2011年度前期 解析学I 演習問題

重川 一郎

平成23 年7 月25 日

$\boxed{1}$ 集合列 $\{A_n\}$ が単調増大，または単調減少のとき $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ であることを示せ．但し $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ は $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n = A$ が成り立つことを意味する．

$\boxed{2}$ 集合列 $\{A_n\}$ に対して次が成立することを示せ.

(1) $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X;$ 有限個の n を除いて $x \in A_n\}$

(2) $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X;$ 無限個の n に対して $x \in A_n\}$

$\boxed{3}$ 集合列 $\{A_n\}$ に対して次が成立することを示せ．(1_A は集合 A の定義関数を表す．)

(1) $(\varliminf_{n\to\infty} A_n)^c = \varlimsup_{n\to\infty} A_n^c$

(2) $1_{\varlimsup_{n\to\infty} A_n} = \varlimsup_{n\to\infty} 1_{A_n}$

(3) $1_{\varliminf_{n\to\infty} A_n} = \varliminf_{n\to\infty} 1_{A_n}$

$\boxed{4}$ X, Y を集合として $f\colon X \mapsto Y$ を写像とする．このとき $\{A_\lambda\}$ を X の部分集合の族，$\{B_\lambda\}$ を Y の部分集合の族とするとき，次が成立することを示せ.

(1) $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$

(2) $f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$

(3) $B_1, B_2 \subseteq Y$ ならば $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(4) $f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$

(5) $f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$

$\boxed{5}$ $\mathscr{A}$ を ring とする．このとき $A, B \in \mathscr{A} \ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathscr{A}$ となることを示せ．また $\mathscr{A}$ が σ-ring のとき $A_j \in \mathscr{A} \ \Rightarrow\ \bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathscr{A}$ を示せ.

$\boxed{6}$ $X = \{a, b, c\}$ のとき X の σ-algebra をすべて列挙せよ.

$\boxed{7}$ $\mathbb{R}$ の部分集合の族を次のように定義する：

$$\mathscr{A}_1 = \{(a, b];\ -\infty < a < b < \infty\},$$
$$\mathscr{A}_2 = \{(a, b);\ -\infty < a < b < \infty\},$$
$$\mathscr{A}_3 = \{[a, b];\ -\infty < a < b < \infty\}.$$

また $\mathscr{A}_4$ を $\mathbb{R}$ の開集合全体とする．このとき $\sigma(\mathscr{A}_1) = \sigma(\mathscr{A}_2) = \sigma(\mathscr{A}_3) = \sigma(\mathscr{A}_4)$ を示せ.

$\boxed{8}$ $\mathscr{S}$ を ring とする．$\mu\colon \mathscr{S} \to [0,\infty]$ に対し，次の二つの条件は同値であることを示せ．

(1) A, $B \in \mathscr{S}$ が disjoint のとき

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(2) A, $B \in \mathscr{S}$ に対し

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

$\boxed{9}$ $\mathscr{A}$: a ring, $\mu\colon \mathscr{C} \to [0,\infty)$: finitely additive とする．このとき μ is σ-additive $\Leftrightarrow$ $A_j \in \mathscr{A}$, $A_j \downarrow \emptyset$ のとき $\mu(A_j) \downarrow 0$.

$\boxed{10}$ X を無限集合として，$\mathscr{A}$ を

$$\mathscr{A} = \{A \subseteq X;\ A \text{ は有限集合か } A^c \text{ が有限集合}\}$$

と定めると，$\mathscr{A}$ は algebra であることを示せ．このとき $\sigma(\mathscr{A})$ は何になるか．

さらに $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,\infty)$ を A が有限集合のとき $\mu(A) = 0$, A^c が有限集合のとき $\mu(A) = 1$ と定める．μ は有限加法的であることを示せ．

$\boxed{11}$ $X = (0,\infty)$. $\mathscr{A} = \{(a,b],\ (a,\infty),\ 0 \le a \le b < \infty$ およびこれらの有限個の disjoint union$\}$ とし, μ を次のように定める:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{無限区間を含まないとき} \\ 1, & \text{無限区間を含むとき} \end{cases}$$

このとき μ は有限加法的であることを示せ．さらに

$$\mu((0,\infty)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu((n-1,n])$$

が成立しないこと，また $\lim_{n\to\infty} \mu((n,\infty)) = 0$ も成立していないことを示せ．

$\boxed{12}$ μ^* を外測度とする．集合列 A_j, B_j が $\mu^*(A_j \Delta B_j) = 0$ をみたすとする ($A_j \Delta B_j$ は 対称差 $(A_j \setminus B_j) \cup (B_j \setminus A_j)$ を表す)．このとき $\mu^*(\cup_j A_j) = \mu^*(\cup_j B_j)$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{13}$ 任意に $x \in X$ を固定する．$\delta_x(A) = 1_A(x)$ と定義するとき，δ_x は 2^X 上の測度となることを示せ．(この測度を Dirac 測度という．)

$\boxed{14}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．$A_j \in \mathscr{S}$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$ を満たすとき

$$\mu(\varlimsup_{n\to\infty} A_n) = 0$$

が成り立つことを示せ．(この事実を Borel-Cantelli の定理という．)

$\boxed{15}$ μ を $[0,1]$ の Borel 測度とし，$\mu([0,1]) < \infty$ を仮定する．さらに，任意の 1 点集合 $\{p\}$ に対して $\mu(\{p\}) = 0$ を仮定する．任意に $\varepsilon > 0$ をとるとき，次を示せ．

(1) 任意の点 p に対し，p を含む開区間 J で $\mu(J) < \varepsilon$ をみたすものが存在する．

(2) 稠密な開集合 U で $\mu(U) < \varepsilon$ を満たすものが存在する．

$\boxed{16}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．$\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{S};\, \mu(A) < \infty\}$ とする．$\mathscr{D}$ は ring になることを示せ．

$\boxed{17}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．内測度 μ_* を $\mu_*(F) = \sup\{\mu(A);\, A \in \mathscr{S},\ A \subseteq F\}$ で定める．このとき任意の集合 F に対して $\mu_*(F) = \mu(A)$ となる $A \in \mathscr{S}$, $A \subseteq F$ が存在することを示せ．

$\boxed{18}$ $\mathscr{S}$ を X の σ-algebra とする．X の部分集合で $E \notin \mathscr{S}$ となるものを任意にとる．このとき $\sigma(\mathscr{S} \cup \{E\})$ は $(A \cap E) \cup (B \setminus E)$ $(A, B \in \mathscr{S})$ という形の集合全体と一致することを示せ．

$\boxed{19}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．また外測度 μ^* を $F \subset X$ に対し，

$$\mu^*(F) = \inf\{\mu(A);\, A \in \mathscr{S},\ A \supseteq F\}$$

で定める．$E \subset X$ で $E \notin \mathscr{S}$ となるものを取り，$\mathscr{S}_E = \{A \cap E;\, A \in \mathscr{S}\}$ とおくと，$(E, \mathscr{S}_E, \mu^*)$ は測度空間になることを示せ．

$\boxed{20}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．また内測度 μ_* を $F \subset X$ に対し，

$$\mu_*(F) = \sup\{\mu(A);\, A \in \mathscr{S},\ A \subseteq F\}$$

で定める．$E \subset X$ で $E \notin \mathscr{S}$ となるものを取り，$\mathscr{S}_E = \{A \cap E;\, A \in \mathscr{S}\}$ とおくと，$(E, \mathscr{S}_E, \mu_*)$ は測度空間になることを示せ．

$\boxed{21}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．外測度 μ^*, 内測度 μ_* を問題 $\boxed{19}$, $\boxed{20}$ のように定める．E を $E \notin \mathscr{S}$ となる任意の集合とする．このとき $(A \cap E) \cup (B \setminus E)$, $A, B \in \mathscr{S}$ の形の集合に対し

$$\rho((A \cap E) \cup (B \setminus E)) = \mu^*(A \cap E) + \mu_*(B \setminus E)$$

で定めると ρ は測度になり μ の拡張になっていることを示せ．

$\boxed{22}$ λ を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度とし，E を $\lambda(E) > 0$ となる Borel 可測集合とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(1 - \varepsilon)\lambda(J) < \lambda(E \cap J)$ をみたす区間 $J = (a, b]$ が存在することを示せ．
(Hint: $\lambda(E) < \infty$ のときを示せばよい．さらに

$$\lambda(E) = \inf\{\sum_n \lambda(J_n) :\, E \subseteq \bigcup_n J_n,\ J_n = (a_n, b_n]\}$$

であることを使え．)

$\boxed{23}$ λ を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度とし，E を $\lambda(E) > 0$ となる Borel 可測集合とする．このとき，$\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば，次が成り立つようにできることを示せ．

$$E - E := \{x - y;\, x, y \in E\} \supseteq [-\varepsilon, \varepsilon].$$

(Hint: $\lambda(E \cap J) > \frac{3}{4}\lambda(J)$ となる区間 J を取り，$\varepsilon = \lambda(J)/3$ とすれば $|x| \leq \varepsilon$ のとき $((E \cap J) + x) \cap (E \cap J) \neq \emptyset$ となることを示せ．)

$\boxed{24}$ $[0,1]$ の点を 3 進展開したとき，展開に 1 が現れないようにできる点の全体を Cantor 集合といい， C で表す．$x \in C$ の 3 進展開を $x = 0.x_1x_2\ldots$, $(x_n = 0 \text{ or } 2)$ とするとき

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$$

で関数 φ を定める．φ は C の上で単調非減少 $(x < y \;\Rightarrow\; \varphi(x) \leq \varphi(y))$ であることを示せ．また φ は $[0,1]$ の全ての値をとることを示せ．

$\boxed{25}$ f, g を μ-単関数とする．また a, b を実数とする．このとき $af+bg$, fg もまた μ-単関数であることを示せ．

$\boxed{26}$ f を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．f が連続，または単調関数であれば可測関数であることを示せ．

$\boxed{27}$ f, g を実数値可測関数とする．また a, b を実数とする．このとき $af+bg$, $f \wedge g$, $f \vee g$ は可測関数であることを示せ．

$\boxed{28}$ $\{f_n\}$ を実数値可測関数列とする．$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ は可測関数であることを示せ．

$\boxed{29}$ $\{f_n\}$ を実数値可測関数列とする．$\{f_n\}$ がある関数 f にすべての点で収束すれば，f は可測であることをしめせ．

$\boxed{30}$ $\{f_n\}$ を実数値可測関数列とする．$\{f_n\}$ が収束する点全体の集合は可測であることを示せ．

$\boxed{31}$ f, $g \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{S}, \mu)$ に対して $d(f,g) = \int |f-g|\, d\mu$ と定めると，d は擬距離になることを示せ．(距離の性質のうち $d(f,g) = 0 \;\Rightarrow\; f = g$ だけ満たさない．)

$\boxed{32}$ 非負関数列 f_n, $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ が $f_n \to f$ μ-a.e. をみたし，さらに $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$ をみたすとき，$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$ となることを示せ．(Hint: $(f_n - f)_- \leq f$ を使え．)

$\boxed{33}$ 次を示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}\, dx = 0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{n\cos(x)}{1+n^2x^{3/2}}\, dx = 0$

[解答] (2) 実は関数 $x^{-3/4}$ が優関数になっている．これは $\frac{n}{1+n^2x^{3/2}} \leq x^{-3/4}$ を示せばよいが

$$n \leq (1+n^2x^{3/2})x^{-3/4}$$
$$n \leq x^{-3/4} + n^2x^{3/4}$$
$$(n^2x^{3/4}x^{-3/4})^{1/2} \leq n^2x^{3/4} + x^{-3/4}$$

を逆に見ていけばよい． □

$\boxed{34}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．$f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ ならば $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\{\int_A |f|\,d\mu;\ \mu(A) \le \varepsilon\} = 0$ (sup は $\mu(A) \le \varepsilon$ をみたす可測集合 A を動かしたときの $\int_A |f|\,d\mu$ の上限) が成り立つことを示せ．

$\boxed{35}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．$f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ ならば

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\{|f|>N\}} |f|\,d\mu = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_X (|f| \wedge \varepsilon)\,d\mu = 0$$

を示せ．但し $f \wedge \varepsilon = \min\{f, \varepsilon\}$.

$\boxed{36}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．$f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ ならば

$$\lim_{N\to\infty} N\mu(|f| > N) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\mu(|f| > \varepsilon) = 0$$

を示せ．

$\boxed{37}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とし，f_n, f, g_n, $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ $n = 1, 2, \ldots,$ が $f_n \to f$, $g_n \to g$, $|f_n| \le g_n$ をみたしているとする．このとき $\lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu = \int g\,d\mu$ ならば $\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{38}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とすする．X 上の可測関数列 f_n が f に**測度収束**するということを，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty}\mu(|f_n - f| \ge \varepsilon) = 0$ が成立することと定義する．f_n が f に測度収束し，$g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ が存在して $|f_n| \le g$ が成り立っていれば $\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f|\,d\mu = 0$ となることを示せ．

$\boxed{39}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を有限測度空間とし，$\mathscr{F}$ を可測関数の族 とする．このとき $\mathscr{F}$ が**一様化積分**であることを $\sup\{\int |f|\,d\mu;\ f \in \mathscr{F}\} < \infty$ かつ $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\{\int_A |f|\,d\mu;\ \mu(A) \le \varepsilon,\ f \in \mathscr{F}\} = 0$ が成り立つことと定義する．一様可積分な関数列 $\{f_n\}$ が f に概収束すれば，$\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f|\,d\mu = 0$ となることを示せ．

$\boxed{40}$ $a > 0$ に対して，等式

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_a^\infty \frac{dt}{1+t^2}$$

を次の手順で示せ．

(1) $e^{-ax} = \displaystyle\int_a^\infty xe^{-tx}dt$ を左辺に代入し，Fubini の定理を用いる．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx = \frac{1}{1+t^2}$ (この等式は証明しなくてよい) を用いる．

$\boxed{41}$ $(X, \mathscr{S}, \mu)$ を σ-有限な測度空間とし，$p \ge 1$ とする．非負可測関数 f に対して次の等式を示せ．

$$\int f(x)^p\,d\mu(x) = \int_0^\infty p\,t^{p-1}\mu(f \ge t)\,dt$$

(Hint: $f(x)^p = \displaystyle\int_0^{f(x)} p\,t^{p-1}\,dt$ であることに注意して Fubini の定理を使う．)

$\boxed{42}$ g, h を区間 $[a,b]$ 上の右連続単調増大関数とする．これから定まる測度を dg, dh で表す．このとき次の等式 (部分積分の公式) を示せ．

$$g(b)h(b) - g(a)h(a) = \int_{[a,b]} h(x)\,dg(x) + \int_{[a,b]} g(y-)\,dh(y).$$

ここで $g(y-) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g(y-\varepsilon)$ である．

(Hint: $\displaystyle\int_{[a,x]} dh(y) = h(x) - h(a)$, $\displaystyle\int_{[a,y)} dg(x) = g(y-) - g(a)$ と Fubini の定理を用いる．)