Semi-Dirichlet 形式の特徴づけ

重川 一郎

京都大学理学研究科

2004 年 12 月 9 日 (木)　於 名古屋大学

大シンポジウム

目次

1. Semi-Dirichlet 形式の特徴づけ

既知の結果

$$\mathcal{E}(f, f - f \wedge 1) \geq 0$$

$\{T_t\}$ はマルコフ

$$\mathcal{E}(f \wedge 1, f - f \wedge 1) \geq 0$$

縮小性が必要

Ma-Röckner: Dirchlet forms

semi-Dirichlet form $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{E}(f + f \wedge 1, f - f \wedge 1) \geq 0$

主結果

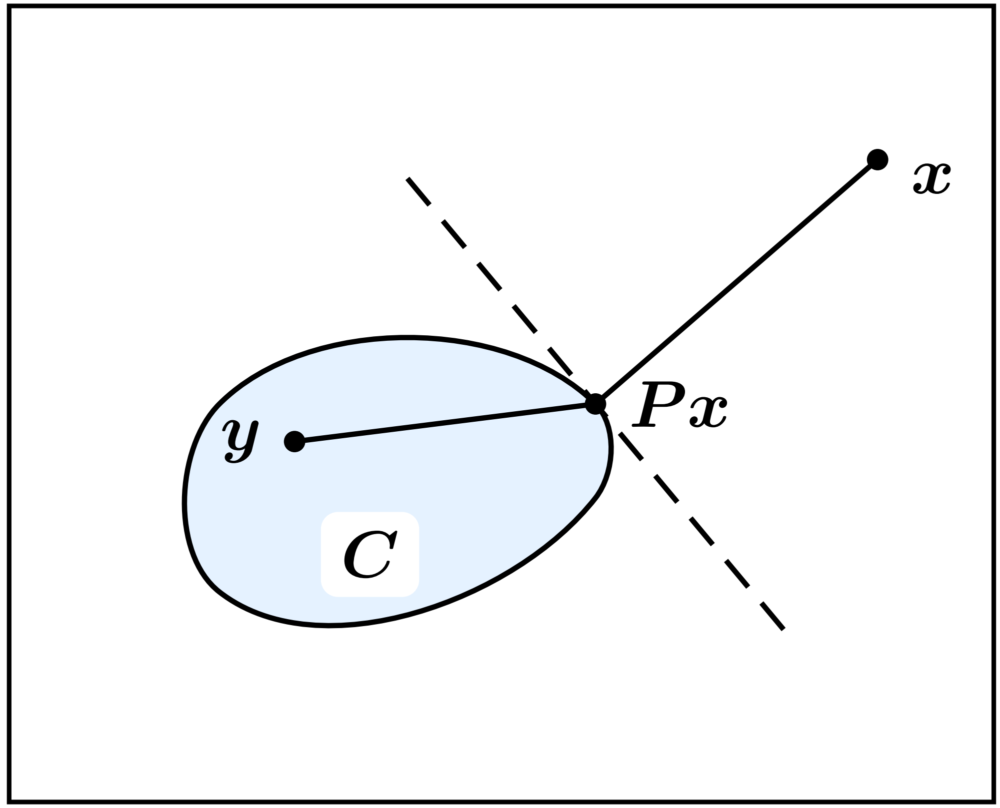
$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(f, f - f \wedge 1) \geq 0 \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
\{T_t\}\ \text{は縮小マルコフ} \arrow[r, Rightarrow] & \{T_t\}\ \text{はマルコフ} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
& \mathcal{E}(f \wedge 1, f - f \wedge 1) \geq 0
\end{tikzcd}
$$

2. 凸集合を不変にする半群

$\boldsymbol{C}$: 凸集合
$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{C}$ への最も近い点を
$\boldsymbol{Px}$ と表す．このとき

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Px},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Px})\leq \mathbf{0}$$

が成り立つ．



$\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{f}\geq \mathbf{0}\}\cdots\cdots\ \boldsymbol{Pf}=\boldsymbol{f}_+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 正値性の保存

$\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{f}\leq \mathbf{1}\}\cdots\cdots\ \boldsymbol{Pf}=\boldsymbol{f}\wedge\mathbf{1}\cdots\cdots$ マルコフ性

$\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{f}\leq \boldsymbol{u}\}\cdots\cdots\ \boldsymbol{Pf}=\boldsymbol{f}\wedge\boldsymbol{u}\cdots\cdots$ 超過関数

主定理

Theorem 1. 次の条件

(i) ある $\boldsymbol{\theta} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ が存在して

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}((\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Dom}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$$

(ii) $\{\boldsymbol{T_t}\}$ は $\boldsymbol{C}$ を不変にする,

(iii) $$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Dom}(\boldsymbol{\mathcal{E}}),$$

に対し (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) の含意が成立する．$\{\boldsymbol{T_t}\}$ が縮小半群であれば上の 3 つはすべて同値となる．$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ が 非負 Hermite であれば次の条件とも同値.

(v) $$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Dom}(\boldsymbol{\mathcal{E}}).$$

Thanks!