[(x-b)^{n+1}(x-a)]_a^b - \frac{1}{n+1}\int_a^b (x-b)^{n+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)}[(x-b)^{n+2}]_a^b \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}(a-b)^{n+2}.\end{aligned}$$

□

$\boxed{7}$ 行列 A を $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ で定める.

(1) A の固有方程式は $(\lambda+1)^2=0$ であることを示せ.

[解答]

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ 1 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+3)+4=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$$

□

(2) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる正則行列 P を求めよ.

[解答] (1) から固有値は -1 である.

$$(A+E)\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

を解いて $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ さらに

$$(A+E)\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を解いて $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. よって $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすればよい. □

$\boxed{8}$ 行列 A を $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ で定める.

(1) A の固有方程式は $\lambda(\lambda-2)^2=0$ であることを示せ.

[解答]

$$\begin{aligned}|\lambda E-A| &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 3 \\ 4 & \lambda+2 & -6 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+2 & 3\lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda\{(\lambda-3)(\lambda-1)+1\}=\lambda(\lambda^2-4\lambda+3+1)=\lambda(\lambda-2)^2\end{aligned}$$

□

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる正則行列 P を求めよ.

[解答] (1) から固有値は 0 と 2 である．0 に対しては

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

を解いて $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$．さらに固有値 2 に対しては

$$(A-2E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -4 & -4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

を解いて $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$．さらに

$$(A-2E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -4 & -4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ が得られる．よって $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ とすればよい． □

$\boxed{9}$ 次の極限を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + x^2 y}{2x^2 + y^2} = 0$

[解答] 極座標で

$$\frac{x^3 + x^2 y}{2x^2 + y^2} = \frac{r^3(\cos^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta}{r^2(2\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{r(\cos^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta}{(1+\cos^2\theta)}$$

より明らか. □

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ は存在しない.

[解答] $x = ty^2$ とすると

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{ty^4}{t^2y^4 + y^4} = \frac{t}{t^2+1}.$$

$y \to 0$ とすると，t 毎に値が違うので，極限は存在しない. □

$\boxed{10}$ 次の関数 $z = f(x,y)$ は原点において連続ではないことを示せ.

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2 + y^2 + y^3}{x^2 + xy^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[解答] 極座標で表す.

□

$\boxed{11}$ 次の関数の偏導関数を求めよ.

(1) $z = \log(x^2 + xy + y^2)$

(2) $z = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$

(3) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$

$\boxed{12}$ 次の関数 $z = f(x,y)$ の原点での連続性，偏微分可能性，全微分可能性を調べよ. (答え: 不連続だが，偏微分可能，全微分可能ではない)

$$z = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\boxed{13}$ 合成関数の微分を用いて $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.

(1) $z = \mathrm{Tan}^{-1}\, xy$, $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^{2t}$

(2) $z = e^{x^2 y}$, $x = \cos t$, $y = t^2$

(3) $z = f(x,y)$, $x = \cos t$, $y = \sin t$

$\boxed{14}$ 平面極座標 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対して，次のことに答えよ.

(1) $r_x = \cos\theta$, $r_y = \sin\theta$, $\theta_x = -\dfrac{1}{r}\sin\theta$, $\theta_y = \dfrac{1}{r}\cos\theta$ を用いて，$\dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ を示せ.

[解答]

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial r}r_y + \frac{\partial f}{\partial\theta}\theta_y = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}f + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}f = \left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right\}f.$$

□

(2) $x_r = \cos\theta$, $x_\theta = -r\sin\theta$, $y_r = \sin\theta$, $y_\theta = r\cos\theta$ を用いて $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ を示せ.

[解答]

$$f_\theta = \frac{\partial f}{\partial x}x_\theta + \frac{\partial f}{\partial y}y_\theta = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}f + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}f = \left\{-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right\}f.$$

□

(3) $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ をラプラシアンと呼ぶ. 極座標で表示すると $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ となることを示せ.

[解答]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&\quad + \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin\theta\cos\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} \\
&\quad + \frac{\cos\theta}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{-\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\cos\theta\sin\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\partial\partial r\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin\theta}{r}\sin\theta\partial\partial r\\
&-\frac{\sin\theta}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\
=&\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}
\end{aligned}
$$

□

$\boxed{15}$ テーラーの定理を用いて次を示せ.

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ とするとき $(x,y)=(1,0)$ において

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{2}y^2+o((x-1)^2+y^2)).$$

[解答]

$$
\begin{aligned}
f_x&=r_x=\frac{x}{r}\\
f_{xx}&=\frac{1}{r}-\frac{xr_x}{r^2}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}=\frac{y^2}{r^3}\\
f_{xy}&=-\frac{xr_y}{r^2}=-\frac{xy}{r^3}\\
f_y&=r_y=\frac{y}{r}\\
f_{yy}&=\frac{1}{r}-\frac{yr_y}{r^2}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}=\frac{x^2}{r^3}.
\end{aligned}
$$

よって

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{2}y^2+o((x-1)^2+y^2)).$$

□

(2) $f(x,y)=\tan^{-1}(x^2+y)$ とするとき $(x,y)=(0,0)$ において

$$f(x,y)=y+x^2+o(x^2+y^2).$$

[解答]

$$
\begin{aligned}
f_x&=\frac{2x}{1+(x^2+y)^2}\\
f_{xx}&=\frac{2(1+(x^2+y)^2)-2x\cdot 2(x^2+y)2x}{(1+(x^2+y)^2)^2}=\frac{2+2(x^2+y)^2-8x^2(x^2+y)}{(1+(x^2+y)^2)^2}\\
&=\frac{2+2(x^2+y)(y-3x^2)}{(1+(x^2+y)^2)^2},\\
f_{xy}&=\frac{-2x\cdot 2(x^2+y)}{(1+(x^2+y)^2)^2}=\frac{4x(x^2+y}{(1+(x^2+y)^2)^2},\\
f_y&=\frac{1}{1+(x^2+y)^2}\\
f_{yy}&=-\frac{2(x^2+y)}{1+(x^2+y)^2}
\end{aligned}
$$

より

$$f(x,y) = y + x^2 + o(x^2+y^2).$$

□

$\boxed{16}$ 関数の極値について次に応えよ．

(1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9axy$ は $a > 0$ のとき $(x,y) = (3a, 3a)$ で極小値をとり，$a = 0$ のとき極値をとらず，$a < 0$ のとき，$(x,y) = (3a,3a)$ で極大値をとることを示せ．

[解答]

$$f_x = 3x^2 - 9ay, \qquad f_y = 3y^2 - 9ax$$

極値の必要条件 $f_x = f_y = 0$ から

$$3x^2 - 9ay = 0, \qquad 3y^2 - 9ax = 0$$

から $y^4 - 27a^3y$ となり $y = 0, y = 3a$ が解となる．このとき $x = 0, x = 3a$ となる．
さらに 2 階の偏導関数を調べて判定する．

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -9a \\ -9a & 6y \end{pmatrix}$$

$a = 0$ のときはすべて 0 になる．$x = y$ の上で考えれば明らかに極値をとらないことが分かる．
$a \neq 0$ のときは $(x,y) = (0,0)$ では $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -81a^2 < 0$ となり，極値をとらない．$(x,y) = (3a,3a)$ では $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 243a^2 > 0$ となり，極値をとる．$f_{xx} = 6x = 18a$ だから a の符号に応じて $a > 0$ のとき極小で $a < 0$ のとき極大となる． □

(2) $f(x,y) = y^2 - x^3$ は極値をとらないことを示せ．

[解答]

$$f_x = -3x^2, \qquad f_y = 2y$$

極値の必要条件 $f_x = f_y = 0$ から $(x,y) = (0,0)$ となる．このとき 2 階の偏導関数は

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

従って，これでは判定できないが，$y = 0$ のとき $f(x,y) = -x^3$ で，3 次関数は正負が変わるから極値をとらない． □

$\boxed{17}$ 次を示せ．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\sin(x^2+y^2)\,dxdy = 0, \quad D = [0, \sqrt{2\pi}] \times [0, \sqrt{2\pi}].$

[解答]

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\sin(x^2+y^2)\,dxdy &= \int_0^{\sqrt{2\pi}} dx \int_0^{\sqrt{2\pi}} xy\sin(x^2+y^2)\,dy \\
&= \int_0^{\sqrt{2\pi}} dx[-\frac{1}{2}x\cos(x^2+y^2)]_0^{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_0^{\sqrt{2\pi}} dx(-\frac{x}{2})(\cos(x^2+2\pi) - \cos(x^2)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)^\alpha\,dxdy = \frac{2^{\alpha+2}-2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}, \quad \alpha \geq 0,\ D = [0,1]\times[0,1].$

[解答]

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x+y)^\alpha\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)^\alpha\,dy \\
&= \int_0^1 dx [\frac{1}{(\alpha+1)}(x+y)^{\alpha+1}]_0^1 \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{(\alpha+1)}((x+1)^{\alpha+1} - x^{\alpha+1}) \\
&= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}[(x+1)^{\alpha+2} - x^{\alpha+2}]_0^1 \\
&= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}(2^{\alpha+2} - 1 - 1) \\
&= \frac{2^{\alpha+2}-2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.
\end{aligned}
$$

$\square$

(3) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dxdy = 2, \quad D = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2].$

[解答]

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sin(x+y)\,dxdy &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dy \\
&= \int_0^{\pi/2} dx[-\cos(x+y)]_0^{\pi/2} \\
&= \int_0^{\pi/2} (-\cos(x+\pi/2) + \cos x)\,dx \\
&= [-\sin(x+\pi/2) + \sin x]_0^{\pi/2} \\
&= -\sin\pi + \sin(\pi/2) + \sin(\pi/2) - \sin 0 = 2.
\end{aligned}
$$

$\square$