Kolmogorov 拡散過程のスペクトル

重川 一郎　(京都大学)

2016 年 11 月 10 日　九州大学

確率解析とその周辺

URL: **http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/**

Contents

1. Pearson 分布族

Definition 1. 次の形の密度 ρ を持つ分布を **Pearson 分布族**という:

$$\rho(x) = \exp\left\{\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right\}. \tag{1}$$

ここで $g(x)$ は 1 次式で，$f(x)$ は 2 次式である.

- 特に確率密度に限らず，この形の密度を **Pearson 密度**と呼ぶ.
- 元々は **12** 種類に分類されているが，**6** 種類に大別する.
- 同属の分布に対しスペクトルの類似性が成立する.

6 種類の密度（有限測度の場合も正規化していない）

	密度関数	区間
1	$e^{-\beta x^2/2}$	$\mathbb{R}$
2	$x^{\alpha} e^{-\beta x}$	$(0, \infty)$
3	$x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$	$(0, 1)$
4	$(1+x^2)^{\alpha} \exp\{\beta \arctan x\}$	$\mathbb{R}$
5	$x^{\alpha} e^{-\beta/x}$	$(0, \infty)$
6	$x^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$(0, \infty)$

別の観点からの分類も可能．特に統計に関わる分布が多い．

	完全系列	不完全系列
α-系列	正規分布	t-分布
β-系列	ガンマ分布	極値分布
γ-系列	ベーター分布	F-分布 & **Pareto** 分布

2. 生成作用素の表現について

1 次元の拡散過程の一般形:

$$\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}. \tag{2}$$

Definition 2. (2) で a が 2 次式で，b が 1 次式のとき，対応する拡散過程を Kolmogorov 拡散過程，あるいは Pearson-Kolmogorov の拡散過程と呼ぶ.

a が二次式で，b が **1** 次式のとき，**Feller** の意味での標準測度が **Pearson** 分布になることを **Kolmogorov** が注意している.

生成作用素 $\mathfrak{A}$ の表現には，いくつかの流儀がある．これを次のように分類する．

名前	生成作用素	双対性	微分作用素
Kolmogorov	$a\dfrac{d^2}{dx^2}+b\dfrac{d}{dx}$		
Feller	$\dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds}$	$\dfrac{d}{dm}=-\dfrac{d}{ds}^{*}$	$\dfrac{d}{ds}:L^2(dm)\to L^2(ds)$
Stein	$\left(a\dfrac{d}{dx}+b\right)\dfrac{d}{dx}$	$a\dfrac{d}{dx}+b=-\dfrac{d}{dx}^{*}$	$\dfrac{d}{dx}:L^2(\rho)\to L^2(a\rho)$

上の **Feller** の双対性と，**Stein** の双対性から次のような対応が作られる．

Feller's pair	$\dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds} \longleftrightarrow \dfrac{d}{ds}\dfrac{d}{dm}$
Stein's pair	$(a\dfrac{d}{dx}+b)\dfrac{d}{dx} \longleftrightarrow \dfrac{d}{dx}(a\dfrac{d}{dx}+b)$

この **pair** は，0 以外は同じスペクトルを持つ（超対称性）

Feller の表現

さて，**Feller** の表現から出発してみよう．滑らかな正値関数 a, ρ を与え，標準測度 dm と尺度関数 s を次で定める．

(3)
$$dm = \rho dx$$

として，**scale** を表すのに

(4)
$$s' = \frac{1}{a\rho}$$

とおく．従って二つの関数 a, ρ の組で決まると言ってよい．以下では a は固定して考えることにし，(a, ρ) に対応する拡散過程の生成作用素を $\mathfrak{A}_\rho$ とかく:

$$\mathfrak{A}_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho\frac{d}{dx}$$
$$= a\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(a\rho)'}{\rho}\frac{d}{dx}$$
$$= a\frac{d^2}{dx^2} + (a' + a(\log\rho)')\frac{d}{dx}$$

となる．b は次のように表される．

(5)
$$b = \frac{(a\rho)'}{\rho} = a' + a(\log\rho)'$$

これから $\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}$ の **Kolmogorov** の表現が得られる．これから

$$(\log\rho)' = \frac{b - a'}{a}$$

であるから

$$\log \rho = \int \frac{b - a'}{a} dx$$

よって

$$\rho = \exp\left\{\int \frac{b - a'}{a} dx\right\} \tag{6}$$

となる．これから a が 2 次式，b が 1 次式のとき，**Pearson** 密度が得られることがわかる．このことは **Kolmogorov** によって注意されているので，この形の拡散過程を **Kolmogorov diffusion** あるいは **Pearson-Kolmogorov diffusion** と呼ぶことにする．

ρ の特徴づけとしては，上の式から

$$(a\rho)' = b\rho \tag{7}$$

も得られる．

上の議論を振り返ると，a が **2** 次式で $a(\log\rho)'$ が **1** 次式ならば ρ は **Pearson** 密度になることが分かったわけである．このことに注意すれば，**2** パラメーターの族にすぐ広げられることが次でわかる．

Proposition 1. a が 2 次式で $a(\log\rho)'$ が 1 次式であると仮定する．このとき $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対し，$\rho_{\alpha,\beta}=a^{\alpha}\rho^{\beta}$ は Pearson 密度である．従って $(a,\rho_{\alpha,\beta})$ は Kolmogorov diffusion を定める．

Proof. 示すべきは $a(\log\rho_{\alpha,\beta})'$ が 1 次式であること．

$$
\begin{aligned}
a(\log\rho_{\alpha,\beta})' &= a(\log a^{\alpha}\rho^{\beta})' = a(\alpha\log a+\beta\log\rho)' \\
&= a\left(\alpha\frac{a'}{a}+\beta(\log\rho)'\right) = \alpha a'+\beta a(\log\rho)'.
\end{aligned}
$$

これは仮定から 1 次式になる． □

Proposition 2. $\frac{d}{ds}: L^2(dm) \to L^2(ds)$ に対し次が成立する.

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^* = -\frac{d}{dm}$$

Proof. f, g が台がコンパクトのとき

$$\begin{aligned}\int \frac{df}{ds} g\, ds &= \int a\rho f' g \frac{dx}{a\rho} = \int f' g\, dx = -\int f g'\, dx \\ &= -\int f \frac{1}{\rho} g' \rho\, dx = -\int f \frac{dg}{dm}\, dm\end{aligned}$$

□

Proposition 3. $\frac{d}{dx}: L^2(\rho) \to L^2(a\rho)$ に対し次が成立する.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\frac{1}{a\rho}\frac{d}{dx}\rho = -\left(a\frac{d}{dx} + b\right)$$

Proof. f, g の台がコンパクトのとき

$$\int \frac{df}{dx} g a\rho\, dx = -\int f \frac{d}{dx}(a\rho g)\, dx = -\int f \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(a\rho g)\rho\, dx.$$

これで

$$-\frac{d}{dx}^* g = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(a\rho g) = ag' + \frac{1}{\rho}(a\rho)' g = ag' + (a' + a(\log\rho)')g = ag' + bg.$$

□

超対称性

Fact H_1, H_2 を **Hilbert** 空間とし，$T : H_1 \to H_2$ を閉作用素とする.
$\Longrightarrow$ T^*T と TT^* は固有値 **0** を除いて，同じスペクトル構造を持っている.

この事実を使って

- $\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$ と $\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ は 0 以外のところで同じスペクトルを持つ.
- $(a\frac{d}{dx}+b)\frac{d}{dx}$ と $\frac{d}{dx}(a\frac{d}{dx}+b)$ は 0 以外のところで同じスペクトルを持つ.

Remark 1. 境界条件が関係するときは $\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$ が Neumann, $\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ は Dirichlet と入れ替わる.

さて ρ を $\rho_{al,\beta} = a^\alpha \rho^\beta$ でいろいろ変えると $(a, \rho_{-1,-1})$ は m と s を入れ替えたものになっている．実際

$$\rho_{-1,-1} = \frac{1}{a\rho} = s'$$

$$\frac{1}{a\rho_{-1,-1}} = \rho = m'$$

また $(\frac{d}{dx})^* = -(a\frac{d}{dx} + b)$ をもう少し詳しく見よう.

Proposition 4. 次が成立する.

$$\frac{d}{dx}(a\frac{d}{dx} + b) = \frac{1}{a\rho}\frac{d}{dx}a^2\rho\frac{d}{dx} + b' = \mathfrak{A}_{a\rho} + b'$$

次に関係を示しておく.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a\rho}\frac{d}{dx}a^2\rho &= \frac{1}{a\rho}a^2\rho\frac{d}{dx} + \frac{1}{a\rho}(a^2\rho)' \\
&= a\frac{d}{dx} + \frac{1}{a\rho}(2aa'\rho + a^2\rho') \\
&= a\frac{d}{dx} + 2a' + a(\log\rho) \\
&= \left(a\frac{d}{dx} + a'\right) + a' + a(\log\rho) \\
&= \frac{d}{dx}a + b.
\end{aligned}
$$

一方

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(a\frac{d}{dx}+b) &= \frac{d}{dx}a\frac{d}{dx}+\frac{d}{dx}b = \frac{d}{dx}a\frac{d}{dx}+b\frac{d}{dx}+b' \\
&= \left(\frac{d}{dx}a+b\right)\frac{d}{dx}+b' = \frac{1}{a\rho}\frac{d}{dx}a^2\rho\frac{d}{dx}+b' \\
&= \mathfrak{A}_{a\rho}+b'
\end{aligned}
$$

ここで b が一次式なら b' は定数である.

b が一次であれば，**Stein pair** も **Kolmogorov** 拡散過程になる（定数の差は許す）.

3. Doob の h-変換

$V = \frac{d}{dx}$ と $\frac{d}{ds}$ の同値性

$\frac{d}{ds} = a\rho\frac{d}{dx}$ と $V = \frac{d}{dx}$ の関係:

$$\frac{d}{ds} : L^2(\rho) \to L^2(1/(a\rho))$$

および

$$\frac{d}{dx} : L^2(\rho) \to L^2(a\rho).$$

これらは本質的に同じ作用素と考えられる．二つを結ぶのが次のユニタリー作用素である.

(8)
$$Uf = a\rho f$$

但し $U : L^2(a\rho) \to L^2(1/(a\rho))$ と見ている.

Proposition 5. $\frac{d}{ds} = UV$ が成り立つ．また共役に対して $(\frac{d}{ds})^* U = V^*$ が成り立つ．

結局，上のことは次の図式が可換であることを示している．

$$
\begin{tikzcd}
& L^2(a\rho) \arrow[d, "U"] \arrow[dr, "V^*"] & \\
L^2(\rho) \arrow[ur, "V"] \arrow[r, "\frac{d}{ds}"'] & L^2(1/(a\rho)) \arrow[r, "(\frac{d}{ds})^* = -\frac{d}{dm}"'] & L^2(\rho)
\end{tikzcd}
$$

Figure 1: V と $\frac{d}{ds}$ の同値性

Doob の *h*-変換

さて，上のことに注意すると，実は V^* と $-\frac{d}{dm}$ が同値となり，これらを組み合わせれば VV^* と $-\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ が同値であることが分かる.

$$
\begin{tikzcd}
L^2(a\rho) \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, "V^*"] & & L^2(a\rho) \arrow[d, "U"] \\
L^2(1/(a\rho)) \arrow[r, "-\frac{d}{dm}"'] & L^2(\rho) \arrow[ur, "V"] \arrow[r, "\frac{d}{ds}"'] & L^2(1/(a\rho))
\end{tikzcd}
$$

Figure 2: Doob の *h*-変換

Theorem 6. VV^* と $-\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ はユニタリー同値である．即ち次が成り立つ

(9)
$$VV^* = -U^{-1}\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}U, \qquad -\frac{d}{ds}\frac{d}{dm} = UVV^*U^{-1}.$$

さて，この同値性を **Doob の *h*-変換**と呼ぶ.

- $\frac{1}{a\rho}$ は VV^*-調和である.
- $a\rho$ は $\frac{d}{ds}\frac{d}{dm} - b'$ 調和である.

即ち，正値調和関数で変換している.

まず $\frac{1}{a\rho}$ を考えよう．$V^* = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho$ なので

$$V^*\frac{1}{a\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(a\rho\frac{1}{a\rho}) = 0$$

明らかなので $\frac{1}{a\rho}$ は VV^*-調和になる.

また $\frac{d}{dm} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}$ なので

$$\frac{d}{dm}(a\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(a\rho) = \frac{1}{\rho}(a'\rho + a\rho') = a' + a(\log\rho)' = b.$$

さらに

$$\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}(a\rho) = \frac{d}{ds}b = a\rho\frac{d}{dx}b = b'a\rho, \qquad (\frac{d}{ds}\frac{d}{dm} - b')(a\rho) = 0.$$

また同値性は，次のように示せる.

$$-VV^* = \frac{d}{dx}\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho = \frac{1}{a\rho}(a\rho\frac{d}{dx})(\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx})a\rho = \frac{1}{a\rho}\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}a\rho$$

および

$$\frac{d}{ds}\frac{d}{dm} = a\rho\frac{d}{dx}\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx} = a\rho\frac{d}{dx}(\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho)\frac{1}{a\rho} = -a\rho VV^*\frac{1}{a\rho}.$$

4. 超対称性とスペクトル

超対称性はスペクトルを調べるのに有効な道具になる．ここではその一端を論じていく．

拡散作用素を定義するのに，a と ρ を与えた．a は変えないで ρ を $\rho_0 = \rho$, $\rho_1 = a\rho, \ldots, \rho_n = a^n\rho$ と変えていく．このとき a, ρ_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ に対応する生成作用素を

$$\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_{\rho_k} = a\frac{d^2}{dx^2} + b_k\frac{d}{dx} \tag{10}$$

とするとき $(a\rho_k)' = b_k\rho_k$ だから

$$\begin{aligned} b_k\rho_k &= (a\rho_k)' \\ &= (aa\rho_{k-1})' \\ &= a'a\rho_{k-1} + a(a\rho_{k-1})' \\ &= a'a\rho_{k-1} + ab_{k-1}\rho_{k-1} \\ &= a'\rho_k + b_{k-1}\rho_k \\ &= (a' + b_{k-1})\rho_k. \end{aligned}$$

これから

$$b_k = a' + b_{k-1} = ka' + b_0 \tag{11}$$

が従う．**Hilbert** 空間を $H_k = L^2(\rho_k)$ と定義し，作用素

$$D_k : H_k \longrightarrow H_{k+1} \tag{12}$$

を $D_k = \frac{d}{dx}$ で定義する.

(13)
$$H_0 \xrightarrow{D_0} H_1 \xrightarrow{D_1} H_2 \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_{n-1}} H_n$$

するとその双対作用素

(14)
$$D_k^* : H_{k+1} \to H_k$$

は

(15)
$$D_k^* = -\frac{1}{\rho_k}\frac{d}{dx}a\rho_k = -\frac{1}{\rho_k}\frac{d}{dx}\rho_{k+1}$$

と表される. これから

(16)
$$H_n \xrightarrow{D_{n-1}^*} H_{n-1} \xrightarrow{D_{n-2}^*} H_{n-2} \xrightarrow{D_{n-3}^*} \dots \xrightarrow{D_0^*} H_0$$

で

(17)
$$D_{n-1}D_{n-2}\dots D_0 = \left(\frac{d}{dx}\right)^n$$

である． この双対は次で与えられる．

Proposition 7. 次が成立する．

$$D_0^* D_1^* \cdots D_{n-2}^* D_{n-1}^* = (-1)^n \frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{dx}\right)^n a^n \rho \tag{18}$$

Proof. (15) より

$$\begin{aligned} D_0^* D_1^* \cdots D_{n-2}^* D_{n-1}^* &= \left(-\frac{1}{\rho_0}\frac{d}{dx}\rho_1\right)\left(-\frac{1}{\rho_1}\frac{d}{dx}\rho_2\right)\left(-\frac{1}{\rho_2}\frac{d}{dx}\rho_3\right)\cdots\left(-\frac{1}{\rho_{n-1}}\frac{d}{dx}\rho_n\right) \\ &= (-1)^n \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \rho_n \end{aligned}$$

が従う． □

$\mathfrak{A}_k = -D_k^* D_k$ とする．$\hat{\mathfrak{A}}_k = -D_k D_k^*$ と定義した．$\hat{\mathfrak{A}}_k$ は次のように表される．

$$\hat{\mathfrak{A}}_k = a\frac{d^2}{dx^2} + (a' + b_k)\frac{d}{dx} + b_k' \tag{19}$$

ここで (11) を使えば，

$$\hat{\mathfrak{A}}_k = a\frac{d^2}{dx^2} + b_{k+1}\frac{d}{dx} + b_k' = \mathfrak{A}_{k+1} + b_k' = \mathfrak{A}_{k+1} + ka'' + b_0' \tag{20}$$

が得られる．

a が **2** 次式で b が **1** 次式であるから a''**,** b' は定数となる．これからしばらく a''**,** b' は定数関数ではなく，定数として扱う．

Proposition 8. λ が $\mathfrak{A}$ の固有値で，固有関数を φ とする．このとき $D_{k-1}D_{k-2}\cdots D_0\varphi$ は $\mathfrak{A}_k$ の固有値 $\lambda - kb' - \frac{1}{2}k(k-1)a''$ に対する固有関数である．ただし，k は $\lambda - kb' - \frac{1}{2}k(k-1)a''$ が 0 になるまで動く．どこかで 0 になると，それ以後は成りたつ保証はなくなる．

逆向きに同じことが成り立つ.

> **Proposition 9.** φ が $\mathfrak{A}_k$ の固有値 λ に対する固有関数であるとき, $D_0^* D_1^* \cdots D_{k-1}^* \varphi$ は $\mathfrak{A}$ の固有値 $\lambda + \frac{1}{2}k(k-1)a'' + kb'$ に対する固有関数となる. ただし, k は $\lambda + kb' + \frac{1}{2}k(k-1)a''$ が 0 になるまで動く. どこかで 0 になると, それ以後は成りたつ保証はなくなる.

特に定数関数 1 が固有値 0 に対する固有関数であることが容易に分かるときがある. 上のことを使うと $\mathfrak{A}_k$ が固有値 0, 固有関数 1 を持つと, $\mathfrak{A}$ は固有値 $\frac{1}{2}k(k+1)a'' + (k+1)b'$ を持ち, 固有関数は

$$D_0^* D_1^* \cdots D_{k-1}^* 1 = (-1)^k \frac{1}{\rho} \left(\frac{d}{dx} \right)^k (a^k \rho) \tag{21}$$

であることが分かる. これは言うまでもないが **Rodrigues の公式**に他ならない.

Kolmogorov diffusions の分類

a を 2 次式，b を 1 次式として $\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}$ で生成される拡散過程を **Kolmogorov diffusions** といった．これから分類を行う．a の次数でまず分類できる．即ち **0** 次，**1** 次，**2** 次の **3** つに分類できる．

(I) $a = 1$ **on** $(-\infty, \infty)$

(II) $a = x$ $(0, \infty)$

(III-1-a) $a = x(1-x)$ **on** $(0, 1)$

(III-1-b) $a = x(x+1)$ **on** $(0, \infty)$

(III-2) $a = x^2$ **on** $(0, \infty)$

(III-3) $a = x^2 + 1$ **on** $(-\infty, \infty)$

この分類に従って以後スペクトルを整理していく．

5. ドリフトのある 1 次元ブラウン運動

(I) $a = 1$ の場合.

$b = \beta \in \mathbb{R}$ で，β をパラメーターとして，次の形の生成作用素を考える.

(22)
$$\mathfrak{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \beta \frac{d}{dx}$$

スピード測度密度は

(23)
$$\rho(x) = \exp\{\int \beta dx\} = e^{\beta x}$$

である．また $V = \frac{d}{dx} : L^2(\rho) \to L^2(\rho)$ とすると，その双対は

(24)
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\frac{d}{dx} - \beta.$$

スペクトルを求めよう．次のような変換 $I\colon L^2(\rho) \longrightarrow L^2(dx)$ を考える．

$$Jf(x) = e^{\beta x/2} f(x). \tag{25}$$

次の図式が可換となる:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\rho) & \xrightarrow{\mathfrak{A}} & L^2(\rho) \\ {\scriptstyle J}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J} \\ L^2(dx) & \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\beta^2}{4}} & L^2(dx) \end{array} \tag{26}$$

従ってこの場合のスペクトル集合は

$$\sigma(\mathfrak{A}) = (-\infty, -\frac{\beta^2}{4}] \tag{27}$$

となる． $\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数は分かっているから $\mathfrak{A}$ の固有関数は $e^{(i\lambda-\beta/2)x}$ が固

有値 $-\lambda-\beta^2/4$ に対する固有関数である．さらに

$$\frac{d}{dx}e^{(i\lambda-\beta/2)x} = (i\lambda-\beta/2)e^{(i\lambda-\beta/2)x}$$
$$(\frac{d}{dx}+\beta)e^{(i\lambda-\beta/2)x} = (i\lambda+\beta/2)e^{(i\lambda-\beta/2)x}$$

が成り立っている．即ち V, V^* がともに固有関数を固有関数に移していることが分かる．これが **Stein** 双対から導かれることである．

Feller の双対は今の場合丁度 β の符号の反転である．従って，y 軸に関する対称性として表れている．

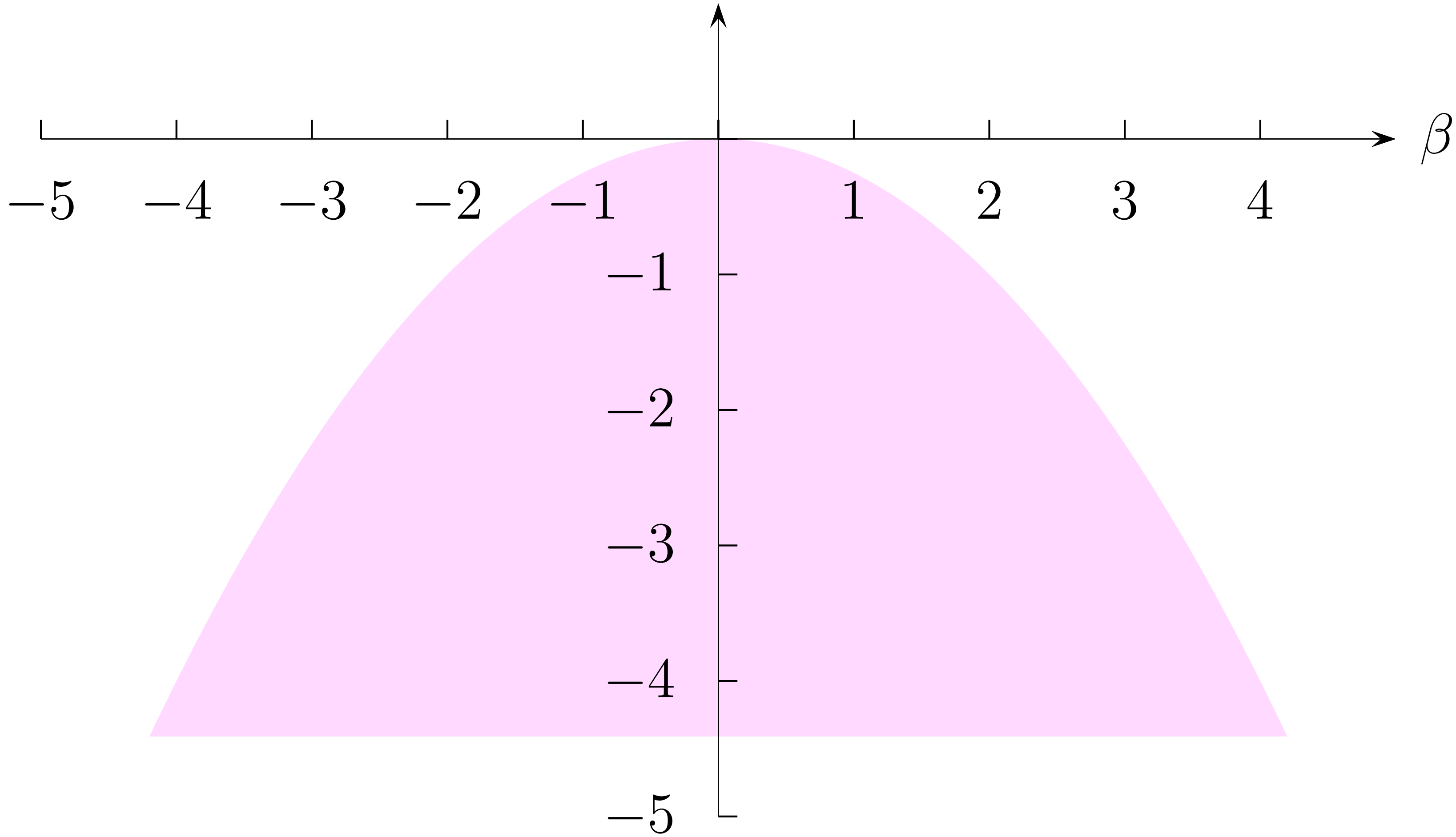

Figure 3: スペクトルの β への依存性

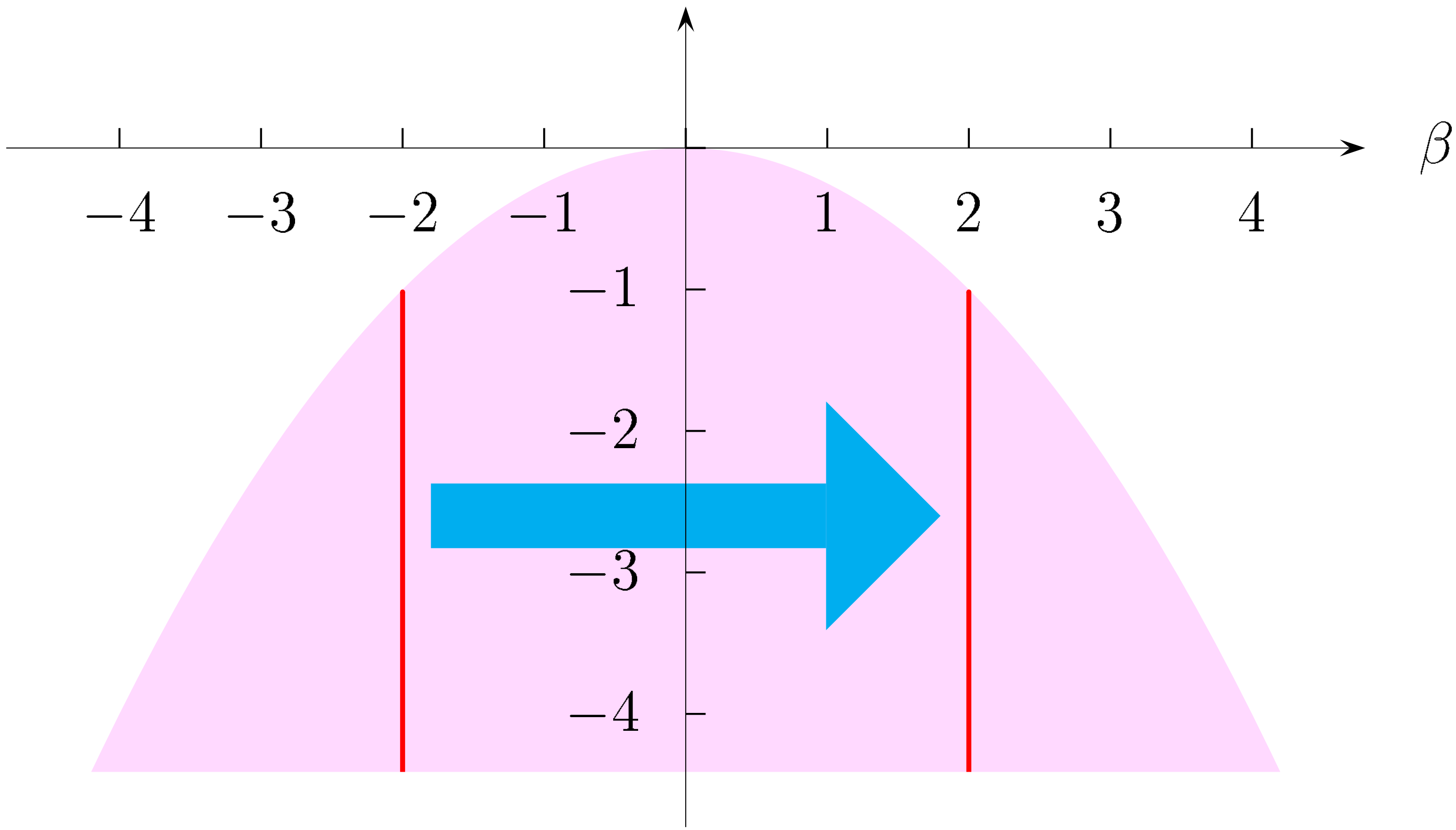

Figure 4: Feller's pair

6. ブラウン族

(I) $a = 1$ で $b(x) = \beta x, \beta \in \mathbb{R}$ の場合.

$\beta = 0$ のとき，ブラウン運動なので，この族をブラウン族と呼ぶことにする．生成作用素は

(28) $$\mathfrak{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \beta x \frac{d}{dx}$$

標準測度密度は (6) から

(29) $$\rho(x) = \exp\{\int \beta x dx\} = e^{\beta x^2/2}$$

である．また $V = \frac{d}{dx} : L^2(\rho) \to L^2(\rho)$ の双対は

(30) $$(\frac{d}{dx})^* = -\frac{d}{dx} - \beta x$$

となる．よって

$$\mathfrak{A}u = -V^*Vu = u'' + \beta xu',$$

$$\hat{\mathfrak{A}}u = -VV^* = u'' + \beta xu' + \beta u$$

である．

Hermite 多項式

まず **Hermite 多項式** $H_n(\xi)\ (n \in \mathbb{Z}_+, \xi \in \mathbb{R})$ を次で定める．

$$H_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2/2}. \tag{31}$$

通常の定義と定数が異なっていることに注意しておく．ここではこの方が以下の定数が簡単になるので，

このとき，次の性質は基本的である.

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x) = e^{tx-t^2/2}, \tag{32}$$

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = H_{n-1}(x), \tag{33}$$

$$(n+1)H_{n+1}(x) - xH_n(x) + H_{n-1}(x) = 0, \tag{34}$$

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \delta_{n,m}\frac{1}{n!}, \tag{35}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\eta} H_n(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = e^{-\eta^2/2}\frac{\sqrt{-1}^{\,n}}{n!}\eta^n. \tag{36}$$

ここで，$H_{-1}(x) = 0$ としている．始めのいくつかは，$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, $H_3(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x)$ などである.

Ornstein-Uhlenbeck 過程

$\beta < 0$ の場合は，**Ornstein-Uhlenbeck** 過程である．(34) は (33) と組み合わせれば

$$(\frac{d}{dx} - x)H_n = -(n+1)H_{n+1}$$

を意味する．従って

$$(\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx})H_n = -nH_n$$

となって，H_n は固有関数であることが分かる．これは $\beta = -1$ の場合で固有関数の対応関係を図示すると次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
\text{eigenvalue} & & 0 \\
0 & H_0(x) \arrow[ur, "\frac{d}{dx}"] & H_0(x) \\
-1 & H_1(x) \arrow[ur] & H_1(x) \\
-2 & H_2(x) \arrow[ur] & H_2(x) \\
-3 & H_3(x) \arrow[ur] & H_3(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

Figure 5: Hermite 多項式の微分

双対 Ornstein-Uhlenbeck 過程

次に $\beta > 0$ の場合を考えよう．この場合に対応する確率過程には，名前がないように思う．ここでは双対 **Ornstein-Uhlenbeck** 過程と仮に呼んでおく．

この場合は

(37)
$$\frac{d}{ds} : L^2(e^{-\beta x^2}) \to L^2(e^{\beta x^2})$$

が固有関数の対応を与える，というのが **Feller** 双対である.

以下簡単のために $\beta = 1$ のときの計算だけする．$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対し

$$\frac{d}{ds} H_{n+1} = e^{-x^2/2} H'_{n+1} = e^{-x^2/2} H_n$$

である．**Stein dual** を使って固有関数になることを見る．まず微分して

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2/2} H_n) = -x e^{-x^2/2} H_n + e^{-x^2/2} H_n = e^{-x^2/2}(-x H_n + H_n)$$
$$= -(n+1) e^{-x^2/2} H_{n+1}.$$

さらに **Stein dual** を計算すると

$$
\begin{aligned}
(\frac{d}{dx} + x)(e^{-x^2/2}H_{n+1} &= -xe^{-x^2/2}H_{n+1} + e^{-x^2/2}H'_{n+1} + xe^{-x^2/2}H_{n+1} \\
&= e^{-x^2/2}H'_{n+1} = e^{-x^2/2}H_n.
\end{aligned}
$$

これで $e^{-x^2/2}H_n$ が固有値 $-(n+1)$ に対する固有関数であることが分かる.

また **Doob** の h-変換は $J\colon L^2(e^{-x^2/2}) \to L^2(e^{x^2/2})$ は

(38)
$$
Jf = \varepsilon^{-x^2/2}f
$$

で与えられる.

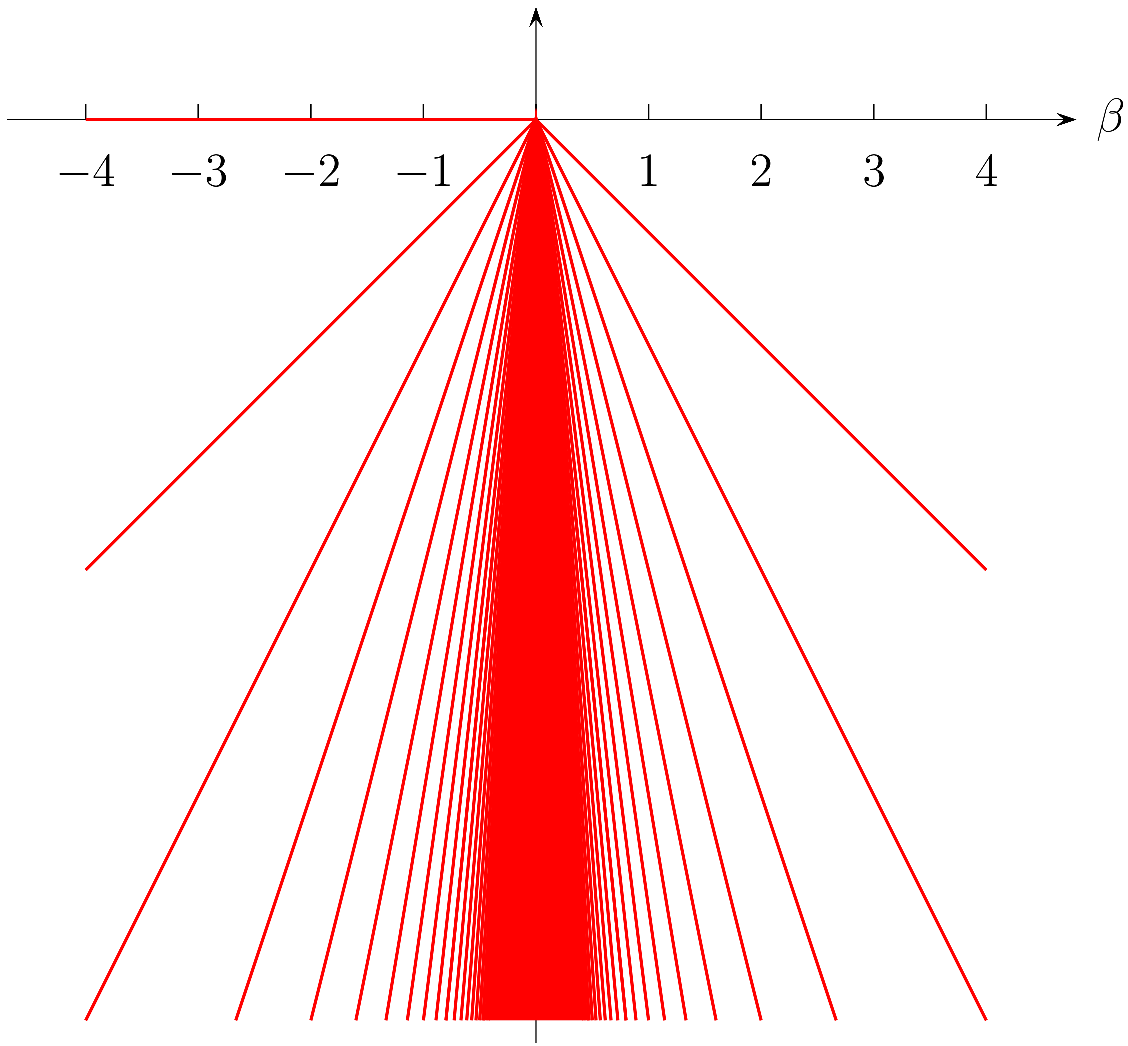

Figure 6: スペクトルの β への依存性

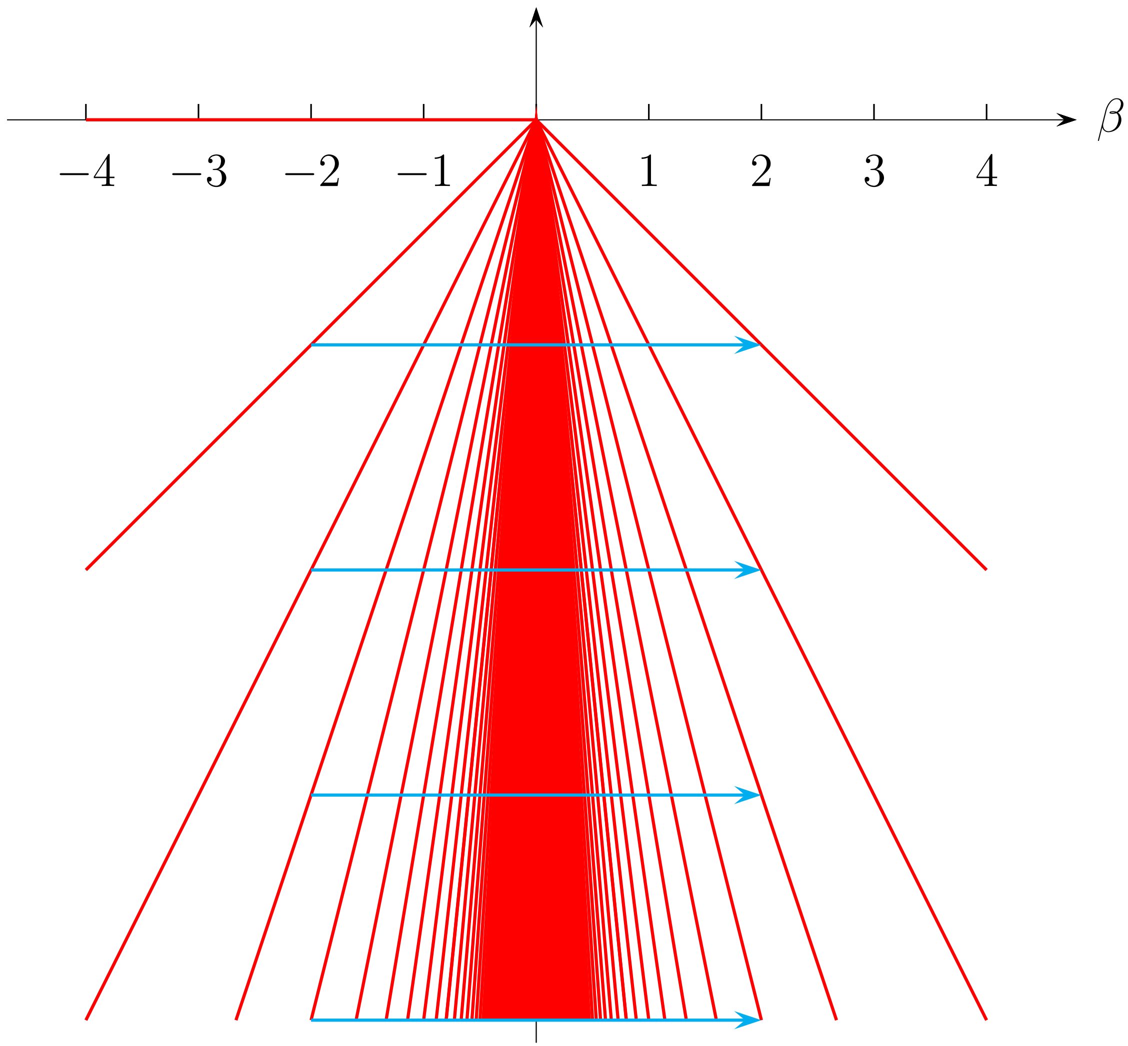

Figure 7: Feller's pair

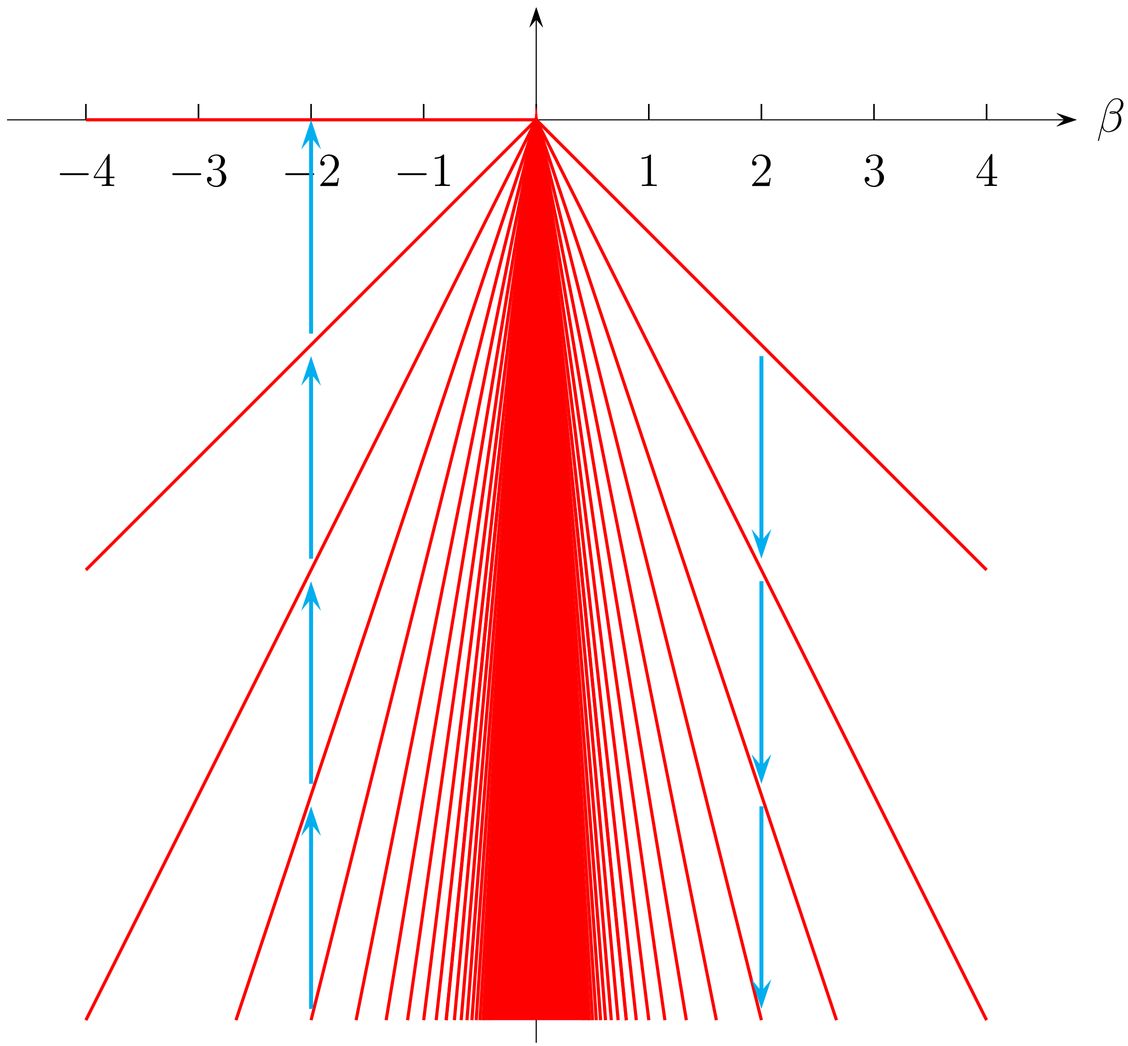

Figure 8: Stein's pair

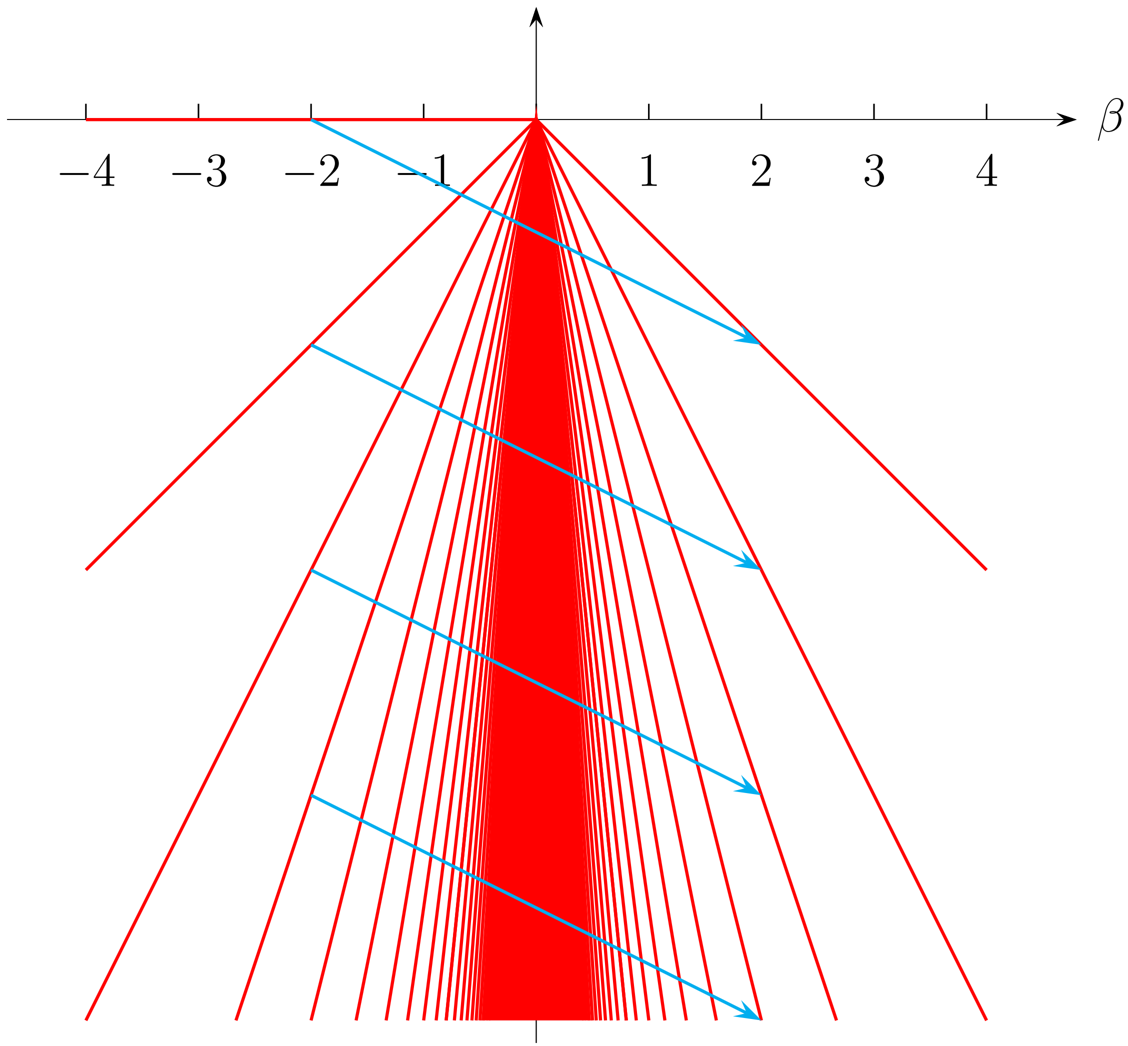

Figure 9: Doob's *h*-transformation