Dirichlet 形式とフラクタル *

日野 正訓（京都大学大学院情報学研究科 †）

概要

この講演予稿は対称 Dirichlet 形式の基礎事項とフラクタル上の解析への応用について，確率論専攻の学生を念頭に置いて作成したものである．雑駁な記述と内容の偏りについてはご容赦願いたい．

目次

1 **イントロダクション：**Markov **過程を構成する** 2

2 Dirichlet **形式 — クラッシュコース** 8

3 **フラクタル上の拡散過程の研究概観** 17

4 **フラクタル上のエネルギー測度，マルチンゲール次元，そして微分** 21

参考文献 25

---

* 2008 年 8 月 25 日 確率論ヤングサマーセミナー招待講演予稿．2010 年 11 月 29 日 少しだけ改訂．2015 年 10 月 1 日 末尾に補遺を追加．2017 年 4 月 28 日 少し修正．

† 現在の所属は京都大学大学院理学研究科．

1　イントロダクション：Markov 過程を構成する

状態空間 E と，E 上をランダムに動く粒子を記述する（解析的）データが適切に与えられたとする．このとき，対応する確率過程を構成すること，すなわち時間パラメータを表わす集合 T から状態空間 E への写像がなす集合の上に適切な確率測度を構成するという問題は，確率論において最も基本的であるが，一般にはどのようなデータを与えればよいかということも込めて全く自明ではない問題の一つである．

ここでは Markov 過程，すなわちある時刻における粒子の位置が定まれば，それ以降における粒子の挙動の確率法則は過去の履歴に依存せずに決まるということと，時間的一様性，すなわち時刻 0 で点 x を出発する粒子の挙動と時刻 t で点 x を出発する粒子の挙動は（時間を t だけずらせば）同等であるという状況に限定して話を進める．念のため，まずは，E が高々可算濃度の集合で，$T = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ という簡単な場合から始めてみよう．E の元 x にいる粒子は単位時間後に E のいずれかの元に移るものとし（すなわち消滅はしないものとする），x から y へ移る確率 $p(x, y)$ が与えられたとする．これはいわゆる時間的に一様な E 上のランダムウォークを考えていることになる．仮定から，まず任意の $x \in E$ に対して

$$\sum_{y \in E} p(x, y) = 1 \tag{1.1}$$

でなければならないことに注意する．粒子の挙動は T から E への写像全体 Ω の元として表わされるので，この上に適切な確率測度を定義することを考えよう．時刻 0 に x にいる粒子が時刻 $1, \dots, n$ でそれぞれ $x_1, \dots, x_n$ にいるという確率は

$$p(x, x_1)p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n)$$

である．集合 $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega_k = x_k,\ k = 0, 1, \dots, n\}$（但し ω_k は ω の k における値を表わす）に対して

$$P_x(A) = \delta_{x,x_0} p(x_0, x_1)p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n), \quad \delta_{x,x_0} = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_0 \\ 0 & \text{if } x \neq x_0 \end{cases}$$

と定める．もっと一般に，E の部分集合 $K_1, \dots, K_n$ に対して

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega_k \in K_k,\ k = 0, 1, \dots, n\}$$

とするとき（このような A を Ω の筒集合という),

$$P_x(A) = \sum_{x_k \in K_k,\ k=0,1,\dots,n} \delta_{x,x_0} p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{n-1},x_n)$$

と定めよう．A の表現の仕方は無数にあるが (好きなだけ $K_{n+1} = K_{n+2} = \cdots = E$ とすればよいので) 式 (1.1) より表現の仕方によらず $P_x(A)$ の値は一意に定まる．筒集合の全体から生成される Ω 上の σ-集合族を $\mathcal{F}$ とすると，Kolmogorov の拡張定理により $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度 P_x が一意的に定まる．これで x から出発し，推移確率 $p(x,y)$ をもつランダムウォークが構成できた．$X_n(\omega) = \omega_n$ とすると $(\Omega,\mathcal{F},\{P_x\}_{x\in E},\{X_n\}_{n=0,1,2,\dots})$ は時間的に一様な Markov 過程[*1]の典型的な例となっている．

次に，E と T をもっと一般の集合にしてみよう．E の方を一般にするのはそれほど難しくはない．E を可分距離空間とし，$\mathcal{B}$ を E 上の Borel σ 加法族とする．$T = \mathbb{Z}_+$ は先程と変えないでおく．Ω で T から E への写像全体を表わし，Ω の筒集合から生成される σ 集合族を $\mathcal{F}$ とする．E の元 x と E の Borel 可測集合 B に対して，x にいる粒子が単位時間後に B 内に移動する確率 $p(x,B)$ が与えられたとしよう[*2]．すると $p(x,\cdot)$ は $(E,\mathcal{B})$ 上の確率測度になっているべきである[*3]．E の Borel 部分集合 $K_1,\dots,K_n$ に対して

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega_k \in K_k,\ k=0,1,\dots,n\}$$

とするとき,

$$P_x(A) = \delta_{x,x_0} \int_{K_1} \left(\int_{K_2} \cdots \left(\int_{K_n} p(x_{n-1},dx_n) \right) \cdots p(x_1,dx_2) \right) p(x_0,dx_1)$$

と定めよう．するとこのときも $P_x(A)$ は A の表わし方によらずに値が定まる．再び Kolmogorov の拡張定理により $(\Omega,\mathcal{F})$ 上に確率測度 P_x が定義され，$X_n(\omega) = \omega_n$ とすると $(\Omega,\mathcal{F},\{P_x\}_{x\in E},\{X_n\}_{n=0,1,2,\dots})$ は E 上の時間的に一様な Markov 過程を定める．

ここまではあまり問題はない．最後に $T = [0,\infty)$ の場合を考えてみよう．上の場合と同様に，Ω を T から E への写像全体, $\mathcal{F}$ を Ω の筒集合から生成される σ-加法族とする．ある時刻で E の元 x にいる粒子が t だけ時間が経った後に E の Borel 可測集合 B に移動する確率 $p_t(x,B)$ が与えられたとする．$p_t(x,\cdot)$ は $(E,\mathcal{B})$ 上の確率測度でなければな

[*1] 今の場合は Markov 連鎖ともいう

[*2] E が非可算集合のときは 1 点 y へ移動する確率のみを考えても一般に $p(x,B)$ は定まらないことに注意 (確率測度は可算加法性しかないので).

[*3] ここでも粒子が消滅しない場合のみを考えている

らない[*4]．いろいろな計算が意味を持つように，さらに $p_t(x,B)$ は x に関して Borel 可測であると仮定する[*5]．また，粒子の挙動の意味を考えれば

$$p_{s+t}(x,B) = \int_E p_s(x,dy)p_t(y,B)$$

が常に成り立つ必要がある（Chapman–Kolmogorov の関係式）．時刻 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ と E の Borel 部分集合 $K_1,\dots,K_n$ に対して

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega_{t_k} \in K_k,\ k = 0,1,\dots,n\}$$

とするとき，

$$\begin{aligned} &P_x(A)\\ &= \delta_{x,x_0} \int_{K_1} \left(\int_{K_2} \cdots \left(\int_{K_n} p_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \right) \cdots p_{t_2-t_1}(x_1,dx_2) \right) p_{t_1-t_0}(x_0,dx_1) \end{aligned}$$

と定める．先程と同様に Kolmogorov の拡張定理により $(\Omega,\mathcal{F})$ 上に確率測度 P_x が定義され，$X_t(\omega) = \omega_t$, $\omega \in \Omega$ とすると $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_x\}_{x\in E}, \{X_t\}_{t\in[0,\infty)})$ は E 上の時間的に一様な Markov 過程を定める．しかしながらこの確率過程はあまり使い物にならない．なぜなら，各 $\omega \in \Omega$ に対するサンプルパス $\{X_t(\omega)\}_{t\in[0,\infty)}$ には t についての連続性が全く保証されていないため，有用な ω の関数 — 例えば E の部分集合 B に粒子が初めて到達する時刻 $S(\omega) := \inf\{t \geq 0 \mid X_t(\omega) \in B\}$ など — が ω に関する可測関数にならないからである．標語的にはたかだか可算個の条件で集合が表わせていないと一般に可測性は期待できず[*6]，測度論の枠組では取り扱えないことに注意しよう．そこで，$\{X_t\}$ の修正 $\{X'_t\}$，すなわち全ての t に対して，ほとんど全ての ω で $X_t(\omega) = X'_t(\omega)$ が成り立つもの[*7]のうち，例えば $X'_t(\omega)$ が t について連続であったり右連続左極限を持つといった性質のよいものを見つけてくる必要がある[*8]．これにより可算稠密な時刻（例えば有理数の時刻）のみの情報で $X'_t(\omega)$ の挙動が全てわかることになり，議論がうまく進む[*9]．このような都合の良い確率過程の修正を保証する定理の 1 つが Kolmogorov の連続変形定理（[23, 定理 5.24]，[41, Chapter I, Theorem (1.8)] 等を参照のこと）である．

[*4] 再び，粒子が消滅しない場合のみを考える

[*5] 普遍的可測性のようなもっと弱い可測性でないと困る場合もあるが，ここでは簡単のため Borel 可測性を仮定する．

[*6] あくまで「標語的には」である．可測性の問題は結構難しい．

[*7] 特に $\{X_t\}$ と $\{X'_t\}$ の有限次元分布は等しい

[*8] さらに普通はフィルトレーションを拡大する必要があるが，テクニカルなことは省略する．

[*9] とはいえ，上で述べた到達時刻が適当な状況下で停止時刻 (stopping time) になることはやはり相当デリケートな話である．[15, 補遺 A.2] 等を参照のこと．

上記のようなストーリーで，例えば $\mathbb{R}^d$ 上の標準的な Brown 運動を構成することができる．つまり，$E = \mathbb{R}^d$, $T = [0, \infty)$ として，

$$p_t(x, B) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int_B \exp\left(-\frac{|x-y|^2_{\mathbb{R}^d}}{2t} \right) dy$$

として推移確率を定め，Kolmogorov の拡張定理及び連続変形定理を用いて $\mathbb{R}^d$ 上の拡散過程が構成される．これは Brown 運動を Markov 過程とみて実現したものだが，他の構成方法ももちろんある．（ランダムウォークのスケール極限をとる方法や，Gauss 過程とみて Gauss 分布に従う無限個の確率変数の和で構成する方法など．）しかしながらいずれの方法も何らかの技術的な困難を克服する必要があり，連続時間パラメータの確率過程の構成は微妙な問題を含むことが示唆される．

もっと一般の Markov 過程を構成しようとすると新たな問題も生じる．上記の議論は推移確率 $p_t(x, B)$ を具体的に与えて構成しようという方針だが，Brown 運動や，一般には Lévy 過程といった特別な場合を除き，普通はなかなか直接与えられるものではない[*10]．このことに関する一つの（そして強力な）処方箋は，確率微分方程式を考えることである．典型的には

$$dX_t(\omega) = \sum_{i=1}^{N} f_i(X_t)\, dB_t^{(i)} + b(X_t)\, dt$$

で表わされる方程式が解ければ，f_i, b をそれぞれ拡散係数，ドリフト係数とする（Euclid 空間上の）拡散過程が構成できる．$f_i(X_t)$, $b(X_t)$ をそれぞれ $\{X_s(\omega); s \in [0,t]\}$ に依存する関数におきかえても定式化は可能で，解は Markov 的とは限らない確率過程を与える．大雑把に言えば，確率微分方程式による構成は，既に構成されている（Brown 運動などの）確率過程をうまく変形して新しい確率過程を作ろうという発想を基礎に持つ．あるいは新しい確率過程を Brown 運動の関数として構成するといってもよいだろう[*11]．伊藤の公式などへの適用を考えればわかるように，空間 E が Riemann 多様体のように滑らかで，各種の係数に滑らかさがある場合，非常に威力のある手法であるといえる．係数の滑らかさを落とすとどうなるか，というのは自然に考えられる問題であるが，$E = \mathbb{R}^d$ の場合は，例えば [46] でマルチンゲール問題に帰着させることで解を構成するという議論がなされている．また確率微分方程式の解の存在と一意性については [47, 22] 等が基本文献である．

[*10] 典型例においては放物型の偏微分方程式を解くのと同等である．

[*11] 確率微分方程式の強解の場合は，であるが

さて，ここでは E が滑らかな空間ではない場合，つまり必ずしも Riemann 構造を持っていない例も含む場合を考えたい．一つのアイデアは推移確率から定まる半群に着目することである．以下，E を局所コンパクトで第 2 可算公理をみたす Hausdorff 位相空間とし，

$$\begin{aligned} B(E) &= \{f \mid f \text{ は } E \text{ 上の有界な Borel 関数 }\},\\ C_\infty(E) &= \{f \mid f \text{ は } E \text{ 上の実数値連続関数で無限遠で } 0 \text{ に収束する }\},\\ C_0(E) &= \{f \mid f \text{ は } E \text{ 上の実数値連続関数で台がコンパクト }\} \end{aligned}$$

とおく．$B(E)$ と $C_\infty(E)$ は sup ノルム $\|\cdot\|_\infty$ により Banach 空間になる．一般に f を E 上の実数値関数とし，

$$T_t f(x) = \int_E f(y)\, p_t(x, dy), \quad x \in E \tag{1.2}$$

と定める．もちろん f に適当な可測性や可積分性があって積分が意味を持つ場合のみを考える．特に $f \in B(E)$ のとき，任意の $t > 0$ に対して $T_t f \in B(E)$ となり[*12]，さらに $\|T_t f\|_\infty \le \|f\|_\infty$ 及び，Chapman–Kolmogorov の関係式より $T_s(T_t f) = T_{s+t} f$ が成り立つ．すなわち $\{T_t\}_{t>0}$ は $B(E)$ 上の線型変換として縮小半群をなす．加えて，以下の条件が成り立つとき，$\{T_t\}_{t>0}$ を Feller 半群という．

(1) 任意の $t > 0$, $f \in C_\infty(E)$ に対して，$T_t f \in C_\infty(E)$.
(2)（強連続性）任意の $f \in C_\infty(E)$ に対して，$\lim_{t\to 0} \|T_t f - f\|_\infty = 0$.

換言すれば，$\{T_t\}_{t>0}$ が $C_\infty(E)$ 上の線型変換として強連続縮小半群となっており，$f \ge 0$ ならば $T_t f \ge 0$ となっているとき Feller 半群という．Feller 半群は以下のように大変都合の良い性質を持つ．まず, 各 $t > 0, x \in E$ について $C_\infty(E) \ni f \mapsto T_t f(x) \in \mathbb{R}$ は $C_\infty(E)$ 上の正値有界線型汎関数を定めるから，Riesz の定理[*13]より $T_t f(x) = \int_E f(y)\, q_t(x, dy)$, $f \in C_\infty(E)$ をみたす（全測度が 1 以下の）正値 Radon 測度 $q_t(x, \cdot)$ が存在する．変数 x に関する $q_t(x, B)$, $B \in \mathcal{B}$ の Borel 可測性も言えるので，結局 Feller 半群 $\{T_t\}_{t>0}$ が与えられれば，推移確率 $\{q_t(x, dy)\}$ が逆に構成できる[*14]．更に $\{T_t\}_{t>0}$ は Banach 空間

[*12] $T_t f$ が Borel 可測であることは，任意の Borel 集合 B に対して $p_t(x, B)$ が x に関して Borel 可測であるという仮定から従う．

[*13] ここでいう Riesz の定理とは以下の命題を指す：線型汎関数 $\Phi\colon C_0(E) \to \mathbb{R}$ が正値条件「$f \ge 0 \Rightarrow \Phi(f) \ge 0$」をみたすとき，$E$ 上のある正値 Radon 測度 μ が存在して，任意の $f \in C_0(E)$ に対して $\Phi(f) = \int_E f\, d\mu$ をみたす．

[*14] Chapman–Kolmogorov の関係式は $\{T_t\}_{t>0}$ が半群をなすことから従う．$q_t(x, E) \le 1$ なので，正確には無限遠点 Δ を導入して $q_t(x, \{\Delta\}) = 1 - q_t(x, E)$ と定め，$q_t(x, dy)$ を $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ 上の確率測度に拡張しておく．

$C_\infty(E)$ 上の強連続縮小半群であるから，Hille–Yosida の半群の理論より，その生成作用素 L と 1 対 1 に対応する．すなわち L は

$$
\begin{aligned}
&Lf = \lim_{t\to 0}\frac{T_t f - f}{t},\\
&\mathrm{Dom}(L) = \left\{ f \in C_\infty(E) \,\middle|\, \frac{T_t f - f}{t} \text{が } t \to 0 \text{ のとき } C_\infty(E) \text{ で収束} \right\}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

で定まる $C_\infty(E)$ 上の閉作用素であり，形式的に $T_t = e^{tL}$ と書ける．よって，$\{T_t\}_{t>0}$ または L が与えられれば全ての情報が決定されることになる．更に重要なことは，Feller 半群から決まる推移確率に対応する Hunt 過程[*15]が構成できるという事実である．（標本路が良い性質を持つことの証明がなかなか厄介で，優マルチンゲールの標本路の正則性の議論を必要とする．）証明は例えば [7, Theorem I.9.4] を見よ．

Feller 半群の枠組が有効に働く特別なクラスとして，$\mathbb{R}^d$ 上の連続な合成積半群がある．詳しくは [42] を参照のこと．このとき生成作用素 L は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を core に持ち，$f \in C_\infty^2(\mathbb{R}^2)$ に対して Lf は具体的な表現を持つ．特に d 次元 Brown 運動に対応する半群の生成作用素は $Lf = \frac{1}{2}\Delta f$ である．その他にも 1 次元拡散過程の推移関数や滑らかな係数を持つ放物型偏微分方程式の滑らかな領域における境界値問題の基本解は Feller 半群を定めることが知られている．しかしながら，Feller 半群の条件はかなり強い制約であり，Feller 性をチェックするのは一般には難しい問題であることが多い．

そこで一旦 $C_\infty(E)$ の枠組を離れて L^2 の世界で物事を考えてみよう．m を E 上の σ-有限な Borel 測度とし，$\{T_t\}_{t>0}$ が $L^2(E,m)$ 上の**対称な**縮小線型作用素からなる強連続半群であると仮定する．この場合，式 (1.3) で $C_\infty(E)$ を $L^2(E,m)$ に変えたもので生成作用素 L が定まる．L は $L^2(E,m)$ 上の非正値自己共役作用素になるため一般論がいろいろ使え扱いやすい．例えば

$$
\mathcal{E}(f,f) = \int_E (\sqrt{-L} f)^2 \, dm, \quad f \in \mathcal{F} := \mathrm{Dom}(\sqrt{-L})
$$

とすると $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(E,m)$ 上の閉対称双線型形式を与えるが，逆に $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を与えれば L，そして $\{T_t\}_{t>0}$ が定まる．L よりも $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の方が扱いやすい事が多く，このような事は微分方程式論やポテンシャル論で古くから認識され，活用されてきた．さらに $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に Markov 性および正則性という条件を課す（このとき $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を正則 Dirichlet 形式という）ことで，（少し弱い意味で）対応する推移確率が存在し，付随する Hunt 過程が構成で

[*15] 大雑把に言えば，標本路が準左連続かつ右連続であるような強 Markov 過程のこと．

きる（[14]，原論文は [12]）．Dirichlet 形式は状態空間に関する制約をあまり必要とせずに，構成が比較的容易であることから，フラクタルや無限次元空間など，様々な場合に適用できることが明らかになり研究が大きく進展していった．次節で Dirichlet 形式の理論について概説を行うが，あらかじめ断っておくと，この理論が万能というわけではない．弱点としては以下のようなものが挙げられる．

- 基本的には対称なもの（対称 Markov 過程）しか扱えない．（非対称なものへ拡張する試みは例えば [36, 38, 44] を参照．）
- 一般論としては，構成する Hunt 過程の一意性は，ある容量 0 を除いた集合を出発点とする Hunt 過程の法則の一意性という意味でしか言えない．
- Dirichlet 形式が与えるデータが，構成された Markov 過程の挙動にどう反映されているかが必ずしも直接的にわかるというわけではない．（もちろん「ある程度は」わかるし，確率微分方程式による記述を得ることができればより明確になる．）

しかしながら，他の手法に比べると解析的な取り扱いが容易なため，利用可能な状況では大変強力な方法であるといえる．

2 Dirichlet 形式 — クラッシュコース

この節では Dirichlet 形式の理論のうち，入り口にあたる部分について簡単にまとめる．標準的な参考文献として [14, 13, 36, 44, 8] を挙げておく．

H を可分実 Hilbert 空間とする．（実際に用いられるのは H がある測度空間上の L^2 空間の場合であるが．）このとき，次の 4 つの対象物に 1 対 1 の対応がつく．すなわち，どれか 1 つを定まると，残りが適切に定義される．

- H 上の有界対称線型作用素からなる強連続縮小半群 $\{T_t\}_{t>0}$．すなわち，各 $t>0$ に対して $T_t\colon H\to H$ は作用素ノルムが 1 以下の対称線型作用素であり，半群の性質 $T_sT_t=T_{s+t}$ と強連続性 $\lim_{t\to 0}T_tf=f,\ f\in H$ をみたす．
- H 上の強連続対称縮小レゾルベント $\{G_\alpha\}_{\alpha>0}$．すなわち各 $\alpha>0$ に対して $G_\alpha\colon H\to H$ は有界対称線型作用素で αG_α の作用素ノルムは 1 以下であり，レゾルベント方程式
$$G_\alpha-G_\beta=(\beta-\alpha)G_\alpha G_\beta,\quad \alpha>0,\ \beta>0$$
と強連続性 $\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha f=f,\ f\in H$ をみたす．

- H 上の自己共役作用素 $(L, \mathrm{Dom}(L))$ で非正の定符号，すなわち L のスペクトル集合 $\sigma(L)$ が区間 $(-\infty, 0]$ に含まれるもの．
- H 上の非負閉対称双線型形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ で定義域 $\mathcal{F}$ が H で稠密なもの．$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が非負であるとは任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{E}(f, f) \geq 0$ であることであり，閉であるとは，

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F},\ f_n \to f \text{ in } H,\ \lim_{m \geq n \to \infty} \mathcal{E}(f_m - f_n, f_m - f_n) = 0$$
$$\text{ならば } f \in \mathcal{F} \text{ かつ } \mathcal{E}(f, f) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}(f_n, f_n)$$

　が成り立つことである．

この 4 つの対応は以下の通りである．G_α は $\{T_t\}$ の Laplace 変換，すなわち

$$G_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f\, dt, \quad f \in H$$

で定まる．ただし上の積分は Bochner 積分の意味で考える．L は $\{T_t\}$ の生成作用素，すなわち

$$Lf = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f - f}{t}, \quad \mathrm{Dom}(L) = \left\{ f \in H \;\middle|\; \frac{T_t f - f}{t} \text{ が } t \to 0 \text{ のとき } H \text{ で収束} \right\}$$

で与えられる．L から $\mathcal{E}$ を導くのは，

$$\mathcal{E}(f, g) = (\sqrt{-L} f, \sqrt{-L} g)_H, \quad f, g \in \mathcal{F} := \mathrm{Dom}(\sqrt{-L}) \supset \mathrm{Dom}(L)$$

による．ここで $(\cdot, \cdot)_H$ は H の内積を表わす．特に $f \in \mathrm{Dom}(L)$, $g \in \mathcal{F}$ のときは

$$\mathcal{E}(f, g) = (-Lf, g)_H$$

であることに注意する．L から $\{T_t\}$, $\{G_\alpha\}$ を導くのは，

$$T_t = e^{tL}, \quad G_\alpha = (\alpha - L)^{-1}$$

による．他の対応関係については書くのが億劫なので省略する．また，任意の $f \in H$, $t > 0$, $\alpha > 0$ に対して $T_t f, G_\alpha f \in \mathrm{Dom}(L) \subset \mathcal{F}$ であることにも注意しておく．これらは自己共役作用素のスペクトル理論を用いると容易に証明できる[*16]．

　最も基本的な例を以下で与える．

---

*16 非対称の場合に拡張しようとすると少し工夫を要する．[36, 44] などを参照のこと．

例 2.1　$\mathbb{R}^d$ 上の標準ブラウン運動の対応物を考えると，$H = L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ として

$$T_t f(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \exp\left(-\frac{|x-y|_{\mathbb{R}^d}^2}{2t}\right) dy, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$$

$$G_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \cdot \frac{\alpha^{d/4-1/2}}{\pi^{d/2}(\sqrt{2}|x-y|_{\mathbb{R}^d})^{d/2-1}} K_{d/2-1}(\sqrt{2\alpha}|x-y|_{\mathbb{R}^d})\, dy,$$
$$f \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$$

$$Lf = \frac{1}{2}\Delta f, \quad f \in \mathrm{Dom}(L) = H^2(\mathbb{R}^d)$$

$$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f(x), \nabla g(x))_{\mathbb{R}^d}\, dx, \quad f, g \in \mathcal{F} = H^1(\mathbb{R}^d)$$

である．ここで $K_\nu(x)$ は

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{-\nu+2n}}{n!\,\Gamma(-\nu+n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\right)$$

で定義される変形 Bessel 関数であり，$H^2(\mathbb{R}^d)$, $H^1(\mathbb{R}^d)$ はそれぞれ $\mathbb{R}^d$ 上の 2 階および 1 階の L^2-Sobolev 空間を表わす．

最初に与えるデータとしては $(L, \mathrm{Dom}(L))$ または $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が楽そうであるが，$\mathcal{E}$ の方は 1 階の微分しか現れないということもあり，こちらの方がなにかと扱いやすいことが多い．例えば，$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ を，可測な $\mathbb{R}^{d\times d}$-値関数で各 x について $A(x)$ は対称行列であり，さらにある $c_1 > 0$，$c_2 > 0$ に対して

$$c_1|h|_{\mathbb{R}^d}^2 \le (A(x)h, h)_{\mathbb{R}^d} \le c_2|h|_{\mathbb{R}^d}^2, \quad h \in \mathbb{R}^d,\ x \in \mathbb{R}^d$$

が成り立っているものとするとき，

$$\mathcal{E}'(f,g) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (A(x)\nabla g(x), \nabla f(x))_{\mathbb{R}^d}\, dx, \quad f, g \in \mathcal{F}' = H^1(\mathbb{R}^d)$$

はやはり非負閉対称双線型形式（更には後で述べる対称 Dirichlet 形式）を定める．このような一種の摂動に関して双線型形式の定義域は安定であるが，対応する自己共役作用素

L' については

$$\mathrm{Dom}(L') = \left\{ f \in \mathcal{F} \,\middle|\, \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i (a_{ij}\, \partial_j f) \in L^2(dx) \quad \text{（超関数の意味で）} \right\},$$

$$L'f = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i (a_{ij}\, \partial_j f)$$

となり，$A(x)$ にある程度の滑らかさがないと定義域は一般には $H^2(\mathbb{R}^d)$ と異なる．

さて，一般論に戻ろう．少し状況を狭めて，H を σ-有限測度空間 $(E, \mathcal{B}, m)$ 上の L^2 空間 $L^2(E, m)$ とする．上で考えた半群 $\{T_t\}_{t>0}$ が (1.2) のように（劣）確率測度の積分で表わされるためには，

$$\text{任意の } t > 0 \text{ に対して，} \quad f \in L^2(E, m) \text{ かつ } 0 \le f \le 1 \ m\text{-a.e.} \Rightarrow 0 \le T_t f \le 1 \ m\text{-a.e.}$$

が明らかに必要である．このとき $\{T_t\}_{t>0}$ は Markov 的であるという（劣 Markov 的という場合もある.）

定理 2.2　以下は同値.

(1)　$\{T_t\}_{t>0}$ は Markov 的.

(2)　$\{\alpha G_\alpha\}_{t>0}$ は Markov 的．すなわち，任意の $\alpha > 0$ に対して

$$f \in L^2(E, m) \text{ かつ } 0 \le f \le 1 \ m\text{-a.e.} \Rightarrow 0 \le \alpha G_\alpha f \le 1 \ m\text{-a.e.}$$

が成り立つ.

(3)　任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，$\hat{f} = \min\{\max\{0, f\}, 1\}$ とおくとき，$\hat{f} \in \mathcal{F}$ であり，さらに $\mathcal{E}(\hat{f}, \hat{f}) \le \mathcal{E}(f, f)$ が成り立つ.

(1) と (2) の同値性の証明は容易である．(3) が成り立つとき $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は Markov 性をみたすと言い，このとき $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(E, m)$ 上の**対称 Dirichlet 形式**であるという．条件 (3) が出てくる必然性は，(1), (2) と (3) の同値性の証明を読んでも私には今だにもう一つぴんと来ないのだが，次のような一般化された定理をみておくと少しはからくりがわかった気分になるかも知れない．以下の定理において，再び H を一般の可分実 Hilbert 空間とし，H 上で $\{T_t\}_{t>0}$，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が定まっているとする.

定理 2.3　$\mathcal{C}$ を H の空でない閉凸集合とし，$\mathcal{P}$ を H から $\mathcal{C}$ への射影とする．すなわち

$h \in H$ に対して $\mathcal{P}h \in \mathcal{C}$ は

$$\|h - \mathcal{P}h\|_H = \inf_{k \in \mathcal{C}} \|h - k\|_H$$

をみたす唯一つの元である．このとき以下は同値．

(1)　任意の $t > 0$ に対して $T_t(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

(2)　$\mathcal{P}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ であり，任意の $h \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{E}(\mathcal{P}h, \mathcal{P}h) \le \mathcal{E}(h, h)$.

証明は例えば [39, Theorem 2.3] を見よ．この定理において

$$H = L^2(E, m), \quad \mathcal{C} = \{f \in H = L^2(E, m) \mid 0 \le f \le 1 \ m\text{-a.e.}\}$$

とすると $\mathcal{P}f = \min\{\max\{0, f\}, 1\}$ となり，定理 2.2 の (1) と (3) の同値性が従う．

さて，今のところ E には位相構造を仮定していない．対応する Markov 過程を構成するには $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が位相とうまく適合しているという条件を導入する必要がある．そこで以下，E を局所コンパクト可分距離空間とし[*17]，$\mathcal{B}$ を E の Borel σ-加法族，m を E 上の正値 Radon 測度で m の台は E 全体であるとする．$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2(E, m)$ 上で定義された対称 Dirichlet 形式とする．$C_0(E)$ はコンパクトな台を持つ E 上の実数値連続関数全体であった．$C_0(E)$ は sup ノルム $\|\cdot\|_\infty$ によりノルム空間となる．また $\mathcal{F}$ は内積

$$(f, g)_{\mathcal{E}_1} := \mathcal{E}_1(f, g) := \mathcal{E}(f, g) + (f, g)_{L^2(E,m)}, \quad f, g \in \mathcal{F}$$

により Hilbert 空間になる．$\|f\|_{\mathcal{E}_1} = (f, f)_{\mathcal{E}_1}^{1/2}$ により $\mathcal{F}$ のノルムを定める．m の台は E 全体であるという仮定から，L^2-可積分性を持つ $C(E)$ の異なる元 f, g は，$L^2(E, m)$ の元と見ても異なる元であることに注意する．

定義 2.4　$C_0(E) \cap \mathcal{F}$ が $C_0(E)$ で稠密かつ $\mathcal{F}$ で稠密であるとき，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は**正則**であるという．

平たく言えば，正則性とは $\mathcal{F}$ が十分たくさんの良い連続関数を含んでいるという条件である．

定理 2.5　正則対称 Dirichlet 形式に対して，対応する Hunt 過程が（ある意味で一意的に）存在する．

[*17] 無限次元空間を扱おうとすると局所コンパクト性は仮定できない．その場合の取り扱いは [36, 44] などを参照のこと．

定理 2.5 はあまり正確なステートメントではない．正確に記述しようとするといろいろと準備を要するのだが，順番に考えていくことにしよう．以下，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は常に正則対称 Dirichlet 形式とする．「対称」という言葉は今後しばしば省略する．

まず推移確率 $\{p_t(x, dy)\}$ を定めたい．そこで $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から定まる $L^2(E, m)$ 上の半群 $\{T_t\}_{t>0}$ から Riesz の定理を経由して定義することを考える．最初に次のことに注意しておく．T_t の Markov 性から，T_t は $L^2(E, m) \cap L^\infty(E, m)$ の元を $L^2(E, m) \cap L^\infty(E, m)$ の元に写す．$L^\infty(E, m)$ の元 f を $L^2(E, m) \cap L^\infty(E, m)$ の元の列により自然な方法で近似することで，$T_t f \in L^\infty(E, m)$ が自然に定まる．この拡張により $\{T_t\}_{t>0}$ は $L^\infty(E, m)$ 上の縮小半群になる．ただし強連続性は一般には成り立たない．さて，こうして T_t を拡張しておいて，Feller 半群の場合と同様に $C_\infty(E)$ の元 f と $x \in E$ に関して $T_t f(x)$ を考え，この積分表示を得たいのだが，あいにく今回は $T_t f$ は一般に連続関数ではないので各点の値というのは定まらない．ここがまず最初の考えどころである．一つのアイデアとなるのは Lebesgue 積分論における Luzin の定理である: E を $\mathbb{R}^d$ の Lebesgue 可測集合, m を E 上の Lebesgue 測度とするとき[*18]，E 上の Lebesgue 可測関数 f と $\varepsilon > 0$ に対して，E の部分閉集合 F で $m(E \setminus F) < \varepsilon$ かつ f が F 上で連続になるようなものが取れる．つまり状態空間 E を少し削っておけば関数は連続だとみなせるのである．しかしながら，一般に測度 0 の集合は削ってしまうには「大き過ぎる」．Luzin の定理は測度の正則性（コンパクト集合で内側から近似できるという性質）と劣加法性（加法性ではなく）が証明に効いていることに注意して，正則 Dirichlet 形式に対して次のような容量 Cap を導入する．

定義 2.6　A を E の開集合とするとき，

$$\mathcal{L}_A = \{u \in \mathcal{F} \mid u \geq 1 \ m\text{-a.e. on } A\},$$
$$\mathrm{Cap}(A) = \begin{cases} \inf_{u \in \mathcal{L}_A} \mathcal{E}_1(u, u) & \text{if } \mathcal{L}_A \neq \emptyset \\ \infty & \text{if } \mathcal{L}_A = \emptyset \end{cases}$$

と定め，一般の E の部分集合 A に対しては

$$\mathrm{Cap}(A) = \inf_{A \subset B,\, B \text{ は } E \text{ の開集合}} \mathrm{Cap}(B)$$

と定める．Cap を（$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に付随した）容量という[*19]．

[*18] もっと一般にできるけれど

[*19] 1-容量と呼ぶこともある．

Cap は可算劣加法性を持つ．すなわち $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ に対して

$$\mathrm{Cap}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cap}(A_n)$$

が成り立つ．さらに Cap は Choquet 容量となる．すなわち次の性質が成り立つ．

定理 2.7 (1) $A \subset B$ ならば $\mathrm{Cap}(A) \leq \mathrm{Cap}(B)$.

(2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を単調増大列とすると，$\mathrm{Cap}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_n \mathrm{Cap}(A_n)$.

(3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調減少列で各 A_n がコンパクト集合ならば，$\mathrm{Cap}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \inf_n \mathrm{Cap}(A_n)$.

(4) Borel 集合 A に対して，$\mathrm{Cap}(A) = \sup\{\mathrm{Cap}(K) \mid K$ はコンパクトで $K \subset A\}$.

定義より任意の可測集合 A に対して $m(A) \leq \mathrm{Cap}(A)$．特に $\mathrm{Cap}(A) = 0$ ならば $m(A) = 0$ である．すなわち，容量 Cap は測度 m よりも「細かい」集合を測ることが出来る．$x \in E$ に関する命題が容量 0 の集合を除いた点で成り立つとき，q.e. (quasi-everywhere) で成り立つという．

定義 2.8 E の閉部分集合の増大列 $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\lim_{k\to\infty} \mathrm{Cap}(E \setminus F_k) = 0$ をみたすとき，$\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ をネストという．もし更にすべての k に対して測度 $1_{F_k} \cdot m$ の台が F_k に一致するとき，$\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ を m-正則なネストという．

Egorov の定理の類似が以下のように成り立つ．

定理 2.9 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \cap C(E)$ が，ある $f \in \mathcal{F}$ に $\mathcal{F}$ の位相で収束するとする．すなわち $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{E}_1} = 0$. このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{f_{n'}\}$ と m-正則なネスト $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，任意の k に対して $\{f_{n'}\}$ は F_k 上で一様収束するようにできる．

上の定理において，

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim_{n'\to\infty} f_{n'}(x), & x \in Y := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \\ 0, & x \in E \setminus Y \end{cases} \tag{2.1}$$

と定めると，$\mathrm{Cap}(E \setminus Y) = 0$ に注意して $f = \tilde{f}$ m-a.e. が成り立つ．各 F_k 上で $\tilde{f}$ は連続関数の一様収束極限だから連続である．ここで一般に次の概念を導入しておこう．

定義 2.10 E 上で定義された関数 u が次の性質を持つとき **($\mathcal{E}$-) 準連続**であるという: あ

る（m-正則な）[20]ネスト $\{F_k\}_{k=1}^\infty$ が存在して，u は各 F_k 上で連続である．

一般に，m-a.e. で等しい可測関数 f, $\tilde{f}$ について，$\tilde{f}$ が準連続であるとき，$\tilde{f}$ を f の準連続修正という．(2.1) で定めた $\tilde{f}$ は f の準連続修正である．正則 Dirichlet 形式について，$\mathcal{F}$ の任意の元は準連続修正を持つ．また，$\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ がともに f の準連続修正であるとき，$\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ q.e. である．更に，可算無限個の準連続関数に対して，共通のネストをとることができる．

これらを用いて $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に付随する Hunt 過程 $\{X_t\}$ を構成することができる．以下，大変雑であるが構成方法を説明しよう[21]．まず E に罠 Δ を付け加えて 1 点コンパクト化しておく．$\mathcal{F} \cap C_0(E)$ の（$C_0(E)$ における）可算稠密部分集合 B_0 で十分性質のよいものをとり，$H_0 = \left(\bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+} T_t(B_0)\right) \cup G_1(B_0) \subset \mathcal{F}$ とおく．（ただし $\mathbb{Q}_+ = \{t \in \mathbb{Q} \mid t > 0\}$.）これも可算集合であることに注意すると，$m$-正則なネスト $\{F_k^0\}_{k=1}^\infty$ が存在して任意の $f \in H_0$ に対して準連続修正 $\tilde{f}$ が各 F_k^0 上で連続であるようにできる．$Y_0 = \bigcup_{k=1}^\infty F_k^0$ とおき，Y_0 上で Riesz の定理を適用することで，$t \in \mathbb{Q}_+$ および $x \in Y_0$ に対して積分核 $\tilde{p}_t(x, \cdot)$ が存在して，任意の Borel 関数 $u \in L^2(E, m)$ に対して $\tilde{p}_t u := \int_E u(y)\, \tilde{p}_t(\cdot, dy)$ が $T_t u$ の準連続修正となるようにできる．この積分核を用いて時間パラメータが $\mathbb{Q}_+$ であるような Y_0 上の Markov 過程が構成できる．ここから時間パラメータを $\mathbb{R}_+$ に拡張するためにかなりの議論が必要になるが，最終的には Y_0 から更に容量 0 の集合を取り除いて（これを Y とする），Y 上の Hunt 過程に拡張できる．標本路の挙動について評価するために Doob の任意抽出定理と優マルチンゲールの収束定理が用いられる．$E \setminus Y$ の点は不動点（すなわち，$E \setminus Y$ から出発した粒子は動かない）とすることで，E 上の m-対称な Hunt 過程 $(\{X_t\}, \{P_x\})$ を得る[22]．元の Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ との対応は，例えば半群 $\{T_t\}$ を介して次のように表わされる:

$$\begin{aligned}&\text{任意の } E \text{ 上の Borel 関数 } u \in L^2(E, m) \text{ と } t > 0 \text{ に対して,}\\ &E_x[u(X_t)] = T_t u(x)\ m\text{-a.e.}\, x \text{ が成り立つ.}\end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで E_x は P_x に関する積分を表わす．実際には $E_x[u(X_t)]$ は $T_t u(x)$ の準連続修正にまでなっている．

一般に，(2.2) の意味で $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する m-対称な Hunt 過程 $(\{X_t\}, \{P_x\})$ が与えら

---

[20] $\{F_k\}_{k=1}^\infty$ がネストであるとき，$F'_k = \operatorname{supp}(1_{F_k} \cdot m)$ とおくと $\{F'_k\}_{k=1}^\infty$ は m-正則なネストになるので，この条件はあってもなくても結局は同じことである．

[21] 以下の記述は [14] に従う．原論文 [12] では，quasi-homeomorphism の概念を用いた，異なる方法による構成がなされている．quasi-homeomorphism については [14] でも詳しく説明されている．

[22] フィルトレーションをどう取るかなど微妙な話は省略した

れたとき，任意の容量 0 の集合は，ある $\{X_t\}$ の適切除外集合 N に含まれる．ここで N が適切除外集合であるとは，$m(N)=0$ であり，$E\setminus N$ が $\{X_t\}$-不変集合となる[*23]ことである．適切除外集合の容量も 0 である．この概念を用いて $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する Hunt 過程の一意性が次の意味で成り立つ: $\{X_t\}$, $\{X_t'\}$ をともに (2.2) の意味で $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する m-対称な Hunt 過程とするとき，ある共通の適切除外集合 N が存在して，$E\setminus N$ 上では 2 つの推移確率は一致する．そこで，正則 Dirichlet 形式に対して，「容量 0 の除外集合を除いた出発点から Hunt 過程が一意的に構成される」という略した言い方もされることがある．

次に，標本路の連続性に関して述べるため，Dirichlet 形式の局所性の概念を導入しよう．E 上の可測関数 f に対して，$\mathrm{supp}(f\,dm)$ を $\mathrm{supp}\,f$ で表わす．f が連続関数ならば $\mathrm{supp}\,f$ は集合 $\{f\neq 0\}$ の閉包に等しい．

定義 2.11 (1) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が局所的であるとは，$\mathrm{supp}\,u$ と $\mathrm{supp}\,v$ がともにコンパクト集合で $\mathrm{supp}\,u\cap\mathrm{supp}\,v=\emptyset$ であるような $u,v\in\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{E}(u,v)=0$ であることをいう．

(2) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が強局所的であるとは，$\mathrm{supp}\,u$ と $\mathrm{supp}\,v$ がともにコンパクト集合で，$\mathrm{supp}\,u$ の近傍上で v が定数となるような $u,v\in\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{E}(u,v)=0$ であることをいう．

Hunt 過程 $\{X_t\}$ の生存時間を ζ で表わすとき，以下が成り立つ．

定理 2.12 (1) $\{X_t\}$ が拡散過程，すなわちある容量 0 の集合を除いた集合からの出発点 x に対して，確率 1 で見本路が区間 $[0,\zeta)$ 上で連続であるための必要十分条件は，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が局所的であることである．

(2) $\{X_t\}$ が内部で消滅しない拡散過程，すなわち拡散過程であって，かつ，ある容量 0 の集合を除いた集合からの出発点 x に対して，

$$P_x(X_{\zeta-}\in E,\ \zeta<\infty)=0$$

であるための必要十分条件は，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が強局所的であることである．

第 3 節以降で考察対象とするのは強局所的な Dirichlet 形式のみである．

さて，これで Dirichlet 形式の一般理論としてはやっと入り口に立ったところである．ほぼ確立されているといってよい一般論としては例えば以下のようなものがある．

[*23] すなわち，任意の $x\in E\setminus N$ に対して，$P_x[X_t\in(E\setminus N)\cup\{\Delta\},\ X_{t-}\in(E\setminus N)\cup\{\Delta\},\ ^{\forall}t\geq 0]=1$.

- 確率論的ポテンシャル論と Dirichlet 形式におけるポテンシャル論の関係
- Hunt 過程の連続部分，飛躍部分，消滅部分にそれぞれ対応するように Dirichlet 形式を分解する Beurling–Deny 分解
- 加法汎関数，確率解析の理論
- 伊藤の公式に対応する福島分解や Lyons–Zheng 分解
- Hunt 過程の様々な変換の理論（時間変更，Dirichlet 境界条件による粒子の消滅，優マルチンゲールによる変換など）

しかしながら，ここではこれ以上深入りしない．

この小文では Markov 過程を構成する手段として Dirichlet 形式を考えるという導入の仕方をしたが，これは歴史的な発展の順序とは異なることに注意しておく．$\mathbb{R}^d$ の有界領域上の，境界条件の付いた Laplace 作用素で，対称 Markov 過程の生成作用素になっているものを全て決定するという結果 ([11]) の拡張を目指すことが Dirichlet 形式の理論展開の大きな動機の 1 つであった．また，対称 Markov 過程に関する大偏差原理のレート関数の表示にも Dirichlet 形式が自然な形で現れる (例えば [15]) といったように，他の何らかの方法で既に対称 Markov 過程が定まっているときでも（例えば確率微分方程式の解として与えられるなど)，対応する Dirichlet 形式を考えることは有意義である．

次節以降は，応用例として状態空間がフラクタル集合の場合を考えていくことにする．

3 フラクタル上の拡散過程の研究概観

「フラクタル」という言葉はフランスの数学者 Mandelbrot によりつくられたが，いまだフラクタルの明確な数学的定義はない．Hausdorff 次元が非整数である集合というのが一つの説明の仕方だが，Mandelbrot 集合の境界集合の Hausdorff 次元は 2 であるという有名な結果もあるので ([43])，これをフラクタルの定義にするというのもふさわしくない．ここではフラクタルとは何らかの（弱い意味かも知れないが）自己相似性を持ち，ユークリッド空間とは幾何学的構造が大きく異なるものという曖昧な説明で済ませておく．

フラクタルの幾何学的性質の研究については古くから行われている．代表的教科書として [9, 10] を挙げておく．フラクタルの解析学的研究が開始されたのは 1980 年代である．disordered media（複雑な系）の性質を自己相似性を手がかりにして調べようという研究が物理学者により行われていたのを動機として，理想化されたモデルとしての自己相似フラクタル上での解析学的（あるいは確率論的）研究が始まった．既に日本語の論説 [30, 31, 37] があるので，ここではごく簡単に研究状況を概観することにする．

Sierpinski gasket 上での Brown 運動の構成とその性質を調べた Goldstein [16]，楠岡 [32]，Barlow–Perkins [5] による研究が確率論的アプローチによる萌芽的研究といえる．ここでの確率過程は，Sierpinski gasket に近づいていくようなグラフ上のランダムウォークのスケール極限による非自明な拡散過程として構成されている．それを「Brown 運動」と呼ぶにふさわしいことは，それが適当な自己相似性（拡散過程の小さい各セル上での挙動が同じであるという性質や，フラクタルの対称変換による拡散過程の分布の不変性）を持ち，逆にそのような自己相似性をもつ拡散過程は定数倍の時間変更を除いて一意的である ([5]) ということから正当化される．その後，木上 [26] により Sierpinski gasket 上に Laplacian が直接構成され，解析学的アプローチのさきがけとなった．（教科書として [45, 27] を挙げておく．）現在では Brown 運動の構成は Dirichlet 形式を用いる方法が最も手早い．2 次元 Sierpinski gasket の場合に簡単に説明しておこう．

$z_1 = \sqrt{-3}/2$, $z_2 = -1/2$, $z_3 = 1/2$ とし，複素平面 $\mathbb{C}(\simeq \mathbb{R}^2)$ 上の縮小写像 ψ_1, ψ_2, ψ_3 を

$$\psi_i(z) = \frac{1}{2}(z - z_i) + z_i, \qquad z \in \mathbb{C}$$

により定める．2 次元 Sierpinski gasket K は関係式

$$K = \bigcup_{i=1}^{3} \psi_i(K)$$

をみたす唯一つの空でないコンパクト集合という特徴付けによって定義できる．$V_0 = \{z_1, z_2, z_3\}$ とし，$V_n \subset \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \dots)$ を

$$V_n = \bigcup_{i=1}^{3} \psi_i(V_{n-1})$$

により帰納的に定める．V_n は n に関して単調に増大し，$V_* = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ とおくと V_* の閉包は K に一致する．各 V_n には自然にグラフ構造が定まる．すなわち，$x, y \in V_n$ が結ばれているということを $|x - y| = 2^{-n}$ により定義し，このとき $x \sim y$ と書くことにする．

V_* 上の関数 f, g に対して，

$$Q_n(f, g) = \sum_{\substack{x, y \in V_n \\ x \sim y}} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$$

とおくと，任意の f に対して数列 $\{(5/3)^n Q_n(f, f)\}$ は n に関して単調非減少となり，更に任意の V_0 上の関数に対して，その V_* への拡張 f で，この数列が定数列となるような

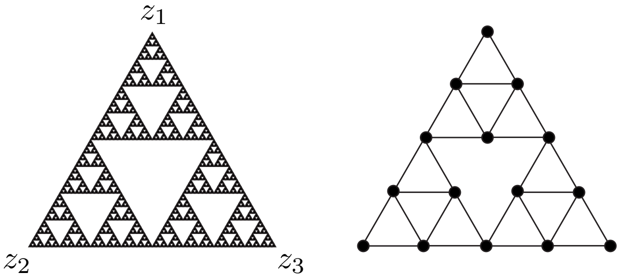

図 1　2 次元 Sierpinski gasket とグラフ $(V_2, \sim)$

関数が存在する．従って，5/3 がこの例での適切なスケーリング定数となる．

$$\mathcal{F}_* = \{f \mid \lim_{n\to\infty}(5/3)^n Q_n(f,f) < \infty\}$$

とおく．すると各 $f \in \mathcal{F}_*$ に対して f は V_* 上で一様連続（実は Hölder 連続）であることが示されるので，K 上の連続関数に一意的に拡張される．これを改めて f とかき，この関数全体を $\mathcal{F}$ とする．$f, g \in \mathcal{F}$ に対して

$$\mathcal{E}(f,g) = \lim_{n\to\infty}(5/3)^n Q_n(f|_{V_n}, g|_{V_n})$$

とおくと $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(K,\mu)$（μ は K 上の正規化された Hausdorff 測度）上の正則な強局所 Dirichlet 形式となり，更に 1 点の容量は一様に正となることが示されるので，対応する拡散過程は出発点に関する除外集合無しで構成される．更に $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は次の自己相似性を持つ．

$$\mathcal{E}(f,g) = \sum_{i=1}^{3}\frac{5}{3}\mathcal{E}(f\circ\psi_i, g\circ\psi_i), \qquad f,g\in\mathcal{F}.$$

この関係式は拡散過程の自己相似性に反映され，この拡散過程が Brown 運動と呼ぶべきものである．

今のところ自己相似フラクタル上の拡散過程で研究対象となっているのは，このような自己相似性を持つ対称 Dirichlet 形式に対応するものが大部分である．数少ない例外として，[29, 17] などがある．

フラクタル上の拡散過程でユークリッド空間の場合と大きく異なる点を列挙しておこう．以下でも簡単のため 2 次元 Sierpinski gasket（通常の有界なもの，または非有界な集合に拡張したもの[*24]）上の Brown 運動のケースで述べる．

[*24] もう少し正確に述べると，K を通常の 2 次元 Sierpinski gasket としたとき，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\psi_1^{-n}(K)$ で表わせる非有界集合のこと．この集合上にも自然に Brown 運動が定義できる．

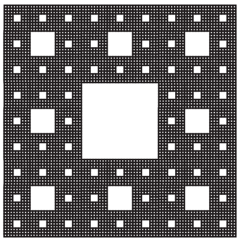

図 2　2 次元 Sierpinski carpet

まず，Brown 運動の推移確率（しばしば熱核という）は μ に関する密度 $p_t(x,y)$ を持ち，$p_t(x,y)$ は $(t,x,y)\in(0,\infty)\times K\times K$ について連続で，更に次のような劣 Gauss 型評価が成り立つ．（Barlow–Perkins [5] による．[1] の講義録が分かりやすい．）

$$\begin{aligned}&c_1 t^{-d_s/2}\exp\left(-c_2\left(\frac{|x-y|^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right)\\&\qquad\le p_t(x,y)\le c_3 t^{-d_s/2}\exp\left(-c_4\left(\frac{|x-y|^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right),\qquad x,y\in K.\end{aligned}$$

ここで t の範囲は K が有界な Sierpinski gasket の場合は $0<t\le 1$，非有界の場合は $0<t<\infty$ であり，$c_1,\dots,c_4$ は t,x,y に無関係な正定数である．また，$d_s=\log 9/\log 5$，$d_w=\log 5/\log 2>2$ でそれぞれスペクトル次元，ウォーク次元と呼ばれる．$d_w=2$ のときが通常の Gauss 型評価であり，$d_w>2$ であることは，長時間挙動において粒子がゆっくりと拡散していく，劣拡散の状況を表わしている．d_f を K の Hausdorff 次元とするとき $d_w d_s=2d_f$ が成り立つが，これは多くの自己相似フラクタル上の標準拡散過程に共通して成立する関係式である．Dirichlet 形式の定義域は指数が $(d_w/2,2,\infty)$ の Besov 空間という関数空間（Lipschitz 空間と呼ばれることもある）によって記述することができる ([25])．正確な定義はやや煩雑なので省略するが，$d_w/2$ が「$d_w/2$ 階微分可能性」を表わす指数，2 が可積分性の指数，∞ が補助的な指数を表わす．

以上のような性質はもっと一般の有限分岐的な*25自己相似フラクタルの場合や，有限分岐的でない自己相似フラクタルの典型例として Sierpinski carpet の場合にも成り立つ（例えば [2] 参照）ことが知られている．Sierpinski carpet についてはグラフ近似した際に Sierpinski gasket のときのような近似レベル n に関するエネルギーの単調性がないため，Brown 運動を構成する段階から既に話は格段に難しくなる ([35])．([2] ではグラフ

*25 ある有限個の点を除くと非連結になるという性質のこと

近似ではなく，Euclid 空間の領域の列で carpet を近似しているが，事情は同様である.）Sierpinski carpet の Brown 運動の一意性は長い間未解決であったが，最近肯定的解決がアナウンスされたホットな話題である ([4]). 熱核の劣 Gauss 型評価については一般の距離付き測度空間の枠組で成立のための必要十分条件が知られている ([3]). これによりある種の摂動に関する劣 Gauss 型評価の安定性も従う. ただしこの必要十分条件は確率論的な条件を含んでおり，劣 Gauss 型評価を純粋に解析的に導出することは未解決の問題である.

熱核に関連した話題は沢山あるが，詳しくは先程挙げた論説 [30, 31, 37] を参照せよということで済ませることにする. 熱核の評価及びその応用については，かなりのところまで理解が進んできているとはいえ，わかっていないことも多く，まだしばらくは研究テーマの王道であるだろうと思われる[*26].

4 フラクタル上のエネルギー測度，マルチンゲール次元，そして微分

この節では講演者がこれまで興味を持ってきた（主流でない）研究を紹介する.

まず準備として，一般の正則 Dirichlet 形式の枠組でエネルギー測度の概念を導入しておこう. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E,m)$ 上の正則 Dirichlet 形式とする. 簡単のため $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は強局所的であるとしておく. f を $\mathcal{F}$ の元で有界関数であるとするとき，f のエネルギー測度 ν_f[*27]は次の性質をみたす唯一つの E 上の正の有限 Radon 測度である:

$$\int_E \varphi\, d\nu_f = 2\mathcal{E}(f, f\varphi) - \mathcal{E}(f^2,\varphi), \qquad {}^\forall\varphi \in \mathcal{F}\cap C_b(E).$$

エネルギー測度は，E の任意の Borel 集合 A に対して

$$\left|\nu_{f_1}(A)^{1/2} - \nu_{f_2}(A)^{1/2}\right| \le \nu_{f_1-f_2}(A)^{1/2} \le (2\mathcal{E}(f_1-f_2, f_1-f_2))^{1/2}$$

という不等式をみたすため，有界でない $\mathcal{F}$ の元に対しても有界関数列で近似することで自然に ν_f を定めることができる. また，$f,g\in\mathcal{F}$ に対して，

$$\nu_{f,g} := (\nu_{f+g} - \nu_{f-g})/4$$

[*26] 難しい問題ばかり残っている状況，と言えなくもないが，アイデア一発で一気に進展するかも知れないと楽観的に考えておく方が幸せだろう…

[*27] [14] では $\mu_{\langle f\rangle}$ という記号が用いられている

として符号付き測度 $\nu_{f,g}$ を定める．

定義を眺めていただけではエネルギー測度の意味ははっきりしないが，具体例で計算してみると実体がよく分かる．例 2.1 の場合に $f \in \mathcal{F}$ のエネルギー測度を計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{E}(f, f\varphi) - \mathcal{E}(f^2, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ (\nabla f, \nabla(f\varphi)) - \frac{1}{2}(\nabla(f^2), \nabla\varphi) \Big\} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, |\nabla f|^2 \, dx.
\end{aligned}
$$

従って，$\nu_f(dx) = |\nabla f(x)|^2_{\mathbb{R}^d} \, dx$ であり，また $\nu_{f,g}(dx) = (\nabla f(x), \nabla g(x))_{\mathbb{R}^d} \, dx$ である．このようにエネルギー測度が明示的な表示を持つのは，今の場合 Dirichlet 形式が「1 階微分の L^2 内積」の形で書けていることが効いている．フラクタルの場合は残念ながらそうなっておらず，エネルギー測度の単純な表現はない．そこでこの場合に，エネルギー測度がどんな性質を持っているかというのは（それなりに）興味のある問題である．最初の研究は楠岡 [30] によるもので，ある種のフラクタルにおいて，ランダム行列の積の極限を用いた Dirichlet 形式およびエネルギー測度の表示を得，それを元にして，任意の $d \geq 2$ に対して d 次元 Sierpinski gasket 上の標準 Dirichlet 形式については，エネルギー測度は Hausdorff 測度と互いに特異であることが示された．この結果の拡張は [6, 18, 21] でなされ，広いクラスの自己相似フラクタルについてエネルギー測度と自己相似測度との特異性が示されている．実はこの特異性が熱核密度の劣 Gauss 型評価の解析的導出を困難にしている 1 つの原因である（Gauss 型評価の解析的導出に用いられる Davies の方法が適用できない）．

次にエネルギー測度を用いて Dirichlet 形式の指数というものを定めよう．そのために一つ定義をする．

定義 4.1 E 上の正の Radon 測度 ν が $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の minimal energy-dominant measure[*28]であるとは，次の 2 条件が成り立つことをいう．

(i) 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，$\nu_f \ll \nu$（ν_f は ν に対して絶対連続）．

(ii) もし別の測度 ν' が条件 (i) を（ν を ν' に置き換えて）満たしていれば，$\nu \ll \nu'$ である．

このとき $\nu_{f,g} \ll \nu$ も常に成り立つ．また，もし ν と $\tilde{\nu}$ がともに minimal energy-dominant measure であれば，定義より $\nu \sim \tilde{\nu}$ である．例 2.1 の場合では，Lebesgue 測

[*28] 日本語にすると，極小エネルギー支配測度？

度を minimal energy-dominant measure にとることができる．

minimal energy-dominant measure は必ず存在する．更に強く，次の主張が成り立つ．

定理 4.2　$\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid \nu_f$ は minimal energy-dominant measure$\}$ とすると，$\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ で稠密である．

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の minimal energy-dominant measure ν を一つ固定する．

定義 4.3　Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の指数とは，次の条件を満たす最小の $p \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ のことである: 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\mathrm{Rank}\left(\frac{d\nu_{f_i,f_j}}{d\nu}(x)\right)_{i,j=1}^{n} \le p \quad \nu\text{-a.e. } x$$

が成り立つ．

上の定義はもちろん ν の取り方によらない．例 2.1 の場合は，具体的な計算により定義中の行列の成分を書き下すことができ，指数は d（つまり $\mathbb{R}^d$ の次元）であることがわかる．フラクタルの場合に指数を決定するのは易しい問題ではないが，その話をする前に指数の確率論的特徴付けについて述べておく．

正則強局所 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から定まる拡散過程を $\{X_t\}$ とし，エネルギー有限のマルチンゲール加法汎関数全体を $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ で表わす[*29]．$M \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ と E 上の「良い」関数 f に対して確率積分 $f \bullet M$ を定義することができる．これは実数値確率過程を与え，f が十分よい関数であれば，$(f \bullet M)_t = \int_0^t f(X_s)\,dM_s$ と通常の Itô 型の確率積分で表現できる．

定理 4.4　$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の指数は次の性質を満たす最小の $p \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ に等しい: ある $\{M^{(i)}\}_{i=1}^p \subset \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ が存在して，任意の $M \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ は次の形の $\{M^{(i)}\}$ に関する確率積分による表現を持つ．

$$M_t = \sum_{i=1}^{p} (\varphi^{(i)} \bullet M^{(i)})_t.$$

上の定理中の p を（結局は指数と同じことだが）$\{X_t\}$ の（加法汎関数に関する）マルチンゲール次元という．定義 4.3 と定理 4.4 は楠岡による結果 ([33, 34]) の自然な一般化である ([20])．

*29 正確な定義を述べるのはやや面倒なので [14] に譲る．以下出てくる諸々の概念についても定義は [14] を参照のこと．

有限分岐的な自己相似フラクタル上の自己相似な Dirichlet 形式に関しては広いクラスで指数（マルチンゲール次元）は 1 であることが示されている ([33, 19])．このことを使ってフラクタル上の関数の「微分」を定義することができる ([40, 20])．以下で説明することにするが，これはまだ進行中の研究であり，どのように発展していくかはわからない[*30]．

有限分岐的な自己相似フラクタルで更に付加的な条件を持つ[*31] K 上の自己相似な正則 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が与えられ[*32]，その指数が 1 であるとする．定理 4.2 における $\mathcal{F}_0$ から元 g を 1 つ選ぶ．このとき以下の定理が成り立つ ([20])．

定理 4.5　任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，ν_g-a.e. $x \in K$ で以下の条件を満たす実数 $\frac{df}{dg}(x)$ が一意的に存在する:

$$f(y) - f(x) = \frac{df}{dg}(x)(g(y) - g(x)) + R_x(y).$$

ただしここで剰余項 $R_x(y)$ は次の意味で無視できる量である:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sup_{y\in K_{x[n]}} |R_x(y)|}{\mathrm{Osc}_{y\in K_{x[n]}}\, g(y)} = 0. \tag{4.1}$$

（$K_{x[n]}$ は x を含む n-cell を表わす．図 3 を参照のこと．）更に，

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2} \int_K \left(\frac{df}{dg}(x)\right)^2 \nu_g(dx) \tag{4.2}$$

が成立する．

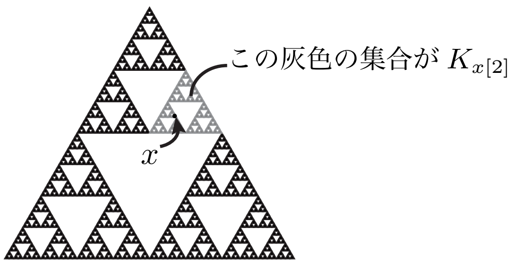

図 3　Sierpinski gasket における $K_{x[n]}$ の説明

[*30] 「はずれ」の可能性もある話である．
[*31] 正確には p.c.f. というクラスに属するフラクタル．[27] 参照．
[*32] K 上の測度は適当によいものを選んでおく．選び方は後の話には影響しない．

定理 4.6　K が d 次元 Sierpinski gasket で，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ がその上の標準 Dirichlet 形式の場合，定数関数でない任意の調和関数 g に対して ν_g は minimal energy-dominant measure である．定理 4.5 において g を定数関数でない調和関数とするとき，式 (4.1) 中の $\liminf_{n\to\infty}$ は $\lim_{n\to\infty}$ に置き換えることができる．

式 (4.2) はあたかも 1 次元空間上に Dirichlet 形式が定義されたかのような表現になっている．これをもって指数が 1 であることの解析的な解釈を与えているといってよいだろう．このことを用いてフラクタル上で微分幾何学のような話が展開できないだろうか？というのが最近漠然と考えていることである．(関連文献として [28] を挙げておく．)

補遺（2015/10/01 記述）

この原稿を書いてから 7 年が経ち，いくつか進展もあったので簡単に補足する．指数（マルチンゲール次元）の評価については，[50] で Sierpinski carpet の場合にも適用できる議論が見つかり新たな評価式が得られた．定理 4.5 は，[51] で指数有限の強局所 Dirichlet 形式の場合に（若干定式化を変更して）一般化された．測度付き距離空間の解析グループの研究とも若干通ずるところがある．最近の文献として [48, 49] を挙げておく．

参考文献

以下は本文中で引用したもののみであり，関連文献の網羅を意図したものでは全くない．

[1] M. T. Barlow, Diffusions on fractals, Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1995), 1–121, Lecture Notes in Math. **1690**, Springer, 1998.

[2] M. T. Barlow and R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets, Canad. J. Math. **51** (1999), 673–744.

[3] M. T. Barlow, R. F. Bass, and T. Kumagai, Stability of parabolic Harnack inequalities on metric measure spaces, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 485–519.

[4] M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai, and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpiński carpets, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **12** (2010), 655–701.

[5] M. T. Barlow and E. A. Perkins, Brownian motion on the Sierpiński gasket, Probab. Theory Related Fields **79** (1988), 543–623.

[6] O. Ben-Bassat, R. S. Strichartz, and A. Teplyaev, What is not in the domain of the Laplacian on Sierpinski gasket type fractals, J. Funct. Anal. **166** (1999)

197–217.

[7] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor, *Markov processes and potential theory*, Pure and Applied Mathematics **29**, Academic Press, 1968. （ペーパーバックあり）

[8] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter Studies in Mathematics **14**, Walter de Gruyter, 1991.

[9] K. Falconer, *Techniques in fractal geometry*, John Wiley & Sons, Ltd., 1997.（翻訳あり）

[10] K. Falconer, *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., 2003. （翻訳あり）

[11] M. Fukushima, On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities, J. Math. Soc. Japan **21** (1969), 58–93.

[12] M. Fukushima, Dirichlet spaces and strong Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc. **162** (1971), 185–224.

[13] 福島正俊，ディリクレ形式とマルコフ過程，紀伊國屋書店，1975.

[14] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter Studies in Mathematics **19**, Walter de Gruyter, 1994.

[15] 福島正俊・竹田雅好，マルコフ過程，培風館，2008.

[16] S. Goldstein, Random walks and diffusions on fractals, in *Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems* (Minneapolis, Minn., 1984–1985), 121–129, IMA Vol. Math. Appl. **8**, Springer, 1987.

[17] K. Hattori, T. Hattori, and H. Watanabe, Asymptotically one-dimensional diffusions on the Sierpiński gasket and the *abc*-gaskets, Probab. Theory Related Fields **100** (1994), 85–116.

[18] M. Hino, On singularity of energy measures on self-similar sets, Probab. Theory Related Fields **132** (2005), 265–290.

[19] M. Hino, Martingale dimensions for fractals, Ann. Probab. **36** (2008), 971–991.

[20] M. Hino, Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **100** (2010), 269–302.

[21] M. Hino and K. Nakahara, On singularity of energy measures on self-similar sets II, Bull. London Math. Soc. **38** (2006), 1019–1032.

[22] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, 2nd ed., North-Holland Mathematical Library **24**, North-Holland–

Kodansha, 1989.

[23] 伊藤清，確率論，岩波基礎数学選書，1991.

[24] K. Itô and H. P. McKean, Jr., *Diffusion processes and their sample paths*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **125**, Springer, 1965. （ペーパーバックあり）

[25] A. Jonsson, Brownian motion on fractals and function spaces, Math. Z. **222** (1996), 495–504.

[26] J. Kigami, A harmonic calculus on the Sierpiński spaces, Japan J. Appl. Math. **6** (1989), 259–290.

[27] J. Kigami, *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics **143**, Cambridge University Press, 2001.

[28] J. Kigami, Measurable Riemannian geometry on the Sierpinski gasket: the Kusuoka measure and the Gaussian heat kernel estimate, Math. Ann. **340** (2008), 781–804.

[29] T. Kumagai, Construction and some properties of a class of non-symmetric diffusion processes on the Sierpiński gasket, in *Asymptotic problems in probability theory: stochastic models and diffusions on fractals* (Sanda/Kyoto, 1990), 219–247, Pitman Res. Notes Math. Ser. **283**, Longman Sci. Tech., 1993.

[30] 熊谷隆，フラクタル上の確率過程とその周辺，数学，第 49 巻第 2 号 (1997), 158–172.

[31] 熊谷隆，フラクタル上の解析学の展開，数学，第 56 巻第 4 号 (2004), 337–350.

[32] S. Kusuoka, A diffusion process on a fractal, in *Probabilistic methods in mathematical physics* (Katata/Kyoto, 1985), 251–274, Academic Press, 1987.

[33] S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **25** (1989), 659–680.

[34] S. Kusuoka, Lecture on diffusion processes on nested fractals, in *Statistical mechanics and fractals*, 39–98, Lecture Notes in Math. **1567**, Springer, 1993.

[35] S. Kusuoka and X. Y. Zhou, Dirichlet forms on fractals: Poincaré constant and resistance, Probab. Theory Related Fields **93** (1992), 169–196.

[36] Z.-M. Ma and M. Röckner, *Introduction to the theory of (nonsymmetric) Dirichlet forms*, Universitext, Springer, 1992.

[37] 長田博文，熊谷隆氏の業績 ―フラクタル上の拡散過程の研究―，数学，第 56 巻第 4 号 (2004), 419–426.

[38] Y. Ōshima, On a construction of Markov processes associated with time depen-

dent Dirichlet spaces, Forum Math. **4** (1992), 395–415.

[39] E. M. Ouhabaz, *Analysis of Heat Equations on Domains*, London Mathematical Society Monographs Series **31**, Princeton University Press, 2005.

[40] A. Pelander and A. Teplyaev, Products of random matrices and derivatives on p.c.f. fractals, J. Funct. Anal. **254** (2008), 1188–1216.

[41] D. Revuz and M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 3rd ed., Springer, 1999.

[42] 佐藤健一，加法過程，紀伊國屋書店，1990.

[43] M. Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, Ann. of Math. (2) **147** (1998), 225–267.

[44] W. Stannat, The theory of generalized Dirichlet forms and its applications in analysis and stochastics, Mem. Amer. Math. Soc. **142** (1999), no. 678.

[45] R. S. Strichartz, *Differential equations on fractals: A tutorial*, Princeton University Press, 2006.

[46] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, *Multidimensional diffusion processes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **233**, Springer, 1979. （ペーパーバックあり）

[47] 渡辺信三，確率微分方程式，産業図書，1975.

[48] N. Gigli, *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **236** (2015), no. 1113.

[49] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, and J. T. Tyson, *Sobolev spaces on metric measure spaces: an approach based on upper gradients*, Cambridge University Press, 2015.

[50] M. Hino, Upper estimate of martingale dimension for self-similar fractals, *Probab. Theory Related Fields* **156** (2013), 739–793.

[51] M. Hino, Measurable Riemannian structures associated with strong local Dirichlet forms, Math. Nachr. **286** (2013), 1466–1478.