

# 数理統計

重川 一郎

平成 20 年 10 月 24 日



# 目次

第1章	統計データ	5
1	データの整理	5
	度数分布とヒストグラム	5
	代表値	5
	散らばりの尺度	7
第2章	標本分布	11
1	母集団と標本	11
2	標本分布	13
	ガンマ分布・ベータ分布	14
	カイ <sup>2</sup> 乗分布	17
	$F$ 分布, $t$ 分布	20
第3章	推定	29
1	点推定	29
	フィッシャー情報量	29
	クラメル-ラオの不等式	30
	有効推定量	32
	点推定	33
	最尤法	34
2	区間推定	35
	正規母集団の母平均の推定 (分散が既知の場合)	35
	正規母集団の母分散の推定	36
	母平均の推定 (分散が未知の場合)	37
3	2 標本問題	38
	母平均の差の推定	38
	母分散の比の推定	40
第4章	仮説検定	43
1	検定の考え方	43
	2項分布の検定	43
	検定の手順	44

	誤りの種類 . . . . .	45
2	正規母集団の検定 . . . . .	45
	平均の検定 . . . . .	45
	分散の検定 . . . . .	46
	等平均の検定 . . . . .	47
	等分散の検定 . . . . .	48
3	$\chi^2$ 検定 . . . . .	48
	適合度検定 . . . . .	48
	独立性の検定 . . . . .	49
<b>第5章</b>	<b>統計解析</b>	<b>51</b>
1	回帰分析 . . . . .	51
	線型回帰分析 . . . . .	51
	推定量の分布 . . . . .	53
	分散の推定 . . . . .	54

# 第1章 統計データ

## 1. データの整理

統計学：現象の法則性を見出す

記述統計学：ある集団の特徴を記述するために，全体の観測を行い，得られたデータを整理・要約し，そこから現象の法則性を見出す

統計的推測：一部を観測し，全体の法則性を見出す

### 度数分布とヒストグラム

例．試験の成績  $x_1, \dots, x_{200}$

試験得点の度数分布表

階級	階級値	度数	相対度数	累積度数	累積相対度数
$0 \leq x < 10$	5	6	0.03	6	0.03
$10 \leq x < 20$	15	8	0.04	14	0.07
$20 \leq x < 30$	25	12	0.06	26	0.13
$30 \leq x < 40$	35	21	0.105	47	0.235
$40 \leq x < 50$	45	36	0.18	83	0.415
$50 \leq x < 60$	55	49	0.245	132	0.66
$60 \leq x < 70$	65	30	0.15	162	0.81
$70 \leq x < 80$	75	21	0.105	183	0.915
$80 \leq x < 90$	85	11	0.055	194	0.97
$90 \leq x \leq 100$	95	6	0.03	200	1
合計		200	1.000		

### 代表値

観測値:  $x_1, x_2, \dots, x_n$

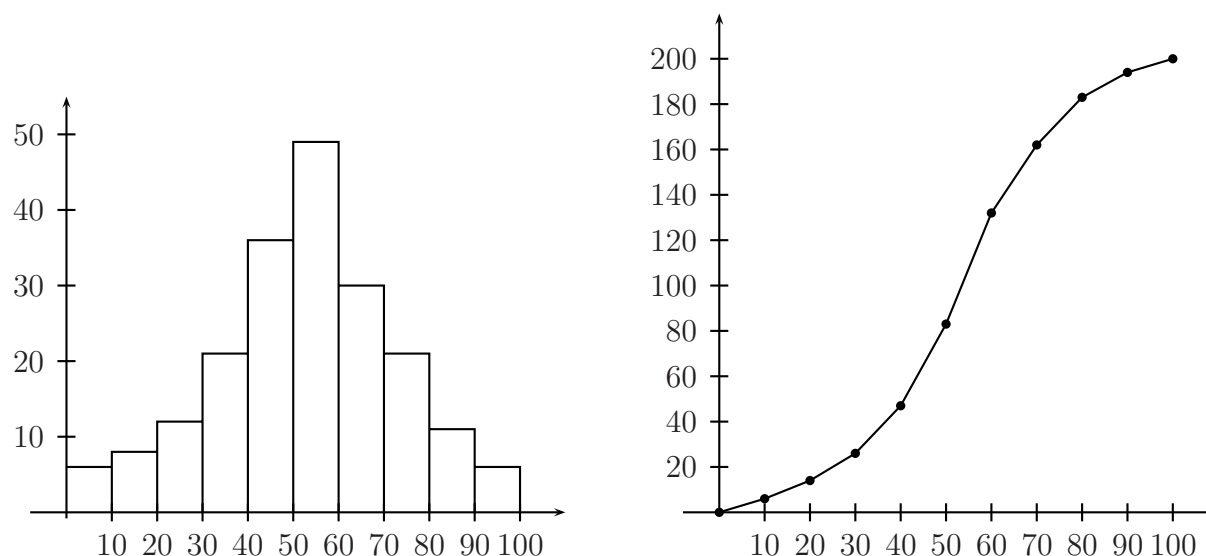


図 1.1: 試験得点のヒストグラムと累積度数グラフ

平均  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

幾何平均  $x_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$   
地価の上昇、金利など

調和平均  $\frac{1}{x_H} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right)$

メディアン (中央値)  $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$  とするとき  

$$m = \begin{cases} x_{l+1}, & n \text{ が奇数 } 2l+1 \text{ のとき} \\ \frac{x_l + x_{l+1}}{2}, & n \text{ が偶数 } 2l \text{ のとき} \end{cases}$$

モード (最頻値) 一番出現回数の多いもの

ミッド・レンジ 最大と最小の midpoint  $\frac{1}{2}(\max\{x_i\} + \min\{x_i\})$

調和平均の例

自動車で行きは 40km, 帰りは 50km であったとき, 平均時速  $v$  は?  
距離を  $d$  とすると

$$v = \frac{2d}{\frac{d}{40} + \frac{d}{50}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{40} + \frac{1}{50} \right)}$$

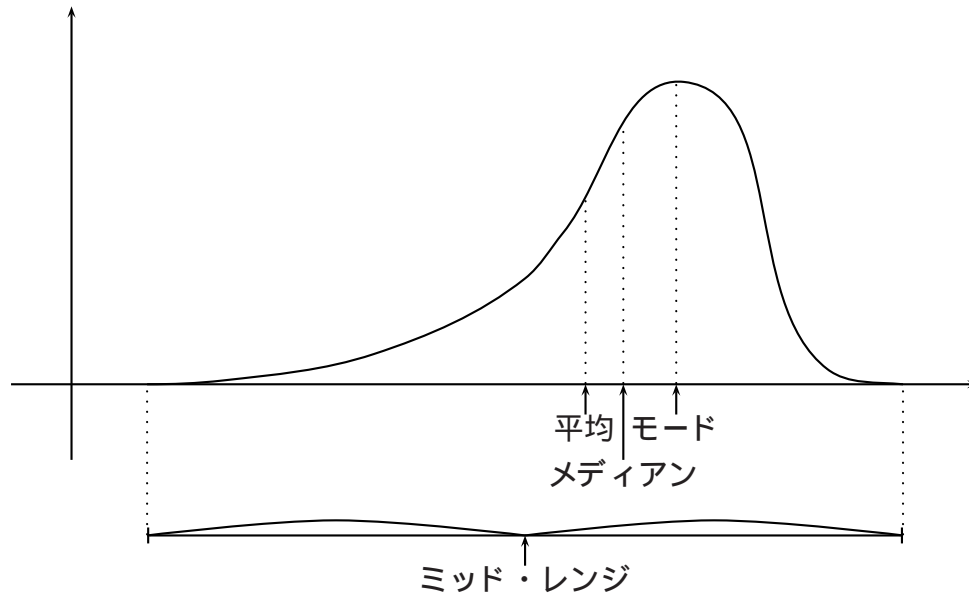


図 1.2: 代表値

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{40} + \frac{1}{50} \right) \quad \therefore v = \frac{400}{9} = 44.44 \dots$$

### 散らばりの尺度

観測値:  $x_1, x_2, \dots, x_n$

レンジ 最大と最小

平均偏差  $\frac{1}{n} (|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|)$

分散  $S^2 = \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \}$

標準偏差  $S = \sqrt{S^2}$  (分散の平方根)

標準化  $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  は平均 0, 分散 1 になる

偏差値  $T_i = 10z_i + 50 = \frac{10}{S} (x_i - \bar{x}) + 50$

平均が 50, 分散が 100, 標準偏差が 10

問題 1.1. 試験をして次のような結果を得た。それぞれについて、平均、分散、標準偏差、偏差値を計算せよ。

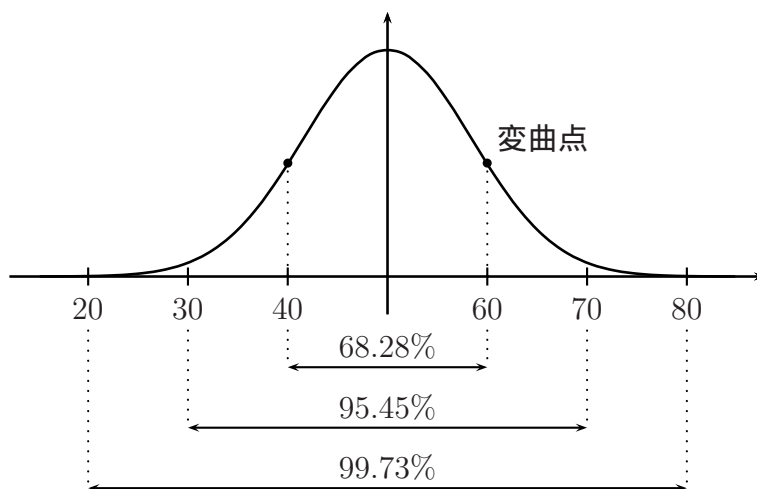


図 1.3: 偏差値 のグラフ

(1)

得点	人数
0	1人
50	6人
100	1人

(2)

得点	人数
0	99人
100	1人

解答

(1)

$$\text{平均} \quad \frac{6 \times 50 + 100}{8} = 50$$

$$\text{分散} \quad \frac{(0 - 50)^2 + (100 - 50)^2}{8} = 625$$

$$\text{標準偏差} \quad \sqrt{625} = 25$$

$$\text{偏差値} \quad 0 \text{ 点の人} \quad \frac{10}{25}(0 - 50) + 50 = 30$$

$$50 \text{ 点の人} \quad 50$$

$$100 \text{ 点の人} \quad \frac{10}{25}(100 - 50) + 50 = 70$$

(2)



$$\text{平均} \quad \frac{100}{100} = 1$$

$$\text{分散} \quad \frac{99 \times (0 - 1)^2 + (100 - 1)^2}{100} = \frac{99 + 99^2}{100} = \frac{99(1 + 99)}{100} = 99$$

$$\text{標準偏差} \quad \sqrt{99} = 9.949 \dots$$

$$\text{偏差値} \quad \begin{array}{l} 0 \text{ 点の人} \quad \frac{10}{9.949}(0 - 1) + 50 = 48.994 \dots \\ 1000 \text{ 点の人} \quad \frac{10}{9.949}(100 - 1) + 50 = 149.5 \dots \end{array}$$

□



## 第2章 標本分布

統計的推測 (statistical inference) : 母集団から一部を選び出し , それを分析して母集団の推測を行う .

### 1. 母集団と標本

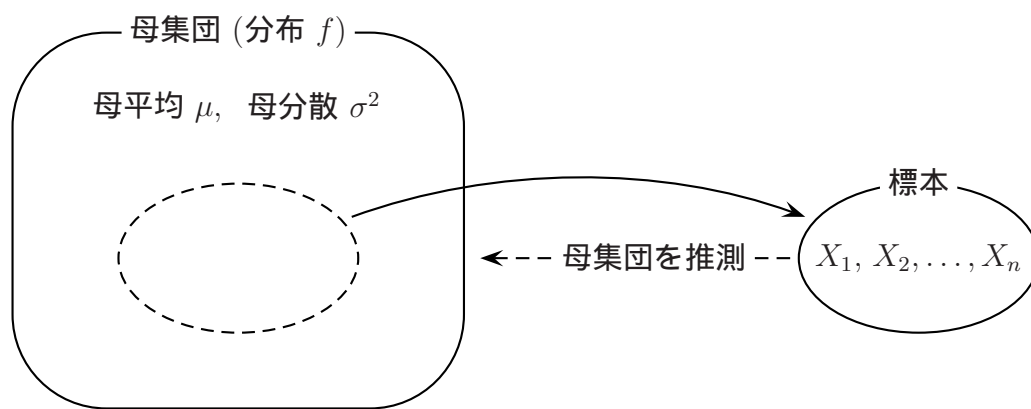


図 2.1: 統計的推測

母集団 (population) :	分析の対象となる集団全体
母集団分布 :	母集団の分布
標本 (sample) :	母集団から選び出された要素
母数 (parameter) :	母集団分布を決定するパラメーター

母集団の分布で最も重要なものは正規分布である . このとき , 正規母集団という . 正規分布は平均  $\mu$  , 分散  $\sigma^2$  で特徴付けられる .  $N(\mu, \sigma^2)$  とかく . 他に , ポアソン分布 , 二項分布 , 指数分布などがよく使われる .

数学的に次のように定式化する .

母集団分布	密度関数 (離散のときは確率関数) $f(x)$
母数	母平均 $\mu$ , 母分散 $\sigma^2$ など
標本	分布 $f(x)$ を持つ独立な確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$
標本平均 (sample mean)	$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$
標本分散 (sample variance)	$S^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n}$
不偏標本分散 (unbiased sample variance)	$U^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n - 1}$

標本平均, 標本分散など, 標本の関数で, 未知の母数を含まないものを統計量 (statistic) という.

定理 1.1. 分布  $f$  の平均が  $\mu$ , 分散が  $\sigma^2$  のとき  $\bar{X}$  の平均は  $\mu$ , 分散は  $\sigma^2/n$  である.

証明

$$\begin{aligned}
 E[\bar{X}] &= \frac{E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu \\
 V[\bar{X}] &= V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\
 &= \frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)\} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.
 \end{aligned}$$

□

定理 1.2. 分布  $f$  の平均が  $\mu$ , 分散が  $\sigma^2$  のとき不偏分散  $U^2$  の平均は  $\sigma^2$  である.

証明

$$E[U^2] = \frac{E[(X_1 - \bar{X})^2] + E[(X_2 - \bar{X})^2] + \dots + E[(X_n - \bar{X})^2]}{n - 1}$$

である. また

$$\begin{aligned}
 E[(X_1 - \bar{X})^2] &= E[(X_1 - \mu - \bar{X} + \mu)^2] \\
 &= E[(X_1 - \mu)^2] - 2E[(X_1 - \mu)(\bar{X} + \mu)] + E[(\bar{X} - \mu)^2] \\
 &= \sigma^2 - 2E[(X_1 - \mu) \frac{(X_1 - \mu) + (X_2 - \mu) + \dots + (X_n - \mu)}{n}] + \frac{\sigma^2}{n} \\
 &= \sigma^2 - \frac{2}{n}E[(X_1 - \mu)^2] + \frac{\sigma^2}{n} \\
 &= \sigma^2 - \frac{2}{n}\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \\
 &= \frac{n-1}{n}\sigma^2
 \end{aligned}$$

両者から

$$E[U^2] = \frac{nE[(X_1 - \bar{X})^2]}{n-1} = n \frac{n-1}{n} \sigma^2 \frac{1}{n-1} = \sigma^2$$

□

統計的推測では  $\bar{X}$ ,  $U^2$  で平均, 分散の推定を行う. 母数の推定を行う統計量を推定量 (estimator) という. 分散の推定に  $S^2$  ではなく  $U^2$  を用いるのは  $U^2$  の平均が母分散と一致するからである. このように推定量の平均が母数と一致するとき, 不偏推定量であるという.  $U^2$  を不偏標本分散と呼ぶのはそのためである.

## 2. 標本分布

以下, 推定を行うために必要な標本分布を調べる. まず, 正規分布に関する事を纏めておく.  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  を  $n$ -次元の (非退化) 正規分布とする. すなわち, 密度関数が次で与えられる.

$$(2.1) \quad p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(V)}} \exp\left\{\frac{1}{2}(x - m, V^{-1}(x - m))\right\}$$

$m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  を平均ベクトル,  $V = (V_{ij})$  を共分散行列という. 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
 m_i &= E[X_i], \\
 V_{ij} &= \text{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)].
 \end{aligned}$$

これらの事は特性関数を使うと容易に証明できる. ここで  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  の特性関数  $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  は次で定義される:

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = E[\exp\{\sum_{j=1}^n i\xi_j X_j\}], \quad (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

特に, 密度関数が (2.1) で与えられる正規分布の場合は

$$(2.2) \quad \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \exp\left\{i \sum_{j=1}^n \xi_j m_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n V_{jk} \xi_j \xi_k\right\},$$

であることが知られているので, これから平均, 共分散が計算できる. (2.2) では,  $V$  の正則性は必要ないので,  $V$  が非退化の場合も特性関数で正規分布を特徴づけることが出来る.

$X_1, X_2, \dots, X_n$  が独立で, 各  $X_j$  が 1 次元正規分布に従う場合は, 密度関数が積になるので,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  は  $n$ -次元正規分布に従う. また  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  が  $n$ -次元正規分

布に従えば,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の1次結合は, 1次元正規分布に従う. また,  $(X_1, X_2)$  が2次元正規分布に従い, 共分散が0であれば

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_1, \xi_2) &= \exp\left\{i \sum_{j=1}^2 \xi_j m_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 V_{jj} \xi_j^2\right\} \\ &= \exp\left\{i \xi_1 m_1 + \frac{1}{2} V_{11} \xi_1^2\right\} \exp\left\{i \xi_2 m_2 + \frac{1}{2} V_{22} \xi_2^2\right\} \\ &= \varphi_{X_1}(\xi_1) \varphi_{X_2}(\xi_2)\end{aligned}$$

と, 特性関数が積になるから独立性に従う. これは正規分布の非常に特殊な性質である.

定理 2.1.  $X$  が1次元正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うならば,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う.

また  $X_1, X_2$  が独立で, それぞれ1次元正規分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$  に従うとき, その和  $X_1 + X_2$  は1次元正規分布,  $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  に従う.

さらに  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\perp \implies \bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ .

証明 特性関数を計算すればよい.

$$\begin{aligned}E[\exp\{i\xi(X - \mu)/\sigma\}] &= E[\exp\{-i\xi\mu/\sigma\} \exp\{i(\xi/\sigma)X\}] \\ &= \exp\{-i\xi\mu/\sigma\} \exp\{i(\xi/\sigma)\mu + \frac{1}{2}(\xi/\sigma)^2\sigma^2\} \\ &= \exp\{\frac{1}{2}\xi^2\}.\end{aligned}$$

これで  $Z$  の分布が  $N(0, 1)$  であることが示せた.

次に  $X_1 + X_2$  の特性関数を計算しよう. 独立性から

$$\begin{aligned}E[\exp\{i\xi(X_1 + X_2)\}] &= E[\exp\{i\xi X_1\}] E[\exp\{i\xi X_2\}] \\ &= \exp\{i\xi\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\xi^2\} \exp\{i\xi\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\xi^2\} \\ &= \exp\{i\xi(\mu_1 + \mu_2) + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}\xi^2\}.\end{aligned}$$

これで  $X_1 + X_2$  の分布が  $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  であることが分かった.

最後に  $\bar{X}$  については 定理 1.1 から分布は  $N(\mu, \sigma^2/n)$  であることが分かる.  $\square$

### ガンマ分布・ベータ分布

定義 2.2.  $\alpha > 0$  に対し

$$(2.3) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

で定まる関数をガンマ関数,  $\alpha, \beta > 0$  に対し

$$(2.4) \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

で定まる関数をベータ関数という.

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$  が成り立つことが容易に確かめられる. 特に自然数  $n$  に対して  $\Gamma(n+1) = n!$  である.

またベータ関数の定義式 (2.4) で  $x = \sin^2 \theta$  で変数変換すれば  $dx = 2 \sin \theta \cos \theta$  だから

$$B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2(\alpha-1)} \theta (1 - \sin^2 \theta)^{\beta-1} \sin \theta \cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1} \theta \cos^{2\beta-1} \theta d\theta$$

の表示も得られる. これから  $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$  が分かる.

**定義 2.3.** 次の密度関数

$$(2.5) \quad f_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

を持つ分布をガンマ分布という. 記号で  $Ga(\alpha, \beta)$  と表す.

また  $[0, 1]$  で密度関数

$$(2.6) \quad \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

を持つ分布をベータ分布という. 記号で  $Be(\alpha, \beta)$  と表す.

実際に (2.4) が確率密度であることは

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_{\alpha, \beta}(x) dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (x/\beta)^\alpha e^{-x/\beta} \frac{dx}{x} \quad (y = x/\beta, dy = dx/\beta) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} \frac{dy}{y} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\ &= 1 \end{aligned}$$

から分かる.

**命題 2.4.**

$$(2.7) \quad f_{\alpha_1, \beta} * f_{\alpha_2, \beta} = f_{\alpha_1 + \alpha_2, \beta}.$$

ここで \* は合成積

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$$

を表す .

証明  $x \geq 0$  のとき

$$\begin{aligned} f_{\alpha_1, \beta} * f_{\alpha_2, \beta}(x) &= \int_{x \geq y, y \geq 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\beta^{\alpha_1}}(x-y)^{\alpha_1-1}e^{-(x-y)/\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_2}}y^{\alpha_2-1}e^{-y/\beta} dy \\ &= \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}(x-y)^{\alpha_1-1}y^{\alpha_2-1}e^{-x/\beta} dy \quad (y = tx, dy = xdt) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}e^{-x/\beta} \int_0^1 (x-tx)^{\alpha_1-1}(tx)^{\alpha_2-1}x dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}e^{-x/\beta} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 (1-t)^{\alpha_1-1}t^{\alpha_2-1} dt \\ &= \frac{B(\alpha_1, \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-x/\beta} \\ &= \frac{B(\alpha_1, \alpha_2)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} f_{\alpha_1+\alpha_2, \beta}(x). \end{aligned}$$

$x < 0$  のとき  $f_{\alpha_1, \beta} * f_{\alpha_2, \beta}(x) = 0$  は明らかである .

ここで両辺を積分すると , 確率密度であることを用いて

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha_1, \beta} * f_{\alpha_2, \beta}(x) dx &= \frac{B(\alpha_1, \alpha_2)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha_1+\alpha_2, \beta}(x) dx \\ &= \frac{B(\alpha_1, \alpha_2)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}. \end{aligned}$$

左辺は

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha_1, \beta} * f_{\alpha_2, \beta}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha_1, \beta}(x-y)f_{\alpha_2, \beta}(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha_2, \beta}(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha_1, \beta}(x-y) dx = 1. \end{aligned}$$

結局

$$\frac{B(\alpha_1, \alpha_2)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} = 1$$

も示せ , 証明が終わる .

□

上の証明中で次の公式

$$(2.8) \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$



も証明できている．ここで  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  とすれば

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)}.$$

これと  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$  とを考え合わせれば  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  が示せたことになる．

ここで合成積の確率論的な意味を述べておく． $X, Y$  を独立な確率変数で，密度関数  $f, g$  を持つとする．このとき  $f * g$  は  $X + Y$  の密度関数になっているのである．これを見るには

$$\begin{aligned} E[F(X + Y)] &= \iint F(x + y)f(x)g(y) dx dy \\ & \quad u = x + y, v = y \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ dx dy &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = du dv \\ &= \iint F(u)f(u - v)g(v) du dv \\ &= \int F(u) f * g(u) du \end{aligned}$$

に注意すればよい．

### カイ 2 乗分布

定義 2.5.  $n$  を自然数とするとき，分布  $Ga(n/2, 2)$  を自由度  $n$  の  $\chi^2$ (カイ 2 乗) 分布という．また記号で  $\chi^2(n)$  と表す．

命題 2.6.  $X \sim N(0, 1) \implies X^2 \sim \chi^2(1)$

証明

$$\begin{aligned} E[F(X^2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} F(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \quad (y = x^2, dy = 2x dx \longrightarrow dx = 2\sqrt{y} dy) \\ &= 2 \int_0^{\infty} F(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{dy}{2\sqrt{y}} \\ &= \int_0^{\infty} F(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{(1/2)-1} e^{-y/2} dy \\ &= \int_0^{\infty} F(y) \frac{1}{\Gamma(1/2) 2^{1/2}} y^{(1/2)-1} e^{-y/2} dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} F(y) f_{1/2,2}(y) dy.$$

□

命題 2.7.  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(0, 1), \perp \implies X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$ .

この事実を

$$\chi^2(n) = \underbrace{N(0, 1)^2 + N(0, 1)^2 + \dots + N(0, 1)^2}_n$$

とかく .

証明  $X_j^2$  の密度関数は  $f_{1/2,2}$  で独立であるから ,

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim f_{1/2,2} * f_{1/2,2} * \dots * f_{1/2,2} = f_{n/2,2}.$$

□

系 2.8.  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2), \perp \implies Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ .

証明  $X_j^2$  の密度関数は  $f_{1/2,2}$  で独立であるから ,

$$\frac{1}{\sigma^2} (X_j - \mu)^2 = \left( \frac{X_j - \mu}{\sigma} \right)^2, \quad \frac{X_j - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

から 命題 2.7 を使えばよい .

□

系 2.9.  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2), \perp \implies Y = \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2/n} \sim \chi^2(1)$ .

証明 定理 2.1 より  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$  であるから 命題 2.6 を使えば明らか .

□

命題 2.10.  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2), \perp$

$$\implies Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} U^2 \sim \chi^2(n-1).$$

さらに ,  $Y$  と  $\bar{X}$  は独立 .

証明 まず  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$  の場合 .

$$Y_j = \sum_{k=1}^n l_{jk} X_k$$

と変換する .  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  は正規分布に従う .  $(l_{jk})$  をうまく選んで  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  が次の条件を満たすようにする :

1.  $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2$ .

$$2. Y_n = \sqrt{n} \bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$3. Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim N(0, 1), \perp\!\!\!\perp.$$

これが成り立つと,

$$Y = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 - n\bar{X}^2 = \sum_{j=1}^n Y_j^2 - Y_n^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_{n-1}^2 \sim \chi^2(n-1)$$

となる. さらに  $Y$  と  $Y_n = \sqrt{n} \bar{X}$  が独立であるから,  $Y$  と  $\bar{X}$  も独立となって, 定理の結論を得る.

従って, 上のことを示せば十分である. 上で述べていることは1次変換  $(X_1, X_2, \dots, X_n) \mapsto (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  が長さ  $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$  を保ち,  $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$  だから

$$(l_{jk}) = \begin{pmatrix} & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$

で,  $(l_{jk})$  が直交行列であればよい. 分布密度を

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \leftrightarrow p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leftrightarrow q(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

とすれば

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = q(y_1, y_2, \dots, y_n) \underbrace{\left| \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|}_{\substack{\parallel \\ 1}}. \quad \text{多変数の変数変換}$$

これから

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)/2} \\ q(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)/2} \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_j^2/2}. \end{aligned}$$

よって  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  は独立で  $N(0, 1)$  に従う.

次に一般の  $N(\mu, \sigma^2)$  の場合 .

$$Z_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

であるから

$$\frac{X_j - \bar{X}}{\sigma} = \frac{X_j - \mu}{\sigma} + \frac{\mu - \bar{X}}{\sigma} = Z_j - \bar{Z}$$

$$Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = \sum_{j=1}^n (Z_j - \bar{Z})^2.$$

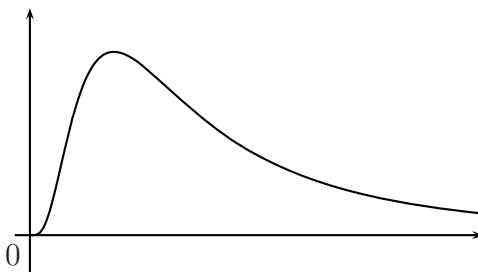
となるので , 最初の場合に帰着できる . □

### F 分布 , t 分布

定義 2.11.  $m, n$  に対し

$$(2.9) \quad G_{m,n}(z) = \begin{cases} \frac{1}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}-1} \left(\frac{m}{n}z + 1\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

を密度関数に持つ分布を自由度  $(m, n)$  の  $F$  分布という . 記号で  $F(m, n)$  と表す .



F 分布ののグラフ

定理 2.12.  $X, Y$  が独立で , それぞれ自由度  $m, n$  の  $\chi^2$  分布をもつとき

$$(2.10) \quad Z = \frac{X/m}{Y/n}$$

は自由度  $(m, n)$  の  $F$  分布をもつ .

補題 2.13.  $X \perp Y$ ,  $X \sim p(x)$ ,  $Y \sim q(y)$ ,  $Y > 0$

$\Rightarrow Z = \frac{aX}{bY}$  の密度関数は

$$(2.11) \quad r(z) = \int_0^\infty p\left(\frac{byz}{a}\right)q(y)\frac{by}{a} dy.$$

証明

$$\begin{aligned} E[f(Z)] &= E\left[f\left(\frac{aX}{bY}\right)\right] \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f\left(\frac{ax}{by}\right)p(x)q(y)dx dy \\ &\quad z = \frac{ax}{by}, u = y \quad \leftarrow \quad y = u, x = \frac{b}{a}yz = \frac{b}{a}uz \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, u)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{b}{a}u & \frac{b}{a}z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{bu}{a} \\ dx dy &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, u)} \right| dz du = \frac{bu}{a} dz du \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f(z)p\left(\frac{buz}{a}\right)q(u)\frac{bu}{a} du dz \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(z) dz \underbrace{\int_0^\infty p\left(\frac{buz}{a}\right)q(u)\frac{bu}{a} du}_{r(z)}. \end{aligned}$$

□

定理の証明

$$Z = \frac{X/m}{Y/n} = \frac{nX}{mY}$$

$X$  の密度関数は  $p(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x/2}$

$Y$  の密度関数は  $q(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2}$

$Z$  の密度関数は

$$\begin{aligned} G_{m,n}(z) &= \int_0^\infty p\left(\frac{m}{n}yz\right)q(y)\frac{my}{n} dy \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}yz\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\frac{m}{n}yz} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \frac{m}{n} y dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{\frac{m}{2} + \frac{n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2} - 1} \underbrace{\int_0^\infty y^{\frac{m}{2} + \frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(1 + \frac{m}{n}z)y} \frac{dy}{y}}_* \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{2}(1 + \frac{m}{n}z)y \quad y = 2(1 + \frac{m}{n}z)^{-1}u \\ du = \frac{1}{2}(1 + \frac{m}{n}z)dy = \frac{u}{y}dy \quad \therefore \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} \end{array} \right. \\
&= \int_0^\infty 2^{\frac{m+n}{2}} \left(1 + \frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}} u^{\frac{m+n}{2}} e^{-u} \frac{du}{u} \\
&= 2^{\frac{m+n}{2}} \left(1 + \frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \\
\therefore G_{m,n}(z) &= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2} - 1} \left(1 + \frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}} \\
&= \frac{1}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2} - 1} \left(1 + \frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}}.
\end{aligned}$$

よって  $F$  分布が得られた.

□

上の事実を

$$F(m, n) = \frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n}$$

と略記する.

系 2.14.  $X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ : 分散の等しい正規分布,  $\perp \implies$

$$Z = \frac{\frac{1}{m-1}\{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_m - \bar{X})^2\}}{\frac{1}{n-1}\{(Y_1 - \bar{Y})^2 + \dots + (Y_n - \bar{Y})^2\}} = \frac{U_X^2}{U_Y^2} \longleftarrow (\text{それぞれの不偏分散})$$

は自由度  $(m-1, n-1)$  の  $F$  分布をもつ.

証明 分散を  $\sigma^2$  とすると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma^2} \sum (X_i - \bar{X})^2 &= \frac{(m-1)U_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1) \quad (\because \text{命題 2.10}) \\
\frac{1}{\sigma^2} \sum (Y_j - \bar{Y})^2 &= \frac{(n-1)U_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad (\because \text{命題 2.10}) \\
\frac{U_Y^2}{U_X^2} &\sim \frac{\chi^2(m-1)/(m-1)}{\chi^2(n-1)/(n-1)} = F(m-1, n-1)
\end{aligned}$$

□

系 2.15.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ : i.i.d.,  $\sim N(\mu, \sigma^2) \implies Y = \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{U^2} \sim F(1, n-1)$ .

証明

$$\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1) \quad (\because \text{系 2.9})$$

$$\frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1) \quad (\because \text{命題 2.10})$$

これらは独立であるから

$$\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{U^2} \sim \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(n-1)/(n-1)} = F(1, n-1).$$

□

定義 2.16. 次の密度関数を持つ分布を, 自由度  $n$  の  $t$  分布という.

$$(2.12) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

記号で  $t(n)$  と表す.定理 2.17.  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim \chi^2(n)$ ,  $X \perp\!\!\!\perp Y \implies \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$  は自由度  $n$  の  $t$  分布を持つ.

上の事実を

$$t(n) = \frac{N(0, 1)}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$$

と表す.

証明

$$E\left[F\left(\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy dx$$

$$t = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}}, \quad u = \frac{y}{n} \quad \leftarrow \quad x = t\sqrt{u}, \quad y = nu$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{u} & \frac{t}{2\sqrt{u}} \\ 0 & n \end{vmatrix} = n\sqrt{u}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2 u}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} (nu)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{nu}{2}} n\sqrt{u} du dt$$

$$= \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \underbrace{\left\{ \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2+n}{2}u} u^{\frac{n-1}{2}} du \right\}}_{*} dt$$

$$\begin{aligned}
v &= \frac{n}{2} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right) u & dv &= \frac{n}{2} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right) du \\
\int_0^\infty e^{-v} \left(\frac{2v}{n(1 + \frac{t^2}{n})}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n(1 + \frac{t^2}{n})} dv \\
&= 2^{\frac{n+1}{2}} n^{-\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^\infty e^{-v} v^{\frac{n+1}{2}-1} dv \\
&= 2^{\frac{n+1}{2}} n^{-\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{-\infty}^\infty F(t) \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \int_{-\infty}^\infty F(t) \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt
\end{aligned}$$

□

命題 2.18.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ : i.i.d.,  $\sim N(\mu, \sigma^2) \implies \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{U} \sim t(n-1)$ . ここに  $U$  は不変分散  $U^2$  の平方根である.

証明

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} &\sim N(0, 1), \quad (\because \text{定理 2.1}) \\
\frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n-1), \quad (\because \text{命題 2.10})
\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{U} = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} \frac{1}{n-1}}} \sim \frac{N(0, 1)}{\sqrt{\chi^2(n-1)/(n-1)}} = t(n-1).$$

よって

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{U} \sim t(n-1).$$

□

命題 2.19.

$$Z \sim t(n) \implies Z^2 \sim F(1, n).$$

証明  $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n), X \perp\!\!\!\perp Y$

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}, \quad Z^2 = \frac{X^2}{Y/n} \sim \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(n)/n} = F(1, n).$$

□

$t$  分布を使わないで, 平方して  $F$  分布を使ってもよい.



2 項分布と F 分布

2 項分布と  $F$  分布には密接な関係がある .

命題 2.20. 確率変数  $X$  は 2 項分布  $B(N, p)$  に従うとする . このとき  $0 \leq r \leq N$  に対し ,  
 $n_1 = 2(r+1)$ ,  $n_2 = 2(N-r)$ ,  $x_0 = \frac{n_2 p}{n_1 q}$  ( $q = 1-p$ ) として

$$(2.13) \quad P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=r) = \int_{x_0}^{\infty} F(n_1, n_2)(x) dx$$

が成立する .

また  $n_1 = 2(N-r)$ ,  $n_2 = 2(r+1)$ ,  $x_1 = \frac{n_2 q}{n_1 p}$  として

$$(2.14) \quad P(X=r+1) + P(X=r+2) + \cdots + P(X=N) = \int_{x_1}^{\infty} F(n_1, n_2)(x) dx$$

が成立する .

証明 まず次の等式を証明する .

$$(2.15) \quad P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=r) = \frac{N!}{r!(N-r-1)!} \int_p^1 y^r (1-y)^{N-r-1} dy.$$

実際

$$\begin{aligned} \int_p^n y^r (1-y)^{N-r-1} dy &= - \left[ \frac{1}{N-r} y^r (1-y)^{N-r} \right]_p^1 + \frac{r}{N-r} \int_p^1 y^{r-1} (1-y)^{N-r} dy \\ &= \frac{1}{N-r} p^r (1-p)^{N-r} + \frac{r}{N-r} \int_p^1 y^{r-1} (1-y)^{N-r} dy. \end{aligned}$$

両辺に  $\frac{N!}{r!(N-r-1)!}$  を掛けて

$$\begin{aligned} \frac{N!}{r!(N-r-1)!} \int_p^n y^r (1-y)^{N-r-1} dy \\ = \frac{N!}{r!(N-r)!} \frac{1}{N-r} p^r q^{N-r} + \frac{N!}{(r-1)!(N-r)!} \int_p^1 y^{r-1} (1-y)^{N-r} dy. \end{aligned}$$

これを繰り返せば

$$\begin{aligned} \frac{N!}{r!(N-r-1)!} \int_p^1 y^r (1-y)^{N-r-1} dy \\ = \sum_{i=1}^k \binom{N}{r-i} p^{r-i} q^{N-r+i} + \frac{N!}{(r-k-1)!(N-r+k)!} \int_p^1 y^{r-k-1} (1-y)^{N-r+k} dy \end{aligned}$$

が成立する．この式で  $k = r - 1, r - i = j$  とおいて

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad \frac{N!}{r!(N-r-1)!} \int_p^1 y^r (1-y)^{N-r-1} dy &= \sum_{j=1}^r \binom{N}{j} p^j q^{N-j} + \frac{N!}{(N-1)!} \int_p^1 (1-y)^{N-r+k} dy \\
 &= \sum_{j=1}^r \binom{N}{j} p^j q^{N-j} + (1-p)^N \\
 &= \sum_{j=0}^r \binom{N}{j} p^j q^{N-j}
 \end{aligned}$$

ここで  $n_1 = 2(r+1), n_2 = 2(N-r)$  すなわち  $r = \frac{n_1}{2} - 1, N-r = \frac{n_2}{2}$  とすると

$$\frac{N!}{r!(N-r-1)!} = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(N-r)} = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} = \frac{1}{B(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})}.$$

上の式は2項分布とベータ分布の関係を述べているわけであるが，ベータ分布を変数変換して  $F$  分布が出てくることをみよう． $y = \frac{n_1 x}{n_1 x + n_2}$  で変数変換する：

$$1 - y = \frac{n_2}{n_1 x + n_2}, \quad dy = \frac{n_1 n_2}{(n_1 x + n_2)^2} dx$$

また  $y = p$  のとき

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{n_1 x}{n_1 x + n_2}, \\
 p n_1 x + p n_2 &= n_1 x \\
 n_1 x (1 - p) &= p n_2 \\
 x &= \frac{n_2 p}{n_1 (1 - p)}
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 \int_p^1 y^r (1-y)^{N-r-1} dy &= \int_{x_0}^{\infty} \left( \frac{n_1 x}{n_1 x + n_2} \right)^{\frac{n_1}{2}-1} \left( \frac{n_2}{n_1 x + n_2} \right)^{\frac{n_2}{2}-1} \frac{n_1 n_2}{(n_1 x + n_2)^2} dx \\
 &= n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2} \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 x + n_2)^{(n_1+n_2)/2}} dx
 \end{aligned}$$

結局 (2.16) の左辺は次に等しい．

$$\frac{n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2}}{B(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})} \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 x + n_2)^{(n_1+n_2)/2}} dx$$

これは  $F(n_1, n_2)$  分布の積分である．これで (2.13) が示せた．

(2.14) を示すには,  $p$ , と  $q$  を入れ替えればよい. すなわち  $Y$  を二項分布  $B(N, q)$  に従う確率変数として

$$\begin{aligned} P(X = r + 1) + P(X = r + 2) + \cdots + P(X = N) \\ = P(Y = 0) + P(Y = 1) + \cdots + P(Y = N - r - 1) \end{aligned}$$

となるので (2.13) の場合に帰着できる.

□



## 第3章 推定

### 1. 点推定

母集団分布が確率密度  $f(x; \theta)$  を持つとする。  $f(x, \theta)$  の形は分かっているが、母数  $\theta$  の値が不明であるとする。  $\theta$  の値を標本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  から推定するのが統計的推定の基本的な問題である。すなわち  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の関数として

$$\hat{\theta}_n = g_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

で  $\theta$  を推定する。  $\hat{\theta}_n$  は推定量と呼ばれている。この推定量は後に出てくる区間推定に対して、点推定とよばれる。ここでは、標本の大きさを  $n$  を明示的に表すために  $\hat{\theta}_n$  と記したが、省略することも多い。また、一般に推定量は  $\hat{\cdot}$  をつけて表すことにする。

$$E[\hat{\theta}_n] = \theta$$

のとき、 $\hat{\theta}_n$  を不変推定量という。推定量のよさを表す重要な指標である。不変推定量に対してその分散

$$V(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$$

は平均2乗予測誤差 (mean square error) と呼ばれるが、これが小さいほうが推定量として望ましい。一般的に分散が最小のものを求めることは難しいが、下からの評価を与えることは出来ることを見ていこう。

#### フィッシャー情報量

分布族  $\mathcal{F} = \{f(x; \theta)\}_\theta$  が与えられているとき、これらの密度関数を  $\theta$  の関数とみなすとき尤度関数 (likelihood function) という。その対数を対数尤度関数という：

$$l(\theta) = \log f(x; \theta).$$

$l(\theta)$  は  $x$  の関数でもあるが、それを明示するときは  $l(\theta; x)$  とかく。  $l$  の導関数を計算すると

$$\begin{aligned} \dot{l}(\theta) &= \frac{\dot{f}(x, \theta)}{f(x; \theta)}, \\ \ddot{l}(\theta) &= \frac{\ddot{f}(x, \theta)}{f(x; \theta)} - \left( \frac{\dot{f}(x, \theta)}{f(x; \theta)} \right)^2. \end{aligned}$$

となる。  $\theta$  に関する微分を  $\dot{\cdot}$  と、上にドットつけて表した。

以下  $E$  で密度関数  $f(x, \theta)$  に関する積分を表すものとする。(あるいは  $x$  に  $f(x, \theta)$  を密度に持つ確率変数  $X$  を代入して平均をとったと思ってもよい。)

定義 1.1. 分布族  $\{f(x; \theta)\}$  に対して

$$(1.1) \quad I(\theta) = E[\dot{l}(\theta)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{f}(x, \theta)^2}{f(x; \theta)} dx$$

を  $\theta$  におけるフィッシャー情報量 (Fisher's information) という.

次の等式が成立する:

$$(1.2) \quad E[\dot{l}(\theta)] = 0,$$

$$(1.3) \quad E[\ddot{l}(\theta)] = -I(\theta).$$

実際

$$\begin{aligned} E[\dot{l}(\theta)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{f}(x, \theta)}{f(x; \theta)} f(x; \theta) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(x, \theta) dx \\ &= \frac{d}{d\theta} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta) dx \\ &= \frac{d}{d\theta} 1 \\ &= 0, \\ E[\ddot{l}(\theta)] &= E\left[\frac{\ddot{f}(x, \theta)}{f(x; \theta)} - \left(\frac{\dot{f}(x, \theta)}{f(x; \theta)}\right)^2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ddot{f}(x, \theta)}{f(x; \theta)} f(x; \theta) dx - E[\dot{l}(\theta)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{f}(x, \theta) dx - E[\dot{l}(\theta)^2] \\ &= \frac{d^2}{d\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta) dx - I(\theta) \\ &= -I(\theta). \end{aligned}$$

### クラメル-ラオの不等式

さて大きさ  $n$  の標本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  をとったとき, その分布密度関数は

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{j=1}^n f(x_j; \theta)$$

で与えられる. これから対数尤度関数  $l_n$  を上と同様に定める

$$l_n(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \log f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \sum_{j=1}^n l(\theta; x_j).$$

$\theta$  で微分すると

$$\dot{l}_n(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\dot{f}_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)} = \sum_{j=1}^n \dot{l}(\theta; x_j).$$

確率変数  $S_n$  を

$$S_n = \dot{l}_n(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n)$$

で定めると

$$\begin{aligned} E[S_n] &= E[\dot{l}_n(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \dot{f}_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{d}{d\theta} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) dx_1 \cdots dx_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

また不偏性から

$$\theta = E[\hat{\theta}_n] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, x_2, \dots, x_n) f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) dx_1 \cdots dx_n.$$

両辺を  $\theta$  で微分して

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, x_2, \dots, x_n) \dot{f}_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) dx_1 \cdots dx_n \\ &= E[g(X_1, X_2, \dots, X_n) \dot{l}_n(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n)] \\ &= E[\hat{\theta}_n S_n]. \end{aligned}$$

同時密度関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$  のフィッシャー情報量は

$$I_n(\theta) = E[\dot{l}_n(\theta)^2] = V(S_n) = V\left(\sum_{j=1}^n \dot{l}(\theta; X_j)\right) = \sum_{j=1}^n V(\dot{l}(\theta; X_j)) = nI(\theta)$$

である。

定理 1.2. (Cramer-Rao) 不変推定量  $\hat{\theta}_n$  の分散に対し次の Cramer-Rao の不等式が成立する。

$$(1.4) \quad V(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{1}{nI(\theta)}.$$

等号が成り立つのは,  $\theta$  に関する微分方程式

$$(1.5) \quad \dot{l}_n(\theta) = I_n(\theta)(g(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta)$$

が成り立つときである。この式を有効式 (efficient equation) とよぶ。

証明  $E[S_n] = 0$  であるから

$$\text{Cov}(S_n, \hat{\theta}_n) = E[S_n \hat{\theta}_n] - E[S_n] \theta = E[S_n \hat{\theta}_n] = 1.$$

一方 Schwarz の不等式から

$$1 = \text{Cov}(S_n, \hat{\theta}_n)^2 \leq V(S_n) V(\hat{\theta}_n) = I_n(\theta) V(\hat{\theta}_n).$$

これで (1.4) が示せた . Schwarz の不等式で等号が成り立つのは  $S_n, \hat{\theta}_n$  の間に線形関係  $S_n = a\hat{\theta}_n + b$  が成り立つときである . 平均をとると

$$0 = a + b\theta \quad \therefore a = -b\theta.$$

よって

$$S_n = b(\hat{\theta}_n - \theta).$$

Cramer-Rao の不等式で等号が成り立つから

$$1 = \text{Cov}(S_n, \hat{\theta}_n) = bV(\hat{\theta}_n) = \frac{b}{I_n(\theta)}.$$

すなわち  $b = I_n(\theta)$  で求める結果を得る . □

### 有効推定量

定義 1.3. 不等式 (1.4) の右辺  $1/I_n(\theta)$  を Cramer-Rao の下限といい , 推定量の分散との比

$$\frac{1}{I_n(\theta) V(\hat{\theta}_n)}$$

を推定量  $\hat{\theta}_n$  の効率 (efficiency) という . 効率は 100 倍して % で表す .

定義 1.4. 推定量  $\hat{\theta}_n$  の効率が 100% のとき , 有効統計量という .

$\hat{\theta}_n$  が有効推定量であれば , 微分方程式 (1.5) を解いて

$$l_n(\theta; x_1, \dots, x_n) = \int I_n(\theta) d\theta g(x_1, \dots, x_n) - \int \theta I_n(\theta) d\theta + c(x).$$

すなわち ,

$$(1.6) \quad f_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \exp\{a(\theta)g(x_1, \dots, x_n) + b(\theta) + c(x_1, \dots, x_n)\}.$$

ここで ,

$$a(\theta) = \int I_n(\theta) d\theta, \quad b(\theta) = - \int \theta I_n(\theta) d\theta$$

で  $c(x_1, \dots, x_n)$  は  $\theta$  には関係しない関数である .



定義 1.5. 同時密度関数  $f_n$  が

$$(1.7) \quad f_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = h(g(x_1, \dots, x_n), \theta) k(x_1, \dots, x_n)$$

と表現されるとき,  $\hat{\theta}_n = g(X_1, \dots, X_n)$  を十分統計量 (sufficient statistics) という. ここで  $k(x_1, \dots, x_n)$  が  $\theta$  に依存しないことが本質的である. (1.6) の関係式から有効統計量は十分統計量である.

十分統計量は  $\theta$  を推定するのに, 十分な情報を持っている, といった意味である.

例 1.1. 正規母集団の有効統計量

母集団が正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  を持ち, 分散  $\sigma^2$  の場合を考える. 密度関数は

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

であるから, 対数尤度関数は

$$l(\mu) = \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

で, 微分して

$$\dot{l}(\mu) = (x-\mu)/\sigma^2.$$

よってフィッシャー情報量は

$$I(\mu) = E[\dot{l}(\mu)^2] = E\left[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^4}\right] = \frac{1}{\sigma^2}.$$

$n$  個の標本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  の同時密度関数は

$$f_n(x_1, \dots, x_n; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \exp\left\{-\sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

対数をとって  $\mu$  で微分すると

$$S_n = \dot{l}_n(\mu; X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n \frac{X_j - \mu}{\sigma^2} = nI(\mu)(\bar{X}_n - \mu).$$

ゆえに有効式 (1.5) が成り立っているので  $\bar{X}_n$  は母平均  $\mu$  の有効推定量である.

### 点推定

母集団の母数を推定することを点推定とよんだ. 標本平均  $\bar{X}$ , 不偏標本分散  $U_n^2$  などが代表的なものである. 推定量の望ましい性質をまとめると次のようになる.

1. 不偏性: 平均すると真の母数に等しい.

2. 有効性: 推定量が不偏性をみたせば, 分散 (平均 2 乗予測誤差) が小さいほうがよい. 分散が最小のものを, 有効推定量あるいは最小分散不偏推定量という.
3. 十分性: 母数の情報をすべて含んでいる.
4. 一致性:  $n$  を大きくすると真の母数に確率収束する. すなわち任意の  $\varepsilon > 0$  に対し

$$P(|\hat{\theta}_n| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

5. 漸近正規性:  $n$  が大きいと正規分布に近づく. このとき, 元の分布が分からなくても正規分布として扱うことができる.

### 最尤法

推定量を決めるには, いくつか方法があるが, ここでは最尤法について述べる.

#### 例 1.2. 2 項分布

成功する確率が  $p$  の試行を  $n$  回行って  $p$  を推定する問題を考えよう.

$X_1, X_2, \dots, X_n$  を成功の確率  $p$  のベルヌーイ列, すなわち i.i.d. で  $P(X_j = 1) = p$ ,  $P(X_j = 0) = 1 - p$  となるものとする. 結果が  $X_1 = r_1, X_2 = r_2, \dots, X_n = r_n$  であったとし, 成功の回数を  $r$  とする. 即ち  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ . このときの確率を  $L(p)$  とおくと

$$L(p) = P(X_1 = r_1, X_2 = r_2, \dots, X_n = r_n) = p^r (1 - p)^{n-r}$$

である.  $L(p)$  を尤度関数と呼ぶ. これを最大にする  $p$  を求め推定量とする. すなわち, 起こった事象の確率を最大にする母数  $p$  を標本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の関数として表す.  $L(p)$  の代わりに, 対数尤度  $\log L(p)$  の最大を計算する方が簡単な場合が多い. 今の場合

$$\log L(p) = r \log p + (n - r) \log(1 - p).$$

対数尤度を  $p$  で微分して

$$\frac{d}{dp} \log L(p) = \frac{r}{p} - \frac{n - r}{1 - p} = \frac{r(1 - p) - (n - r)p}{p(1 - p)} = \frac{r - np}{p(1 - p)}.$$

これが 0 になるのは  $p = \frac{r}{n}$  のときで,  $\log L(p)$  は  $p = \frac{r}{n}$  のとき最大.

$$\hat{p} = \frac{r}{n} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

を最尤推定量と呼ぶ.

#### 例 1.3. 正規分布

母集団の分布が正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  のとき, 同時密度関数は

$$f_n(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \exp\left\{-\sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

である．尤度関数としては  $\mu, \sigma^2$  の関数とみる．対数をとって  $\mu$  で微分すると

$$l_n(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \mu)^2}{2\sigma^2}.$$

最大値を求めるために  $\mu, \sigma^2$  で偏微分して，0点を探す：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} l_n(\mu, \sigma^2) &= -\sum_{j=1}^n \frac{x_j - \mu}{\sigma^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} l_n(\mu, \sigma^2) &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

を解いて

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \bar{x}, \\ \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2. \end{aligned}$$

よって  $(\mu, \sigma^2)$  の最尤推定量は

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \\ S^2 &= \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2}{n}. \end{aligned}$$

$S^2$  は不偏性をみたさないから，最尤推定量がつねに不偏性をみたすわけではないことが分かる．

## 2. 区間推定

真の母数  $\theta$  が区間  $[L, U]$  に入る確率が  $1 - \alpha$  に等しく（あるいは大きく）なるように，確率変数（統計量） $L, U$  をとる．

$$P(L \leq \theta \leq U) \leq 1 - \alpha.$$

$L$  下側信頼限界

$U$  上側信頼限界

$1 - \alpha$  信頼係数 0.99 や 0.95 などがよく使われる

$[L, U]$  信頼区間

正規母集団の母平均の推定（分散が既知の場合）

母分散  $\sigma^2$  が分かっているときに母平均を推定する．

信頼係数  $1 - \alpha$  から標準正規分布を使って

$$\int_{Z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \alpha$$

となるように  $Z_\alpha$  を定める． $Z_\alpha$  は上側確率  $100\alpha\%$  のパーセント点と呼ばれる．このとき

$$L = \bar{X} - \frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

$$U = \bar{X} + \frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

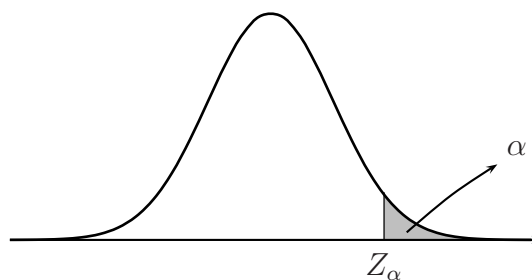


図 3.1: パーセント点

と取り， $[L, U]$  を信頼係数  $1 - \alpha$  の信頼区間という．

以下，この区間の導出原理を述べる．

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

パーセント点の例

$$Z_{0.025} = 1.96$$

$$Z_{0.005} = 2.58 \quad (\text{補間すれば } 2.576)$$

例 2.1. 分散 0.25 の正規母集団から，大きさ 25 の標本を取って，標本平均  $\bar{X} = 1.203$  を得た．母平均を信頼係数 95% で推定せよ．

$$\begin{aligned} \bar{X} \pm \frac{\sigma Z_{0.025}}{\sqrt{n}} &= 1.203 \pm \frac{\sqrt{0.25} \times 1.96}{\sqrt{25}} \\ &= 1.203 \pm \frac{1.96}{10} \\ &= 1.203 \pm 0.196 \end{aligned}$$

よって信頼区間は  $[1.007, 1.399]$ ．

正規母集団の母分散の推定

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2).$$

$\sigma^2$  を推定するのに  $U^2 = \frac{1}{n-1}\{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2\}$  を使う.

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

であるから  $\chi^2$  分布の上側確率  $100\alpha\%$  のパーセント点を  $\chi_{\alpha}^2(n-1)$  とかくと,

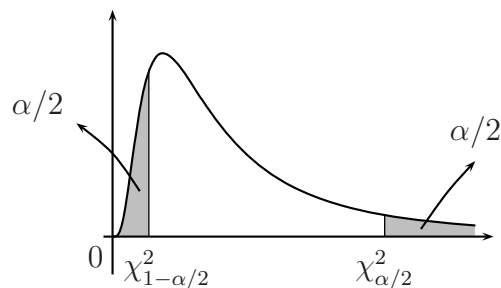


図 3.2: パーセント点

$$P\left(\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \leq \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \leq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)U^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)U^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right) = 1 - \alpha.$$

母分散の信頼区間 (信頼係数  $1 - \alpha$ )

$$\left[ \frac{(n-1)U^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)U^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right]$$

母平均の推定 (分散が未知の場合)

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2\}$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{U} = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} \frac{1}{n-1}}} \sim \frac{N(0, 1)}{\sqrt{\chi^2(n-1)/(n-1)}} = t(n-1)$$

よって

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{U} \sim t(n-1)$$

$t$  分布の上側確率  $100\alpha\%$  のパーセント点を  $t_{\alpha}(n-1)$  とかくと,

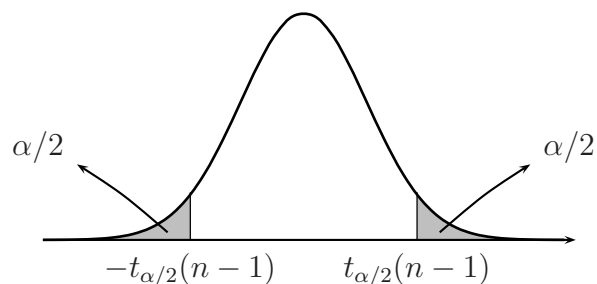


図 3.3: パーセント点

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{U} \leq t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

$\mu$  について解いて

$$P\left(\bar{X} - \frac{U}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{U}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

分散が未知の場合の母平均の信頼区間 (信頼係数  $1 - \alpha$ )

$$\left[ \bar{X} - \frac{U}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{U}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) \right]$$

### 3. 2 標本問題

標本平均の差の推定

2 種類の標本

$$X_1, \dots, X_m \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{m}(X_1 + \dots + X_m)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n)$$

$\bar{X} - \bar{Y}$  が母平均の差の推定量.

母平均の差の推定

(1) 母分散が既知

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{m}\right)$$

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$\mu_1 - \mu_2$  について解いて

$$P\left(\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} Z_{\alpha/2} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

母分散が既知の場合の母平均の差の信頼区間 (信頼係数  $1 - \alpha$ )

$$\left[ \bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} Z_{\alpha/2} \right]$$

(2) 母分散が未知だが等しいとき

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sigma^2\right)$$

$\sigma^2 (= \sigma_1^2 = \sigma_2^2)$  は未知なので推定しなければならない

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2 + \sum(Y_j - \bar{Y})^2}{m + n - 2} \\ &= \frac{(m-1)U_X^2 + (n-1)U_Y^2}{m + n - 2} \end{aligned}$$

$$\frac{(m+n-2)U^2}{\sigma^2} = \frac{(m-1)U_X^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)U_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1) + \chi^2(n-1) = \chi^2(m+n-2)$$

$U^2$  と  $\bar{X} - \bar{Y}$  は独立である.

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{(m+n-2)U^2}{\sigma^2} \frac{1}{m+n-2}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{U \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \sim t(m+n-2)$$

母分散が未知だが等しい場合の母平均の差の信頼区間 (信頼係数  $1 - \alpha$ )

$$\left[ \bar{X} - \bar{Y} - U \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} t_{\alpha/2}(m+n-2), \bar{X} - \bar{Y} + U \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} t_{\alpha/2}(m+n-2) \right]$$

(3) 母分散が未知で等しくないとき

Welch の近似法がよく使われる

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{U_X^2}{m} + \frac{U_Y^2}{n}}}$$

統計量  $T$  を近似的に自由度  $\phi$  の  $t$  分布とみなす.  $\phi$  は 次の式から定める

$$\frac{(\frac{1}{m}U_X^2 + \frac{1}{n}U_Y^2)^2}{\phi} = \frac{(\frac{1}{m}U_X^2)^2}{m-1} + \frac{(\frac{1}{n}U_Y^2)^2}{n-1}$$

母分散が未知で等しくない場合の母平均の差の信頼区間 (信頼係数  $1 - \alpha$ )

$$\left[ \bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{U_X^2}{m} + \frac{U_Y^2}{n}} t_{\alpha/2}(\phi), \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{U_X^2}{m} + \frac{U_Y^2}{n}} t_{\alpha/2}(\phi) \right]$$

### 母分散の比の推定

$$X_1, \dots, X_m \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{m}(X_1 + \dots + X_m)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n)$$

$$U_X^2 = \frac{1}{m-1} \{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_m - \bar{X})^2\}$$

$$U_Y^2 = \frac{1}{n-1} \{(Y_1 - \bar{Y})^2 + \dots + (Y_n - \bar{Y})^2\}$$

$$\frac{(m-1)U_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\frac{(n-1)U_Y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{U_X^2/\sigma_1^2}{U_Y^2/\sigma_2^2} \sim \frac{\chi^2(m-1)/(m-1)}{\chi^2(n-1)/(n-1)} \sim F(m-1, n-1)$$



信頼係数を  $1 - \alpha$  として

$$P\left(F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) \leq \frac{U_X^2 \sigma_2^2}{U_Y^2 \sigma_1^2} \leq F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\right) = \alpha$$

$$P\left(\frac{U_Y^2}{U_X^2} F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) \leq \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{U_Y^2}{U_X^2} F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\right) = \alpha.$$

よって

母分散の比  $\sigma_2^2/\sigma_1^2$  の信頼区間 (信頼係数  $1 - \alpha$ )

$$\left[ \frac{U_Y^2}{U_X^2} F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1), \frac{U_Y^2}{U_X^2} F_{\alpha/2}(m-1, n-1) \right]$$

ここで  $F$  分布のパーセント点に関して,

$$F(m, n) \sim \frac{1}{F(n, m)}$$

$$F_{1-\alpha}(m, n) = \frac{1}{F_{\alpha}(n, m)}$$

であるから,  $F_{1-\alpha}(m, n)$  は逆数で計算する.



## 第4章 仮説検定

### 1. 検定の考え方

この節では仮説検定を扱うが、それがどのように行われるかまず例を見ていくことにする。

#### 2 項分布の検定

例 1.1. サイコロを 180 回投げて 1 の目が 39 回出た。このサイコロは正常か？

この問題は、1 の出る確率が  $\frac{1}{6}$  であるかどうか調べよといっている訳である。1 の出る確率を  $p$  とし仮説「 $p = \frac{1}{6}$  である」を立てる。数学的には

$$H_0: p = \frac{1}{6} \text{ である} \quad \dots \text{ 帰無仮説}$$

$$H_1: p = \frac{1}{6} \text{ ではない} \quad \dots \text{ 対立仮説}$$

$p = \frac{1}{6}$  として計算を進める。X を 180 回投げたときの 1 の出た回数とする。X  $\sim$  Bin(180,  $\frac{1}{6}$ ) である。

$$E[X] = 30, \quad V(X) = 180 \times p \times (1 - p) = 180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 25 = 5^2.$$

30 が平均であるので、

$$|X - 30| \leq c \quad \dots \quad H_0 \text{ は正しいと判断} = \text{採択}$$

$$|X - 30| > c \quad \dots \quad H_0 \text{ は誤りと判断} = \text{棄却}$$

c は、有意水準  $\alpha$  を与えて

$$P(|X - 30| > c) = \alpha$$

となるように定める。 $\alpha = 0.05, 0.01$  などがよくとられる。 $W = \{x; |x - 30| > c\}$  を棄却域という。c を求めるのに、X は近似的に  $N(30, 5^2)$  に従うから、これで計算をする。Z  $\sim$  N(0, 1) として

$$P(|X - 30| > c) = P\left(\left|\frac{X - 30}{5}\right| > \frac{c}{5}\right) \doteq P\left(|Z| > \frac{c}{5}\right) = \alpha.$$

今  $\alpha = 0.05$  とすると  $P(|Z| > 1.96) = 0.05$  であるから

$$\frac{c}{5} = 1.96 \quad \therefore c = 1.96 \times 5 = 9.8 \quad \therefore P(|X - 30| > 9.8) = 0.05.$$

よって

$$X < 30 - 9.8 = 20.2 \quad \text{or} \quad X > 30 + 9.8 = 39.8$$

ならば棄却する。

注意 1.1. ここでは1の目だけに着目したが、より正確な検定を行うためには、全ての目の出方を調べた方がよい。そのときには後に第3節で述べる適合度検定を使う。

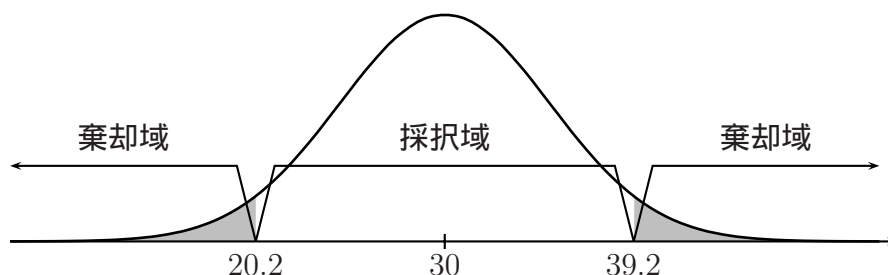


図 4.1: 棄却域と採択域

今の場合は 39 だから採択（棄却できない）。

注意 1.2. 棄却: 帰無仮説  $H_0$  が正しいとして計算して、非常に確率の低いことが起こった場合に棄却する。例外的なことが起こったので仮説が間違っていると判断するわけである。

採択: 積極的に支持しているわけではない。棄却するには根拠が弱い（疑わしいが証拠が不十分という状況。）仮説  $H_0$  が採択されるときは何もいえないというべきで、それゆえ帰無仮説とよばれる。棄却できるときに初めて積極的な意味を持つ。（気持ちとしては、対立仮説  $H_1$  の方を言いたい。）

### 検定の手順

#### 検定の手順

1. 仮説の設定（帰無仮説と対立仮説）
2. 検定統計量の選定
3. 有意水準を定める（ $\alpha = 0.05, 0.01$ ）
4. 棄却域の計算
5. 採択・棄却の決定

### 検定の種類

#### 両側検定

$$\left. \begin{array}{l} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{array} \right\} \rightarrow \theta = \theta_0 \text{ として } P(|\hat{\theta} - \theta_0| > c) = \alpha \text{ となるよう } c \text{ を定める}$$

#### 片側検定

$$\left. \begin{array}{l} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{array} \right\} \rightarrow \theta = \theta_0 \text{ として } P(\hat{\theta} - \theta_0 > c) = \alpha \text{ となるよう } c \text{ を定める}$$

$$\left. \begin{array}{l} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{array} \right\} \rightarrow \theta = \theta_0 \text{ として } P(\hat{\theta} - \theta_0 < c) = \alpha \text{ となるよう } c \text{ を定める}$$

それぞれ  $\{x; |x - \theta_0| > c\}$ ,  $\{x; x - \theta_0 > c\}$ ,  $\{x; x - \theta_0 < c\}$  が棄却域 .

### 誤りの種類

	$H_0$ が正しい	$H_0$ が誤り
採択		第二種の誤り
棄却	第一種の誤り (有意水準 $\alpha$ )	(検出力)

第一種の誤りと第二種の誤りの確率を同時に小さくすることは出来ない . 第一種の誤りの確率 (有意水準) を固定し , 第二種の誤りの確率を出来るだけ小さくするように棄却域を設定する .

## 2. 正規母集団の検定

以下 , 母集団は正規分布に従うとする

### 平均の検定

$X_1, X_2, \dots, X_n$ : 標本

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

[A] 分散  $\sigma^2$  が既知の場合

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

棄却域:  $W = \{z; |z| > Z_{\alpha/2}\}$ . したがって

$$Z \in W \Rightarrow \text{棄却}$$

$$Z \notin W \Rightarrow \text{採択}$$

片側検定の場合は

$$\left. \begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{array} \right\} \dots W = \{z; z > Z_\alpha\}$$

$$\left. \begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{array} \right\} \dots W = \{z; z < -Z_\alpha\}.$$

[B] 分散  $\sigma^2$  が未知の場合

この場合は分散の推定値として  $U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$  を使う.

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{U} \sim t(n-1),$$

$$W = \{t; |t| > t_{\alpha/2}(n-1)\} \cdots \text{棄却域}$$

問題 2.1. A 社は, 新しく開発した電球が 1700 時間より長い寿命があると主張している. 10 個を選んで次のデータを得た. A 社の主張は正しいと言ってよいか. 有意水準 5% で検定せよ.  
1681, 1580, 1661, 1743, 1715, 1576, 1653, 1805, 1982, 1783

解答

$$H_0: \mu = 1700$$

$$H_1: \mu > 1700$$

と仮説を立てる. データから

$$\bar{X} = 1717.9, \quad U = 120.2659, \quad t_{0.05}(9) = 1.833$$

$$T = \frac{\sqrt{10}(1717.9 - 1700)}{120} = 0.470 \cdots$$

$$W = \{t; t > t_{0.05}(9)\} = \{t > 1.833\}.$$

$0.470 \leq 1.833$  だから仮説は棄却できない. すなわち採択.

この場合  $H_0: \mu = 1700$  が採択されたということは, 寿命が 1700 時間であるということであり, それより長いと主張している A 社の主張は結論的には認められないわけである. しかしながら帰無仮説が採択される場合は積極的な意味ではないから「なんとも言えない」というのが関の山である.  $\square$

### 分散の検定

$X_1, X_2, \dots, X_n$ : 標本

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$Y = \frac{(n-1)U^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$W = \{y; y < \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1), \quad y > \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\}$$

$$Y \in W \cdots \text{棄却}$$

$$Y \notin W \cdots \text{採択}$$

等平均の検定

$$X_1, X_2, \dots, X_m \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

[A] 分散  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  が既知の場合

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$W = \{z; |z| > Z_{\alpha/2}\}$$

[B] 分散が未知で  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  の場合

$$U^2 = \frac{1}{m+n-2} \left\{ \sum_{j=1}^m (X_j - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \right\}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{U \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

$$W = \{t; |t| > t_{\alpha/2}(m+n-2)\}$$

[C] 分散  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  が未知の場合

[A] の場合の  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  を

$$U_X^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (X_j - \bar{X})^2$$

$$U_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2$$

で推定し，検定統計量

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{U_X^2}{m} + \frac{U_Y^2}{n}}}$$

を用いる．この統計量  $T$  を近似的に自由度  $\phi$  の  $t$  分布とみなす． $\phi$  は次の式から定める

$$\frac{(\frac{1}{m}U_X^2 + \frac{1}{n}U_Y^2)^2}{\phi} = \frac{(\frac{1}{m}U_X^2)^2}{m-1} + \frac{(\frac{1}{n}U_Y^2)^2}{n-1}.$$

この方法を Welch's test とよぶ．

等分散の検定

$$X_1, X_2, \dots, X_m \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

$H_0$  の下で

$$F = \frac{U_X^2}{U_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

$$W = \{f; f < \frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1, m-1)}, \quad f > F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\}$$

3.  $\chi^2$  検定

$\chi^2$  検定と呼ばれる検定をいくつか論じる.

適合度検定

分布の型を検定する

例：正規分布に従っているか？

ポアソン分布に従っているか？

[A] 未知母数を含まない場合

事象	$A_1$	$A_2$	$\dots$	$A_k$	計
生起確率	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_k$	1
期待度数	$np_1$	$np_2$	$\dots$	$np_k$	$n$
観測度数	$n_1$	$n_2$	$\dots$	$n_k$	$n$

帰無仮説  $H_0: P(A_i) = p_i$

対立仮説  $H_1: \exists i P(A_i) \neq p_i$

$$X = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad \text{自由度 } k-1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布で近似できる}$$

$$W = \{x; x > \chi_{\alpha}^2(k-1)\}$$

この検定を  $\chi^2$  適合度検定という

[B] 未知母数を含む場合

$F_{\theta}$ : 未知母数  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t)$  を含む分布



$\theta$  を  $\hat{\theta}$  で推定 (最尤推定量)

事象  $A_i$  の確率は  $P(A_i) = p_i = p_i(\theta)$  であるが,  $\theta$  が未知であるので, 生起確率の推定量として  $\hat{p}_i = p_i(\hat{\theta})$  を用いる. 後は未知母数を含まない場合と同じで,

帰無仮説  $H_0$ : 母集団の分布は  $F_\theta$  である

対立仮説  $H_1$ : 母集団の分布は  $F_\theta$  ではない

$$X = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \quad \text{自由度 } k - t - 1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布で近似できる}$$

$$W = \{x; x > \chi_\alpha^2(k - t - 1)\}$$

正規分布の場合であれば平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の母数を持ち,  $A_i$  は適当にクラスを分け,  $A_i = \{a_i < Z \leq a_{i+1}\}$  などとする.

### 独立性の検定

喫煙と性別, あるいは政党の支持者と年齢といった二つの要因が独立であるかどうかを考えよう. すなわち 2 つの要因  $A$  と  $B$  があって, これらが独立であるかどうかを検定することを考える.

$A$  要因は  $r$  水準,  $B$  要因は  $c$  水準に分かれているとしよう.  $A$  要因と  $B$  要因の確率分布を次で与える.

A \ B	B				行周辺分布
	$B_1$	$B_2$	$\cdots$	$B_c$	
$A_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\cdots$	$p_{1c}$	$p_{1\cdot}$
$A_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\cdots$	$p_{2c}$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$A_r$	$p_{r1}$	$p_{r2}$	$\cdots$	$p_{rc}$	$p_{r\cdot}$
列周辺分布	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot c}$	1

$$\text{行周辺分布: } p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^c p_{ij}$$

$$\text{列周辺分布: } p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^r p_{ij}$$

$$\text{全確率: } 1 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c p_{ij}$$

確率の意味は

$$p_{ij} = P(A_i \cap B_j), \quad p_{i\cdot} = P(A_i), \quad p_{\cdot j} = P(B_j)$$

要因  $A, B$  が独立であるという仮説は

帰無仮説  $H_0$ :  $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j} \quad i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, c$

対立仮説  $H_1$ : それ以外

観測データとして次のものが得られたとする.

A \ B	B				行周辺分布
	$B_1$	$B_2$	$\cdots$	$B_c$	
$A_1$	$n_{11}$	$n_{12}$	$\cdots$	$n_{1c}$	$n_{1\cdot}$
$A_2$	$n_{21}$	$n_{22}$	$\cdots$	$n_{2c}$	$n_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$A_r$	$n_{r1}$	$n_{r2}$	$\cdots$	$n_{rc}$	$n_{r\cdot}$
列周辺分布	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$\cdots$	$n_{\cdot c}$	1

$$\text{行周辺分布: } n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^c n_{ij}$$

$$\text{列周辺分布: } n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^r n_{ij}$$

$$\text{全確率: } 1 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c n_{ij}$$

それぞれ推定量としては

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad \hat{p}_{i\cdot} = \frac{n_{i\cdot}}{n}, \quad \hat{p}_{\cdot j} = \frac{n_{\cdot j}}{n}$$

であるから，統計量としては

$$X = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n})^2}{\frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}}$$

を取る． $n$  が十分大きいときには近似的に  $\chi^2((r-c)(c-1))$  分布に従う．自由度がこうなるのは  $rc-1$  から，推定した  $c-1, r-1$  だけ少ないからである．

## 第5章 統計解析

### 1. 回帰分析

#### 線型回帰分析

親子の身長, 年齢と血圧, 高校の成績と大学の成績などの間にはどのような関係があるか, というように一つの変数と他の変数との間の関係を調べることを回帰分析という. とくにここでは線型関係に限ることにする. この場合を線形回帰分析という.

$(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots, (x_n, Y_n)$  を得られたデータとし,  $x$  の値が  $Y$  に影響を与えているとする. すなわち次の関係があるものとする:

$$Y_j = a + bx_j + \varepsilon_j.$$

$x_i$  は確率変数ではなく確定した値として扱い, 説明変数 (独立変数) という. それに対して,  $Y$  を被説明変数 (従属変数) という.  $\varepsilon_i$  は誤差項 (擾乱項) error と呼ばれる.  $\varepsilon_i$  は独立, 同分布を仮定する. 以下では正規分布  $N(0, \sigma^2)$  に従うものと仮定する.

$$y = ax + b$$

を回帰曲線とよび,  $a, b$  を回帰係数という.  $a, b$  を推定 (あるいは検定) することがここでの主題である.

条件から

$$Y_j \sim N(ax_j + b, \sigma^2).$$

尤度関数 i.e.,  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  の同時密度関数は

$$L(a, b) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y_j - a - bx_j)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

であり, 対数尤度関数は

$$l(a, b) = \log L(a, b) = -n \log \sqrt{2\pi\sigma^2} - \sum_{j=1}^n \frac{(y_j - a - bx_j)^2}{2\sigma^2}.$$

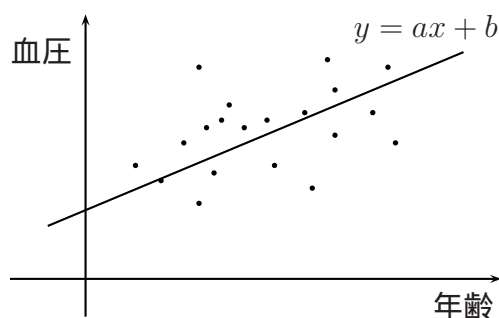


図 5.1: 年齢と血圧

これを最大化するには  $\sum_j (y_j - a - bx_j)^2$  を最小化すればよい。結局最小2乗法で求めることになる。計算のために記号を準備しておこう。それぞれの分散，共分散の記号を決めておく。

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2,$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2,$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}).$$

すると

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_j)^2 &= \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} - bx_j + b\bar{x} + \bar{y} - b\bar{x} - a)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} - bx_j + b\bar{x})^2 + 2 \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} - bx_j + b\bar{x})(\bar{y} - b\bar{x} - a) \\ &\quad + n(\bar{y} - b\bar{x} - a)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \{(y_j - \bar{y})^2 - 2b(y_j - \bar{y})(bx_j - b\bar{x}) + (bx_j - b\bar{x})^2\} + n(\bar{y} - b\bar{x} - a)^2 \\ &= nS_y^2 - 2bnS_{xy} + b^2nS_x^2 + n(\bar{y} - b\bar{x} - a)^2 \\ &= nS_x^2 \left( b^2 - 2b \frac{S_{xy}}{S_x^2} \right) + nS_y^2 + n(\bar{y} - b\bar{x} - a)^2 \\ &= nS_x^2 \left( b - \frac{S_{xy}}{S_x^2} \right)^2 - n \frac{S_{xy}^2}{S_x^2} + nS_y^2 + n(\bar{y} - b\bar{x} - a)^2. \end{aligned}$$

これから

$$b = \frac{S_{xy}}{S_x^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

のとき最小となる。よって回帰係数  $a, b$  の推定は

$$(1.1) \quad \hat{b} = \frac{S_{xY}}{S_x^2}, \quad \hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{x}$$

で行えばよい。ここで

$$S_{xY} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(Y_j - \bar{Y}).$$

推定量の分布

次に，区間推定や検定を行うには  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  の分布を知る必要がある．それに対しては次のことが成り立つ．

定理 1.1.  $(\hat{a}, \hat{b})$  は 2 次元正規分布に従い，平均と共分散は次で与えられる：

$$\begin{aligned} E[\hat{a}] &= a, \\ E[\hat{b}] &= b, \\ V(\hat{a}) &= \frac{\sigma^2}{n} \left( 1 + \frac{\bar{x}^2}{S_x^2} \right), \\ V(\hat{b}) &= \frac{\sigma^2}{nS_x^2} \\ Cov(\hat{a}, \hat{b}) &= -\frac{\sigma^2 \bar{x}}{nS_x^2} \end{aligned}$$

証明  $Y_j = a + bx_j + \varepsilon_j$  であったから， $\bar{Y} = a + b\bar{x} + \bar{\varepsilon}$ ．

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})(Y_j - \bar{Y})}{nS_x^2} \\ &= \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})(a + bx_j + \varepsilon_j - a - b\bar{x} - \bar{\varepsilon})}{nS_x^2} \\ &= \frac{\sum_j b(x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{nS_x^2} + \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})\varepsilon_j}{nS_x^2} - \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})\bar{\varepsilon}}{nS_x^2} \\ &= b + \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})\varepsilon_j}{nS_x^2} \\ \hat{a} &= \bar{Y} - \hat{b}\bar{x} \\ &= a + b\bar{x} + \bar{\varepsilon} - \left( b + \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})\varepsilon_j}{nS_x^2} \right) \bar{x} \\ &= a + \sum_j \left\{ \frac{1}{n} - \frac{\bar{x}(x_j - \bar{x})}{nS_x^2} \right\} \varepsilon_j \\ &= a + \frac{1}{n} \sum_j \left\{ 1 - \frac{\bar{x}(x_j - \bar{x})}{S_x^2} \right\} \varepsilon_j. \end{aligned}$$

$\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  は独立な正規分布に従う  $\varepsilon_j$  で表されているから，2次元正規分布に従う．平均，共分散を計算すると，

$$\begin{aligned} E[\hat{b}] &= b, \\ V(\hat{b}) &= \frac{\sum (x_j - \bar{x})^2 \sigma^2}{n^2 S_x^4} = \frac{n S_x^2 \sigma^2}{n^2 S_x^4} = \frac{\sigma^2}{n S_x^2} \end{aligned}$$

および

$$E[\hat{a}] = a,$$

$$\begin{aligned}
V(\hat{a}) &= \frac{1}{n^2} \sum_j \left\{ 1 - \frac{\bar{x}(x_j - \bar{x})}{S_x^2} \right\}^2 \sigma^2 \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_j \left\{ 1 - \frac{2\bar{x}(x_j - \bar{x})}{S_x^2} + \frac{\bar{x}^2(x_j - \bar{x})^2}{S_x^4} \right\} \sigma^2 \\
&= \frac{1}{n^2} \left\{ n + \frac{\bar{x}^2 n S_x^2}{S_x^4} \right\} \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n} \left( 1 + \frac{\bar{x}^2}{S_x^2} \right), \\
Cov(\hat{a}, \hat{b}) &= \frac{1}{n^2 S_x^2} \sum_j (x_j - \bar{x}) \left\{ 1 - \frac{\bar{x}(x_j - \bar{x})}{S_x^2} \right\} \\
&= -\frac{1}{n^2 S_x^2} \sum_j \frac{\bar{x}(x_j - \bar{x})^2}{S_x^2} \\
&= -\frac{1}{n^2 S_x^2} \frac{\bar{x} n S_x^2}{S_x^2} \\
&= -\frac{\sigma^2 \bar{x}}{n S_x^2}
\end{aligned}$$

となる .

□

この定理により

$$(1.2) \quad \frac{\hat{a} - a}{\sqrt{V(\hat{a})}} = \frac{\sqrt{n}(\hat{a} - a)}{\sigma \sqrt{1 + \bar{x}^2/S_x^2}} \sim N(0, 1)$$

$$(1.3) \quad \frac{\hat{b} - b}{\sqrt{V(\hat{b})}} = \frac{\sqrt{n}(\hat{b} - b)}{\sigma/S_x^2} \sim N(0, 1)$$

が分かるから , これを利用して (区間) 推定 , 検定を行えばよい .

### 分散の推定

$\sigma^2$  が既知の場合はこれでよいが ,  $\sigma^2$  が未知の場合はさらに  $\sigma^2$  の推定をする必要がある .  
そのために

$$(1.4) \quad e_j = Y_j - \hat{b}x_j - \hat{a} = a + bx_j + \varepsilon_j - \hat{b}x_j - \hat{a} = a - \hat{a} + (b - \hat{b})x_j + \varepsilon_j$$

とおく . これは残差とわれる . 分散  $\sigma^2$  の推定は

$$(1.5) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_j e_j^2$$

で行う . この分布が必要であるが , それは次の定理から得られる .

**定理 1.2.** 残差  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  は  $(\hat{a}, \hat{b})$  とは独立であり , さらに (1.5) で定まる  $\hat{\sigma}^2$  も  $(\hat{a}, \hat{b})$  と独立で ,  $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$  は自由度  $n-2$  の  $\chi^2$  分布に従う .

証明 すべての確率変数は  $\varepsilon_j$  で表されているから，正規分布に従うことは明らか．共分散が 0 となることを示せば独立性が示せる．

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(e_j, \hat{a}) &= \text{Cov}(\varepsilon_j - (\hat{a} - a) - (\hat{b} - b)x_j, \hat{a}) \\
 &= \text{Cov}(\varepsilon_j, \hat{a}) - \text{Cov}(\hat{a} - a, \hat{a}) - x_j \text{Cov}(\hat{b} - b, \hat{a}) \\
 &= \text{Cov}(\varepsilon_j, \hat{a}) - \text{Cov}(\hat{a}, \hat{a}) - x_j \text{Cov}(\hat{b}, \hat{a}) \\
 &= \frac{\sigma^2}{n} \left( 1 - \frac{\bar{x}(x_j - \bar{x})}{S_x^2} \right) - \frac{\sigma^2}{n} \left( 1 + \frac{\bar{x}^2}{S_x^2} \right) + x_j \frac{\sigma^2 \bar{x}}{n S_x^2} \\
 &= \frac{\sigma^2}{n} \left( 1 - \frac{\bar{x}(x_j - \bar{x})}{S_x^2} - 1 - \frac{\bar{x}^2}{S_x^2} + \frac{x_j \bar{x}}{S_x^2} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(e_j, \hat{b}) &= \text{Cov}(\varepsilon_j - (\hat{a} - a) - (\hat{b} - b)x_j, \hat{b}) \\
 &= \text{Cov}(\varepsilon_j, \hat{b}) - \text{Cov}(\hat{a} - a, \hat{b}) - x_j \text{Cov}(\hat{b} - b, \hat{b}) \\
 &= \text{Cov}(\varepsilon_j, \hat{b}) - \text{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) - x_j \text{Cov}(\hat{b}, \hat{b}) \\
 &= \frac{(x_j - \bar{x})\sigma^2}{n S_x^2} + \frac{\bar{x}\sigma^2}{n S_x^2} - x_j \frac{\sigma^2}{n S_x^2} \\
 &= \frac{\sigma^2}{n S_x^2} (x_j - \bar{x} + \bar{x} - x_j) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

これで独立性が示せた．

さて， $\hat{a}$ ， $\hat{b}$  の定義 (1.1) から

$$\hat{a} + x_j \hat{b} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{x} + x_j \hat{b} = \bar{Y} + \frac{S_{xY}}{S_x^2} (x_j - \bar{x}).$$

従って両辺から  $a + bx_j$  を引いて

$$\begin{aligned}
 \hat{a} - a + (\hat{b} - b)x_j &= \bar{Y} + \frac{S_{xY}}{S_x^2} (x_j - \bar{x}) - a - bx_j \\
 (1.6) \qquad \qquad \qquad &= \bar{Y} - a - b\bar{x} + \frac{S_{xY}}{S_x^2} (x_j - \bar{x}) - b(x_j - \bar{x}) \\
 &= \bar{Y} - a - b\bar{x} + \frac{S_{xY} - bS_x^2}{S_x^2} (x_j - \bar{x})
 \end{aligned}$$

$\bar{Y}$  と  $S_{xY}$  について平均，分散を計算する． $Y_j = a + bx_j + \varepsilon_j$  だから  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  は独立． $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_j Y_j$  は独立確率変数の和だから

$$E[\bar{Y}] = \frac{1}{n} \sum_j E[Y_j] = \frac{1}{n} \sum_j (a + bx_j) = a + b\bar{x},$$

$$V(\bar{Y}) = \sum_j V\left(\frac{Y_j}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_j V(Y_j) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$S_{xY}$  については

$$S_{xY} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(Y_j - \bar{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})Y_j$$

とやはり独立確率変数の和だから

$$\begin{aligned} E[S_{xY}] &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})E[Y_j] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(a + bx_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})bx_j = \frac{b}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x}) \\ &= bS_x^2, \\ V(S_{xY}) &= \frac{1}{n^2} \sum_j V((x_j - \bar{x})Y_j) = \frac{1}{n^2} \sum_j (x_j - \bar{x})^2 V(Y_j) = \frac{1}{n^2} \sum_j (x_j - \bar{x})^2 \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2 S_x^2}{n}, \\ Cov(\bar{Y}, S_{xY}) &= \frac{1}{n^2} \sum_j (x_j - \bar{x})V(Y_j) = \frac{1}{n^2} \sum_j (x_j - \bar{x})\sigma^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

共分散が 0 だから独立であることが分かる．さらに

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{Y} - a - b\bar{x})}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad \frac{\sqrt{n}(S_{xY} - bS_x^2)}{\sigma S_x} \sim N(0, 1)$$

であるから 2 乗して加えれば，

$$(1.7) \quad \frac{n(\bar{Y} - a - b\bar{x})^2}{\sigma^2} + \frac{n(S_{xY} - bS_x^2)^2}{\sigma^2 S_x^2} \sim \chi^2(2)$$

であることが分かる．

これは予測誤差の 2 乗和 ( を  $\sigma^2$  で割ったもの ) といわれるものである．そのことを説明しておこう． $\varepsilon_j = Y_j - (a + bx_j)$  は観測誤差と呼ばれるが，(1.4) の残差の関係式  $e_j = a - \hat{a} + (b - \hat{b})x_j + \varepsilon_j$  を用いて次の様に分解される

$$\varepsilon_j = \underbrace{Y_j - (a + bx_j)}_{\text{観測誤差}} = \underbrace{\hat{a} - a + (\hat{b} - b)x_j}_{\text{予測誤差}} + \underbrace{e_j}_{\text{残差}}$$

ここで (1.6) を用いて予測誤差は

$$\hat{a} - a + (\hat{b} - b)x_j = \bar{Y} - a - b\bar{x} + \frac{S_{xY} - bS_x^2}{S_x^2}(x_j - \bar{x})$$



であるからその2乗和は

$$\begin{aligned}
 & \sum_j (\hat{a} - a + (\hat{b} - b)x_j)^2 \\
 &= \sum_j \left\{ \bar{Y} - a - b\bar{x} + \frac{S_{xY} - bS_x^2}{S_x^2} (x_j - \bar{x}) \right\}^2 \\
 &= \sum_j \left\{ (\bar{Y} - a - b\bar{x})^2 + 2(\bar{Y} - a - b\bar{x}) \frac{S_{xY} - bS_x^2}{S_x^2} (x_j - \bar{x}) + \frac{(S_{xY} - bS_x^2)^2}{S_x^4} (x_j - \bar{x})^2 \right\} \\
 &= n(\bar{Y} - a - b\bar{x})^2 + \frac{(S_{xY} - bS_x^2)^2}{S_x^4} nS_x^2 \\
 &= n(\bar{Y} - a - b\bar{x})^2 + \frac{n(S_{xY} - bS_x^2)^2}{S_x^2}.
 \end{aligned}$$

これを  $\sigma^2$  で割ったものが, (1.7) の右辺であった.

ここで, 予測誤差と残差の関係をもう少し見ておこう.

$$\sum_{j=1}^n e_j (\hat{a} - a + (\hat{b} - b)x_j) = (\hat{a} - a)\hat{e} + (\hat{b} - b) \sum_{j=1}^n e_j x_j = (\hat{b} - b) \sum_{j=1}^n e_j x_j.$$

さらに

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n e_j x_j &= \sum_{j=1}^n (Y_j - \hat{b}x_j - \hat{a})x_j = \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y} - \hat{b}x_j + \hat{b}\bar{X} + \bar{Y} - \hat{b}\bar{x} - \hat{a})x_j \\
 &= \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})x_j - \hat{b} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})x_j \\
 &= \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})(x_j - \bar{x}) - \hat{b} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{X})(x_j - \bar{x}) = nS_{xY} - \frac{S_{xY}}{S_x^2} nS_x^2 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

結局

$$\sum_{j=1}^n e_j (\hat{a} - a + (\hat{b} - b)x_j) = 0.$$

一方

$$\varepsilon_j = e_j + (\hat{a} - a + (\hat{b} - b)x_j)$$

だから

$$\sum_j \varepsilon_j^2 = \sum_j e_j^2 + \sum_j (\hat{a} - a + (\hat{b} - b)x_j)^2$$

これで

$$\text{観測誤差の 2 乗和} = \text{予測誤差の 2 乗和} + \text{残差の 2 乗和}$$

であることが分かった．(観測誤差の 2 乗和)/ $\sigma^2 \sim \chi^2(n)$  であり (予測誤差の 2 乗和)/ $\sigma^2 \sim \chi^2(2)$  である．さらに予測誤差の 2 乗和と残差の 2 乗和は独立である．このことは  $(\hat{a}, \hat{b})$  と  $e_j$  が独立であることから分かる．従って (残差の 2 乗和)/ $\sigma^2 \sim \chi^2(n-2)$  であることが分かる．以上で主張が従う．  $\square$

上の定理から残差 2 乗和  $\hat{\sigma}^2$  が  $\sigma^2$  の不偏推定量であることが分かり，(1.2), (1.3) 式の  $\sigma^2$  を  $\hat{\sigma}^2$  で置き換えた

$$(1.8) \quad T_a = \frac{\sqrt{n}(\hat{a} - a)}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + (\bar{x}/S_x^2)^2}} \sim t(n-2),$$

$$(1.9) \quad T_b = \frac{\sqrt{n}(\hat{b} - b)}{\hat{\sigma}/S_x^2} \sim t(n-2)$$

で  $a, b$  の推定，検定を行う． $\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-2)$  であったから， $T_a, T_b$  が自由度  $n-2$  の  $t$  分布に従うことも分かったことになる．

## 関連図書

- [1] 松原望, 縄田和満, 中井検裕, 統計学入門, 東京大学出版会, 東京, 1991.
- [2] R. V. Hogg and A. T. Craig, “*Introduction to Mathematical Statistics*,” Macmillan Company, London, 1970.
- [3] 稲垣宣生, 数理統計学, 改訂版数学シリーズ, 裳華房, 東京, 2003.