非対称マルコフ半群の超縮小性とその応用

重川 一郎

京都大学

2014 年 6 月 4 日
大談話会

URL: http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/

1. 推移確率の収束

境界での消滅

- M: コンパクト連結リーマン多様体，境界 ∂M
- m: 正規化されたリーマン体積
- $\triangle$: Laplace-Beltrami 作用素
- b: ベクトル場
- X_t, Y_t: $\triangle$ および $\triangle + b$ で生成された拡散過程

生成作用素	基本解
$\triangle$	$p(t,x,y)$
$\triangle + b$	$q(t,x,y)$

$\mathrm{div}\, b = 0$ と Dirichlet 境界条件を仮定する．

- **確率論的観点**

$$\boldsymbol{P_x(X_t \in dy) = p(t,x,y)m(dy)}$$

(X_t) **は境界で消滅.**

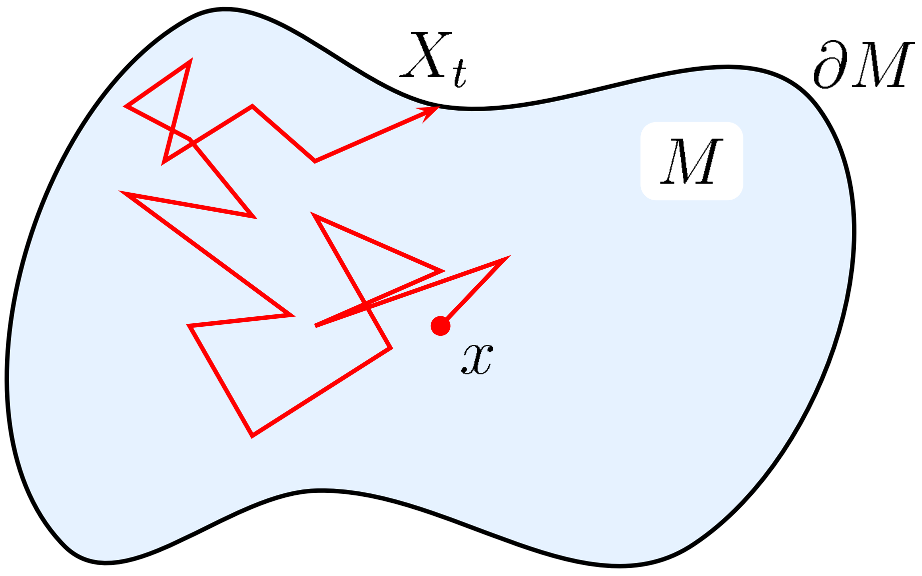

Figure 1: Dirichle **境界条件**

- **微分方程式観点**

$u(t,x) = \int_M p(t,x,y)f(y)m(dy)$ **は次の解**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \triangle u \\ u(0,x) & = & f(x) \\ u(t,x) & = & 0, \quad x \in \partial M. \end{cases}$$

$$p(t,x,y) \to 0,$$

$$q(t,x,y) \to 0.$$

収束の速さは？

$$\tilde{\lambda}_{1\to\infty} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x,y\in M} p(t,x,y),$$

$$\lambda_{1\to\infty} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x,y\in M} q(t,x,y).$$

目的

$$\tilde{\lambda}_{1\to\infty} \le \lambda_{1\to\infty}.$$

非対称な拡散過程の方が速く消滅する．

不変測度への収束

- M: コンパクト連結リーマン多様体，境界なし
- X_t, Y_t: $\triangle$ および $\triangle + b$ で生成された拡散過程:

generator	fundamental solution
$\triangle$	$p(t,x,y)$
$\triangle + b$	$q(t,x,y)$

$\operatorname{div} b = 0$ を仮定する．

$$p(t,x,y) \to 1,$$
$$q(t,x,y) \to 1.$$

速さは？

$$\tilde{\gamma}_{1\to\infty} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x,y\in M} |p(t,x,y) - 1|,$$
$$\gamma_{1\to\infty} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x,y\in M} |q(t,x,y) - 1|.$$

目的

$$\tilde{\gamma}_{1\to\infty} \leq \gamma_{1\to\infty}.$$

非対称な拡散過程の方が速く不変測度に収束する．

なぜ収束の速さに興味があるのか

- **マルコフ連鎖モンテカルロ法** (MCMC)
  不変測度をマルコフ連鎖をシミュレーションすることによって実現
- **非対称マルコフ過程の研究**
- …

2.　超縮小性

半群 $\{T_t\}$ が $T_t\colon L^1 \to L^\infty$ が任意の $t > 0$ に対して有界であるとき超縮小的という．

対称マルコフ半群に対して次の同値条件がよく知られている．$\mu > 0$ があたえられているとして

(i) $\exists c_1 > 0, \forall f \in L^1$:

$$\|T_t f\|_\infty \le c_1 t^{-\mu/2} \|f\|_1, \quad \forall t > 0.$$

(ii) $\exists c_2 > 0, \forall f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^\infty$:

$$\|f\|_2^{2+4/\mu} \le c_2\, \mathcal{E}(f, f)\, \|f\|_1^{4/\mu}.$$

(iii) $\mu > 2, \exists c_3 > 0, \forall f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$:

$$\|f\|_{2\mu/(\mu-2)}^2 \le c_3\, \mathcal{E}(f, f).$$

この結果を非対称マルコフ半群に拡張する．

非対称マルコフ半群

ヒルベルト空間の枠組みで定式化する．

- H: Hilbert 空間
- $\{T_t\}$: 縮小 C_0 半群
- $\{T_t^*\}$: 双対半群
- $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*$: $\{T_t\}$ と $\{T_t^*\}$ の生成作用素

自然な双線型形式 $\mathcal{E}$ が次で定まる:

$$\mathcal{E}(u, v) = -(\mathfrak{A}u, v).$$

扇形条件を仮定していないので，$\mathcal{E}$ の連続性は保証されない．

次に対称な双線型形式を導入する．その為に次を仮定する:

(A.1) $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}^*)$ は $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ と $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}^*)$ で稠密．

この条件のもとで対称双線型形式 $\tilde{\mathcal{E}}$ を次で定める．

$$\tilde{\mathcal{E}}(u,v) = -\frac{1}{2}\{(\mathfrak{A}u,v) + (u,\mathfrak{A}v)\}, \quad u,v \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}^*).$$

命題 1. 条件 (A.1), の下で $\tilde{\mathcal{E}}$ は可閉で，その閉包は $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ と $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}^*)$ を含んでいる．

凸集合の保存

- C: H の凸集合
- Pu: u から C への最短点

$$(u - Pu, v - Pu) \leq 0, \quad \forall v \in C.$$

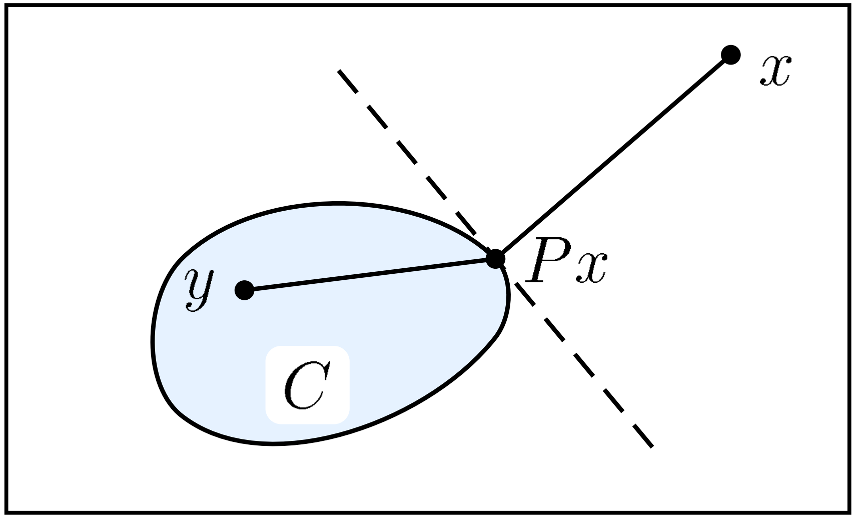

Figure 2: 凸集合への最短点

定理 2. $\{T_t\}$ と $\{T_t^*\}$ が凸集合 C を保存すると，$Pu \in \mathrm{Dom}(\tilde{\mathcal{E}})$ で次が成立する．

$$\tilde{\mathcal{E}}(Pu, u - Pu) \geq 0, \quad \forall u \in \mathrm{Dom}(\tilde{\mathcal{E}}).$$

マルコフ半群

- (M, m): 測度空間
- $H = L^2(m)$: Hilbert 空間
- $\{T_t\}$: マルコフ半群

$\{T_t^*\}$ もマルコフ半群であることを仮定する．

仮定 (A.1) の下で，対称双線型形式 $\tilde{\mathcal{E}}$ を定義すると $\tilde{\mathcal{E}}$ は Dirichlet 形式になる．

次が成立する．任意の $\mu > 0$ に対し

$$\|T_t f\|_\infty \le c_1 t^{-\mu/2} \|f\|_1, \quad \forall t > 0$$

$$\Uparrow \quad \Downarrow \text{ under } (1)$$

$$\|f\|_2^{2+4/\mu} \le c_2 \, \tilde{\mathcal{E}}(f, f) \, \|f\|_1^{4/\mu}$$

$$\Updownarrow$$

$$\|f\|_{2\mu/(\mu-2)}^2 \le c_3 \, \tilde{\mathcal{E}}(f, f) \quad (\mu > 2)$$

$$(1) \qquad (\mathfrak{A}^2 f, f)_2 + (\mathfrak{A} f, \mathfrak{A} f)_2 \ge 0.$$

$\mathfrak{A}$ が正規，即ち $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ であれば (1) が成立する．

さらに

$$\|T_t f\|_\infty \le c_1 t^{-\mu/2}\|f\|_1, \quad \forall t \in (0,1]$$

$$\Uparrow \quad \Downarrow \text{ under } (2)$$

$$\|f\|_2^{2+4/\mu} \le c_2(\tilde{\mathcal{E}}(f,f) + \|f\|_2^2)\,\|f\|_1^{4/\mu}$$

$$\Updownarrow$$

$$\|f\|_{2\mu/(\mu-2)}^2 \le c_3(\tilde{\mathcal{E}}(f,f) + \|f\|_2^2) \quad (\mu > 2)$$

ある定数 $M > 0$ が存在して

$$(2) \quad ((\mathfrak{A} - M)^2 f, f)_2 + ((\mathfrak{A} - M)f, (\mathfrak{A} - M)f)_2 \ge 0, \quad \forall f \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}^2).$$

L^2 理論

次の三つの指数を導入する.

(3) $$\lambda_{\mathrm{P}} = \inf\left\{\frac{\tilde{\mathcal{E}}(f,f)}{\|f\|_2^2};\ f \neq 0\right\} \quad \text{i.e.,} \quad \lambda_{\mathrm{P}}\|f\|_2^2 \leq \tilde{\mathcal{E}}(f,f).$$

(4) $$\lambda_{2\to 2} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|T_t\|_{2\to 2}.$$

(5) $$\lambda_{\mathrm{B}} = \inf \Re(\sigma(-\mathfrak{A})).$$

(3) **は次と同値である.**

(6) $$\|T_t f\|_2^2 \leq e^{-2\lambda t}\|f\|_2^2, \quad \forall t > 0.$$

定理 3. 次が成立する:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{P}} \leq \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2\to 2}} \leq \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{B}} \tag{7}$$

定理 4. $\mathfrak{A}$ が正規であれば，次が成立する．

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2\to 2}} = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{B}}. \tag{8}$$

これらの定理から，$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{2\to 2}} \leq \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2\to 2}}$ が成立する．

超縮小性

さらに次の指数を導入する．

(9)
$$\lambda_{1\to\infty} = -\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T_t\|_{1\to\infty}.$$

定理 5. $\mu > 0$ が与えられているとする．このときある定数 $c_2 > 0$ が存在して

(10)
$$\|f\|_2^{2+(4/\mu)} \leq c_2 \tilde{\mathcal{E}}(f,f) \|f\|_1^{4/\mu}, \quad \forall f \in \mathrm{Dom}(\tilde{\mathcal{E}}) \cap L^1$$

が成り立っているとすると $\lambda_{1\to\infty} = \lambda_{2\to 2}$ である．従って

(11)
$$\lambda_{1\to\infty} \geq \tilde{\lambda}_{1\to\infty}.$$

3.　不変測度を持つ Dirichlet 形式

引き続き扇形条件件を仮定する．さらに次も仮定する．

- m は **不変確率測度**である:

$$\int_M T_t f\, dm = \int_M f\, dm$$

- このとき $T_t 1 = 1$, $\mathfrak{A}1 = 0$ で 1 は重複度一の固有値である．
- $m(f) = \int_M f(x)\, m(dx)$.

次が成立する．$\mu > 0$ を与えるとき

$$\|T_t f - m(f)\|_\infty \le c_1 t^{-\mu/2} \|f\|_1, \quad \forall t > 0$$

$$\Uparrow \quad \Downarrow \text{ under } (12)$$

$$\|f - m(f)\|_2^{2+4/\mu} \le c_2\, \tilde{\mathcal{E}}(f, f)\, \|f - m(f)\|_1^{4/\mu}$$

$$\Updownarrow$$

$$\|f - m(f)\|_{2\mu/(\mu-2)}^2 \le c_3\, \tilde{\mathcal{E}}(f, f) \quad (\mu > 2)$$

$$(\mathfrak{A}^2 f, f)_2 + (\mathfrak{A} f, \mathfrak{A} f)_2 \ge 0. \tag{12}$$

さらに

$$\|T_t f - m(f)\|_\infty \le c_1 t^{-\mu/2} \|f\|_1, \quad \forall t \in (0,1]$$

$\Uparrow \quad \Downarrow$ under (13)

$$\|f - m(f)\|_2^{2+4/\mu} \le c_2(\tilde{\mathcal{E}}(f,f) + \|f\|_2^2)\, \|f - m(f)\|_1^{4/\mu}$$

$$\Updownarrow$$

$$\|f - m(f)\|_{2\mu/(\mu-2)}^2 \le c_3(\tilde{\mathcal{E}}(f,f) + \|f\|_2^2) \quad (\mu > 2)$$

ある定数 $M > 0$ が存在し

$$((\mathfrak{A} - M)^2 f, f)_2 + ((\mathfrak{A} - M)f, (\mathfrak{A} - M)f)_2 \ge 0, \quad \forall f \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}^2). \tag{13}$$

L^2 理論

次の指数を定義する:

$$(14)\quad \gamma_{\mathrm{P}} = \inf\left\{ \frac{\tilde{\mathcal{E}}(f,f)}{\|f-m(f)\|_2^2};\ f \neq m(f) \right\} \text{ i.e., } \gamma_{\mathrm{P}}\|f-m(f)\|_2^2 \leq \tilde{\mathcal{E}}(f,f).$$

$$(15)\quad \gamma_{2\to 2} = -\lim \frac{1}{t} \log \|T_t - m\|_{2\to 2}$$

$$(16)\quad -\gamma_{\mathrm{SG}} = \sup \Re(\sigma(\mathfrak{A}) \setminus \{0\}).$$

γ_{P} **は** Poincaré **定数とよばれている．** (14) **は次と同値**:

$$(17)\quad \|T_t f - m(f)\|_2^2 \leq e^{-2\lambda t}\|f-m(f)\|_2^2, \quad \forall t > 0.$$

次の定理が成り立つ.

定理 6. 次の不等式が成立する.

$$\gamma_{\mathbf{P}} \leq \gamma_{\mathbf{2}\to\mathbf{2}} \leq \gamma_{\mathbf{SG}}. \tag{18}$$

定理 7. $\mathfrak{A}$ が正規であれば，次の等号が成立する:

$$\gamma_{\mathbf{P}} = \gamma_{\mathbf{2}\to\mathbf{2}} = \gamma_{\mathbf{SG}}. \tag{19}$$

これらの定理から，次の結果が得られる.

$$\tilde{\gamma}_{\mathbf{2}\to\mathbf{2}} \leq \gamma_{\mathbf{2}\to\mathbf{2}}.$$

同種の結果が Hwang-Hwan-Ma-Sheu [4] **にある.**

超縮小性

別の指数 $\gamma_{1\to\infty}$ を次で定める:

$$\gamma_{1\to\infty} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T_t - m\|_{1\to\infty} \tag{20}$$

命題 8. 次の不等式が成立する

$$\gamma_{1\to\infty} \le \gamma_{2\to 2}. \tag{21}$$

さらに $\gamma_{1\to\infty} > -\infty$ ならば，等号が成立する．

定理 9. $\mu > 0$ を任意に取る．さらに次の Nash の不等式を仮定する: ある定数 $c_2 > 0$ が存在し

$$\|f - m(f)\|_2^{2+(4/\mu)} \le c_2 \tilde{\mathcal{E}}(f,f) \|f - m(f)\|_1^{4/\mu}, \quad \forall f \in \mathrm{Dom}(\tilde{\mathcal{E}}) \cap L^1. \tag{22}$$

すると $\gamma_{1\to\infty} > 0$ であり $\gamma_{2\to 2} = \gamma_{1\to\infty}$ が成り立つ．従って

$$\tilde{\gamma}_{1\to\infty} \le \gamma_{1\to\infty}. \tag{23}$$

4. 境界のあるコンパクトリーマン多様体

- M: d-次元コンパクトリーマン多様体，境界 ∂M.
- m: 正規化されたリーマン体積
- 生成作用は

$$\mathfrak{A} = \triangle + b. \tag{24}$$

$\operatorname{div} b \geq 0$ を仮定し，境界条件は Dirichlet 条件を課す:

$$f = 0 \quad \text{on } \partial M. \tag{25}$$

- 双対作用素は

$$\mathfrak{A}^* = \triangle - \nabla_b - \operatorname{div} b. \tag{26}$$

- 対応する対称形式は

$$\tilde{\mathcal{E}}(u, v) = \int_M (\nabla u, \nabla v)\, dm + \frac{1}{2} \int_M uv \operatorname{div} b\, dm. \tag{27}$$

定理 10. 次が成立する

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{2}\to\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2}\to\mathbf{2}}.$$

また $\mathfrak{A}$ が正規ならば $\tilde{\lambda}_{2\to 2} = \lambda_{2\to 2}$ が成り立つ.

M **はコンパクトだから次が成立する**:

$$\|f\|_2^{2+(4/d)} \leq c_2 \tilde{\mathcal{E}}(f,f)\|f\|_1^{4/d}.$$

定理 11. 次が成り立つ:

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{1}\to\infty} \leq \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}\to\infty}.$$

$\mathfrak{A}$ が正規ならば $\tilde{\lambda}_{1\to\infty} = \lambda_{1\to\infty}$ が成り立つ.

半群 T_t は ν に対して C^∞ の推移確率密度 $q(t,x,y)$ を持ち，次が成り立つ:

$$\boldsymbol{\lambda_{1\to\infty} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x,y\in M} q(t,x,y).}$$

同様に $\tilde{\mathcal{E}}$ に対する半群は推移確率密度 $p(t,x,y)$ をもち，次が成り立つ．

ν and

$$\boldsymbol{\tilde{\lambda}_{1\to\infty} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x,y\in M} p(t,x,y).}$$

これらに対し次が成り立つ:

$$\boldsymbol{\tilde{\lambda}_{1\to\infty} \le \lambda_{1\to\infty}.}$$

定理 12. 次が成り立つ:

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{2\to 2}} \leq \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2\to 2}} = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{B}}. \tag{28}$$

さらに $\tilde{\lambda}_{2\to 2} = \lambda_{2\to 2}$ ならば $\mathfrak{A}$ は固有値 $-\tilde{\lambda}_{2\to 2}$ をもち，その固有関数は $\frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^*)$ の固有値 $-\tilde{\lambda}_{2\to 2}$ に対する固有関数になる．さらに，ベクトル場 b は次をみたさなければならない．

$$\boldsymbol{b\varphi = -\frac{1}{2}(\mathrm{div}\, b)\varphi.} \tag{29}$$

Example: 単位円板

- $M = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \le 1\}$
- $\mathrm{div}\, b = 0.$
- $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$

$$br \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\lambda}_{2\to 2} < \lambda_{2\to 2}$$

5.　境界のないコンパクトリーマン多様体

コンパクトリーマン多様体 M 上で，次の生成作用素を持つ拡散過程を考える．

$$\mathfrak{A}f = \triangle f + bf = \triangle f + (\nabla f, \omega_b).$$

M が境界を持たなければ，次のような不変測度が存在する．

- ν: 不変確率測度，　$\nu = e^{-U} m$

次の記法を用いる．

- ∇: Levi-Civita 共変微分
- ∇^*: ∇ の m に関する双対作用素
- ∇^*_ν: ∇ の ν に関する双対作用素
- ω_b: b に対応する 1-form

以後基礎の測度を ν とする．Hilbert 空間は $L^2(\nu)$ になる．

$\mathcal{G}_\nu$ を次で定める．

$$\mathcal{G}_\nu = \{\mathfrak{A}\,;\ \mathfrak{A}\text{ has an invariant measure }\nu.\}$$

さらに次のようにおく．

$$\tilde{b} = \frac{1}{2}(\nabla U)^\sharp + b,$$
$$\omega_{\tilde{b}} = \frac{1}{2}\nabla U + \omega_b.$$

定理 13. $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_\nu$ **であるための必要十分条件は** $\boldsymbol{\nabla_\nu^* \omega_{\tilde{b}} = 0}$ **である．このとき**

$$\boldsymbol{\mathfrak{A} f = -\nabla_\nu^* \nabla f + (\omega_{\tilde{b}}, \nabla f)}$$

と

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}_\nu^* f = -\nabla_\nu^* \nabla f - (\omega_{\tilde{b}}, \nabla f).}$$

と表される．さらに対応する対称な Dirichlet **形式は次で与えられる．**

$$\boldsymbol{\tilde{\mathcal{E}}(f, h) = \int_M (\nabla f, \nabla h) d\nu.}$$

T_t は ν に関する密度 $q(t,x,y)$ を持ち，次のようにおく．

$$\gamma_{1\to\infty} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x,y\in M}|q(t,x,y)-1|.$$

$p(t,x,y)$ を $\tilde{\mathcal{E}}$ に対する密度とし，次のように定める．

$$\tilde{\gamma}_{1\to\infty} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x,y\in M}|p(t,x,y)-1|.$$

定理 14. 次が成立する．

$$\tilde{\gamma}_{1\to\infty} \le \gamma_{1\to\infty}.$$

さらに $\mathfrak{A}$ が正規ならば等号が成立する．

次の関係を思い出そう．

$$\gamma_{\mathrm{SG}} = \inf\{\Re\eta;\ \eta \in \sigma(-\mathfrak{A}) \setminus \{0\}\}.$$

すると $\gamma_{1\to\infty} = \gamma_{\mathrm{SG}}$ が成立している．

定理 15. もし $\tilde{\gamma}_{1\to\infty} = \gamma_{1\to\infty}$ が成立しているとすると $-\mathfrak{A}$ は $\Re\xi = \tilde{\gamma}_{1\to\infty}$ をみたす固有値 ξ をもちその固有関数は，$\nabla_\nu^*\nabla$ の固有値 $\tilde{\gamma}_{1\to\infty}$ に対する固有関数でもある．

Example: 2-dimensional torus

- $M = T^2$
- (x, y): 標準的な座標
- $b = f(x)\dfrac{\partial}{\partial y} + g(y)\dfrac{\partial}{\partial x}$

このとき

$$
\begin{aligned}
f = \text{constant},\ g = \text{constant} \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\gamma}_{1\to\infty} = \gamma_{1\to\infty} \\
f = 0 \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\gamma}_{1\to\infty} = \gamma_{1\to\infty} \\
f \neq \text{constant},\ g \neq \text{constant} \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\gamma}_{1\to\infty} < \gamma_{1\to\infty}.
\end{aligned}
$$

References

[1] T. Coulhon, Ultracontractivity and Nash type inequalities, *J. Funct. Anal.*, **141** (1996), no. 2, 510–539.

[2] E. B. Davies, "*One-parameter semigroups*," Academic Press, London-New York, 1980.

[3] E. B. Davies, "*Heat kernels and spectral theory*," Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] C.-R. Hwang, S.-Y. Hwang-Ma and S.-J. Sheu, Accelerating diffusions, *Ann. Appl. Probab.*, **15** (2005), no. 2, 1433–1444.

[5] Z.-M. Ma and M. Röckner, "*Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*," Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[6] E. Ouhabaz, Invariance of closed convex sets and domination criteria for semigroups, *Potential Analysis*, **5** (1996), 611–625.

[7] A. Pazy, "*Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*," Springer, New York-Berlin-Heidelberg, 1983.