数学者による
数学者のための
String Duality
概論

深谷賢治
京都大学理学部数学教室

注意

この，予稿および講演は
現在における深谷の（不十分な）理解を元に
書かれ行われるものであって，
その内容の間違い力点の置き方の不適切
などによって，いかなる，
研究上その他の不利益を被っても，
その責任は負いかねます.

序文

見かけ上５つあると思われ，さらにコンパクト化まで考えると無数にあると考えられていた超弦理論が，みんな一つだった，あるいはつながっていた，というのが，String Dualityの大きな発見であったという．

それを受けて，超弦理論はここ数年大変な勢いで進歩しているという．

これは，数学になにをもたらすのだろうか．

ひと昔まえ（にすでになってしまったのだろう）ミラー対称性が物理からやってきて，代数幾何を中心に数学に大きな影響を与えた．

サイバーグとウィッテンの$N=2$　超対称ゲージ理論の双対性の発見が，その副産物として，４次元位相幾何学に大きなものをもたらした．

これらを見ていると隣の世界の出来事といって放ってもおけない．最近の弦理論の発展はその両者の影響下にあるという．

しかも，少し眺めてみると，どうも，その発展の問題意識がすこぶる数学的である．

第１，２つの関係なかったものに関係をつけて喜ぶ，というのはいかにも数学者の態度である．（一昔前なら，関係がついたって，結局どっちも分からないんでしょ，というのは物理学者から数学者へのせりふだったのではないだろうか．）

もう一つ筆者が興味を持ちやすかった理由は，超弦理論は最近の進展の中で，World Sheetつまりリーマン面上の理論（例えば共形場の理論）からSpace Timeつまり１０次元の空間へ重点を移したという．そして，よくでてくるのは，Space Timeあるいはコンパクト化に使う空間に関わるモジュライ空間である．まさしく，現在の幾何学の主要な対象である．

超弦理論の中心は，無限次元リー環の表現論から，モジュライ空間の幾何学に移った，といっては言い過ぎだろうか．（勿論，この２つは，実は密接にかかわっていて，両方の見方を，自由に移りながらする事が，大切であるのだろう．）

それはともかく，超弦理論の最近の進展が数学になにをもたらすのか，考えながら，hepからダウンロードした論文を眺めていた結果できたのがこの予稿である．

しかし，書いているうちに，私にはこれを書く資格がないのではないかという危惧を何度も感じた．自分がよく分からないことを，人に向かって説明しようと試みるのは，ナンセンスではないか．しかし，この原稿は翻訳つまり物理語を数学語に訳す翻訳である，と思うことにした．翻訳は，同時に，理解するための行為である．

１，２章は，すでに１０年前に確立していた弦理論の基本的な事項を，数学語で解説することを試みた．というより，物理で確立しているさまざまな手続きによる計算が始まる前の，なぜそう計算するのか，なにを計算しているのか，を考えてみた．それをせずに，単に物理の手続きを信じて進めることもできるが，それはしたくなかった．実際現在の発展の中心である，「非摂動的効果」は，そういった以前の手続きでは捉えられない部分だからである．手続きの意味を熟知した物理学者が，それをふまえて使えば問題はないが，よく分からないまま鵜呑みにするのは危険であると思った．

３章以後がDualityの解説である．できるだけ多くの話題に触れたいと思い，どちらかというと広く浅く，になってしまった．しかし，まだ，勿論話題は偏っているであろう．

目次に書いたように，筆者はこのテーマについて素人であり，間違いは多くあると思われる．あらかじめご了承頂きたい．

第１章：超弦理論への超速成コース

その１

１０年前に勉強し損ねた人のための超弦理論の第一次黄金時代の極めて荒い解説

１０年前に超弦理論の第一次（さらにその１０数年前の超弦理論開始時を第一次と数えれば第二次）黄金時代があったという．

当時．江口先生を始めとする物理学者に数学の研究会でよく講演をしてもらった記憶がある．しかし，今思い起こすと，それらを自分のものに消化することは結局出来ていなかった．ここで，筆者のように１０年前に勉強し損ねた人のために，超弦理論の第一次黄金時代を振り返り，第二次黄金時代（２・３年前から現在まで）について，解説するのに，必要最小限のことを述べる．

なお以下では，計算に当たることをいっさい省く．それは，第１に，筆者が計算が苦手でなかなかフォロー仕切れないことである．別の理由は，物理学者の書いた解説には計算の部分はたいていきちんと書いてある．それで，計算力がなくてフォローしきれないことを除けば，筆者がよく詰まったのは，この計算はいったいなにを計算しているのかという点であった．その答えだけを以下（出来る限り数学語で）のべる．自信がない部分があるので，数学語にする仮定で誤訳している場合があると思われる．

この章に関する，参考書は，[Green.M, 1987 #54] である．

(疑問a)　超弦理論がTarget space上の場の理論を導くとはどういうことか　？

弦理論においては，ある時刻tでの「粒子」は，S^1からMへの写像によって表されると考える．言い換えると，（時間の方も動かして考えると）粒子は２次元多様体Σから$M\times\boldsymbol{R}$への写像で表される．

一方，場の量子論における粒子は，時間を止めれば点とみなされ，また時間の方も動かして考えると，一次元の図形とみなされる．

点はそれだけでは，内部自由度を持っていないから，ある瞬間の粒子の状態はその位置だけで決まる．ただし，普通は，ただ，Mの上での位置だけを考えるのでなく，余分の自由度も考える．つまり，例えば，M上のベクトル束Eを考え，ある瞬間における粒子が，M上の点pとpでのEのファイバーE_pの元の組を与える，と考えるのである．例えば，（標準模型での）クォークの場合には，Eは$SU(3)$と考えられ，従って，３成分の自由度が増える．

元に戻って，弦の場合を考えると，S^1からMへの写像全体は無限次元の空間である．従って，点粒子の場合に，「瞬間の粒子の状態はその位置だけで決まる」，というときに，位置と書いた自由度に対応する，弦理論における自由度は無限大である．（これにさらに，M上のベクトル束Eなどをつけ加えることもある．）

この無限個の自由度を，M上に無限個のベクトル束があって，その切断を考えている，ということに対応するとみなす.

もう少し述べる．「粒子」は，S^1からMへの写像によって表されるが，この像（弦）の長さが長いと，そのような弦は多くのエネルギーを持つ．従って，低エネルギーの近似では，関係する弦は全て長さが非常に短い弦とみなして良いであろう．

すなわち，$\ell : S^1 \to M$なる写像で，$\ell(S^1)$の直径が大変小さいものの全体が，ある瞬間における，弦の状態を近似していると考える．これと，M上の場の理論を関係させるために，$\ell : S^1 \to M$をフーリエ展開して

$$\ell(t) = x(t) + \sum_{k>0} a_k \sin kt + \sum_{k>0} b_k \cos kt \tag{1.1}$$

と書こう．（Mがユークリッド空間でない場合は，上の式の+というのは，少し変である．正確には

$$\ell(t) = \exp_{x(t)}\left(\sum_{k>0} a_k \sin kt + \sum_{k>0} b_k \cos kt\right), \tag{1.2}$$

と書くべきであろう．これらの系数にあたる，a_k，b_kは$x(t)$での接ベクトルである．従って，これらが弦理論が表している場に対応すると考える．

以上は場の量子化をする前の話であるが，場の量子化をした後は次のように考えられる．

ループ空間$\Omega(M) = \{\ell : S^1 \to M\}$を考えよう．（これが，ある瞬間の弦の状態全体の空間であった．）量子論で考えると，この空間の上の関数空間$C(\Omega(M))$を考え，これが，ある一瞬間の系の状態を決める，空間であると考える．（本当はこれは嘘で，ゲージ変換群（今の場合はS^1から自分自身への可微分同相全体$Diff(S^1)$）で割ってって考える必要がある．）

さて，長い弦を無視して，長さが0に近い弦だけを考える，というのは，次のことに当たるだろう．$M \subseteq \Omega(M)$ とみなすことが出来る．（定値写像全体を$M \subseteq \Omega(M)$とみなす．）ループ空間$\Omega(M)$のかわりに，$\Omega(M)$でのMの近傍を考える．これは，$\Omega(M)$でのMの法ベクトル束とみなすことが出来る．　すると，この法ベクトル束は，Mの接ベクトル束からしかるべく誘導された無限個のベクトル束であると考えられる．(1.1)式はこのことを表していると解釈できる．

そこで，法ベクトル束のこの分解を

$$N_M \Omega(M) = \oplus E_i$$

と書いてみよう．すると，我々は，関数空間$C(\Omega(M))$を$C(\oplus E_i)$で近似したことになる．ところで，容易に分かるように，多様体**M**とその上のベクトル束Eに対して，

E（のTotal space）上の関数全体の空間は，大体，ベクトル束$Sym(E^*)$（**Syn**は無限対称積を＊は双対を表す）の切断とみなすことが出来る．実際$Sym(E^*)$の切断

$$f_0 + f_1 + f_{2,1} \times f_{2,2} + \cdots$$

があったとすると（f_0はM上の関数， $f_1, f_{2,1}, f_{2,2}, \cdots$は$E^*$の切断）， $v \in E_p$に対して，

$$\left(f_0 + f_1 + f_{2,1} \times f_{2,2} + \cdots\right)(v) = f_0(p) + \left\langle f_1(p), v\right\rangle + \left\langle f_{2,1}(p), v\right\rangle\left\langle f_{2,2}(p), v\right\rangle + \cdots$$

と置けば，実数が定まる．これは， Mが一点の時は，ベクトル空間上の関数をテーラー展開すること，にあたる．

こうして，

(1.3) $$N_M\Omega(M) \approx \Omega(M)$$

なる近似の元で，弦理論のある瞬間における系を表す（ヒルベルト）空間がベクトル束$Sym(E^*)$の切断であらわせたことになる．

注１：　　このような見方は（数学の中では）楕円コホモロジーで使われた．その中では，次のタウベスの論文が一番(1.3)を直接やっているという雰囲気がでている．[Taubes.C, ? #55].

一般に， M上のあるベクトル束Eがあったとき，この切断に対応する粒子のなす系の，ある瞬間における状態を表すヒルベルト空間は，$Sym(E^*)$の切断全体である．

ここではボソンだけを考えている．$Sym(E^*)$のk個のテンソル積に対応する部分空間が，粒子**k**個の状態に対応する．フェルミオンに当たる粒子は，反対称積$\Lambda(E^*)$を考えなければならない．

注２：　　以上の記述はかなり不正確である．第１に$Diff(S^1)$の作用を無視している．第２にある一瞬の状態，という言葉で，時間を特別扱いして相対論的に考えていない．この２つを真面目に考えると，話がもう少しすっきにしなくなるので，やめる．

注３：　　(1.3)の近似は弦理論では，低エネルギーだけを考える場合でも，不十分である．弦理論で非摂動論的な効果といった場合，(1.3)の近似では，抜け落ちてしまう部分を指すという言い方もできる．最近の弦理論の発展で大切なのは，非摂動論的な効果を調べる方法が見つかったという点であり，すなわち，(1.3)の近似では，抜け落ちてしまう部分を研究しているといっても良い．理論の多くの対称性は，

非摂動論的効果を考えに入れて初めて見いだされる．

$\Omega(M)$だけを考えるのは，Bosonic stringといわれるものに当たる．面白い理論を作るには，Bosonic stringでは不十分で，よりいろいろなものをつけ加えなければならない．その前に，一つだけ式を書いておく．すなわち，Bosonic stringのラグランジアンである．

$$\int_\Sigma g_\Sigma^{ab} g_{M,i,j} \frac{\partial\varphi^i}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^b} Vol_\Sigma . \tag{1.4}$$

勿論これは普通の調和写像にかかわるエネルギーである．

これは，$Diff(\Sigma)$の元でφとg_Σを同時に動かせば不変である．同様に$Diff(M)$の元でφとg_Mを同時に動かせば不変である．

さて，Bosonic stringに登場人物を増やし，Super stringにしていきたい．それを考えていくためもあって，疑問をつけ加える．

(疑問b)　超対称性は弦理論ではどのようなものか？
(疑問c)　超弦理論が５種類あるとはどういうことか？
(疑問d)　それら５種類の超弦理論から出発すると，どのような場の理論が得られるのか？

$Diff(S^1)$の対称性をすでに何回か問題にしている．弦理論を例えば相対論不変にするには，「ある瞬間」を使いすぎている上の言い方ではなく，始めから，$M\times\boldsymbol{R}$への写像を考えて，議論すべきである．同時に，定義域の方もS^1ではなくて，２次元多様体にするべきである．上の話に一番単純に合わせるには$S^1\times\boldsymbol{R}$にし，より一般にはリーマン面Σを考える．

注４：　すると，$M\times\boldsymbol{R}$上の計量はM方向と$\boldsymbol{R}$方向の符号が逆の計量すなわち，ローレンツ計量になる．これは直積だから問題ないが，実は，それと話を合わせるには，Σの方もローレンツ計量にしないといけない筈である？ところが，（例えば閉）リーマン面にはローレンツ計量など入らない．どうしてそんなことでいいのか，私には分からない．物理学者もおそらく数学者が分かったという意味ではこの点が分かっているわけではないのではないかと，筆者は感じているが，そうではないのかもしれない．どなたか分かっていたら教えて下さい．

すると，$Diff(S^1)$のかわりに，リーマン面の可微分同相の群$Diff(\Sigma)$を考えるのが良いであろう．超対称性とは，この群$Diff(S^1)$または$Diff(\Sigma)$を２倍ないしはそれ以上にすることを指す．

注５：　$N=?$超対称性，という言い方をするときは？が大きければ大きいほど$Diff(\Sigma)$を沢山倍にしていると思えばよい．（$2^?$倍と言っていいかもしれない．間違っていたらごめんなさい．）

注６：　　今述べた超対称性は，定義域（Sourse）であるリーマン面Σの方に働いていた群$Diff(\Sigma)$を増やすもので，これをWorld Sheet Super Symmetryという．

用語：　　$\Sigma \to M \times \boldsymbol{R}$ を考えて弦理論をする場合，ΣをWorld Sheet，$M \times \boldsymbol{R}$（Target）をSpace timeと呼ぶ．

注６の続き：　　それでは，Space time Super Symmetry とは何であろうか．
$Diff(\Sigma)$に当たるものは，$M \times \boldsymbol{R}$ の可微分同相群である．この群は，前に述べた言い方では，$N_M\Omega(M) = \oplus E_i$ の構造群に現れている．すなわち，このベクトル束の構造群は **M** の接ベクトル束の構造群$SO(n)$である．（$M \times \boldsymbol{R}$ で考えるときには$SO(n,1)$．）このときSpace time Super Symmetryがあるようにするには，（後で述べるように）$\Omega(M)$を少し大きくして，E_iたちに接ベクトル束とその誘導束だけではなく，スピン束も現れるようにして，さらにE_iたちのうちでベクトル表現（すなわち$SO(n)$の表現）に対応するものと，スピン表現（すなわち$Spin(n)$の表現で$SO(n)$の表現から来ないもの）に対応する表現が，一対一になっている，ことを指す．

$Diff(S^1)$を２倍にして，$\Omega(M)$も大きくして，$Diff(S^1)$を２倍にしたものが$\Omega(M)$を大きくしたものの上に，作用するようにする，というのが，超対称性を持った理論を作ることに当たる．この超対称性の入れ方によって，いろいろな超弦理論が出来る．それについて，少しだけ説明する．

まず幾つかの注意.

注７：　　$Diff(S^1)$を２倍にするといったが，２倍にしたものはリー群ではない．これは，スーパーリー群である．（スーパーリー群とはsuper space　Gであって，積に当たる写像$G \times G \to G$がsuper spaceの射の意味で存在し，普通のリー群の公理と同様な性質を満たすものを指す．）以上の点については今回の牛腸氏の予稿にあると思う．

スーパーリー群のリー環つまりスーパーリー環はgraded Lie algebraと同じことである．以後はリー環の方でだけ考える．

注８：　　$Diff(S^1)$（あるいはそれを２倍にしたもの）が本当は作用しているわけではない．実はその中心拡大が作用する．これは$\Omega(M)$（あるいはそれを増やしたもの）の上に直線束**L**を考えて，$\Omega(M)$上の関数，のかわりに**L**の切断を考えることと等価である．この点については，牛腸氏の解説（Surveys in geometry 「共形場の理論」収録）参照．以後この点には触れないことにする．

（スーパー）リー環の作用を考えているのであるから，$\Omega(M)$の各点での接空間で考えればよい．

注９：　　普通，物理の本では，ユークリッド空間の場合を調べることで，例えば前に述べた例えばベクトル束E_iを決定している．この理由を説明する．定値写像$\ell(t) \equiv p$での$\Omega(M)$の接空間は，$\Omega(\boldsymbol{R}^n)$と同じである．従ってE_iの$\ell(t) \equiv p$でのファイ

バーを調べるには，$\Omega(\boldsymbol{R}^n)$を調べればよい．

これらのファイバーがどう張り合うかは，$SO(n)$（あるいは$\Sigma \to M \times \boldsymbol{R}$ を考えているときは$SO(n,1)$）の作用を見れば分かる．（E_iの構造群はMの接束であった．pの回りを$\boldsymbol{R}^n$とみなしているとき，その等長変換群がMの接束の構造群に当たる．）すなわち，$C(\Omega(\boldsymbol{R}^{n,1}))$への$SO(n,1)$の作用から，$E_i$たちが分かることになる．

さて元に戻って，超対称にするために$\Omega(M)$になにを増やすかを考えよう．超対称性にはスピノルでが必要であるからあるから，（普通の計量で考えた）S^1のスピノルまたはローレンツ計量で考えた$S^1 \times \boldsymbol{R}$のスピノルを考える必要がある．$SO(1)$は自明で$SO(1,1)$は有限群あるから，とりあえずスピン表現は１次表現である．$S^1 \times \boldsymbol{R}$のスピン構造には２通りあって，一つから来るスピン表現は自明な１次元ベクトル束ξ_R，もう一つから来るスピン表現は自明でない１次元ベクトル束$\xi_{\mathbf{NS}}$である．

用語：　　$\xi_{NS} \otimes ?$の切断を考えることを，Neubo-Schwartz境界条件といい，$\xi_R \otimes ?$の切断を考えることを，Ramond境界条件という．

境界条件以外にもう一つ考えるのは，handleness（左右対称性とでも訳すのだろうか）である．これを考えるためにまず$\mathbf{M}$に複素構造（概複素構造でもよいと思う．$Spin_{\mathbf{C}}$構造でもいいような気がするが自信がない．（そういうことは物理の本には書いてなさそうなので．）すると，$\Omega(M)$の一点での接空間$T_\ell\Omega(M)$を大体２つに分けることが出来る．

すなわち，

$$T_\ell\Omega(M) = \Gamma(S^1, \ell^* TM)$$

であったが，$\ell^* TM$は自明な複素ベクトル束であるから，$\Gamma(S^1, \ell^* TM) = \Gamma(S^1, \boldsymbol{C}^{n/2})$．これを二つに分けるには，フーリエ展開して

$$x_0 + \sum_{\substack{k>0 \\ k \in \boldsymbol{Z}}} a_k z^k + \sum_{\substack{k<0 \\ k \in \boldsymbol{Z}}} b_k z^k$$

とする．$\sum_{k>0} a_k z^k$を+の部分，$\sum_{k<0} b_k z^k$を-の部分とする．

$$\sum_{k>0} a_k z^k \in \Gamma_{R,+}(S^1, \ell^* TM)$$

$$\sum_{k<0} a_k z^k \in \Gamma_{R,-}(S^1, \ell^* TM)$$

と以下では書く．

同様に$\Gamma(S^1,\ell^*TM\otimes\xi_{NS})=\Gamma(S^1,\boldsymbol{C}^{n/2}\otimes\xi_{NS})$の方も

$$\sum_{\substack{k>0\\ k\in\boldsymbol{Z}+\frac{1}{2}}}a_kz^k+\sum_{\substack{k<0\\ k\in\boldsymbol{Z}+\frac{1}{2}}}b_kz^k$$

となって+の部分と-の部分に分かれる．同様にして

$$\sum_{k>0}a_kz^k\in\Gamma_{NS,+}(S^1,\ell^*TM)$$
$$\sum_{k<0}a_kz^k\in\Gamma_{NS,-}(S^1,\ell^*TM)$$

$S^1\times\boldsymbol{R}$の言葉では，これは，正則な部分と反正則な部分を分けたことに当たる．

超対称性ではボソンに当たる部分$T_\ell\Omega(M)=\Gamma(S^1,\ell^*TM)$と同じだけの，フェルミオン（World sheetの）が必要である．（World sheetのフェルミオンとは，$\xi_R\otimes ?$または$\xi_{NS}\otimes ?$の切断のことだった．）

そこで，$\Omega(M)$上の無限次元ベクトル束であって$\Theta(M)\to\Omega(M)$，一点$\ell\in\Omega(M)$でのファイバーが

$$\Theta(M)_\ell=\Gamma_{NS,+}(S^1,\ell^*TM)\oplus\Gamma_{NS,-}(S^1,\ell^*TM)\oplus\Gamma_{R,+}(S^1,\ell^*TM)\oplus\Gamma_{R,-}(S^1,\ell^*TM)$$

を考えることにする．ただし，ここでは$\Theta(M)\to\Omega(M)$のファイバーはフェルミオンと考えているから，これは，Oddなベクトル束（牛腸氏の解説を参照）とみなさないといけない．すなわち，$\Theta(M)$上の関数を考えるとき，ファイバー方向はファイバーの対称積ではなく，反対称積を取る必要がある．

結局

$$C\left(\frac{II\Theta(M)}{Diff(S^1)_+}\right)$$

が求める空間である．（ただし注８参照．）ここで$II\Theta(M)$とは，$\Theta(M)$をOddなベクトル束にしたもので，$Diff(S^1)_+$は$Diff(S^1)$を超対称変換に増やしたSuper Lie環である．$Diff(S^1)_+$のリー環のうちで$Diff(S^1)$の方から来ないものの作用は$\Theta(M)\to\Omega(M)$のファイバー方向とbase方向をひっくしかえす変換である．これを書いてみよう．まず，$Diff(S^1)$のリー環はS^1上のベクトル場全体であるが，これは単にS^1上の関数全体$\Gamma(S^1,\boldsymbol{R})$ともみなせる．残りの部分は$\Gamma(S^1,\xi_{NS})\oplus\Gamma(S^1,\xi_R)$である．作用を決めるには$(\ell,\psi_{NS},\psi_R)\in II\Theta(M)$と$(b,c)\in\Gamma(S^1,\xi_{NS})\oplus\Gamma(S^1,\xi_R)$に対して，$T_{(\ell,\psi_{NS},\psi_R)}II\Theta(M)$の元を決めればよいが，それは

$$\left(\bar{b}\psi_{NS} + \bar{c}\psi_R\right) \oplus -b\frac{d\ell}{dt} \oplus -c\frac{d\ell}{dt}$$

と置けばよい．ここで右辺は

$$T_{(\ell,\psi_{NS},\psi_R)} II\Theta(M) = T_{\ell}\Omega M \oplus \oplus\Gamma_{NS}(S^1, \ell^* TM) \oplus \Gamma_R(S^1, \ell^* TM)$$

なる分解を用いて表している．(1.4)のラグランジアンをこの変換で不変なようなように拡張できる．すなわち

$$\int_\Sigma g_\Sigma^{ab}\left(g_{M,i,j}\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^b} + \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}}\psi_{NS}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^b}}\psi_{NS}\right) + \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}}\psi_R, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^b}}\psi_R\right)\right) Vol_\Sigma .$$

である．ただし，不変にするためには，g_Σ^{ab}を併せて変える必要がある．

このようにして得られるのは無限次元多様体$\Omega(M)$の符号作用素（NS側から来る）及びスピノル（R側から来る）である．

注１０：　無限次元多様体の上の微分形式あるいはスピノルについて一つ注意しておく必要がある．すなわち，それは，有限時の微分形式またはスピノルではなく，$\infty/2$次のものであるということである．（スピノルが$\infty/2$次とは以下の意味である．スピノルはある内積空間**V**から出発しその有限個の積に，内積から決まる関係式をつけて得られる，というのが有限次元の場合である．**V**が無限次元である場合は，あたかも，$\infty/2$個のものがかかっているかの如くに考えていけば，ベクトル空間が出来る（積は入らない）．この上には$Spin(V)$が作用すると考えられる．（ただし無限次元の**V**にたいする$Spin(V)$というのは余りはっきりしない．）

以上のやり方では，元のループ空間を大きくするのに，World sheet Σ側のスピノルを用いた．そのかわりに，space time $M\times\boldsymbol{R}$側のスピノルを用いることもできる．これをspace time supper symmetryと呼ぶ．同時にスーパーリー群の方も，$\mathbf{M}\times\boldsymbol{R}$のローレンツ変換群を水増しした超対称変換を用いる．

すなわち，$\Theta(\mathbf{M}) \to \Omega(\mathbf{M})$の方は代わりに次のものを用いる．

$$\aleph(M)_\ell = \Gamma\left(S^1, \ell^*\left(\Delta(M\times\boldsymbol{R})\right)\right)$$

ここで，$\Delta(M\times\boldsymbol{R})$は$M\times\boldsymbol{R}$のスピン束である．スピン束には次元によっていろいろ種類がでてくる．超弦理論で問題になる$M\times\boldsymbol{R}$が１０次元（でローレンツ計量を持っている場合）には，スピン束は正のスピン束$\Delta_+(M\times\boldsymbol{R})$と，負のスピン束$\Delta_-(M\times\boldsymbol{R})$の両方がある．そこで，次のふた通りの取り方がある，

$$\aleph_A(M)_\ell = \Gamma_+\left(S^1, \ell^*\left(\Delta_+(M\times\boldsymbol{R})\right)\right)\oplus\Gamma_-\left(S^1, \ell^*\left(\Delta_-(M\times\boldsymbol{R})\right)\right), \tag{1.6}$$

$$\aleph_B(M)_\ell = \Gamma_+\left(S^1, \ell^*\left(\Delta_+(M\times\boldsymbol{R})\right)\right)\oplus\Gamma_-\left(S^1, \ell^*\left(\Delta_+(M\times\boldsymbol{R})\right)\right). \tag{1.7}$$

ここで例えば$\Gamma_+\left(S^1, \ell^*\left(\Delta_+(M\times\boldsymbol{R})\right)\right)$は引き戻し束$\Delta_+(\mathbf{M}\times\boldsymbol{R})$の切断であって，

$$x_0 + \sum_{\substack{k>0\\ k\in\boldsymbol{Z}}} a_k z^k + \sum_{\substack{k<0\\ k\in\boldsymbol{Z}}} b_k z^k$$

とフーリエ展開したとき，$k>0$になる方に対応するものである．さてこの無限次元ベクトル束から$II\aleph_A(M)$，$II\aleph_B(M)$を作り，さらに，$\mathit{Diff}(M)$を超対称性によって大きくした群$\mathit{Diff}(M)_+$で割って

$$C\left(\frac{II\aleph_A(M)}{\mathit{Diff}(M)_+}\right)\text{および}C\left(\frac{II\aleph_B(M)}{\mathit{Diff}(M)_+}\right)$$

を作る．

注１１：　　これは割過ぎである．なぜなら，$\mathit{Diff}(M)$で割るというのは必要ないから．多分$\mathit{Diff}(M)_+$のリー環の元のうちで，$\mathit{Diff}(M)$のリー環の補空間になっている部分でだけ割るのだと思う．どう書いていいか分からないから，上のように書いておいた．

すると，これが，$C\left(\dfrac{II\Theta(M)}{\mathit{Diff}(S^1)_+}\right)$と一致することが分かる．

注１２：　　これは２つの点で嘘である．一つは$C\left(\dfrac{II\Theta(M)}{\mathit{Diff}(S^1)_+}\right)$はまだ２倍多すぎる．つまり，ここから生まれるフェルミオンはボソンの２倍ある．これを，GSO projectionという手続きで，半分にしないといけない．[Green.M, 1987 #54] 4.3.3接参照．

　また，$C\left(\dfrac{II\aleph_A(M)}{\mathit{Diff}(M)_+}\right)$のほうも，ふつうの超対称変換だけでなく，カッパ対称性なるもので割る必要がある．カッパ対称性はbraneの量子化などでも大切な役割を果たしているのだが，筆者はよく分からないから書かない．[1]　5.1節参照．（そこではκという記号が使ってあるが，カッパ対称性とは書いていない．κという記号で表されているのが，カッパ対称性のことであろう．）

　(1.7)と(1.8)で突然A,Bという区別を述べた．この二つに対応して２種類の超弦理論がある．それぞれtype IIAとtype IIBという．

　type　IIAとtype　IIBの違いは，World　sheetつまりリーマン面の方で見て，holomorhpicなものとanti　holomorphic　なものが対象化非対称かが一つ，あるいはspace timeの方から見て，正のスピノルと負のスピノルが対称か非対称かがもう一つ

である．

注１３：　World sheetの方から構成したとき，IIAとIIBとで何処が変わってくるかというのは，自然な疑問であるが，よく分からなかった．

さて以上で疑問(a)(b)についてはある程度の説明をした．(c)についてはtype　IIA, IIBという２種類の場合についてだけ少し述べた．この続きは次の節にする．

1.　Green.M, Schwartz.J, and Witten.E, *SuperString Theory*. 1987.

第２章：超弦理論超速成コース

その２

第１章では，Type IIの超弦理論について述べた．この章では，まず，Type I 及びヘテロ型の超弦理論について述べる．

Type I String

TypeI超弦理論は開いた元の理論である．つまり，ループ空間 $\Omega(\mathbf{M})$ を考える代わりに，

$$\Omega_{open}(M) = \{\ \ell : [0,1] \to M\ \}$$

を考える．これは，$\Omega(\mathbf{M})$ の元で，$\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z}$ なる $\{\pm 1\}$ の S^1 への作用で不変なものといっても良い．さらに，時間方向はひっくり返さないから，Handlenessに関しては，正則を反正則にひっくり返している．つまり，$\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z}$ の作用で

$$\alpha_k \mapsto \tilde{\alpha}_k,\quad d_k \mapsto \tilde{d}_k,\quad b_k \mapsto \tilde{b}_k$$

と変換される．Space Timeの言葉で考えると，左向きと右向きに対して対称に超対称性を入れていることになり，Type IIB の方にに対応する．従って，Type I の超弦理論の質量０粒子を見るには，Type IIBの場合を考え，$\{\pm 1\}$ で不変な部分を取ればよい．これから，表１のType I の部分が説明される．つまり

$$(Vect \otimes Vect)^{\pm 1} = 0\text{型式} \oplus \text{対称２次型式},$$

$$(\Delta_+ \otimes \Delta_+)^{\pm 1} = 2\text{型式},$$

である．（ここで $(Vect \otimes Vect)^{\pm 1}$ などは，$\{\pm 1\}$ の作用で不変な部分を指す．）次に，なぜゲージ場が現れるかを説明しよう．

そのためにChan-Paton因子というのを少しだけ説明する．（詳しくは[18]6.1節）．$M \times \boldsymbol{R}$ 上に微分１型式 A があるとする．（これはある可換ゲージ場つまり $U(1)$ 束の接続とみなす．）時間まで入れて，$\varphi : [0,1] \times \boldsymbol{R} \to M \times \boldsymbol{R}$ を考えたとき，φ に数を対応させることが A を使ってどうやったら出来るか考えよう．

いいかえると，ラグランジアン（前の章の(1.7)式）に項をつけ加えることを考

えよう．この項は$Diff([0,1]\times\boldsymbol{R})$不変でなければならない．すると

（2.1）
$$\int_{\boldsymbol{R}}\varphi(1,t)^{*}A$$
$$\int_{\boldsymbol{R}}\varphi(0,t)^{*}A$$

を思いつく．（ここで，$\varphi(1,t)$は$t\mapsto\varphi(1,t)$なる写像である．）このような定義が出来るのは，境界が可微分同相で不変な特別な点でからである．$\varphi:S^1\times\boldsymbol{R}\to M$であったら，そういう点はないから，平均を取って

（2.2）
$$\int_{S^1}ds\int_{\boldsymbol{R}}\varphi(s,t)^{*}A$$

とするしかあるまい．（ただし，$Diff(S^1\times\boldsymbol{R})$不変にするには，$ds$などと書かずに，計量をとって，計量も$Diff(S^1\times\boldsymbol{R})$で動かす必要があろう．）

ここまででは，ゲージ場は$\mathbf{U}(1)$ゲージ場だけであった．$U(1)^k$にするのは簡単であろう．（それだけ$\mathbf{A}$を並べればよい．）非可換ゲージ場にするには，もう少し述べる必要がある．それは，D Braneの説明の時（７章）にする．

以上説明したのは，開いた元であると，境界という特別の点を利用して，(2.1)式のようにして，ゲージ場を理論に入れることが出来る，ということであった．

つぎに，なぜ，ゲージ場が必要なのかを説明する．それは，有名な２６次元とか１０次元とかいう話にかかわる．２６次元がBosonic Stringが矛盾なく定義できる次元で１０次元がSuper Stringが矛盾なく定義出来る次元だ，というのは，耳にしたことがある人が多いであろう．その理由は，アノーマリ，つまり，量子化したためにある作用で不変であったものが不変でなくなるということである．今の場合は，調和写像のラグランジアンが共形変換で不変であったのが，そうでなくなる可能性があり，これが起こらないのが丁度２６または１０次元である．このメカニズムを書いていると長くなるし，筆者は余りそういうのとがよく分かっているわけではないから書かない．基本的にはビラソロ代数の表現論的計算である．

さて，１０次元にしておくと従ってTypeIIの超弦理論はうまくできる．しかし，Type Ｉ はそのままでは駄目である．アノーマリのキャンセルは大体まず幾つかのアノーマリがでてきて，それをそれぞれの粒子ごとのアノーマリとキャンセルさせる，というメカニズムになっている．丁度キャンセルするのに必要な粒子の数から，１０とか２６とかがでる．さて，Type Ｉ の場合には，全体をType IIの半分にしてしまったから，Type II の時キャンセルしていたアノーマリが，Type Iではキャンセルさせるための粒子が足らない．それで，足らない分をゲージ粒子を持ってきて補う．そのために，何個ゲージ粒子がいるかが決まる．つまり，アノーマリをキャンセルするのには，ランクが１６のリー群を持ってこなければならない．他の条件を合わせると，これから，ゲージ群が$SO(32)$でなければならないことが分かるのである．

もう少し説明すると，アノーマリはファインマン測度が変換不変でないことから来る．（そういう話は古田さんの解説にでてくると思われる．）粒子がたとえば$\mathbf{s}_i$であると，ファインマン測度は$\prod\mathcal{D}s_i$である．そこで，ある変換で，これがc倍さ

れると，全体では**c**の粒子の数乗される．従って，粒子の個数が大体アノーマリが何乗分でるかに対応する．

TypeIStringについては７章でもう少し述べる．

つぎにHeterotic Stringに話をうつそう．Heterotic Stringは閉じた弦の理論である．つまり，$S^1 \to M$ なる写像を弦とみなしている．しかし，M上にはゲージ場を考える．するとこのゲージ場が弦のラグランジアンにつけ加える項は(2.2)の形である．それでは，なぜ，ヘテロというのだろうか．

上で述べたように，超弦理論は丁度１０次元の場合にアノーマリがキャンセルする．従って，さらにゲージ場があると，キャンセルしすぎでやはりアノーマリがでる．アノーマリなしの１０次元の超弦理論にゲージ場を入れるからくりは，以下の通りである．前の章で述べたように，超弦理論を作るとき，正則な部分と反正則な部分に話を分けた．そこで，フェルミオンを一方だけ（例えば反正則な方）にだけ入れて，逆側には入れない．すると，フェルミオンの数は半分になる．ボソンだけだと２６次元でフェルミオンが入ると１０次元でアノーマリがキャンセルするのだから，フェルミオンは$26-10=16$次元分のアノーマリを消していたことになる．これを一方にしてしまったから，８次元分のアノーマリが残る．これを１６個のゲージ場を入れてキャンセルするのである．１６は$E_8 \times E_8$または$SO(32)$のランクである．なぜこのふたつの群なのかは，別の構成法で見た方が分かる．あとで（３章および５章）説明する．

表１のHeterotic Stringの部分を説明しよう．フェルミオンが入っている側では，TypeIIと同じように，$SO(8)$のベクトル表現が質量０の粒子への寄与として現れる．逆側では，フェルミオンはないが，代わりにボソンの部分に，やはりベクトル表現がある．よって，

$$Vect \otimes Vect = \text{スカラー} \oplus \text{対称２次型式} \oplus \text{２型式}$$

が（NS側に）存在する．これと，１６個の（$E_8 \times E_8$または$SO(32)$の極大トーラスに対応する）ゲージ場が存在する．以上がHeterotic Stringの質量０のボソンである．

Heterotic Stringの理論の構成法で左右のどちらかでは空間が２６次元で，それをトーラスでコンパクト化する，というのがある．この説明はコンパクト化とＴ双対を説明してから５章でする．

以上前の章に比べても随分駆け足になってしまったが，HeteroticおよびTypeIの超弦理論の場合の表１の説明としたい．この章のこりで，超弦理論で次章以後の説明で必要な事項をもう少し説明する．

有効場の理論のラグランジアン

有効場の理論という考え方は，すでに少し説明した．特に，それぞれの弦理論に対してどのような場が現れるかを説明してきた．

いままでにしてきたことは登場人物の説明だけである．本来は，場の理論にはラグランジアン（汎関数）が必要である．弦理論から場の理論がでてくるといったとき，でてきた場の理論のラグランジアンは元の弦理論とどのような関係にあるのかを述べてみたい．

例えば１章では$C(II\Theta(M))$が超弦理論のヒルベルト空間と見なせる，と述べた．この関数空間の元はある（無限個の）M上のベクトル束$E_i \to M$の切断$s_i \in \Gamma(M;E_i)$の組と見なせた．それでは，$(s_i) \in C(II\Theta(M))$の時間発展とは，弦理論ではどのように理解されるのであろうか？

ファインマン経路積分を用いると，それは次のようになる．$II\Theta(M)$の元は（例えばNS側だけ考えると）$\ell : S^1 \to M$なる写像と$\psi_{NS} \in \Gamma(S^1;\ell^* TM \otimes \xi_{NS})$組であった．これを２つ持ってきて，$(\ell,\psi_{NS})$，$(\ell',\psi'_{NS})$とする．

Σなるリーマン面で$\partial\Sigma = S^1 \cup -S^1$なるものと，その上のスピン構造$\xi_\Sigma$で$\xi_{S^1} = \xi_{NS}$，$\xi_{-S^1} = \xi_{NS}$なるものを考えよう．さらに，$\varphi : \Sigma \to M$なる写像で$\varphi|_{S^1} = \ell$，$\varphi|_{-S^1} = \ell'$，なるものと，$\Psi \in \Gamma(\Sigma;\varphi^* TM \otimes \xi)$で，$\Psi|_{S^1} = \psi_{NS}$，$\Psi|_{-S^1} = \psi'_{NS}$なるものを考える．$(\ell,\psi_{NS})$，$(\ell',\psi'_{NS})$，$\Sigma$，$\xi_\Sigma$をとめて，それに対する$\varphi,\Psi$たち全体のことを

$$Map(\Sigma,\xi;(\ell,\psi_{NS});(\ell',\psi'_{NS}))$$

とかく．この上には（1.8）式でラグランジアン$S : Map(\Sigma,\xi;(\ell,\psi_{NS});(\ell',\psi'_{NS})) \to \boldsymbol{R}$が決まっていた．さて，$s = (s_i) \in C(II\Theta(M))^{Diff(S^1)_+}$は$(\ell,\psi_{NS})$を変数とする関数とみなすことができた．（本当はR側もあるが同様．）そこで，Sを使って，この元の時間発展を決める作用素$\mathcal{H}_t : C(II\Theta(M)) \to C(II\Theta(M))$を

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_t(s)(\ell',\psi'_{NS}) \\ &= \sum_{g,\xi} \kappa^g \int_{(\varphi,\Psi)\in Map(\Sigma,\xi;(\ell,\psi_{NS});(\ell',\psi'_{NS}))} \exp\left(\sqrt{-1}tS((\varphi,\Psi))\right) s(\ell',\psi'_{NS})\, \mathcal{D}(\varphi,\Psi) \end{aligned} \tag{2.1}$$

で定義する．（定数倍等はまちがっている．ただ感じを説明しているだけなので．）gはリーマン面Σのジーナスでκは弦理論の<u>結合定数</u>（coupling constant）である．

また，ここで$\mathcal{D}(\varphi,\Psi)$はファインマン測度であるが，$\Psi$などはOddでそれに関してはOdd な積分（<u>ベレジン積分</u>Berezin integral）である．いずれにしても数学的には全くWell definedでない．

同様に相互作用に対応するものも定義できる．（このときは境界が３つ以上の成分を持つリーマン面を考える．）

用語：　　（2.1）式のジーナスgのリーマン面Σの部分の項のことを，<u>gループ</u>の寄与という．

一方で，s_iたちをベクトル束E_iの切断と見る．もし，これらを変数とする汎関数L（ラグランジアン）が与えられていると，それから，オイラーラグランジュ方

程式を解いて，時間発展の作用素$\mathcal{H}'_t : C(II\Theta(M)) \to C(II\Theta(M))$が定まるであろう．このとき，

定義１　　Lが「弦理論に対応する場の理論（String Field Theory）のラグランジアンである」とは，$\mathcal{H}'_t : C(II\Theta(M)) \to C(II\Theta(M))$が$\mathcal{H}_t : C(II\Theta(M)) \to C(II\Theta(M))$に一致することを指す．

注１　この用語は物理の普通のものと一致するかどうか分からない．次の定義２の方は一致すると思うが．

さて，上で，一応定義と書いたが，これだけでは余り意味がない．実際（2.1）はとんでもない代物である．唯でさえファインマン経路積分があるのに，さらにそれをジーナス全体で足しあわせるということをしている．

さらに，**L**は無限個の成分を持つ場の理論のラグランジアン，つまり無限個のベクトル束の切断を変数とする汎関数である．これではあんまりなので，まず**L**を有限個の変数に減らそう．

そのために，Low energy effective field theory（低エネルギー有効場の理論）という考え方をする．それにはまずLの変数の内で質量０のものだけを考える．そこで質量０の粒子に当たる$\mathbf{s}_i$たちだけの時間発展を調べよう．しかし，質量０のものの時間発展を考える場合でも，中間段階としては，正の質量のものがでてくる可能性がある．しかし，そのような正の質量のものの効果を，全て積分してしまい，質量０のものの汎関数（ラグランジアン）による理論に書きかえることができるであろう．（このような考え方は，古田氏の講演で説明されるはず）．

定義２　　そのようにして，質量０の粒子に対応する切断たちの汎関数として定まったラグランジアンのことを，Low energy effective field theory（低エネルギー有効場の理論）のラグランジアンという．

定義と書いておいて，まったく定義の体を成していないが，ご容赦いただきたい．

さて，はたして，うえの定義が役に立つのであろうか．つまり，あたえられた弦理論の低エネルギー有効場の理論のラグランジアンを決定する手段があるであろうか．

定義をまともに計算するのは絶望的である．（2.1）を「計算」して，さらに，でてきたものの質量正の部分の寄与を積分する（足しあげる），というのをそのまま実行するのは不可能である．多分（2.1）の中で計算されているのはおそらくジーナス０と１ぐらいであろう．

では，低エネルギー有効場の理論のラグランジアンというのは，分かっていないかというと，不思議にも，物理の本を見ると式が書いてある．どうやって求めたのであろうか．[GSW]の１３章（２巻）に書いてあることから推測[1]すると，求めかたは，次の通りである．

[1]推測と書いたのは筆者の理解がまちがっているかもしれないからである．

まず，求める低エネルギー有効場の理論のラグランジアンはなにが変数かは分かっている．つまり質量０の場がどのくらいあって，それぞれがどんな束の切断かも分っている．従って，ラグランジアンがそれらの汎関数とすると，その形はずいぶん制限される．作り方から変換に対する不変性がいろいろある．さらに大事なのは超対称性である．すなわち，出てきた場はボソンに当たるもの（表１ではそっちだけ書いた）とフェルミオンにあたるものがある．この二つはその数が等しいだけでなく，時間発展も込めて対称である．すなわち，低エネルギー有効場の理論のラグランジアンが超対称性を持っている．すると，１０次元場の理論のラグランジアンで超対称性を持つものを探すことになる．それは余り多くないから，実はこれだけから形が決まってしまう．

こうすれば，どう見てもできそうにない（2.1）を計算しなくても，低エネルギー有効場の理論のラグランジアンがもとまるわけである．

注２：　　しかし，勿論１ループや０ループの計算が無駄になるわけではない．例えば理論が本当に整合的にできていることのチェック，すなわちアノーマリが無いことの計算（上の議論はそれを前提にしている）などは，１ループや０ループの計算を元にして成される．

より具体的には，TypeIIA超弦理論の低エネルギー有効場の理論はTypeIIA超重力理論 (Super Gravity)，TypeIIB超弦理論の低エネルギー有効場の理論はTypeIIB超重力理論になる．

また，HeteroやTyepI超弦理論の場合には，ゲージ場も含まれているので，超重力理論と超対称ヤンミルズ理論（Super Yang Mills Theory）が組合わさったラグランジアンが出てくる．

ラグランジアンを書かなかったが，例えばフェルミオンまで込めたラグランジアンは項が多すぎてなかなか書けない．ボソンだけ書かれているのが普通であるが，それでも結構複雑である．[GSW]の１３章などをながめてみていただきたい．

Dilaton の期待値と結合定数

Dilatonというのは表１に書いてあるスカラー場である．　次の事実は超弦理論ではよく出てきて重要である．

命題２　　弦理論ではDilatonの期待値が結合定数（式(2.1)のκ ）とみなして良い．

このことの非常に簡単な説明をする．（詳しくは，[18]3.4.6節参照）．まず次のことを認める．

命題３　　場の理論で質量０のスカラー場があるとその期待値は真空のパラメーターと見なせる．

これをどう説明していいかわからないが，大体ある理論があると，その真空というのが決まり，考えている状態はその真空の近くをふらふらしていると見る．（真

空のところから摂動する．）そこで，質量０のスカラー場の期待値が決まると，そのスカラー場はその値のところからふらふら動いていると考える．どこのところからふらつくかの基点は，理論のパラメータのようにみなす[2]．下手な説明だがこれで勘弁してもらうことにする．

さて，Dilatonの期待値がずれると，それに伴って$S : Map(\Sigma,\xi;(\ell,\psi_{NS});(\ell',\psi'_{NS})) \to \boldsymbol{R}$ がずれる．

このずれはガウス・ボンネの定理によりリーマン面のオイラー数あるいはジーナスに比例する．すなわち，ずれを作る項は

$$\int_\Sigma e^\phi R$$

のような項である．（ここで，ϕがDilatonの期待値で，RはΣの計量の曲率（ガウス曲率）．従って，ガウス・ボンネの定理により，この項はϕを定数ずらすと，cgだけずれる．（2.1）ではLはeの肩にっていたから，ϕを定数ずらすと，（2.1）の各項の（ファインマン経路）積分はc'^g倍ずれることになる．一方で結合定数κは各項にκ^gとして現れていた．この形は同じであるから，ϕの定義を定数だけ変えてやれば，（2.1）式でいつでも$\kappa = 1$とおける．

言い換えるとDilatonの期待値がκと見なせる．

命題３がなぜ大切なのかを説明する．弦理論の難しさの一つは，全てのリーマン面から来る寄与を足しあげなければならないことにある．この足し上げを実行するのは，一般には不可能である．では，ジーナスが正のリーマン面からの寄与が０になることを証明できる場合があるであろうか．上のことを使うと，それは，計算したい量が，Dilatonの期待値と無関係である場合であるということが分かる．

コンパクト化

最後にコンパクト化（compactification）の説明をする．

注３：　困ったことに，ここで説明するコンパクト化というのは，数学で同じ名前で呼ばれているものと全く違う概念である．弦理論でも，モジュライ空間のコンパクト化（こっちは普通の数学の意味）などは使うので，何とかして欲しいのだが，すっかり定着した用語なので多分無理であろう．

いままで，実質的には空間がユークリッド空間の場合しか，考えていなかった．弦理論では$\boldsymbol{R}^{1,9-n} \times M^n$を考える．ここで，$\boldsymbol{R}^{1,9-n}$は$(1,n)$型の計量（ローレンツ計量）を持つユークリッド空間で，Mはコンパクトなn次元多様体である．このときまず，

命題４　$\boldsymbol{R}^{1,9-n} \times M^n$上の場の理論は$\boldsymbol{R}^{1,9-n}$上の（無限個の成分をもつ）場の理論

[2]ここで，理論のモジュライと真空のモジュライをごっちゃに使っているが，超弦理論では区別していないように思う．

と見なせる（で近似できる）．

　ということを説明する．簡単のために，$\boldsymbol{R}^{1,9-n}\times M^n$ 上の m 型式 A １個からなる場の理論を考えて，ラグランジアンは一番簡単な

$$S(A)=\int_{\boldsymbol{R}^{1,9-n}\times M^n}\left(|dA|^2+|\delta A|^2\right)\Omega_{\boldsymbol{R}^{1,9-n}\times M^n}$$

としてみよう．（$\Omega_{\boldsymbol{R}^{1,k}\times \mathbf{M}^{9-k}}$ は体積要素．$\mathbf{M}$ には計量が入っているとする．）すると，A を M 上のラプラス作用素についてフーリエ展開して

$$A=\sum_{i,k}B_{m-i,k}\wedge e_{i,k}$$

ここで，$e_{i,k}$，$k=1,2,\cdots$ は M 上の $\mathbf{i}$ 型式の作る空間の L^2 基でラプラシアンの固有関数からなるもの，$B_{m-i,k}$ は $\boldsymbol{R}^{1,9-n}$ の $m-i$ 型式である．すると，

$$S(A)=\sum_{i,k}\int_{\boldsymbol{R}^{1,9-n}}\left(|dB_{m-i,k}|^2+|\delta B_{m-i,k}|^2+\lambda_{i,k}^2|B_{m-i,k}|^2\right)\Omega_{\boldsymbol{R}^{1,9-n}}$$

である．ここで，$\lambda_{i,k}^2$ は $e_{i,k}$ の固有値．この式は A という１個の（重さ０の）場を $\boldsymbol{R}^{1,9-n}\times M^n$ で考えることと，$B_{m-i,k}$ なる重さ $\lambda_{i,k}$ の無限個の場を $\boldsymbol{R}^{1,9-n}$ で考えることが同じであることを示している．

　以上の考察から，さらに次のことが分かる．

命題４＋　　$\boldsymbol{R}^{1,9-n}\times M^n$ 上の m 型式の質量０の場に対応する，$\boldsymbol{R}^{1,9-n}$ 上の質量０の場は $\mathrm{rank}H^k(M)$ この $m-k$ 型式の場達からなる（$\mathbf{k}$ もうごく）．

　いままでは単に $\boldsymbol{R}^{1,9-n}\times M^n$ を考えてきたが，ここで，M は大変小さいとしよう．すると，固有値 $\lambda_{i,k}^2$ は０でない限り大変大きい数になる．従って，M 方向で調和でないものの寄与は，エネルギーが小さい近似を考える限り，無視して良いであろう．

　以上のような考え方が，コンパクト化と呼ばれるものの一部である．ただし，ここで注意を要するのは，以上の説明は，あくまでも有効場の理論の話である．弦理論で考えるときは，M がいくら小さくても，有効場の理論の場の M 方向に調和なもの以外の寄与が現れる．（それは，$\mathbf{N}_{\mathbf{M}}\Omega(\mathbf{M})\approx\Omega(\mathbf{M})$ なる近似では見えないと言う意味で，非摂動論的効果である．）　そのような現象は，次章のＴ双対性のところで現れる．

コンパクト化に関して大切なことに，超対称性との関係がある．すなわち，$\boldsymbol{R}^{1,9-n} \times M^n$で超対称性を持つ理論があったとき，それから得られる$\boldsymbol{R}^{1,9-n}$の理論がいつ超対称になるか，ということである．さらに，超対称性といったときのNの数がどう変わるかということも問題になる．（このことについては，数学者には，[1]の4.1節の記述が一番読みやすいと思う．[1]はStringDualityについての文献で一番数学っぽい言葉で書かれたものであろう．String　Dualityに興味を持った数学者が最初に読む文献としては，適当かもしれない．）

荒い原理は次の通りである．

命題５　　Mのホロノミー群が小さいほど超対称性は保たれやすい．

また，Mのホロノミー群が小さいほど，Mでコンパクト化して得られる，$\boldsymbol{R}^{1,9-n}$の理論の超対称性の**N**は大きくなる．

Mのホロノミー群が大きいほど，Mでコンパクト化して得られる，$\boldsymbol{R}^{1,9-n}$の理論の超対称性のNは小さくなる．一般のホロノミー群を持つMでは，Mでコンパクト化して得られる，$\boldsymbol{R}^{1,9-n}$の理論の超対称性は無くなる．

この命題が，超対称性で特殊なホロノミーを持つ多様体が重要である理由である．ホロノミーが一番大きいのはトーラスである．超対称性の話ででてくるのは，次にハイパーケーラー多様体，カラビ・ヤウ多様体と下がって，ジョイス（Joyce）の作った例外リー群などをホロノミーに持つ閉多様体（ジョイス多様体と呼ばれる）なども現れる．

命題５では１０次元から始めるかのごとく書いたが，そうでなくても，$n+l$次元（$\boldsymbol{R}^{1,l-1} \times M^n$上の）の理論を**l**次元（$\boldsymbol{R}^{1,l-1}$）にするときも同じである．

具体的にNがどう変わるかの一般的な規則は，考えていたら混乱して分からなくなってしまったので，例を書いておく．

６次元の$N=1$の理論を$M=T^2$でコンパクト化し４次元にすると$N=2$になる．

６次元の$N=1$の理論を$M=T^3$でコンパクト化し３次元にすると$N=4$になる．

１０次元の**N**$=1$の理論を$M=K3$曲面でコンパクト化し６次元にすると，$N=1$のまま．もとが$N=2$なら$M=K3$曲面でコンパクト化しても$N=2$．

１０次元の$N=1$の理論を$M=K3\times T^2$曲面でコンパクト化し４次元にすると，$N=2$になる．

１０次元の$N=1$の理論をカラビ・ヤウ多様体でコンパクト化し４次元にすると，$N=1$のまま．もとが$N=2$ならカラビ・ヤウ多様体でコンパクト化しても**N**$=2$．

命題５の説明をするために，まず$N=?$超対称性とはなにか一寸思い出そう．まず，TypeII超弦理論はどちらも$N=2$超対称性を持ち，TypeIとHeterotic　　Stringは$N=1$超対称性を持つ．これを説明しよう．ここで超対称性といったときはSpace Timeの超対称性を指していることに注意しておく．（ここでは，World Sheetの立場では，ずっと$N=1$の理論を考えている．World Sheetの意味で$N=2$の弦理論というのもある．[35]などのテーマはそれである．後で述べるＦ理論はWorld　Sheetの意味で$N=2$なのだとおもう．）

すると，TypeIIAの理論では

$$\hat{\Theta}_A(M)_\ell = \Gamma_+\left(S^1, \ell^*\left(\Delta_+(M\times\boldsymbol{R})\right)\right) \oplus \Gamma_-\left(S^1, \ell^*\left(\Delta_-(M\times\boldsymbol{R})\right)\right)$$

を考えていた．従って，ボソン１に対して，$\Delta_+(M\times\boldsymbol{R})$と$\Delta_-(M\times\boldsymbol{R})$の両方がある．これが$N=2$の理由である．

これが，Heterotic Stringの場合だと，一方例えば$\Delta_+(M\times\boldsymbol{R})$しかなかった．よって$N=1$である．またTypeIだと$\Gamma_+\left(S^1, \ell^*\left(\Delta_+(M\times\boldsymbol{R})\right)\right) \oplus \Gamma_-\left(S^1, \ell^*\left(\Delta_+(M\times\boldsymbol{R})\right)\right)$の半分（つまり左右で対称なもの）だけ取っていた．従ってやはり$N=1$である．

超弦理論の超対称性は，有効場の理論の超対称性に反映し，N超対称な弦理論の有効場の理論は$\mathbf{N}$超対称である．

さて，ここで命題５の簡単な説明しよう．

$\boldsymbol{R}^{1,9}$でN超対称な場の理論があったとしよう．これは，ボソンからスピノルへ$\mathbf{N}$種類の（定数係数の）超対称変換があることを意味する．$\boldsymbol{R}^{1,9-n}\times M^n$で考えると，この超対称変換から，とりあえずは各点上では，N種類の超対称変換がつくれる．

これから，コンパクト化によってできる，$\boldsymbol{R}^{1,9-n}$上の超対称変換を作るには，ファイバーMについて大域的な超対称変換を作らなければならない．これは，いわば，「M上定数である」超対称変換を探すことになる．ボソンからスピノルへ写す作用素が「M上定数である」とは，それが，ホロノミーと可換であることを意味する．従って，ホロノミー群の中心化群が大きければ大きいほど，$\boldsymbol{R}^{1,9-n}$に多くの超対称変換があることになる．

大変荒い説明で申し訳ないが，命題５の説明は，これだけにする．

第３章：T 双対とS 双対

T双対

まづ，Ｔ双対の説明から始める．Ｔ双対というのはTarget Space Dualityの略である．Ｔ双対について一番詳しい文献は，[16]であると思われる．また，[39]はD Braneの解説であるが，その始めのところのＴ双対の解説も参考になる．[36]にも簡潔で優れた説明がある．

すでに何回かほのめかしたが，弦理論の対称性の興味深いものの多くは，有効場の理論による近似，あるいは，$\mathbf{N_M}\,\Omega(\mathbf{M}) \approx \Omega(\mathbf{M})$という近似をしてしまっては，見てこない．Ｔ双対とくにトーラスでコンパクト化した場合のＴ双対はその最も見やすい例である．

$\boldsymbol{R}^{1,9-k} \times T^k$をTarget Spaceとする弦理論を考えよう．（ここではBosonic Stringを考える．）これは，$\boldsymbol{R}^{1,9}$をTarget Spaceとする弦理論とどこが違っているだろうか．

ループ空間$\Omega(\boldsymbol{R}^{1,9-k} \times T^k)$と$\Omega(\boldsymbol{R}^{1,9})$を比べてみよう．$\Omega(\boldsymbol{R}^{1,9}) = \boldsymbol{R}^{1,9} \times \Omega_0(\boldsymbol{R}^{1,9})$とかく．（$\boldsymbol{R}^{1,9}$は重心の座標．）すると，

$$\Omega(\boldsymbol{R}^{1,9-k} \times T^k) = \boldsymbol{R}^{1,9-k} \times T^k \times \Omega_0(\boldsymbol{R}^{1,9}) \times \pi_1(T^k)$$

である．この$\Omega(\boldsymbol{R}^{1,9}) = \boldsymbol{R}^{1,9} \times \Omega_0(\boldsymbol{R}^{1,9})$との差は２つ，つまり，$\boldsymbol{R}^{1,9}$が$\boldsymbol{R}^{1,9-k} \times T^k$になることと，それから，$\pi_1(T^k)$に当たる無限個の連結成分がでることである．

前者は有効場の理論による近似で理解できる．すなわち（一番質量が低い場について）$\boldsymbol{R}^{1,9}$上の（スカラー）場が$\boldsymbol{R}^{1,9-k} \times T^k$上の（スカラー）場に変わったわけである．後者は，$T^k$上の調和関数に当たる離散的なスペクトルを持つ．このスペクトルの値はT^kのサイズが大きいほど小さくなる．

一方$\pi_1(T^k)$の存在の方は$N_M\Omega(M) \approx \Omega(M)$なる近似ではとりあえず見えてこない．すなわち，$M = \boldsymbol{R}^{1,9-k} \times T^k$の大域的な様子（位相）が効いてくるからである．あるいは，長さが０に近くないループの効果であるからである．

この効果は，T^kのサイズが大きいほど，小さくなる．あるいは，０にホモトピックでない弦の持っている最低エネルギーは，T^kのサイズが大きいほど，大きくなる．

前者を重心の運動量，後者をまき数と呼ぼう．スペクトル＝エネルギー＝重さと思うと，こうまとめられる．

トーラスを大きくすると，重心の運動量から来るエネルギーの値は小さくなり，まき数から来るエネルギーの値は大きくなる．

この場合のＴ双対とは，トーラスを双対トーラスに変え，同時に，重心の運動量とまき数を入れ替える操作を指す． これが数学的にはフーリエ変換みたいなものだということは感じられるであろう． 上で述べたことは，この変換で理論のスペクトルがたもたれることを示唆する．

この変換は，有効場の理論だけからは見えてこない変換である．なぜなら一方（重心の運動量）は有効場の理論で見えるもの性で，もう一方はそうでないからである．

この現象はいろいろな双対性で典型的である．つまり，有効場の理論で見えていた現象が，弦理論全体ではほんの一部で，有効場の理論で見えない部分まで込めると，理論の対称性が現れる．

トーラスのＴ双対の場合は，非摂動効果（まき数の部分）が単に基本群から来るだけでたいへん見やすかった，だから，非摂動効果も（以下少し見るように）直接計算でき，よって対称性を計算で確かめられる．しかし，これは，双対性の中では例外である．

より一般の場合は，有効場の理論で見えていた現象，あるいは摂動的で見えるものの方は計算できるが，そうでない部分は計算できない．よって，その二つの双対性が何らかの方法で見いだされると，非摂動的効果の計算に双対性が使えることになる．これが双対性の威力である．

トーラスのＴ双対を$k=1$の場合に命題として書くと．

命題６　　$\boldsymbol{R}^{1,8}\times S^1(r)$上の弦理論のスペクトルと$\boldsymbol{R}^{1,8}\times S^1(2/r)$上の弦理論のスペクトルは一致する．

理論のスペクトルが一致するとは，でてくる粒子の種類とその質量が一致するということであった．

$\boldsymbol{R}^{1,8}\times S^1(r)$を考えると，そのループ空間は$\boldsymbol{R}^{1,9-8}\times S^1(r)\times\Omega_0(\boldsymbol{R}^{1,9})\times\pi_1(S^1(r))$である．$\mathbf{r}$によらない部分は無視して，$\mathbf{S}^1(\mathbf{r})\times\pi_1(\mathbf{S}^1(\mathbf{r}))$ を考えよう．示したいのは，$\mathbf{S}^1(\mathbf{r})$の部分に対応する粒子の重さと$\pi_1(\mathbf{S}^1(2/\mathbf{r}))$の部分に対応する部分から来る粒子の重さが一致することである．それぞれを計算してみよう．（例によって定数倍等はサボっている．）$S^1(r)$の方に対応するのは関数空間$C(S^1(r))$の上のラプラシアンのスペクトルである．これは，$c\dfrac{n}{r}$である．（nは整数でcは普遍定数．）

一方で，長さrの元の持っているエネルギーはr^2に比例するから，結局命題６の対称性が成り立つ．

命題６の対称性をもっと具体的に見るため，モード展開ということを説明しよう．第１章で述べたように，Bosonic Stringの相空間は$T\Omega(M\times\boldsymbol{R})$である．

$M\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{1,8}\times S^1(r)$だったから，$T\Omega(M\times\boldsymbol{R})=\Omega\left(\dfrac{\boldsymbol{R}^{1,9}}{\boldsymbol{Z}}\right)\times\Omega(\boldsymbol{R}^{1,9})$である．

１章の正則と反正則への分解は，$\Omega(\boldsymbol{R}^{1,9})\times\Omega(\boldsymbol{R}^{1,9})$の元を$(\ell,-\ell)$の形のものと，$(\ell,\ell)$の形のものに分けることに当たる．$\Omega(\boldsymbol{R}^{1,9})\times\Omega(\boldsymbol{R}^{1,9})$の第２成分は$\mathbf{S}^1\times\boldsymbol{R}$の$\boldsymbol{R}$方向からの微分と見なせる．これを初期条件にして，調和写像の方程式をとくと，正則成分は，$\mathbf{s}-\mathbf{t}$の関数に，反正則成分は$\mathbf{s}+\mathbf{t}$の関数になる．（$(t,s)\in S^1\times\boldsymbol{R}$．）すなわち，$\varphi:S^1\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^{1,8}\times S^1(r)$を

$$\varphi(t,s)=\varphi_R(s-t)+\varphi_L(s+t)$$

とかく．（**t**はS^1のsは***R***の座標である．***R***が時間だからひっくり返した方が良かったかも知れない．ご容赦．）

注１：　　　正則と反正則なら本来は

$$\varphi(t,s)=\varphi_R(is+t)+\varphi_L(is-t)$$

であろう．おそらく，上の式はこの式の「時間を虚数にした」ものと思われる．物理ではこれは普通に行われるが，どうして，そんなことをしていいのか，筆者は分からない．（普通のファインマン経路積分のときは良さそうであるが，我々のWorld Sheetが２次元の場合はよく分からない．第１章注３とかかわると思う[3]．）

ここで

(3.1)
$$\begin{aligned}\varphi_R(s-t)&\mapsto+\varphi_R(s-t)\\ \varphi_L(s+t)&\mapsto-\varphi_L(s+t)\end{aligned}$$

がＴ双対を表す．これを説明しよう．

まず

(3.2)
$$\begin{aligned}\varphi_R(s-t)&=x_R-p_R(s-t)+\sum a_k e^{k\sqrt{-1}(s-t)},\\ \varphi_L(s+t)&=x_L+p_L(s+t)+\sum b_k e^{k\sqrt{-1}(s+t)},\end{aligned}$$

とフーリエ展開する．ここで**x**たちと，a_k，b_kは１０次元のベクトルで，pはコンパクトになっている方向のベクトルである．この式がモード展開と呼ばれる．

重心の運動量に当たるのは，φはtについては定数で，sについては動いている場合である．よって

(3.3)
$$p_R=-p_L$$

一方，S^1が$S^1(R)$方向に丁度１回りしている弦とは，$S^1\times\boldsymbol{R}\to S^1(R)\times\boldsymbol{R}$なる正則写像（または反正則写像）であるから，$\varphi$は$s$については定数で，$t$については動いている場合である．すなわち

[3] この注は多分，物理では，大学院生レベルの当たり前な事実と思われる．だからといって，数学をやるときは当たり前としていいとは思わない．　一般に，　物理でこういうときはこうすることに「なっていて」「していい」ことが，数学の立場でもそうかは自明ではない．

(3.4) $$p_R = p_L$$

（3.1）で（3.3）と（3.4）が入れ替わるのは明らかであろう．

（3.2）がWell Definedであるためには，$p_R + p_L$がrの整数倍でなければならない．これは，まき数の部分から来るエネルギーが長さの整数倍であることに対応する．

一方 $\mathbf{p_R} - \mathbf{p_L}$ は重心の運動量に対応するが，これは，（3.2）式のWell Definednessからは，何の条件も付かない．これは，（3.2）が古典解であるからで，S^1上のラプラシアンの固有値と見れば，勿論$\frac{1}{r}$の整数倍であるべきである．

従って，

(3.5) $$p_R = nr + m\frac{2}{r}, \quad p_L = nr - m\frac{2}{r},$$

がでる．（定数倍をちゃんと考えるのは再びサボった．だから式の中の２が全く説明されていない．）これが，$\mathbf{r} \mapsto \frac{1}{\mathbf{r}}$で不変であるというのがＴ双対である．

注１：　$p_R - p_L$が$\frac{1}{r}$の整数倍というのが上ではかなり唐突にでてきた．それは，本来は，$\Omega\left(\frac{\boldsymbol{R}^{1,9}}{\boldsymbol{Z}}\right) \times \Omega(\boldsymbol{R}^{1,9})$の上の関数空間を考える（第２量子化する）ことで初めて見えるはずだからである．これは，まき数が始めから「量子化」されているのと見かけ上は異なる．

Gauge Symmetry Enhanced Point その１

$R = \sqrt{2}$である場合，つまりＴ双対で自分自身に移る場合には，特別なことが起こる．このときは，重心の運動から来る２つの状態と同じ重さの状態が，まき数から生じる．

すなわち，最低エネルギーの状態（粒子）の数が，２から４に増える．これらが重さ０の粒子になる．この現象は後々大切である．

この種のことは，数学でも，アファインリー環の表現論で同様なことが独自に発見されている．（次のHeterotic　Stringの構成に関わるような，もっと，次元の高いトーラスでコンパクト化した場合が，大切である．）フランケル・カッツ構成という．

注２：　重さが等しいのは分かるが，０になるのは変に思えるであろう．多分，中心拡大を取っている（Central Chergeがある）ことから（１章注意８），重さがそれだけずれるのだと思う．勘違いだったらご容赦．

Heterotic Stringの構成法

上で述べたこと（トーラスのモジュライ空間の特別な点で，重さ０の粒子が増えること）を使って，Heterotic Stringを構成できる．これを説明する．

２章ではHeterotic Stringは一方側にはフェルミオンをもう一方側にはゲージ粒子を入れる，といった．ゲージ粒子を入れるかわりに，もう一方側にはさらに１６次元分のトーラスがあると考える．

つまり，正則の側は１０次元の空間への反正則の側は２６次元への写像を考える．

言い換えると，$s-t$が変数の，１０次元の空間へ値を持つ写像と，$\mathbf{s}+\mathbf{t}$が変数の，２６次元の空間へ値を持つ写像の組を考える．

２６次元のうち１６次元はトーラス，残りの１０次元はもう片側と同じ空間とみなす．

１６次元のトーラスのコンパクト化を考える．１６次元のトーラスは，$\boldsymbol{R}^{16}$の格子を与えると定まる．上で述べたことから，わかるのは，１０次元にコンパクト化したときに見える粒子の重さは，１６次元のトーラス上でのラプラシアンの固有値と格子の元に対応するトーラスの測地線の長さである．

トーラス上でのラプラシアンの固有値にあたるものが，２６次元の有効場の理論からみえるものである．

これは，１６個分の可換ゲージ場を１０次元の理論にもたらす．これが，$SO(32)$ または$E_8\times E_8$の極大トーラスに対応するゲージ場とみなす．前の節で見たように，格子の形が特別だと，トーラスの基本群を回っている弦から，質量０の別の状態が発生する．これは，極大トーラスの基本群の元であるが，それは，格子がルート格子に当たるときになる．ルート格子の元は，リー環の基底に対応するから，ゲージ場の非可換な部分が，トーラスの基本群を回っている弦から生じている状態とみなされる．トーラスの$H_1(T;\boldsymbol{Z})\subseteq H_1(T;\boldsymbol{R})$がルート格子になっている場合が，これらの非可換な部分に対応するゲージ粒子の「重さ」が０になる場合だと考えるのである．

どんなリー群がでてきうるかを考える．まず，ルート格子は自己双対でなければならない．これを説明するために，（3.2）のモード展開をもう一度考える．ただし，今度はp_R，p_Lは１６次元のベクトルだとする．正則側からは１６次元の自由度は見えないから$p_R=0$である．一方，p_R+p_Lは格子の元でなければならない．（そうでないと$\varphi_{\mathbf{R}}+\varphi_{\mathbf{L}}$が$\mathbf{T}^{16}\times\boldsymbol{R}^{1,9}$への写像としてWell definedでない．）一方，p_R-p_Lは元の重心の運動量であるから，双対格子の元である．$p_R+p_L=-(p_R-p_L)$より，格子は自己双対である．

次に，格子はEvenでなければならない．これは議論で定数倍をずうっとサボったつけで，説明できない．

最後に，格子の元の生成元（単純ルートに対応）が全て同じ長さでなければならない．（同じ数を引いて全部０にならないと一斉に重さ０にできない．）これは，ルート格子 が自己双対かつ単純ルートがすべて同じ長さである，リー環を探せということになる．アノーマリのキャンセルから，ランクは１６でなければならない．こうしてでてくる結論が$SO(32)$ または$E_8\times E_8$である．

Ｔ双対の話はまだ続ける必要があって，例えば，開いた元のＴ双対，また，トーラスコンパクト化のモジュライ空間の決定，などがかかわる．開いた元のＴ双対は

D　Braneを考える上で大切である．７章に回す．トーラスコンパクト化のモジュライ空間の決定は５章に回す．

次に，Ｓ双対に話しを移したいが，その前に，Ｓ双対と対称的なＴ双対の特徴を書いておく．

Ｔ双対は結合定数を変えない．

Ｔ双対はリーマン面のジーナスを止めて考えて見える対称性である．

この２つのことが本質的に同じであることは，２章のDilatonの期待値と結合定数のところで説明した．このことはＴ双対の形（3.1）から分かる．

一方で，

Ｔ双対はTargetになっている空間の形を変える．

以上の特徴はMirror Symmetryと同じである．Mirror SymmetryはＴ双対を一般化したものと考えられる．しかし，カラビ・ヤウ多様体 $\mathbf{M}$ があったとき，$\mathbf{N}_{\mathbf{M}}\Omega(\mathbf{M}) \approx \Omega(\mathbf{M})$ なる近似で見えないどういう効果があるかを，直接計算することは，Ｔ双対の場合と違って困難である．（トーラスと違って，カラビ・ヤウ多様体は曲がっているから．）従って，式（3.5）のようなものを直接求めて，Mirror Symmetryを理解することは，困難でなのであろう．

Ｓ双対

上で述べたＴ双対の特徴と比較すると，Ｓ双対の特徴は次のようにまとめられる．

Ｓ双対は結合定数を変える．

Ｓ双対はリーマン面のジーナスについて足しあわせたあとでないと見えない．

この二つが大体同じことだというのは，やはり第２章で簡単に説明した．

この性質（つまりリーマン面のジーナスについて足しあわせたあとでないと見えない）ということが，Ｓ双対をＴ双対より深いものにしている．

Ｓ双対について，まず場の理論のＳ双対について述べる．Ｓ双対変換は $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z})$ で表される．この変換で，電荷と磁荷の組 $\begin{pmatrix} n_e \\ n_m \end{pmatrix}$ は

（3.6）
$$\begin{pmatrix} n_e \\ n_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_e \\ n_m \end{pmatrix}$$

のように変換される．一方では，結合定数はテータ項（多分古田氏のところに解説がある）を実部だと思って，普通の結合定数を虚部と思って，上半平面の元τとみ

なし，

（3.7）
$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

のように変換される．場の理論の場合には，リーマン面のジーナスを足しあわせる，ことに対応するのは，いろいろなチャーン数のベクトル束から来るものを足しあわせることである．

注２：　　古田氏のところに解説がある $N=2$ 超対称 $SU(2)$ ゲージ理論では，理論に現れる粒子の電荷と磁荷の組は３種類だけである．従って，$SL(2,\boldsymbol{Z})$ に関する対称性は無い．Ｓ双対性が成り立つのは，$N=4$ 超対称性がある $SU(2)$ ゲージ理論である．

Senの予想

これについては，Sen[47], G.Segal-A.Selby Commun. Math. Phys., 177 (1996) 775 - 787 をみよ．

まず，$\boldsymbol{R}^3$ 上のBogomolomy方程式のモノポールチャージ n_m の解のモジュライ空間を $\mathcal{M}_{n_m}$ を定義する．（詳しくは，Atiyah-Hitchin The geometry and dynamics of magnetic monopoles, Oxford Univ. Pressを見よ．）E を $\boldsymbol{R}^3$ 上の $SU(2)$ 束とする．AdE を考える．Bogomolomy　方程式とは E の接続 A と AdE の切断 Φ の組にたいする方程式であって，

（3.8）
$$d_A\Phi = *F_A$$

である．ここで，d_A は共変微分，F_A は曲率である．

つぎにモノポールチャージを説明する．（3.8）を考えるときは，$\mathbf{A}$ が無限遠方である $U(1)$ 接続に近づくという境界条件をおく．つまり，$E = L \oplus L^*$ なる分解があって，$\mathbf{A} \approx \mathbf{A}' \oplus -\mathbf{A}'$ となっているとする．この分解は，Φ の E への作用の ± 1 固有空間に対応しているとする．従って，無限遠で $|\Phi| = 1$ である．この L は，S^2 上の複素直線束と見なせる．そのチャーン数が $\mathbf{n_m}$ である．

$\pi_1\mathcal{M}_{\mathbf{n_m}} = \boldsymbol{Z}_{\mathbf{n_m}}$ が知られている．$\mathcal{M}_{\mathbf{n_m}}$ の不変被覆空間を $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{n_m}}$ と書く．$H^*(\tilde{\mathcal{M}}_{n_m})$ を $\tilde{\mathcal{M}}_{n_m}$ の L^2 コホモロジーとする．$\pi_1\mathcal{M}_{n_m} = \boldsymbol{Z}_{n_m}$ は $H^*(\tilde{\mathcal{M}}_{n_m})$ 上に作用する．$\boldsymbol{Z}_{n_m}$ の生成元が $\exp\left(2\pi\sqrt{-1}n_e/n_m\right)$ 倍で作用する $H^*(\tilde{\mathcal{M}}_{n_m})$ の部分空間を，$H^*_{n_m,n_e}$ と書く．

命題７　　$H^*_{n_m,n_e}$ は $\boldsymbol{R}^{1,3}$ 上の，電荷 n_e，磁化 n_m の状態を表すヒルベルト空間である．

$\mathcal{M}_{n_m}$ の元は $\boldsymbol{R}^4$ 上のヤン・ミルズ（自己共役）方程式の時間によらない解に一致する．（古典論の）定常解が離散的であれば，量子論でのヒルベルト空間は，（古典論の）定常解たちを基底にするベクトル空間であろう．いまの場合は，古典論の定常解にはモジュライがある．そのときは，そのモジュライ空間のコホモロジーが量子論のヒルベルト空間と考えられる．

モノポールチャージが磁荷であるというのは，p Braneの説明をすると自然に分かるのでそこ（６章）に回す．

$\pi_1 \mathcal{M}_{n_m} = \boldsymbol{Z}_{n_m}$ の作用の固有値に分解するのが，なぜ電荷かは，うまく説明できない．いまの場合，π_1 は $E = L \oplus L^*$ なる分解をしたときの直線束 $\mathbf{L}$ の構造群 $\mathbf{S}^1$ から来る．（3.7）の解を遠くから見ると，無限遠の方だけが見え，つまり，直線束 $\mathbf{L}$ 上の接続が見える．$\mathbf{L}$ の接続というのは電磁場である．電荷というのは構造群 $\mathbf{S}^1$ の方から見えるはずである．

Senの予想は次の通りである．

命題８ $\bigoplus_{n_e, n_m} H^*_{n_m, n_e}$ へ $SL(2,\boldsymbol{Z})$ が作用し，$\begin{pmatrix} n_e \\ n_m \end{pmatrix}$ は（3.5）で変換する．

部分的にはSegalたちによってチェックされている．（彼らのチェックは余り物理的な背景とかかわらない，普通の数学のホモロジーの計算に見える．）

$N=4$ 超対称ゲージ理論のＳ双対性

これについては，[55]参照．（この論文は物理の論文の中では数学者に読みやすい方の部類に属するので，興味のある方は読んでみることをおすすめする．）また，このＳ双対の発見に深くかかわる結果を出している中島啓氏による解説がある．（例えば重点領域無限可積分系レクチャーノート１２収録の斉藤義久氏によるノート．）この話をきちんと書くと，それだけでずいぶんかかるので簡略に記す．

４次元の $N=4$ 超対称性ゲージ理論を考える．この分配関数を計算するのに，Topological Twistをして位相的場の理論に話しを持っていく．（Topological Twistは $\mathbf{N}=2$ の場合に古田氏が説明するはず．）$N=4$ 理論でTopological Twistしたものが，もとのものと一致するのは，多様体がハイパーケーラーの場合である．

ハイパーケーラー多様体の $\mathbf{N}=4$ 超対称性ゲージ理論のTopological Twistした場合の分配関数は何であるかを考える．

理論には，複素数の結合定数がある．つまり

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2} \tag{3.9}$$

がある．g は普通の結合定数（非線形項の強さを表していると言っていいだろう）で，θ は（古田氏のところで説明があるであろうが）テータ項を作るもので，これが入ると，（3.10）のようにして，ベクトル束のチャーン数がラグランジアンに取り込める．

場としてでてくるのはとりあえず $SU(2)$ 接続であるが，それ以外に超対称にするために，いろいろと他の場が入る．

ボソンの部分のラグランジアンは

$$\int_M \left(|F_A|^2 + \sum |d_A v_i| + \sum [v_i, v_j] \right) vol_M + i\theta \int F_A \wedge F_A \tag{3.10}$$

である．（Aはベクトル束Eの切断．v_iはadEの切断で$i=1,\cdots,6$．$[v_i,v_j]$はadEのファイバーごとの括弧積．）ただし（3.9）はTopological Twistする前の式で，Topological Twistすると式はもっと複雑になる．分配関数というのは，このラグランジアンを指数関数の肩にのせて，全ての接続A，v_iにつてファインマン経路積分（フェルミオンについてはブレジン積分）したもので，τの関数である．VafaとWittenによると，$N=4$超対称な場合の，分配関数は次のものである．

$E_k \to M^4$をチャーン数nの構造群Gのベクトル束とし，その上のヤン・ミルズ（本当は自己共役）接続全体の作るモジュライ空間を$\mathcal{M}_k(M,G)$のオイラー数$\chi(\mathcal{M}_k(M,G))$を考える．そのオイラー数を$\chi(\mathcal{M}_k(M,G))$と書く．これから，母関数

$$Z_M(G)=\frac{1}{\#Cent(G)}\sum q^n\chi(\mathcal{M}_n(M,G)) \tag{3.11}$$

を考えると，これが分配関数である（ただしある種の消滅定理が成り立つ場合）．ここでqは（3.9）式のτと$q=e^{2\pi i\tau}$の関係にある．

ところで，ドナルドソン不変量というのは，大体，ヤンミルズ接続全体の作るモジュライ空間の基本のホモロジー類であった．ヤンミルズ接続全体の作るモジュライ空間は，接続（のゲージ同値類）全体の空間の上のあるベクトル束の切断の０点集合と思える．これは，言い換えれば，その接続のオイラー類のポアンカレ双対である．ドナルドソン不変量は，$N=2$超対称な理論からでてくる．

$\chi(\mathcal{M}_k(M,G))$はドナルドソン理論の場合の$\mathcal{M}_k(M,G)$の基本ホモロジー類とよくにているが，微妙に違う．例えば，$\dim\mathcal{M}_k(M,G)=0$の時は，基本ホモロジー類は$\mathcal{M}_k(M,G)$の元の符号を考えた数であるが，オイラー数は単に$\mathcal{M}_k(M,G)$の元の数である．

この違いはどこから来るのだろうか．（3.9）のようなラグランジアンを考えるとき，それを指数関数の肩にのせて，全ての接続A，v_iにつてファインマン積分した値，というのは，極値の近くのラグランジアンの様子で大体決まる．（振動積分についてよく知られた事実．）

注３：　$N=4$超対称性などがあると，本当に極値の近くで本当に決まってしまうのだと思う．この注はよく分かって書いているわけではない．

もし，余計なもの（超対称にするためにいれた場）が無ければ，ラグランジアンの極値はヤン・ミルズ接続である．それぞれのヤン・ミルズ接続の近傍が積分にどういう寄与をするかは，そこでのヘッシアンを見ればよい．$N=2$のときは，この，ヘッシアンの寄与を見ると，丁度「符号付きの和」といったときの「符号」が出てくる．

もし，「符号付きでない和」を計算したかったら，出てきた符号をキャンセルするように，余計なパラメータを入れて，そして積分する．どのようなパラメータを入れるかは，[55]に説明してある．（その説明は有限次元の場合なので，数学としてちゃんと読める．）

その入れた「パラメータ」をよく見ると，実は，$N=4$超対称にするために増

やした場に一致している．

しかし，本当はもう一つ注意することがあって，すなわち，場を増やしたから，いままで極値でなかったところと別の極値ができてしまうかも知れない．（元のヤンミルズ接続は，それ以外の場が全部０の極値である．他の場が０でない極値があるかどうか分からない．）すると，相関関数は（3.10）とは変わってしまう．そうなっていないことを保証するのが，「消滅定理」である．「消滅定理」の正確な内容を筆者はまだ今一つはっきり分かっていないので書かない．

さて，Ｓ双対予想はこの場合，τを（3.7）で変えたとき，（3.11）がある種の保型性を持つことを意味する．特に，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$という行列，つまり，$\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$を考える．これは，$\tau$が大きいつまり強結合を，$\tau$が小さいつまり弱結合と入れ替える．このとき，（3.11）は「不変」になるが，同時に２つのことをする必要がある．

まず，群Gをそのラングランズ双対$G^\vee$で置き換える．ラングランズ双対というのは，実は筆者はよく知らないが，大体，その極大トーラス（あるいはルート格子）がお互いに双対になっているようなリー群である．（$SU(2)$ のラングランズ双対は$SO(3)$．）こう思うと，Ｔ双対とHeterotic Stringで述べたことと絡めて，なぜラグランズ双対が出てくるのか少しはいえる．すなわち，もし，**G** をゲージ場とするゲージ理論が，Heterotic String でゲージ場が出てきたと同じように，トーラスで弦理論をコンパクト化して出てきているとすると，そのトーラスは，丁度ルート格子で割って得られていたことになる．すると，もし，Ｓ双対を取るとき，Targetの方も双対にしなければならないなら，これは，ゲージ理論では，ラングランズ双対がでてくることにかかわる．（この説明が本当に正しいか全く保証の限りでない．）

第２に，$\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$，$G \mapsto G^\vee$で（3.11）が不変なわけではなく，少しファクターがつく．すなわち（3.11）は

（3.12）
$$Z_M(G;\tau) = \frac{q^{-\frac{\chi(M)}{12}}}{\#Cent(G)} \sum q^n \chi(\mathcal{M}_n(M,G))$$

で置き換える．すると，Ｓ双対性は

命題９
$$Z_M\left(G;-\frac{1}{\tau}\right) = \pm\left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\chi(M)/2} Z_M(G;\tau)$$

となる．ここで，なぜ **M** のオイラー数が出てくることはなぜかは，[55]で説明されている．なぜ1/12倍になるのかは余りはっきりした説明がない．むしろ，確かめられている例を見て，あわせたと思われる．

命題９は数学の結果を使って，いろいろな場合に，確かめられている．K3曲面の場合に向井氏らに結果が，ALE空間の場合に中島氏の結果が，射影空間の場合に吉岡氏とKlyachkoの結果が使われる．（射影空間はハイパーケーラーでないが何とかするようだ．）

この話の場合には，理論のモジュライ空間は上半平面（τの住みか）を$SL(2;\boldsymbol{Z})$で割ったもので，相関関数がその上の保型関数を定義したわけである．

TypeIIB**超弦理論のＳ双対（その１）**

弦理論のＳ双対にすこしだけ触れる．（５章でもっと述べる．７章でさらに述べるはずだったができなかった．）TypeIIBの弦理論の質量０の粒子の表を見ると，DilatonΦとＢFieldと別に，R側にスカラー場と２型式がある．このスカラー場をχ，２型式を $\mathbf{A}^{(2)}$ とかく．

（3.13）
$$\tau = \chi + ie^{-\Phi}.$$

と置く．（より正確には，右辺の期待値をτと置く．）Dilatonの期待値は結合定数であると述べた．これと（3.9）を比べると，大体χがθになっている．このτが（3.7）で変換されるような，$SL(2;\boldsymbol{Z})$対称性がTypeIIB理論にあると予想される．

前に一寸だけ述べたが，理論にでてくるスカラー場の期待値は理論の（モジュライ空間を決める）パラメータと思える．従って，やはり，この場合もτがパラメータで，従ってとりあえず上半平面が理論のモジュライであるが，それが，$SL(2;\boldsymbol{Z})$不変性を持つと見るのである．

さてところで，理論が$SL(2;\boldsymbol{Z})$で対称とは何であろうか．例えばＴ双対の場合のようにスペクトルが一致する，すなわち，状態を決めるヒルベルト空間の上に$SL(2;\boldsymbol{Z})$が作用し，それが，それぞれの状態の重さを保つ（ただし，結合定数τも同時に動かすとして）というのであろうか.

答えは，ヒルベルト空間を１，２章で見たようなやり方，つまり，短い弦の振動の自由度を使って作っていく方法（摂動論的とよんでよい）で作ったものに限る限り，否である．

これは，次の理由である．まず，$\begin{pmatrix} B \\ A^{(2)} \end{pmatrix}$なる組を考える．これは，両方２型式だが，これらは，$SL(2;\boldsymbol{Z})$の弦で

（3.14）
$$\begin{pmatrix} B \\ A^{(2)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ A^{(2)} \end{pmatrix}$$

のように変換されると考える．これがなにを意味するか余り明確でないが，次のように考えればよい．Bや$A^{(2)}$は電場のように思える．場があるとそれぞれの粒子について，その粒子がその「電場」について，どのくらい「電気」を帯びているか，が決まる．いま，Bや$A^{(2)}$の２種類あるから，粒子の帯びる「電気」（「電荷」）は２種類ある．そこで，理論を$SL(2;\boldsymbol{Z})$で変換すると，その，「電荷」が（3.14）の１次変換で変換されるのである．

ところが弦理論の弦そのものが２次元であるので，２型式で「電荷」を持つ．（この説明は後にBraneの説明（６章）のところでする．）ところが，弦理論ででてくる弦はいつも，Bについての「電荷」があって，$A^{(2)}$についての「電荷」はない．従って，$SL(2;\boldsymbol{Z})$で対称でない.

これは，摂動論的に作られるヒルベルト空間の状態だけを見ているからだと考

えられる．本当のヒルベルト空間はもっと大きくて，そこまで広げると，$SL(2;\boldsymbol{Z})$ 対称性が見えてくるのだ，と考えられている．

それらの，摂動論的に作られるヒルベルト空間に入っていない状態，はStringソリトン呼ばれるものであると考えられる．Stringソリトンとはなにかは，６章以後に順に説明していきたい．

第４章：String Dualityとはなにか

String　　Dualityは普通，「・・・型のStringを・・・でコンパクト化したものは，・・・型のStringを・・・でコンパクト化したものと同じである」などという言い方で表される．これはなにを意味するのであろうか．（・・・型の・・・には，TypeI$SO(32)$，TypeIIA，TypeIIB，Heterotic$SO(32)$，Heterotic $E_8 \times E_8$，M理論，Ｆ理論のどれかが入る．）

じつは，その答えは余り単純ではない．すなわち，まず，同じである，という結論を出すための根拠が，普通は極めて薄弱である．

例えば，今回古田氏によって解説されるであろう４次元$N=2$超対称$SU(2)$ゲージ理論のおけるサイバーグとウィッテンの双対性と比べると，はるかに根拠が少ない．４次元超対称$SU(2)$ゲージ理論では，実際にプレポテンシャルと呼ばれる理論のもっとも基本的な量が計算されていた．（理論が解かれたという言い方をする．）

さらに前の章で述べた，４次元$N=4$超対称**SU**(2)ゲージ理論のS対称性では，やはり相関関数という（そこではモジュライ空間のオイラー数の作る母関数）理論のもっとも基本的な量が，Ｓ双対変換で保たれることが（幾つかの例で）チェックされていた．

これらに比べると，String Duality は非常に少ない証拠だけから予想・主張される．従って，個々の事例をみただけでは，物理学者の立場でも，予想であって，定理ではない．

しかしながら，研究が進むにつれて，非常に多くの超弦理論の間に，弱い証拠にせよとにかく，consistentに関係をつけることができる，ということが見いだされてきた．そんな多くの事例が偶然でおきるは思えないから，String　Dualityは段々間違いない現象として信じられるようになってきたというのが，歴史であろう．（歴史といっても２・３年しかたっていないが．）さらに，String　Duality起こるメカニズムについても次第に理解が進んできている．

さて，始めの問に戻って，・・・型のStringを・・・でコンパクト化したものは，・・・型のStringを・・・でコンパクト化したものと同じである，ということの意味することを幾つか述べよう．

１，理論のモジュライ空間が一致する．

理論のモジュライ空間とはなにか．これを一般的な形で抽象的に定義することは，少なくとも筆者には出来ない．ここでは，幾つかの場合に，理論のモジュライ空間を決めるパラメータを少しだけのべ，後はそれぞれの場合にのちの章で述べることにする．

まず，TypeIIの超弦理論を，ある多様体Mでコンパクト化したもの考える．超対称性がコンパクト化した後まで保たれるためには，Mはカラビ・ヤウ多様体（リッチ曲率０のケーラー多様体）でなければならないことが知られている．

表１にある通り，TypeIIの超弦理論には，Dilatonと対称テンソル，それから，B

Fieldがある．Dilaton の期待値は（２章で述べた通り），超弦理論の結合定数にあたる．対称テンソルは勿論Mのカラビ・ヤウ計量である．

したがって，TypeIIの超弦理論をある$\mathbf{M}$でコンパクト化したときの理論のモジュライには，Mのカラビ・ヤウ計量のモジュライとそれから$\boldsymbol{R}$（結合定数）がパラメータに含まれる．

もし，TypeIIでなく，Heterotic Stringであったらどうであろうか．

この場合には，$M \times \boldsymbol{R}^{10-\dim M}$上にゲージ場があるわけである．言い換えると，$M \times \boldsymbol{R}^{10-\dim M}$の上には，例えば$E_8 \times E_8$を構造群に持つベクトル束がある．すると，理論のモジュライの中に，M上のこのベクトル束の複素構造がパラメータとして入ってくる．より正確には$E_8 \times E_8$ヤンミルズ接続のモジュライ，あるいは，$E_8 \times E_8$の複素化を構造群に持つ，半安定（SemiStable）ベクトル束のモジュライ空間である（小林・ヒッチン予想あるいはNarashmhan-Seshadri，Donaldsonらの定理によりこの二つは同じもにのである）．すなわち，M上のカラビ・ヤウ計量のモジュライを底空間にし，半安定ベクトル束のモジュライ空間をファイバーにしたファイバー束の全空間が，理論のモジュライ空間を構成する．

以上のように，まず第１近似としては，理論のモジュライは，コンパクト化に持ちいる空間にかかわる，幾何学的な対象のモジュライ空間である．

注１　しかし，普通の幾何学で見える対称性とは異なる対称性も，理論のモジュライ空間の構成に現れる．例えば，TypeII理論を$\mathbf{K}$3曲面でコンパクト化した場合には，モジュライ空間はＫ３曲面のカラビヤウ計量のモジュライ空間＋αである．このとき，同一視は，古典的に（普通の幾何学）ではＫ３曲面の可微分同相に当たる群$SO(3,19)$であるが，理論のモジュライ空間には，さらに，Mirror Symmetryに当たる変換が作用する．前章で述べた，T双対やS双対も，これらの，普通の幾何学で見えない対称性の一例である．そのような対称性を全部併せてU双対という言い方もする．

従って，全然違う理論のモジュライ空間が一致するという，String　Dualityの結論は，互いに異なった空間上の，互いに異なった幾何学的対象のモジュライ空間が，じつは一致するという，大変深い数学的帰結を意味する．

注２　しかし，ここで，注意が必要である．すなわち，おそらく，String Dualityで理論のモジュライ空間が一致する，というとき，それは，量子効果が入ったものが一致するという意味である点である．

理論のモジュライ空間が量子効果で変形されるとはどういうことなのかは，古田氏の講演の中で，一例が示されるであろう．すなわち，４次元$N=2$超対称$SU(2)$ゲージ理論においては，量子効果を考えないときは，理論のモジュライ空間は$\dfrac{\boldsymbol{C}}{\pm 1}$であり，量子効果を考えると理論のモジュライの特異点は２点に変わる．

さらに，７章で触れる３次元$N=4$超対称$SU(2)$ゲージ理論では，量子効果を考える前の理論のモジュライ空間は$\dfrac{\boldsymbol{R}^3 \times S^1}{\pm 1}$で，量子効果によって２モノポールのモジュライ空間に変わる．（この例ではトポロジーまで変わる．）

従って，String　Dualityから数学の予想を導くには，量子効果によって，理論の

モジュライがどう変わるか，見なければならないのであろう．これがどのくらい難しいことなのか，筆者にはよく分からない．

２，理論に現れる粒子（特に質量０の粒子）の数とそれがどのベクトル束の切断かが一致する．

これだけはどの例でもチェックされている．これは一番チェックしやすい．これは大体**M**（コンパクト化する多様体）の調和型式を数えれば分かる．（このことは，２章のコンパクト化のところで大体説明した．）

しかし，これだけをもってふたつの理論が一致するというのは，あまりに乱暴である．（江口氏の集中講義中の三輪氏の言葉を借りると，「役者だけ出てきて，劇は上演しないようなもの」である．）

しかし，１は局所的には２の一部である．つまり，理論のモジュライ空間の接空間は質量０のスカラー粒子全体と一致する．

３，理論に現れる粒子（質量０と限らない）の質量の分布が大体一致する．

これは，２より中身がある．ウィッテンがM理論を導入したときの論文[58]で根拠として持ってきたのはこれである．（４章参照．）

４，低エネルギー有効場の理論（のラグランジアン）が一致する．

これは随分強そうであるが，低エネルギー有効場の理論のラグランジアンの計算が，２章でいったように成されているのだとすると，２に比べてそれほど強いことをいっているわけではなさそうである．

５，理論のモジュライ空間の特異点の様子が一致する．

理論のモジュライ空間そのものは，**M**が複雑だと決定が難しい．例えば，トーラス（のTypeIIとHetero）やK３曲面（のTypeII）の場合には決定されているが，一般には，たとえば**M**がカラビ・ヤウ多様体の場合には，３次元カラビ・ヤウ多様体の（カラビ・ヤウ計量の）モジュライ空間を決定せよ，という問題を少なくとも解かなければならない．

これは一般には困難なので，多くの場合，理論のモジュライ空間全体を調べることはせず，特定の点の近傍だけを調べて比較する．

調べる点は，モジュライ空間の特異点である．

従って調べることは，どのような特異点があり得て，また，特異点の集合の次元はなにか，交わり方はなにか，である．これが，２つの（全然違った）モジュライ空間で対応していることをみて，２つの理論が一致していることの根拠とする．

６，相関関数・プレポテンシャルが一致する．

ここまでチェックできれば，２つの理論が一致することがほぼチェックされた

と言っていいのであろう．従ってここまでされている例は稀である．例えばHarvey Moore[19][20]はその稀な例の一つと思われる．それらのことは筆者が余り勉強していない方面なので，今回の予稿・講演ではふれることができない．

相関関数 ・プレポテンシャルは，理論が位相的場の理論であると，大体，ドナルドソン不変量とかグロモフウィッテン不変量とかいったタイプの不変量の母関数であると考えられる．それは，理論のモジュライ空間の上の関数とみなされる．（場の理論のS双対の場合の経験からは，関数というより，モジュライ空間の上の直線束の切断といった方がいいかもしれない．）

これは，理論のモジュライ空間がある群（離散群）の商空間であるときは，不変量の母関数に保型性があることを意味する．

そして，String　Dualityによるその一致は，そのような重要な，そして出所が全然異なった，２つの不変量が一致する，ということを意味している．これは，数学的に大変興味深いことである．

String Duality までいかなくても，Mirrror Symmetryでこのたぐいの事実が，有理曲線の数から決まる不変量がそのMirrorで考えると湯川結合から計算できる，という結論を生んだ．

また，（String　Theoryでなく場の理論のDualityだが），サイバーグウィッテン不変量とドナルドソン不変量が一致する，というのも，同じタイプの結果である．

String　Dualityで相関関数・プレポテンシャルが一致する，ということは，同様なことが，さらに多く組織的にでるはずだ，ということを意味しているのではないかと思う．

しかし，数学の予想をここから引き出すにはやはり困難が多い．（数学の予想に書き下すというのは，String　　Dualityのチェックの重要な一部であると思われる．）

問題点の第１は，一般に，理論のモジュライ空間は，次元が大変高いことであることである．（例えばＫ３曲面のモジュライ空間は５７次元）そのような次元の高い空間上の（保型）関数を調べるというのは容易ではない．

具体的なチェックが出来ているのは，だから，理論のモジュライ空間の次元が低い場合で，たとえば，変形の次元が低いカラビ・ヤウ多様体でコンパクト化したTypeIIの理論などがそれに当たる．（６章参照）．

第２に，おそらく，相関関数などが，数学で計算できる，あるいは，数学的に厳密に意味をつけることができるのは，理論が位相的場の理論になる（あるいはその相関関数などが位相的場の理論のものと一致する）場合だけであると思われる．理論を位相的場の理論にするには，Topological　Twistという操作をしておこなう．これが，いつ可能で，またTopological　Twistしたものから計算できる相関関数などが，いつもとのものに等しいか，ということは，筆者にはその原理がよく分からない．（多分物理学者は分かっているのであろう．しかし，数学者に分かるような一般的処方箋として，持っているかどうかは分からない．）だから，String　Dualityから，位相的場の理論の不変量の間の面白い関係式を導くことが，どのくらい出来るのか，筆者には分からない．出来れば，それぞれが，数学の面白い予想になっているのだと思われる．

以上，大変抽象的に，String　Dualityで２つの理論が等しいといったとき，意味

していると思われることを述べてきた．

　具体的な場合に，それがどのように何処までチェックされているのかを述べ，さらに，等しくなるためのメカニズムを述べるのが，次章以後の目的である．

第５章：M理論，　１０次元でのString Duality, Toroidal compact化

M理論

まず，ウィッテンの論文[58]の説明をする．M理論を提示し，全ての弦理論が実は等価なのではないかというのをいいだしたのがこの論文であると思われる．（M理論は他の人たち，例えばDuffとかTownsend等もかかわっている．後者もいろいろな人の考えの合作である．誰がもとかは筆者はよく知らない．）

M理論の解説は色々あるが，少なくとも筆者には，多くの場合，ウィッテンの論文そのもの方が読みやすかった．最近のTownsendの講義録[53]は比較的読みやすい．Duffのもの[12]も一応あげておく．

まずM理論というのを説明する．ことの始まりは超重力理論である．超重力理論とは元々のアインシュタインの重力理論（スカラー曲率の積分がラグランジアン）に他の場をつけ加えて，超対称にするものである．

一般に理論を超対称にするのがいつできるかの処方箋はない．超対称にできない場合がほとんどである．例えば，ボソンとして，高々２回のテンソルしかでてこないものを考えよう．すると，ボソンは$\boldsymbol{R}\oplus TM\oplus(TM\otimes TM)$の切断だから，その次元は$\dim \boldsymbol{M}$ の多項式のオーダーである．一方，スピン表現の次元は$\dim M$ の指数べきで増える．よって，次元がある程度以上大きくなると，ボソンの数とフェルミオンの数が同じになることは不可能である．よって超対称な重力理論は有限通りしかない．一番次元の大きいものが，１１次元であることが知られている．これが，１１次元超重力理論である．そのラグランジアンは，ボソンの部分だけ書くと

$$\int_{\boldsymbol{R}^{1,10}} d^{11}x\sqrt{\det G}\left(R_G+\left|d\mathcal{A}^{(3)}\right|\right)+\int_{\boldsymbol{R}^{1,10}}\mathcal{A}^{(3)}\wedge d\mathcal{A}^{(3)}\wedge d\mathcal{A}^{(3)} \tag{5.1}$$

である．$\mathbf{R_G}$ はスカラー曲率．（係数等全て符号も込めて無視した．）もう少し正確に言うと，１１次元超重力理論はリーマン計量Gと３型式$\mathcal{A}^{(3)}$（とそれと超対称性でペアを作るフェルミオン達）があり，そのラグランジアンが（5.1）であるものである．

しかしこれはそのままではなにもできない理論だという．たとえば，この理論から摂動計算でなにか求めることはできない．（繰り込み不可能で連続スペクトルを持つ．）

しかし，なにかこれを低エネルギー有効場の理論に持つ理論があり，その意味で意味を持っていると考えられる．このなにかをM理論と呼ぶ．従って，M理論とはすでにできている理論を指すのではなく，できるかもしれない理論を指す名前である．

このなにかは１１次元の弦理論ではない．一つの可能性は，Membraneの理論だ

という．（Membraneは2 +1次元（空間２次元時間１次元）のものである．つまり，弦理論が１次元紐が動いているなら，２次元の面が動いているのがMembraneである．なぜ，（5.1）がMembraneの理論の低エネルギー有効場の理論と見られるかも知れないかというと，Stringの理論にはいつもＢFieldという２型式があったのに対して，１１次元超重力理論では，３型式があるからである．（６章の**p** Braneの説明参照．）

ただし，弦理論が少なくとも摂動論にかかわる部分はだいぶ進歩していて，スペクトルや低エネルギー有効場の理論が求められるのに比べて，Membraneの方は全くそうでない．Wittenによれば，本当にMembraneの理論か分からないから，そこはぼかしてM理論と呼ぶのだと言う．

Membraneについて解説で詳しいのはDuff[13]だと思う．（といっても筆者は読んでいない．数学者には多分余り読みやすくはない．）また，[61]，[62]はやはりＭ理論にかかわるが筆者は読んでいない．

M理論とTypeIIA理論の双対性

さて，String Dualityの一つの例は，以下の通り．

命題１０：　１１次元のM理論を$\mathbf{S}^1$でコンパクト化して１０次元にしたものは１０次元のTypeIIA理論と同じである．

まず４章で２と述べたことをチェックしよう[4]．$\boldsymbol{R}^{1,9}\times S^1(r)$を考える．この上に，リーマン計量$G$と３型式$\mathcal{A}^{(3)}$があったわけだ．$S^1(r)$の方向の座標を$x^{11}$とかくと，$G$は

（5.2）
$$G = G_{(10)} \oplus e^{2\gamma}\left(A^{(1)}\otimes dx^{(10)} \oplus dx^{(10)}\otimes dx^{(10)}\right)$$

となる．（$r = e^{\gamma}$）．前に述べたように，質量０の粒子を見るには，S^1方向には調和なものを見る必要があった．すなわち，いまの場合は$\mathbf{S}^1$方向に定数のものである．従って，$G_{(10)}$は$\boldsymbol{R}^{1,9}$のリーマン計量，$A^{(1)}$は$\boldsymbol{R}^{1,9}$の１型式，Φは$\boldsymbol{R}^{1,9}$のスカラーとみなす．

同様に，$\mathcal{A}^{(3)}$からは，$\boldsymbol{R}^{1,9}$の２型式Bと，と３型式$A^{(3)}$がでてくる．つまり関係は，

（5.3）
$$\mathcal{A}^{(3)} = B\wedge dx^{11} + A^{(3)}$$

である．表１を見ると，確かに，スカラー１個，２型式１個，計量１個，１型式１個，３型式１個がTypeIIA超弦理論にある．これで，２はチェックされた．

[4]M理論の理論のモジュライは空間１１次元でコンパクト化していない場合は１点である．$\mathbf{S}^1$でコンパクト化しているから，とりあえず直径に当たる$\boldsymbol{R}_+$がモジュライになる．TypeIIAの方も，理論のモジュライ空間は結合定数に当たる一つのパラメータ$\boldsymbol{R}_+$だけ．これも対応している．

注１：　　　なんだか安易だこれでいいのか，と感ずる方がいるのではないか．筆者も同感である．しかし，これだけで同じと言っているわけではない．

次に４を見る．前に，TypeIIA超弦理論の低エネルギー有効場の理論はTypeIIA超重力理論であるといった．TypeIIA超重力理論のラグランジアンは（5.1）を１０次元にコンパクト化して得られる．つまり，（5.2），（5.3）を（5.1）にだ移入して，得られる．（フェルミオンの部分も同様．）

注２：　　　ついでに言うと，１１次元では$N=1$超対称性があったが，１０次元では超対称性が増えて$N=2$になる．

これは，１１次元のM理論の低エネルギー有効場の理論をコンパクト化するとTypeIIA超弦理論の低エネルギー有効場の理論が得られることを意味する．つまり，４章の４がチェックされた．

といっても，２章で低エネルギー有効場の理論の求め方に関して述べたことがもし正しければ，これはたんなるトートロジーである．大した根拠にならない．

ただ一つ内容がありそうな根拠が，４章の３である．これを簡単に説明しよう．

まず，１０次元の弦理論の結合定数はDilatonΦの期待値であった．（正確にはe^{Φ}．）これは，１１次元で見れば，$dx^{(10)} \otimes dx^{(10)}$の係数つまり１１変数目の$\mathbf{S}^1$の大きさである．正確には，$R = e^{\frac{2\Phi}{3}}$である．$\lambda = e^{\Phi}$と置く．

これを見るには，次のことをしないといけない．（5.1）を単に１０次元にするとTypeIIA超弦理論の低エネルギー有効場の理論と微妙に食い違う．

特に，TypeIIA超弦理論では，NS側のもの（Ｂと計量にかかわるスカラー曲率）には$\mathbf{e}^{-\Phi}$のようなものがかかるが，Ｒ側のもの（$A^{(1)}$と$A^{(3)}$）にはかからない[5]．

式で書くと

$$
(5.4)\qquad
\begin{aligned}
L_{IIA} &= \int \sqrt{g} e^{-2\Phi} \left(R_g + |d\Phi|^2 + |dB|^2 \right) \\
&\quad + \int \sqrt{g} \left(\left|dA^{(1)}\right|^2 + \left\|dA^{(3)}\right\|^2 \right) + \int dA^{(3)} \wedge dA^{(3)} \wedge B
\end{aligned}
$$

（5.1）を単に１０次元にしたものはそういう形をしていない．つまり，次の（5.5）である．

$$
(5.5)\qquad \int_{\boldsymbol{R}^{1,9}} d^{10}x \sqrt{\det G_{(10)}} \left(e^{\gamma} \left(R_G + |d\gamma|^2 + \left|dA^{(3)}\right| \right) + e^{3\gamma} \left|dA^{(1)}\right|^2 + e^{-\gamma} |dB|^2 \right).
$$

（5.5）を計算するには，単に，（5.2）と（5.3）を（5.1）に代入して計算すればよい．γは変数か定数か気になるだろうが，変数だと思って計算する．$|d\gamma|^2$と$\left|dA^{(1)}\right|^2$の係数を出す計算はWarped product metricの曲率の計算である．（5.5）は正確な式ではなく，各項のオーダーを書いているだけである．

（5.4）と（5.5）を一致させるには，計量を$G_{(10)} = e^{-\gamma} g$と書き直す必要がある．

---

[5] これは，DilatonがNS側にいるせいだと思う．間違っていたらごめんなさい．

（これは，単なる共形変換であるが，ワイルがもともと一般相対論について導入したゲージ変換と同じものなので，ワイル変換と物理では呼ぶようだ．）こう書き直すと形が合う．これは単に，k型式を共形変換するとノルムがどう変わるか考えればよい．

そのあとで，DilatonとS^1の直径の関係を見直すと，$r = e^{\frac{2\Phi}{3}}$になる．この辺の話は[58]では2.3節の後半に書かれている．

さて，ここで，注意するのは，rが大きいときは弦理論では強結合の場合に当たるということである．従って，弦理論の非摂動論的な振る舞いを調べるというのは，１１次元のM理論ではS^1の直径が大きい場合を調べることになる．（S^1の直径が無限大の場合が，コンパクト化してない場合，つまりもともとの１１次元超重力理論の場合である．）

一般に，S^1の直径が大きいと，第１固有値が段々小さくなる．すなわち第１固有値はr^{-2}のオーダーである．

すなわち，これに対応する，軽い（オーダーがr^{-1}の）状態がTypeIIA理論の結合定数を無限にした極限にあることになる．そのオーダーを見るには，$G_{(10)} = e^{-\gamma} g$と直していることに注意する．すると，長さの尺度が変わったのだから，エネルギーも変わる．あるいは，単純に共形変換でラプラシアンの固有値は変わる．これを考えると，重さは

$$e^{-\frac{2\Phi}{3}} \gamma^{-\frac{1}{2}} = \lambda^{-1}$$

になる．すなわち，TypeIIA理論の強結合（$\lambda \to \infty$の極限）で，λ^{-1}に比例する軽い状態（ヒルベクト空間の元で重さを決める作用素の固有値がλ^{-1}に比例するもの）があることになる．これがあるか，がチェックする点である．

ところでこれはどうやったらチェックできるだろうか．実は，こういうものは，摂動論で作られるヒルベルト空間にはおそらく無いと思われる．さらに，摂動論でこういうことをチェックするわけには行かない．なぜなら，$\lambda \to \infty$の極限とはまさしく摂動論が使えなくなる場合だからである．

ではなにを使うのか，というと，その道具がBPS Saturated Stateというものである．これは何だろうか．

BPS Saturated State

この項については[56]が原典である．（数学者）O氏の意見では，最近のウィッテンの論文と比べたらひどく単純で読みやすいそうであるからごらんあれ．

ある粒子の重さは，$\sum \mathbf{p}_i^2$の固有値の平方根である．（$\mathbf{p}_i$，$\mathbf{i} = 1,\cdots,4$は４次元運動量．）つまり，４次元時空の中の世界線の接線のローレンツ計量での長さの平方根が重さである．このことから，４次元のローレンツ変換群の生成元が作る代数のある元を作用させると０になる，ということが，質量が０を意味することになる．従って，質量０の粒子に対応する状態から生成される，「４次元のローレンツ変換

群の生成元が作る代数」の表現空間は，質量０の粒子に対応する状態から生成されるものに比べて次元が小さくなる．

用語：　　状態（State）というのは，ヒルベルト空間の元のことである．

これに，Central Charge（いまの状況では位相的な制限とかかわる電荷である）というのをいれて中心拡大を行い，さらにローレンツ変換を超対称性に大きくして考えると， BPS Saturated Stateという概念が現れる．

まず，Central Chargがない場合を述べると，ローレンツ変換を超対称性に大きくして考えたとき，やはり，そのような代数の表現空間は質量０の粒子のばあいの方が正の粒子の場合より小さい．

次に，その粒子が「電荷」を持っていたとすると，ローレンツ変換を超対称性に大きくした群ではなく，その中心拡大が，そのような状態には作用する．これから，中心拡大のない場合に０であったのが，ずれる．

例えば，元々全ての粒子の質量が０以上である，という式が，質量は電荷で決まるある数より大きい，という式になる．この式がBogomolomy boundである．

数学ではこれに当たる式は色々あって

（5.6）　　　　ヤンミルズ汎関数の値≥ｃチャーン数の全体値

等が有名である．

注３：　　（5.6）を超対称性とどうやって結びつけるか，実は筆者には分からない．多分できるはずだけれど．

さて，Bogomolomy boundで等号が成り立つと，作用していた「ローレンツ変換を超対称性に大きくしてそれを中心拡大した代数」のある元が，その状態には０で作用する．つまり，その状態から生成される表現空間の次元が小さくなる．Bogomolomy boundで等号が成り立つ場合のことをBPS Saturated Stateと呼ぶ．（（5.6）では自己共役接続である．）

ここで次の仮説をおく．

仮説：　　重さなどの定量的なものは，量子化で補正を受けるが，対称性等は理由がない[6]限り量子化でも保たれる．

これを認めると，次のことが分かる．ある状態がBPS Saturated Stateであるかどうかは，その重さが幾つかという問題ではなくて，表現空間が小さくなるかといった，対称性の問題である．従って，量子効果について分かっていなくても，BPS Saturated Stateの重さは計算できる．

これは大変有用である．つまり，量子効果が強くて摂動論などを使ってはものを調べることができないときに，とにかくなにか，正確な情報が得られるのである．

[6]例えばアノーマリがないとき

M理論とTypeIIA理論の双対性（続きといっても分からなかった）

さて，この話を一応完結させる．といってもここから先は筆者にはよく分からない．BPS Saturated Stateで，TypeIIA理論の強結合の極限で（$\lambda\to\infty$の極限）で，重さがλ^{-1}に比例するものはあるだろうかというのが，残された問題である．この場合の電荷とは，TypeIIA理論にある１型式だという．これが電荷になっているBPS Saturated Stateの重さはλ^{-1}に比例すると書いてあるが，結局分からなかったので，ここまでにする．（次の項でちらっとでてくるU双対を使うという．）

注４：　　この１型式はR-R側にあるから，そのになっている電荷はR-Rchargeという．[58]のころはR-RchargeをもつBPS Saturated Stateの正体が何であるかは不明であった，したがって[58]の記述はずいぶん間接的で分かりづらい．現在では，そのような状態はD Braneである，と分かっているのだと思う．だから，多分，この質量の式もより分かりやすくなっているはずである．

TypeII理論のトーラスコンパクト化

次にTypeII理論のトーラスの場合のコンパクト化について触れる．おそらく数学的に面白い結果がでてくるのは，トーラスでなく，もっと複雑な多様体（Ｋ３曲面とかカラビ・ヤウ多様体とか）でコンパクト化した場合と考えられるが，トーラスの場合を荒く理解するのは，カラビ・ヤウ多様体などの場合になにが成されているのかを見る助けになると思われるので，トーラスの場合をまず説明する．トーラスコンパクト化のモジュライについては[36]が分かりやすい．主張は

命題１１：　Bosonic String のT^dでのコンパクト化のモジュライ空間は，$O(d,d)(\boldsymbol{Z})\backslash O(d,d)/O(d)\times O(d)$である．

d次元のトーラスT^dでコンパクト化を考える．３章ではBosonic Stringのコンパクト化を考えていた．そのときは，T^d方向の右向き及び左向きの運動量，p_Rとp_Lが取る値を考えることで，モジュライ空間がつくれる．これを説明する．

そのために，（3.2）のモード展開をまねて，

（5.7）
$$\varphi_R(s-t)=x_R-p_R(s-t)+\sum a_R e^{k\sqrt{-1}(s-t)},$$
$$\varphi_L(s+t)=x_L+p_L(s+t)+\sum b_k e^{k\sqrt{-1}(s+t)},$$

を考える．ただし，今度は，p_Rとp_Lはd次元のベクトルである．（5.7）が$S^1\to T^d\times\boldsymbol{R}^{1,9-d}$なる写像として，Well difined になるためには

（5.8）
$$p_R-p_L\in\Gamma$$

が必要である．ただし，Γは$T^d=\dfrac{\boldsymbol{R}^d}{\Gamma}$なる格子である．一方，$p_R+p_L$はトーラス上

振動しているものの運動量だったから

（5.9）
$$p_R + p_L \in \Gamma^{\perp}$$

である．ここで

$$\Gamma^{\perp} = \left\{ \vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \in \boldsymbol{Z},\ \forall \vec{w} \in \Gamma \right\}$$

は双対格子．（しかし以上の書き方はいい加減に考えてきたつけでどこかで２倍違っている．）

さて，$\boldsymbol{R}^d \oplus \boldsymbol{R}^{d*}$（後者は前者の双対）を考える．$\boldsymbol{R}^d \oplus \boldsymbol{R}^{d*}$ 上の２次形式を

$$\langle (e_1, e_2), (e_1', e_2') \rangle = e_2'(e_1) + e_2(e_1')$$

で入れる．これは(d,d)型の２次形式である．$\Gamma \oplus \Gamma^{\perp}$をこの中の格子だと思う．これで，$\boldsymbol{R}^{d,d}$ の格子とΓの関係がついた．

もう少しきちんと述べると，分解$\boldsymbol{R}^{d,d} = \boldsymbol{R}^d \oplus \boldsymbol{R}^d$ を止める．コンパクト化するトーラスを動かすと，$\boldsymbol{R}^{d,d}$ のUnimodularかつEvenな格子が決まる．

この格子が２つ同じとは，$\boldsymbol{R}^{d,d} = \boldsymbol{R}^d \oplus \boldsymbol{R}^d$ なる分解を保つ，$\boldsymbol{R}^{d,d}$ の等長変換で移るときである．

このような格子のモジュライが，$O(d,d)(\boldsymbol{Z}) \backslash O(d,d) / O(d) \times O(d)$である．

例えば，$\mathbf{d} = 1$であると，$O(1,1)/O(1) \times O(1)$ は実数で，これに，$O(1,1)(\boldsymbol{Z}) = \{\pm 1\}$が作用していることになる．$-1 \in O(1,1)(\boldsymbol{Z})$ が$r \mapsto 1/r$ というＴ双対に対応する．

$\mathbf{d}$が大きいと，Ｔ双対はもっと色々あって，$O(d,d)(\boldsymbol{Z})$で表される．$O(d,d)(\boldsymbol{Z})$をＴ双対群と呼ぶ．これは，トーラスの等長変換群を含むがもっと大きい．

次にTypeII Super Stringを考えよう．前に説明した，コンパクト化で重さ０の粒子がいつ現れるか，を思い出そう．TypeII Super StringのNS側には，いつも対称２テンソルと２型式があった．

これから，$T^d \times \boldsymbol{R}^{1,9-d}$ なるT^d 上でのコンパクト化を考えて生じる，$\boldsymbol{R}^{1,9-\mathbf{d}}$上の重さ０のスカラー場は，従って，$T^d$ 上の対称テンソルと２型式の組に対応する．ただし，どちらも定数でなければならない．したがって，とりあえずd^2 このスカラー場ができる．これがパラメトライズするのが，Bosonic Stringのときと同じ$O(d,d)(\boldsymbol{Z}) \backslash O(d,d) / O(d) \times O(d)$である．（これはNS側の作り方を見れば分かると思う．）

従って，やはりＴ双対群は$O(d,d)(\boldsymbol{Z})$である．ところがそれ以外にまずモジュライにはDilatonの期待値があり，また，NS側から来るものがある．TypeIIBの場合には，例えばDilatonはR側のスカラーと組んで複素数になり，Ｓ双対で変換される．すなわち，Ｓ双対群$SL(2;\boldsymbol{Z})$が作用している．

一般にはこの２つの群は交換しない．さらにこれが合わさって，より大きな対称性の群ができる．これをU双対群という．

例えば$\mathbf{T}^6$でコンパクト化すると，Ｔ双対が$O(6,6)(\boldsymbol{Z})$，Ｓ双対が$SL(2;\boldsymbol{Z})$であるが，$O(6,6)\times SL(2,\boldsymbol{R})\subseteq E_7$（のnon compact maximal splitなreal formなるもの）で，U双対群はその格子だという．（これはHullTownsend[24]で見つかったそうであるが，この論文は筆者には理解できなかった．）

従って，理論のモジュライ空間は，$E_7(\boldsymbol{Z})\backslash E_7/SU(8)$であるという．（$SU(8)$は$E_7$の極大コンパクト群）．このパラメータの中には結合定数が埋まっている．（Ｓ双対群$SL(2;\boldsymbol{Z})$はU双対に入っているから．）したがって，ここで，強結合極限を考えることは，この局所対称空間のエンドに行くことになる．Wittenは[58]で，このようなエンドたちを，各々のdで調べ，それが，必ず，TypeII理論の次元が異なるかも知れないトーラスのコンパクト化に対応することを見いだした．このようにして，理論のモジュライ空間を動き回って，エンドに進むことで，次元が違う弦理論を行き来できるわけである．

注５：　　以上この項は，大体どんなことをしているか見ていただくために，よく分からないままで写してきたので，誤解があるかも知れない．

注６：　　ここでは，TypeIIAとTypeIIBを区別しなかったが，この二つはトーラスでコンパクト化すると同じになる．（Ｔ双対で移る．命題１６．）

TypeII理論のＫ３曲面のコンパクト化とHeterotic Stringのトーラスコンパクト化

命題１２：　TypeIIAStringのＫ３曲面でのコンパクト化は，Heterotic Stringの$\mathbf{T}^4$でのコンパクト化と等価である．

理論のモジュライ空間が両方計算できて$SO(20,4;\boldsymbol{Z})\backslash SO(20,4;\boldsymbol{R})/(SO(20)\times SO(4))\times\boldsymbol{R}^+$に一致する，というのが一番の根拠と思われる．

用語　このような理論のモジュライ空間を<u>Narain moduli space</u>と呼ぶ．Heterotic Stringのトーラスコンパクト化のモジュライ空間を決定したのがNarain[34]だからだと思う．

この説明をしよう．（このことに関する数学者が一番読みやすい文献は[1]だと思われる．）

まず，Heterotic Stringのトーラスコンパクト化の方を考える．少し一般化して次の命題を考えよう．

命題１３：　Heterotic StringのT^dでのコンパクト化のNarain moduli spaceは$SO(d+16,d;\boldsymbol{Z})\backslash\ SO(d+16,d;\boldsymbol{R})/(SO(16)\times SO(d))\times\boldsymbol{R}^+$である．

３章で少しした説明では，Heterotic String では，左と右ではTarget Space が違っ

ていて，いまの場合は一方がT^dでもう一方がT^{d+16}である．そう思って（5.17）のモード展開を見る．つまり，p_Rはd次元の格子に，p_Lは$d+16$次元の格子に属すとみなす．条件（5.8），（5.9）はp_Lを$\pi(p_L)$（p_Lの４次元への射影）と置き変えてる．

すると，同様に考えて，(p_R,p_L)たちは，$\boldsymbol{R}^{d,d+16}$のある格子を作っている．ここで，$\boldsymbol{R}^{d,d+16}$には左と右への分解，$\boldsymbol{R}^{d,d+16}=\boldsymbol{R}^d\oplus\boldsymbol{R}^{d+16}$が決まっていると考える．

もう少しきちっと言うと，$\boldsymbol{R}^{d,d+16}=\boldsymbol{R}^d\oplus\boldsymbol{R}^{d+16}$を止める．コンパクト化するトーラスを動かすと，$\boldsymbol{R}^{d,d+16}$のUnimodular かつEvenな格子が決まる．この格子が２つ同じとは，$\boldsymbol{R}^{d,d+16}=\boldsymbol{R}^d\oplus\boldsymbol{R}^{d+16}$なる分解を保つ，$\boldsymbol{R}^{d,d+16}$の等長変換で移るときである．

この同値関係で考えた格子のモジュライ空間は，$SO(d+16,d;\boldsymbol{Z})\backslash SO(d+16,d;\boldsymbol{R})/SO(16)\times SO(d)$ である．（ただし，ここで$\mathbf{d}>0$とする．これは，２つのUnimodular かつEvenな格子がいつも同型なために必要な条件である．

主張ででてきた残りの$\boldsymbol{R}^+$は結合定数である．これで一応主張は示された．

別の見方をしてみよう．$SO(d+16,d;\boldsymbol{Z})\backslash SO(d+16,d;\boldsymbol{R})/SO(16)\times SO(d)$ は$d(d+16)$次元であるが，このうちd^2次元分はBosonic Stringの場合と同様に理解できる．残りの$16\mathbf{d}$に対応する部分は，T^d上のゲージ場（$E_8\times E_8$または$SO(32)$の極大トーラスに対応）であると見なせる．これは，ファイバーではヤング・ミルズ接続でなければならないが，いまの場合は，ファイバー方向の束は自明で（そうでないとアノーマリがでるのだと思う），従って，T^d上の平坦ベクトル束になる．すなわち，定数係数１型式１６個で$16d$個ある．しかし，こう思ってしまうと，対称性$SO(d+16,d;\boldsymbol{Z})$が見えてこない．

命題１３で，Heterotic Stringのゲージ群は$E_8\times E_8$と$SO(32)$を区別しなかった．実はこの二つはS^1コンパクト化をすれば，その中で連続的につながる．これを説明しておこう．$d=0$の場合には$SO(d+16,d;\boldsymbol{Z})\backslash SO(d+16,d;\boldsymbol{R})/SO(16)\times SO(d)$ は１点であるが，実は理論のモジュライは２点である．これは，２つの正定値Even Unimodularな格子が必ずしも同型でないこととかかわる．（これは数学の定理．不定値だと一意になる．）従って，$E_8\times E_8$のルート格子と$SO(32)$のルート格子はつながらないが，一つ例えば自明な格子を足すと，$SO(1+16,1;\boldsymbol{Z})\backslash SO(1+16,1;\boldsymbol{R})/SO(16)\times SO(1)$でつながる．

次に，Ｋ３曲面でコンパクト化したTypeIIAStringのモジュライ空間を調べよう．TypeIIAStringはNS側に計量，２型式，を持ち，R側に1型式と３型式を持つ．K3曲面は１次と３次のホモロジーが自明だから，Ｒ側の１型式と３型式からはコンパクト化によってスカラー場はでてこない．従って理論のモジュライ空間はNS側だけ見ればよい．計量に関わる理論のモジュライ空間は勿論Ｋ３曲面に入れる計量で決まる．ただし，超対称性を保つために，リッチ曲率０の計量でなければならない．２型式の方はもう一寸難しいので暫くおいておく．まず，Ｋ３曲面のリッチ曲率０の計量のモジュライ空間であるが，これは

$$SO(19,3;\boldsymbol{Z})\backslash SO(19,3;\boldsymbol{R})/(SO(19)\times SO(3))\times\boldsymbol{R}^+$$

に一致する．これは純粋の数学である．写像だけ与えておこう．リッチ曲率０の計量があるとすると，Ｋ３曲面の２次のコホモロジー$H^2(K3,\boldsymbol{R})$にホッジの作用素が定まる．その，±1の固有値，つまり，自己共役及び反自己共役２型式で張られる部分空間はそれぞれ，$\boldsymbol{R}^{19}$と$\boldsymbol{R}^{3}$で$H^2(K3,\boldsymbol{R})$の交叉型式で負定値および正定値である．これを用いて$H^2(K3,\boldsymbol{R})\cong\boldsymbol{R}^{3,19}$なる同型を作る．すると，$H^2(K3,\boldsymbol{Z})$が$\boldsymbol{R}^{3,19}$の格子と思える．このような格子のモジュライ空間が
$SO(19,3;\boldsymbol{Z})\backslash SO(19,3;\boldsymbol{R})/(SO(19)\times SO(3))$である．残りの$\boldsymbol{R}^+$は計量全体の定数倍に対応する．

$SO(19,3;\boldsymbol{Z})$は$H^2(K3,\boldsymbol{Z})$の交叉型式を保つ自己同型であるが，これは全て可微分同相で実現される．

次にB Fieldを考える．３章の記述を思い出せば，これから，Ｋ３曲面でコンパクト化したあとの空間の質量０粒子が，$H^2(K3;\boldsymbol{R})$の分だけでる．これに対する$SO(19,3;\boldsymbol{Z})$の作用は見て通りのものである．

次に，B　Field　の期待値が整数だけ変わっても，理論は同じである．これは，大体，ラグランジアンが（**i**倍したあと）指数関数の肩にのっていているからである．従って，B Fieldの方から来るモジュライは$H^2(K3;\boldsymbol{Z})$で割る必要がある．

結局今までで分かったことは，モジュライ空間$SO(19,3;\boldsymbol{R})/(SO(19)\times SO(3))\times\boldsymbol{R}^{22}\times\boldsymbol{R}^+$を２つの群$H^2(K3;\boldsymbol{Z})$と$SO(19,3;\boldsymbol{Z})$で割るということである．（$H^2(K3;\boldsymbol{Z})$と$SO(19,3;\boldsymbol{Z})$は合わさって半直積を作る．）

これで大体$SO(4,20;\boldsymbol{Z})\backslash SO(4,20;\boldsymbol{R})/(SO(4)\times SO(20))\times\boldsymbol{R}^+$に近ずいたが，まだ割るべき群が足らない．この足らない分の対称性はＫ３曲面のMirro　Symmetryでつくれるというのが，Aspinwall-Morrisonの示したことである．（[1]参照．）

さて以上で理論のモジュライ空間の一致は分かった．しかし，これだけでは決して強い証拠とはいえない．次に，特異点を調べる．

Gauge Symmetry Enhanced point その２

理論の量とくにプレポテンシャルに特異点が生じるのは，質量０の状態がその点で突然発生したからである．というのは，ゲージ理論の状況で古田氏の稿で説明されるであろう．ここではそれは認める．（次の章でもう一度でてくる，そこで，少し説明する．）

突然質量０の状態が生じるような理論（真空）のモジュライ空間の点のことを，Gauge Symmetry Enhanced pointという．すでにこういう現象は３章で少し説明した．

Gauge Symmetry Enhanced pointが上の２つの理論で一致することを説明する．

まず，Heterotic　StringのT^4によるのコンパクト化の方を説明しよう．(p_R,p_L)たちはが$\boldsymbol{R}^{d,d+16}$のある格子を作っている，というのがそのときの描像であった．

重さ０の新しい状態は，$\boldsymbol{R}^{d,d+16}$のうちで，$16+d$次元の方p_Lの方からでる．すなわち，$p_R=0$の方である．一方では$\mathbf{p_L}$の方は，その長さは，長さと質量のずれに当たる特定の値（実は–2 ）にならないといけない．よって，$\boldsymbol{R}^{\mathbf{d,d}+16}$のなかの負定値な$\boldsymbol{R}^{16}$の方に含まれていて，長さが–2のもの，が格子の上にあると，Gauge Symmetry Enhanced pointが生じる．

別の言い方もできる．（ただし，Gauge Symmetry Enhanced pointの一部しか見えない．）Ｋ３曲面のモジュライ空間の一点を止めて，Ｋ３曲面上の$E_8 \times E_8$または$SO(32)$の極大トーラスに値を持つ平坦接続のモジュライ空間の中で，どこでGauge Symmetry Enhanced pointが生じるかを考える．もし，接続（ホロノミー）がgenericであると，（言い換えると，極大トーラスのワイルチャンバーの内点に対応すると）ゲージ群の極大トーラスに対応しない成分の表すゲージ粒子は，正の重さを持つ．（これは，ヒッグス機構である．古田氏のところで説明されるであろう．）従って，普通の点では余分な質量０の粒子はない．しかし，接続が０になったりすると，ゲージ群の極大トーラスに対応しない成分の表すゲージ粒子が重さが０になる．これがGauge Symmetry Enhanced pointである．この説明が用語の語感には一番近い．しかし，これだと，一部のGauge Symmetry Enhanced pointしかみえていない．（つまり，元々，１０次元のゲージ場から来ている部分だけしか見えない．）

この説明だと，どのようなEnhancedGaugeSymmetryがあるか分かる．すなわち，接続のホロノミー群の中心化群のリー環に対応する粒子が重さ０になる．もとが，$E_8 \times E_8$または，$SO(32)$だったから，この中心化群はADE型のディンキン図形で分類される．

さてでは，Heterotic StringのT^4でのコンパクト化でEnhanced Gauge Symmetryが起こっているとき，同じモジュライの点で，TypeIIA理論をＫ３曲面でコンパクト化するとなにが起こっているか考えよう．

$SO(3,19;\boldsymbol{Z})\backslash SO(3,19;\boldsymbol{R})/(SO(3)\times SO(19))$の部分だけ考える．すると，上で述べた説明から，Enhanced Gauge Symmetryが起こると，反自己共役２型式であって，整数係数コホモロジー群で実現され，さらに，長さ-2のものがあることになる．

Ｋ３曲面のホッジ分解で，反自己共役２型式は(1,1)型式に対応する．よって，長さ-2の反自己共役２型式で整数係数コホモロジー群の像に入っているもの，のポアンカレ双対は，「複素に埋め込まれた球面」になる．ところが，Ｋ３曲面のケーラー型式は自己共役側にある．（アインシュタイン計量を決めても，ケーラー構造は決まらない．ケーラー構造を決めるには，自己共役な２型式の作る３次元空間からケーラー型式を決める必要がある．）従って，この「複素に埋め込まれた球面」でケーラー型式を積分すると，０になる．これは，実は，「複素に埋め込まれた球面」というのはつぶれてしまっていることを意味する．

従って，正確に言うと，このときＫ３曲面は特異である．よく知られているように（中島，坂東・加須恵・中島）４次元Kähler　Einsteint多様体のモジュライ空間の「有限の点」で多様体が特異になると，その特異点はOrbifoldで，しかも，**ADE**型のディンキン図形で分類される．いまの場合は，EnhancedGaugeSymmetryが起こっている場所でできたOrbifold Singularityは，反自己共役２型式であって，整数係数コホモロジー群で実現され，さらに，長さ-2のものが作る，ディンキン　図形で表される．

これは，上のHeterotic StringのT^4でのコンパクト化のEnhanced Gauge Symmetryででてきたディンキン図形と全く同じであるが，Heterotic　Stringではリー群（ホロノミー群の中心化群）に，TypeIIではＫ３曲面の特異点に対応している．

注７：　　　ただし，両方とも，上のようなやり方で，幾何学的な対象に直接結び

つくのは一部である．つまり，TypeII Stringほうでは理論のモジュライ空間である $SO(4,20;\boldsymbol{Z})\backslash SO(4,20;\boldsymbol{R})/(SO(4)\times SO(20))$ のうちで，その一部である，$SO(3,19;\boldsymbol{Z})\backslash SO(3,19;\boldsymbol{R})/(SO(3)\times SO(19))$ の部分だけで，Heterotic Stringの方では，元々１０次元でゲージ群に対応していたものから来る質量０粒子だけである．

注８：　　上の議論，すなわち，反自己共役２型式で長さが–2 のものが，整数係数コホモロジーから来ると特異点が生じる，というのは，ドナルドソンが「Connectoin, Cohomology and Intersection form・・・」という有名な論文で，$\mathbf{SU}(2)$ ゲージ理論のモジュライ空間の特異点を調べたときに用いた議論と非常によくにている．ただし，直接関係があるかどうか分からない．（ドナルドソンの場合と直接関わるとしたら，非可換ゲージ場がある理論を４次元の多様体（トーラスではない）でコンパクト化した場合であるはずだから．）

１０次元での双対性（残り）

以上述べた，TypeII/K3とHetero/T^4 の双対性は次の章で述べるカラビ・ヤウ多様体の場合の雛形であるが，その話しに移る前に，１０次元の弦理論の双対性の残りの場合に簡単に触れておく．Horava-Wittenの２つの論文[22],[23]とPolchinski-Witten [40]が原典であると思われる．

命題１４：　M理論を $S^1/\{\pm 1\}$ でコンパクト化したものは，$E_8\times E_8$ Heterotic Stringと等価である．

Horava-Wittenで説明されている，多分中心的な点は，どうして１０次元のゲージ場がでてくるかである．

ちゃんと分かっていないから，一言だけ上の論文から写してくると，次の通り．普通１１次元の超重力理論にはアノーマリーはないが[7]，Orbifold $S^1/\{\pm 1\}$ で考えると，その特異点からアノーマリがわく．$S^1/\{\pm 1\}\times\boldsymbol{R}^{1,9}$ の特異点集合は１０次元であるから，このアノーマリは１０次元の時と同じように計算される．これをキャンセルするには，ゲージ場が必要で，そのゲージ場は $S^1/\{\pm 1\}$ の特異点（あるいは境界）の所にだけある．必要なゲージ場の構造群はランク１６でなければならない．これを２カ所に分けるから，$SO(32)$ はダメで，$E_8\times E_8$ が残る．

命題１５：　１０次元の $SO(32)$ Heterotic Stringは $SO(32)$ TypeI Stringと S 双対である．つまり結合定数を入れ替えると写りあう．

命題１４から命題１５がでる機構は，命題１０からTypeIIB　Stringが自分自身と S 双対であることが出る機構と同じである，とかかれている．そこで，命題１０からTypeIIB Stringが自分自身と S 双対であることが出ることだけ説明する．

それには，次のことが必要である．

[7] 次元とindex theoremの関係のようなもの？

命題１６：　TypeIIA理論をT^k（k奇数）でコンパクト化したもののＴ双対は，TypeIIA理論をT^k（k奇数）でコンパクト化したものである．

３章で説明したＴ双対はBosonic　Stringのものであったが，それをTypeIIのものにできる．しかし，すると，TypeIIAとIIBを（奇数次元では）入れ替えるという．このことの説明はたとえば，[大栗]3.5節をみよ．

これを認めると，TypeIIB StringのＳ双対は次のように理解される．

TypeIIBの理論（コンパクト化しないもの）は$S^1(r)$でコンパクト化して$r\to\infty$としたものである．よってＴ双対を取ると，TypeIIAの理論$S^1(2/r)$でコンパクト化して$r\to\infty$としたものである．一方でTypeIIAの理論はM理論を$S^1(\varepsilon)$でコンパクト化して$\varepsilon\to 0$としたものである．結局M理論を$S^1(2/r)\times S^1(\varepsilon)$でコンパクト化して，$r\to\infty$，$\varepsilon\to 0$とすると，TypeIIBの理論（コンパクト化しないもの）になる．$S^1(2/r)\times S^1(\varepsilon)$は非常に小さいトーラスである．これにはトーラスの自己同型$SL(2,\boldsymbol{Z})$が働く．この群がＳ双対群である．

この説明で一方を$S^1\big/\{\pm 1\}$にすると，主張６になるのであろう．多分，Open StringとClosed Stringが入れ替わるのは，$S^1\big/\{\pm 1\}\times S^1$を考えるからであろう．

上でしたTypeIIBのＳ双対の説明は，当時（９５年）はよく行われたが，いまとなっては古いのかも知れない．TypeIIBのＳ双対の説明はいまではD　braneを使ったものの方が具体的で良いのであろう．

第６章：Massless Black hole, Heterotic/TypeII duality, F理論

この章では，String　Dualityの中で，とりわけ代数幾何学的な部分を論ずる．代数幾何のプロに解説してもらった方が本当はいいのかも知れない．

Massless Black HoleとConifolds Singularityその１

まず，Stromingerの論文[50]の説明をする．

３次元カラビ・ヤウ多様体（３次元ケーラー多様体で$c_1 = 0$なもの，あるいは，ヤウの定理を使えば，リッチ曲率０といっても良い）Xを考える．X上の複素構造のモジュライ空間には自然に計量が入る．この計量のケーラーポテンシャルは，Xの周期行列を使って次のように表される．ΩをXの正則３型式とする．$H_3(X)\otimes H_3(X)\to \boldsymbol{Z}$なる，反対称２次形式がある．これに対して$A_i, B_i \in H_3(X;\boldsymbol{Z})$を

$$A_i \cdot B_j = \delta_{ij}, \quad A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0$$

なる基底とする．Xの複素構造は，周期

$$F_i = \int_{A_i} \Omega$$

$$Z^j = \int_{B_j} \Omega$$

でパラメトライズされる．ホッジ数h^{12}はA_iたち（のうちΩを積分して独立になるもの）の個数である．h^{12}が変形の次元であるのは小平・スペンサーとセール双対から分かる）ケーラーポテンシャルは

$$K = -\sum \log\left(iF_i\bar{Z}^i - iZ^i\bar{F}_i\right)$$

になる．（$\partial\bar{\partial}\boldsymbol{K}$がケーラー計量．）

さて，前の章のＫ３曲面の場合と同様に，$\boldsymbol{X}$の複素構造のモジュライは$\boldsymbol{X}$でコンパクト化したTypeII超弦理論のモジュライ空間のパラメータ（の一部）である．ケーラーポテンシャルはプレポテンシャル（Prepotential)と呼ばれる物理ではより自然な量と大体等価である．プレポテンシャルはこの場合

$$\mathcal{G} = \sum \frac{1}{2} F_i Z^i$$

である．（プレポテンシャルはSpecial Kähler多様体に対して決まる．**N** = 2 超対称性があると，理論のモジュライがSpecial Kähler多様体になる．）

前に，Gauge Symmetry Enhanced pointという言葉で述べたのは，このような量が特異になる点のことであった．

Ｋ３曲面の場合には，これは，Ｋ３曲面が特異点になるところであった．それでは，カラビ・ヤウ多様体が特異になるところでは，プレポテンシャルはどうなるであろうか．

Conifold Singularityとは３次元のサイクルがつぶれる点を指す．すると，（適当に基底を変えると，$Z^0 = \int_{B_0} \Omega = 0$ である．その点では，ケーラーポテンシャルはどうなるであろうか．これを見るには，その回りのカラビ・ヤウ多様体のUniversal Familyのモノドロミー（の H_3 への作用）を見ればよい．よく知られているように，これはべき零で

$$\begin{array}{ccc} Z^1 & \mapsto & Z^1 \\ F_1 & \mapsto & F_1 + Z^1 \end{array}$$

である．従って，この回りを一回りすると，$\mathcal{G}$はモノドロミーを持つ．これと$\mathcal{G}$の正則性から，$\mathcal{G}$の特異性が分かり

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2\pi i} Z^1 \log Z^1 + (\text{Holomorphic})$$

である．（このあたりは[8]も参照．）さて，問題は，この$Z^1 = 0$での特異性をどう解釈するかである．ここで，次のことを復習する．

重さのない粒子と特異点

命題１７　理論のモジュライのある点で，突然質量０の新しい状態が現れると，その点でプレポテンシャルが特異になる．

プレポテンシャルはファインマン経路積分で計算される．経路積分は，これこれの粒子がいくつある状態の寄与を，これこれというのを動かしてとったの和と見なせる．これこれの粒子がいくつある状態の寄与は，その状態にある粒子の重さの合計が大きければ大きいほど小さくなる．従って，重さが正のものしかないと，和は収束するが，０のものがあると発散する．

注１：　重さ０のものがある場合に，それは，理論（真空の）モジュライの方向を決めていると考えると，その寄与は足さないので，和は収束する．いま理論に

モジュライがあったから，もともと，質量０の粒子は理論のモジュライの次元だけはあった．しかし，その分は足さない．突然現れた質量０の粒子の寄与は足さなければいけないから，それが特異点を作る．

古田氏が，もっとうまい説明をしてくれると思うのでこれでやめる．

Stringソリトン

さて，元に戻ろう． $\mathbf{Z}^1=0$ の時に，なにか突然質量０の状態がわいてきているのであろう，というのが推測である．サイバーグ・ウィッテンの $N=2$ 超対称 $SU(2)$ ゲージ理論の時は，これは，モノポールであった．モノポールはゲージ理論のソリトンであった．そこで，この場合には何らかの「String　理論のソリトン」があると思われる．これはなにか．

String理論のソリトンは謎めいた，しかし重要な対象である．これは，いろいろなレベルで理解される．（レベルでといったのは，違ったものを見ているのでなく，Stringソリトンのいろいろな側面であるからである．）

１．BPS Saturated State

これは，５章で少し説明した．たとえば，１０次元のTypeIIA理論で，BPS Saturated Stateが存在するとしたらば，その重さは計算できて，話しがあう，ということであった．存在するという保証は一般には特にない． $N=2$ 超対称 $SU(2)$ ゲージ理論では，電荷と磁荷の組のうち２種類の場合にしかBPSSaturatedStateはなかった．（古田氏の稿参照）．１０次元のTypeIIA理論の場合には，U双対から存在が分かるとウィッテンは書いている．（筆者には理解できなかった．）

いずれにしても，BPS Saturated Stateというだけでは，非常に抽象的で，存在が「証明」されたにしても，それだけでは，実体は分からない．

２．（低エネルギー）有効場の理論の特異な古典解.

これが，ここで見える側面である．説明は次の項でする．

３．D brane

これについては次の章で述べる．

p Brane

電磁気学を思い出す．もし点電荷が原点にあると，そこから電場が生じる．電場は原点で特異である．従って，特異点を持つマックスウェル理論の古典解，に対して，特異点の所でなにか粒子がある，と思ってよいであろう．

次に，普通のブラックホールを考える．ブラックホールはアインシュタイン方程式の解（シュワルツワルドの解）から考えられたものである．すなわち，シュワ

ルツワルドの解は原点の近くで特異な解であった．

電磁気学の場合には，点電荷が表す粒子は量子化される．ブラックホールを粒子のように思い，量子化したいという願望はあったそうであるが，できていないそうである．（以上は[50]の序文の受け売り．）

特異な古典解として見える粒子は，古典論による近似が成り立つときでないと，とりあえず，意味がない．従って，こうやって見つかったStringソリトンが小さいスケールで意味を持つかは分からない．（以上は江口氏の集中講義の説明の受け売り．）

BPS Saturated Stateとの関係を論じるために，古典解がどのような電荷，磁荷を持つかを論じる．

電磁気学に戻る．$\boldsymbol{R}^{1,3}$ に世界線 $L \subseteq \boldsymbol{R}^{1,3}$ を持つ粒子を考える．（L は一次元）．$\boldsymbol{R}^{1,3} - \mathbf{L}$ に電磁場があるとする．つまり１型式 $\mathbf{A}$ である．粒子の持っている電荷はガウスの法則で計算できる．つまり，

（6.1）　$$電荷 = \int_{S^2} *dA \quad .$$

ここで，S^2 は $S^2 = \partial D^3$，$D^3 \cap L = 1$ 点となるように選ぶ．これのまねをして

（6.2）　$$磁荷 = \int_{S^2} dA \quad ,$$

とおく．これは勿論ストークスの定理より０である．（モノポールは存在しない！）これが，０でないようにしたかったら，A を１型式ではなく $\boldsymbol{R}^{1,3} - L$ 上の直線束の接続だと思えばよい．すると，左辺は大体この直線束のチャーン数である．

注２：　チャーン数だから，これは，整数である．従って量子化が自動的にされている．これが，ディラックのモノポールのアイデアなのだと思う．

注３：　電磁双対性は $dA \mapsto *dA$ である．これで，電荷と磁荷が入れ替わる．

以上の説明から，なぜSenの予想の所でモノポールチャージが磁荷だったかが分かったと思う．

以上は点粒子であった．$\mathbf{p}$Braneとは，これを，次元のある「粒子」に一般化したものである．$\boldsymbol{R}^{1,n}$ を考える．この中で，空間方向に $\mathbf{p}$ 次元の対象が $\mathbf{p}$Braneである．つまり，$L^{1,p} \subseteq \boldsymbol{R}^{1,n}$ である．

さて，$\boldsymbol{R}^{1,n} - L^{1,p}$ に k 型式の場 $A^{(k)}$ があったとき，どんな k,p の組に対して，$L^{1,p}$ の $A^{(k)}$ にたいする電荷，磁荷が考えられるかを見よう．

S^{n-p-1} を $S^{n-p-1} = \partial D^{n-p}$，$L^p \cap D^{n-p} = 1$ 点，と取ろう．

（6.3）　$$電荷 = \int_{S^{n-p-1}} *dA \quad ,$$

が$n-k=n-p-1$つまり$p=k-1$ならば定まり，

（6.4）
$$磁荷＝\int_{S^{n-p-1}} dA$$

が$k+1=n-p-1$つまり$p=n-k-2$なら定まる．まとめると，

命題18　p Braneは，$p+1$型式に対して電荷を$n-p-2$型式に対して磁荷を持つ．

$n=3$とすると，0 Braneつまり点粒子が，１型式に対して電荷及び磁荷を持つ．

また，弦理論の有効場の理論にはいつも２型式（B　Field）がある．従って，B Fieldが定める電荷を持つ1　Braneがある．これは，元々のStringそのもの（Fundamental Stringと呼ばれる）であるという．

Massless Black HoleとConifolds Singularityその２

さて，主張２より，１０次元（$n=9$）では，3Braneは，４型式に対して磁荷を持つ．TypeIIB理論ではR側に４型式$A^{(4)}$が存在した．従ってこの$A^{(4)}$に対して磁荷を持つ3Braneがありうる．

3Braneを低エネルギー有効場の理論の古典解として捉えると，それは，超重力理論の3+1次元の部分多様体で特異な解である．

いま，カラビヤウ多様体**X**でコンパクト化した場合を考えていた．つまり，$\boldsymbol{R}^{1,5}\times X$である．$A_1\subseteq X$は３サイクルであったから，$A_1\times\boldsymbol{R}$は3Braneである．超重力理論のここで特異な解はありそうである．

なぜならば，$Z^1=0$の時の複素構造（特異）に対応する，アインシュタインの重力場の方程式の解は，A_1で特異なリッチ曲率が０の計量である．ヤウの定理によれば，このような解が存在する？（モジュライの特異点でカラビ予想はどうだったか忘れた．）

ただし，これは，超がつかない重力理論の解である．また，磁荷ももっていない．

$\boldsymbol{R}^{1,5}\times X$でなく，$\boldsymbol{R}^{1,9}$の場合であったら，その3+1次元で特異な解で磁荷を持つものが作られている．（式は[50]の（3.3）．）

次の問題はGeometric PDEの問題として，少なくとも数学の問題としては，多分Openであろう．

問題　$\boldsymbol{R}^{1,5}\times X$上のTypeIIA超重力理論の古典解で，$A_1\times\boldsymbol{R}$で特異で，しかも，磁荷を持つものをつくれ．（多分ボソンの部分のオイラーラグランジュ方程式だけ考えていいのだと思う．）

問題　TypeIIA超重力理論の古典解で特異なものを考えると，その，特異点の次元は，TypeIIA理論に現れる何らかの型式について電荷か磁荷を持つBraneだけであろうか．

さて，この古典解は磁荷を持つから，それを使って，Bogomolomy不等式がでる．そして等号に対応するBPS　Saturated　Stateがあったとする．すると，問題の点

$Z^1=0$でこのBPS Saturated Stateは重さ０であることが分かる．

これが，重さ０のBlack Holeである．

Mirror Symmetryとの関係．

TypeIIB理論を$\mathbf{X}$でコンパクト化したものは，TypeIIA理論を$X^\vee$でコンパクト化したものと同じだと予想される．（これを量子ミラー対称性と呼ぶ．）ただし，$X^\vee$はXのミラーである．

Xの複素構造のモジュライは$\mathbf{X}^\vee$のケーラー型式のモジュライにかわり，$\mathbf{H}^{2,1}(\mathbf{X})=\mathbf{H}^{1,1}(\mathbf{X}^\vee)$になる．$A_i$は$H_3\cong H^3$の元だから，これは，$X^\vee$で$H_4\cong H^2$の元つまり４サイクルに対応する．つまり，２Brane$A_1\times\boldsymbol{R}$が４Brane $A_1^\vee\times\boldsymbol{R}$に移る．

TypeIIA理論には，３型式があるから，４Braneが磁荷を持つ．

幾何学的な描像では，ケーラー型式のモジュライ空間のある点で４サイクル$A_1^\vee$が重さを持たない．ただし，ミラー対称性では，複素構造のモジュライ空間に関わるものは量子効果を受けないのに対して，ケーラー型式の方は量子効果がある．（例えば量子コホモロジー環．）従って，$A_1^\vee$の重さが０でありことも量子効果を考えて初めて成り立つ．

特異点解消との関係

$Z^1=0$で特異になったXは，別の方法でも特異点解消される．つまり，この点$Z^1=0$は２つの違ったカラビヤウ多様体XとX'のモジュライ空間の交点とみなされる．（すなわち$x\in X\cap X'$．）

モジュライ空間の次元は質量０のスカラー粒子の数であった．よって，質量０のスカラー粒子全体はモジュライ空間の接空間のようなものである．

この接空間は$x\in X\cap X'$で突然増える．これは自然で，$X\cup X'$を特異な複素解析空間と見れば，その（ザリスキー）接空間は，$x\in X\cap X'$ではT_xX+T_xX'に増える．

$x\in X\cap X'$をXの点と見ると，T_xX'の方向がStringソリトンにみえ，X'の点と見ると，T_xXの方向が，Stringソリトンに見える．このソリトンと普通の質量０粒子の入れ替えは，（ゲージ理論の）サイバーグ・ウィッテン理論にでてきた双対性に近い．

この項については，[17]参照．そこで論じられていることの一つは，違ったカラビ．ヤウ多様体が上のようにして移りあうことから，カラビ・ヤウ多様体によるコンパクト化全体は連結集合ではないかということである．これは，Reedのファンタジーと呼ばれるカラビ．ヤウ多様体のモジュライの空間全体の和の連結性と関わる．

Heterotic/K3の自己双対

次に，Duff-Minasian-Witten[14]の説明をする．ここでは，$E_8\times E_8$Heterotic String をＫ３曲面でコンパクト化した場合が論じられる．

Heterotic Stringであるから，$K3\times\boldsymbol{R}^{1,5}$上には$E_8\times E_8$を構造群に持つベクトル束$\mathbf{E}$がなければならない．$E_8\times E_8$束は，２種類の$c^2$を持つ（$\pi_3(E_8\times E_8)=\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$．）こ

れをＫ３曲面の基本ホモロジー類で積分すると数が２つできる．これを(n_1, n_2)とかく．

命題１９　アノーマリが消えるためには$n_1 + n_2 = 24$でなければならない．

２４はＫ３曲面の（接ベクトル束の）c^2である．大体，これから，重力場のアノーマリがでてきて，それとキャンセルするには同じだけゲージ場からアノーマリがでなければならない，というのが，命題の「証明」である．詳しくは分からないから，これ以上説明しない．（[18]の13.3節から13.5節参照．）（前のトーラスのときはベクトル束は自明である必要があった．）

[14]が論じているのは$(n_1, n_2) = (12,12)$の場合である．

さて，Heterotic Stringをカ３曲面でコンパクト化したものの理論のモジュライは，重力場に関わるＫ３曲面そのもののアインシュタイン計量のモジュライと，その上の，ベクトル束Eの自己共役接続のモジュライをあわせたものである．つまり

$$\mathcal{M} = \left\{(g, A) \mid g \text{ Einstein metric on } K3, \quad A \text{ ASD connection of } E \text{ w.r.t } g\right\}.$$

本当は，右辺はゲージ変換群で割る必要がある．

命題２０？　$\mathcal{M}$のコンパクト化[8]には双対性をあらわす自分自身へのInvolutionがある．

？がついているのはDuff-Minasian-Wittenの主張を本当にそう読んでいいのか今一つ自信がないからである．例えば$\mathcal{M}$は量子変形されるのかどうか？

Duff-Minasian-Witten§4で論じられているのは，第３章で言う５である．すなわち，$\mathcal{M}$のコンパクト化の違ったタイプの特異点どうしの対応である．

E_8が２個あると面倒なので１個にする．Ｋ３曲面上の$c^2 = k$のASD接続のモジュライを$\mathcal{M}_k$とおく．まず，指数定理を使うと，$\dim \mathcal{M}_k = 120k - 992$だそうな．（ホントはチェックしないといけないけれどサボっています．これは，指数定理で計算すればチェックできるはず．）

さて，まず，$\mathcal{M}_k$の特異点として，E_7に構造群が落ちる場合（可約接続）を考える．このモジュライの次元は，$72k - 532$だそうな．

これを，主張の双対写像で写すと，違った特異点に行くという．それは，１点でバブルしたもの（コンパクト化に含まれる）であるという．

E_7可約な接続の特異性は$E_7 \subseteq E_8$の中心化群つまり$SU(2)$からくる．一方，バブルがでると（この場合は$c^2 = 1$の$SU(2)$インスタントンがバブルする）$SU(2)$が張り合わせのパラメータとしてでる．これは話が合っている．

次元を比べる．$k = 12$だった．$\dim \mathcal{M}_{12}$のなかでE_7可約なものの余次元は上の式を信用すれば116である．

[8] これは普通の数学の意味のコンパクト化である．

一方でバブルの方は，バブルする点のパラメータ４，バブルでc^2が１減るから-120よって，やはり116が余次元でぴったり合う．

この種の計算が色々なされている．つまり，可約になる場合とバブルがいろいろなパターンででる場合の比較である．

これはゲージ場だけであるが，さらに，Ｋ３曲面の特異点も考察されている．（つまり，$\mathcal{M}$を作る両方のパラメータを動かす．）一つ例を写すと，$SU(6) \subseteq E_8$についての可約接続を一方で考える．この群の中心化群は$SU(3) \times SU(2)$である．

これに対する双対はＫ３曲面がA_1型の特異点をもち，その点に$c^2 = 3$のバブルが載っているものだという．この種の対応がたくさん書かれているがこの辺でやめる．原論文をごらんあれ．

注４：　　　この手の対応を数学で作る方法はフーリエ・向井変換であろう，といわれている．すなわち，多分，$K3 \times K3$上の層を考え，$F \mapsto \pi_2 ! \pi_1^* F$でＫ３上の層をＫ３上の層の圏の導来圏の元に移す．そのような対応で，命題２０のようなものを証明できたら大変面白いと思う．

注５：　　　フーリエ・向井変換はフーリエ変換の一般化と見なせる．Ｔ双対もフーリエ変換であった．これらは一種のCorrespondenceである．中島氏がアファインリー環の表現をゲージ理論から作るときもCorrespondenceが用いられた．双対性は多分Correspondenceを使って理解されるべきものであろう．

Heterotic/K3$\times T^2$とTypeII/Calabi Yauの双対性

次に，Karchu-Vafa[26]の解説をする[9]．この論文のタイトルにでてくる，$N=2$ Compactification of Heterotic Stringというのが，Ｋ３$\times T^2$によるコンパクト化であるというのは，次の理由である．HeteroticStringは１０次元では$\mathbf{N}=1$超対称性を持つ．それを$\mathbf{T}^2$でコンパクト化すると，$\mathbf{N}=2$に超対称性が上がる．それをＫ３でコンパクト化すると超対称性は変わらず$\mathbf{N}=2$である．よって，４次元の$N=2$超対称な理論になる．これは，サイバーグウィッテンの理論と同じ４次元で$N=2$であるから，関係があるとみられる．

１０次元のTypeII理論のコンパクト化で同じ$N=2$超対称な理論を４次元で作ろうとすると，カラビヤウ多様体でコンパクト化する必要がある．（１０次元のTypeII理論はもともと$N=2$超対称ゆえ，Ｋ３$\times T^2$によるコンパクト化をすると，$N=4$超対称になってしまう．）

このあいだの対応を探す，というのが，Karchu-Vafaの論文の内容である．

Heterotic Stringの方のモジュライを考えよう．まず$K3 \times T^2$上には$E_8 \times E_8$を構造群に持つベクトル束Eが必要である．これは，まえの項で説明した（あんまりしていないけど）理由により，$\mathbf{T}^2$では自明，そして$K3$の方では，(n_1, n_2)で決まるチャーン数を持ち，$n_1 + n_2 = 24$である．

このモジュライ空間を考えるのだが，そのまま全部動かしたのでは，次元が高

[9]以下の説明を書くのに，菅原氏による講演（９月に京大であったもの）のノートを参考にした．ただし，誤解は全て筆者の責任である．

すぎて，調べようがない．それで，いろいろな条件を付けて次元を減らした一部を調べる．そして，それが，カラビヤウ多様体でモジュライの小さいものの双対になっているようにする，というのが，ストーリーである．

もう少し詳しく見てみよう．

まず，言葉を幾つか復習する．（古田氏の稿に説明してあると思う．）$N=2$ 超対称な場の理論を４次元で考えると，そこに現れる場は，ベクトルmultiplet, Hyper multiplet等にまとめられる．ベクトルmultipletはゲージ場にHyper multiplet は物質場に対応する．ボソン（テンソル）だけ数えると，ベクトルmultipletには１つのベクトル場（接続）と１つの複素スカラー，Hyper multipletには２つの複素スカラーがある．

質量０のスカラー場は理論のモジュライ空間のパラメータを与える．１０次元のString Theoryを４次元にコンパクト化した場合の，モジュライ空間のパラメータに対して，対応するスカラーがベクトルmultipletに入っているか，Hyper multipletに入っているか考える．

カラビ・ヤウ多様体でTypeIIAをコンパクト化した場合を考える．TypeIIA理論のモジュライ空間のパラメータには，アインシュタイン計量のモジュライ空間があるが，これは，複素構造とケーラ型式（のコホモロジー類）で決まる．前者の次元はh^{21}後者の次元はh^{11}である．（h^{21}，h^{11}はホッジ数のこと）．他に，結合定数（Dilatonの期待値）がある．また，質量０のベクトル粒子にはもう一種類の粒子（graviphoton）があるという．

命題２１　ケーラ型式の変形のパラメータに対応するスカラーはベクトルmultipletに属する．また，複素構造の変形に対応するパラメータに対応するスカラーはHyper multipletに属する．DilatonはHyper multipletに属する．

証明は考えていたら分からなくなったので省略する．（[1]に説明してある．)よって，Hyper multipletの数は$h^{21}+1$，ベクトルMultipletの数はh^{11}．graviphotonを含むmultiplet（Hypermultipletでもベクトルmultipletでもない）にはベクトルがあるので，結局質量０のベクトル粒子は$h^{11}+1$個である．

カラビ・ヤウ多様体でh^{11}が小さいものは余り多くないそうである．そこで，そのようなカラビ・ヤウ多様体に，TypeII Heterotic Dualityで双対となるべき，Heterotic String のモジュライ空間を探す．

それには，$K3$ 上の$E_8\times E_8$ 接続であって，可約であるもののモジュライを考える．

以下，Karchu-Vafaの論文の最初の例（4.2節）だけ述べる．この例が特に興味深いのは，サイバーグ・ウィッテンのゲージ理論の場合の話に，直接関係していると考えられているからである．

まず，Heterotic String $E_8\times E_8$ をT^2 上でコンパクト化する．このモジュライ空間にはパラメータが色々あるが，$E_8\times E_8$平坦束に対応するパラメータは０にしておく．すると，モジュライは$\dfrac{SO(2,2)}{SO(2)\times SO(2)}$（をＴ双対で割ったもの）である．この中にはGauge Symmetry Enhanced Pointがある．すなわち，generic な点ではこのモジュライパラメータに対応するは$U(1)^4$を構造群とするゲージ場がある．（Heterotic String の

構成そのものと同様）．

注６：　　　ゲージ場（１型式＝ベクトル）が含まれるベクトルmultipletにあるスカラー粒子がモジュライのパラメータを与える．

しかし，特別な点では，$U(1)^4$が非可換群になる．$SU(2)\times U(1)^3$になる点を考える．

次に，もう一度，Ｋ３曲面でコンパクト化する．そのためには，Ｋ３曲面上で$E_8\times E_8\times SU(2)\times U(1)^3$を構造群とするベクトル束を考える必要がある．Ｋ３曲面上の$E_8\times E_8\times SU(2)\times U(1)^3$を構造群とするベクトル束は（位相的には）３つのチャーン類の組で決まる．

注７：　　　これは，この項の始めに述べた状況とは少し違っている．すなわち，この項の始めでは，いきなり，$K3\times T^2$でコンパクト化するとしたから，(n_1,n_2)の２個のチャーン数しかなかった．

さて，この３つのチャーン数が１０，１０，４である場合を取る．（４が$SU(2)$に対応するチャーン数．

そのようなベクトル束**E**をとり，Eのヤング・ミルズ接続のモジュライを考えるわけだが，モジュライ全体を考えずに，一部を考える．すなわち，E_8上の接続は両方とも$SU(2)\subseteq E_8$の接続から来るものを考える．

すると，そのモジュライ空間の点は$SU(2)\subseteq E_8$の中心化群E_7に対応する群$E_7\times E_7$の不動点である．

さて，このような接続の点で，接続のモジュライ空間を考えよう．その次元を数える．さらに，モジュライ空間の接空間には$E_7\times E_7$が作用するから，この作用を込めて考える．

注８：　　　この次元を計算するのには，指数定理を使うが，Atiyah-Hitchin-Siger複体ではないように見える．下に落ちてできるスピノルの数を数えている．数学でなにに対応するか，よく分からなかった．（これは数学語で本当は書けるはず）．

考えている接続が可約だから，AdEの構造群は$(SU(2))^2$でさらにE_7^2の作用がある．

（以後２倍するのが面倒だから，片方づつ考える．）このベクトル束を調べるには，E_8のリー環上の$SU(2)\times E_7$の共役表現を既約分解する．それぞれの成分に対応する，次元を計算すると，Hyper　multipletが$129+266$個あることが分かる．（うち２０個はゲージ場ではなく，Ｋ３曲面のモジュライパラメータである．）

これから，４次元に落としたあとでは，$E_7\times E_7\times U(1)^3$を構造群とする接続（ベクトルmultiplet）があって，この，$E_7\times E_7$を構造群とする$129+266$次元のベクトル束があることになる．（表現の形も分かる．）

ここで，ヒッグスメカニズムを使う．つまり，$129+266$　次元のうちで$266=2\dim E_7$個分に，真空期待値を与える．すると，$\mathbf{E}_7\times\mathbf{E}_7$が表すゲージ粒子が全

て重さを持つ．こうして，129個のHyper　multipletを持ち，$U(1)^3$ゲージ場（３つのベクトルmultipletを持つ理論の族ができる．

この族の双対は，存在すれば$h^{21}=128$，$h^{11}=2$のカラビヤウ多様体でコンパクト化されたTypeIIA理論である．

そのミラーを考えると，これは，$h^{21}=2$，$h^{11}=128$すなわち２つの（複素構造の変形）パラメータを持つカラビ・ヤウ多様体であるが,

$$0=z_1^{12}+z_2^{12}+z_3^6+z_4^6+z_5^2-12\psi z_1z_2z_3z_4z_5-2\phi z_1^6z_2^6$$

がそれだという．これは，複素構造の変形の次元が小さいカラビ・ヤウ多様体の例として，　Mirror対称性の研究の中で，プレポテンシャル等が，調べられている例だという．Hosono-Klemm-Theisen-Yau [64] および Candelas, De-la Ossa, Font, Katz, Morrison [9].

ここで注意するのは，MirrorSymmetryで移ったあと，すなわち複素構造のモジュライで考えると，プレポテンシャルに量子補正は存在しないことである（湯川Couplingそのものになる）．これは，ミラー対称性ではよく知られた事実である．

もともとHeterotic　Stingのプレポテンシャルが知りたかったが，それをまず，双対性で，$h^{21}=128$，$h^{11}=2$のカラビヤウ多様体でコンパクト化されたTypeIIA理論のケーラ型式のモジュライ空間の上のプレポテンシャルに写し（これは量子補正を受る），さらに，それをミラー対称性で$h^{21}=2$，$h^{11}=128$でコンパクト化されたTypeIIB理論に写したわけである．

Heterotic Stringのコンパクト化の描像に戻る．いま考えている理論のモジュライは，T^2コンパクト化でゲージ対称性が$SU(2)\times U(1)^3$に増えるもの全体である．

元々のモジュライ空間は４次元だったが，ゲージ対称性が$SU(2)\times U(1)^3$に増えるものだけを考えているので，モジュライはこれは３次元にへり，複素数τとDilaton$\boldsymbol{S}$がパラメータである．$\tau=i$でゲージ対称性はさらに$SU(2)\times SU(2)\times U(1)$に増える．これは，コンパクト化したあとで見ると，$U(1)^3$ゲージ場が$SU(2)\times U(1)$に増えていることになる．

Sを止めると（というよりむしろ弱結合極限で考えると）理論のモジュライ空間は$\tau\in\boldsymbol{C}$になり，１点$\tau=i$で特異である．（多分，Ｔ双対により，モジュライ空間は$\boldsymbol{C}$というより，$\boldsymbol{C}/\boldsymbol{Z}_2$なのだと思う．）これは，サイバーグ・ウィッテン理論の理論のモジュライ空間の量子効果が入る前の描像と一致する．従って，量子効果によって，理論のモジュライ空間は変形されているかもしれない．サイバーグ・ウィッテン理論がこの理論に一致していれば，特異点は２点になっているはずである．

TypeII理論の方では，理論のモジュライ空間は量子効果も込めてMirror　対称性で分かっている．これで見ると，確かに，特異点は２点に増えている．

もっと色々（TypeIIBに移って）計算できて，双対性についてさらに他のこともチェックできるようであるが，筆者には理解できなかった．この例及び他にこの論文に書いてある例は，単に理論のモジュライ空間が一致するといったこと以上に，詳しい計算によるチェックができている（String Duality ではむしろ稀な）例である

ように思う．パラメータが少ないモジュライ空間の計算に帰着にしているからであろう． 他にも，$\mathbf{h}^{21}=3$の双対になるべき場合などが書いてある．

なお，この論文の結果は，[28]に発展したという．その中で，Elliptic Fibrationとの関係等が注目され始めたようである．[1]の解説も参考になる．

F理論

最後に，３つの論文Vafa [54]，Morrison-Vafa [32][33]の筆者に理解できた一部について解説する．

そもそもＦ理論とはなにであろうか？

いままででてきた超弦理論は１０次元，M理論は１１次元であった．Ｆ理論は１２次元である．そして１２次元空間は(2,10)型，つまり計量が負の方向（時間）が２つあるという．

この１２次元は大体１０次元の空間の上のトーラスファイバー空間であるという．ただし，ファイバー束とは限らない．$M^{2,10}\to\boldsymbol{R}^{1,9}$である．そして，このトーラスのモジュライ空間のある極限がTypeIIBの超弦理論（の弱結合極限）になるという．

TypeIIB理論には，スカラー場が２つあった．この２つは，（3.12）式のように結びついて，複素数τを作る．この複素数数値スカラー場は，$\boldsymbol{R}^{1,9}$の上の上反平面に値を持つ，複素数値関数であるが，この$\mathbf{p}\in\boldsymbol{R}^{1,9}$での値は$\mathbf{M}^{2,10}\to\boldsymbol{R}^{1,9}$の$\mathbf{p}$でのファイバーであるトーラスのモジュライパラメータであるという．つまりファイバーは$\dfrac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{Z}\oplus\tau\boldsymbol{Z}}$である．

ここで，一瞬変に思えるのは，トーラスのモジュライパラメータは上半平面$\mathbf{h}$上の関数としては意味を持たず，$\dfrac{\mathbf{h}}{SL(2;\boldsymbol{Z})}$に値を持つ，しかし，これはＳ双対性により，τを$SL(2;\boldsymbol{Z})$で動かしても，TypeIIB超弦理論は変わらないから良いのだと言う．

注９：　　逆の言い方をすれば，Ｆ理論とTypeIIB理論の関係を前提にすれば，TypeIIB理論のＳ双対性は見えている．すなわち，ファイバーのトーラスの同型を表す$\mathbf{SL}(2;\boldsymbol{Z})$である．

ここで，注意すべきなのは，普通のTypeIIB理論では，τは大体定数で，そうでないにしてもどこか決まった期待値の回りをふらふらしているという描像であった．Ｆ理論ではτは変数として動き回る．

特に，トーラスファイバ空間$M^{2,10}\to\boldsymbol{R}^{1,9}$のファイバーが特異である点では，τは意味を持たない．このような点の集合は，実余次元２であるから，$\boldsymbol{R}^{1,9}$の８次元部分多様体，あるいは７Braneをなす．TypeIIB理論には２型式があったから，この７Braneは２型式に関して，電荷を持っているString ソリトンであるという．２型式はＮＳ側とＲ側に両方あるから，電荷は２種類ある．

ここまで読んできて，では，Ｆ理論はどんな場があってどんなラグランジアンを考えるのか，というのが，当然のように疑問になるであろう．実体が余りはっきりしなかったM理論でも，その低エネルギー有効場の理論が，計量・３型式の場の

理論である１１次元超重力理論である，ぐらいは分かっていた．Ｆ理論ではそういう考察は見たことがない．論文を見てもラグランジアンは書いてなくて，ついでに言えば代数幾何ばかり書いてある．

そういう記述がないのは，どうも，Ｆ理論には場はなくて幾何しかないらしい？．これは，Vafaが大栗氏達と研究していた，$N=2$ 超弦理論と関係がある（のアナロジー？）らしい．$\mathbf{N}=2$ 超弦理論というのは，World　Sheetに２つ超対称性を入れた弦理論である．（TypeIIの２はSpace　Timeの超対称性の数だから，ここでいう $N=2$ 超弦理論とは異なる．）すると，Space　Timeは４次元で$(2,2)$型の計量が入らなければならないらしい．（この辺はたんなる受け売りで，よく分かって書いてあるわけではない．例えば，[35]等を参照．ここでも時間が２つである．ところで，$N=2$ 超弦理論の特徴は対応する場の理論として現れる場がたった一つで，ケーラポテンシャルであることだと言う．超対称性が大きいと，それでほとんどの自由度がキャンセルされてしまい，残った場が有限個（普通の弦理論は無限個）になるらしい．これは，Target　Spaceに時間が２つある場合の特徴だという．従って，Target Space上の場の理論というのは簡単になり，ほとんど幾何学だけになる．Ｆ理論も同じだという．といわれても，実は，雲をつかむようでよく分からない．

以上は[54]からの一部抜き書きである．

[32][33]の方に移ろう．

Ｆ理論の一つの利点は，Ｆ理論のコンパクト化をつかうと，弦理論の現象を幾何学的（代数的幾何学的に）見ることができるという点である．

[32][33]で詳しく考察されているのは，Heterotic　Stringのコンパクト化とＦ理論の双対についてである．手始めが：

命題２２　Heterotic StringをT^2でコンパクト化したものの双対は（Elliptic Fibrationを持つ）Ｋ３曲面でＦ理論をコンパクト化したものである．

Heterotic　StringをT^2でコンパクト化したもののモジュライは前に説明したことから，$SO(2,18;\boldsymbol{Z})\backslash SO(2,18)/SO(2)\times SO(18)$ である．これは，Elliptic Fibrationを持つＫ３曲面の複素構造のモジュライと同一である[10]．

注１０：　TypeII弦理論Ｋ３曲面でコンパクト化すると，ただの複素構造のモジュライ空間より大きいものがでる．Ｆ理論の場合には複素構造のモジュライ空間だけになる．

注１１：　Ｆ理論をコンパクト化するには，Elliptic Fibrationを持つ多様体でコンパクト化しなければならない．

単にモジュライ空間の一致より，もう少し踏み込んで調べてみよう．すなわち，Gauge Symmetry Enhanced Pointを調べよう．

Heterotic　Stringのコンパクト化の場合はでに述べた．Ｆ理論の場合はこれはElliptic Fibrationの特異点から生じる．これを述べるのに，次のことを認める．

[10]割る群が本当に$SO(2,18;\boldsymbol{Z})$でいいかは未解決だそうな．

命題２３　Braneが１枚あると，その上には$U(1)$ゲージ場がある．Braneが何枚も重なると，Gauge場が大きく（非可換に）なる．

説明は次の章に回す．

さて，Ｆ理論でBraneがある場所は，その上のElliptic Fibrationが特異ファイバーを持つ場所である．従って，Ｋ３曲面をEllipticFibration$K3 \to \boldsymbol{C}P^1$として書いたとき，特異ファイバーにあたる$\boldsymbol{C}P^1$の点は有限個あり，そこにBraneがある．（全体で考えれば，Braneは８次元でよって７Braneである．）

よく知られているように，特異ファイバーはADE型のディンキン図形で分類される．（小平）一番単純なのが，A_1型でこれはBraneが１枚ある場合と見なせる．その単純な特異点がぶつかると，より複雑な特異ファイバーができる．よって，複雑な特異ファイバーはBraneが何枚も重なっている場所だとみなすことができる．従って，そのBraneには非可換ゲージ場がのっている．このゲージ群は，特異ファイバーを表すディンキン図形と同じディンキン図形で表されるリー群だという．

さて，これが命題２２と一致するか見てみよう．一番簡単な場合として，Heterotic Sting側でゲージ群が全く小さくならない場合を考えよう．Heterotic String側の理論のモジュライ空間はトーラスから来るモジュライ空間（$\frac{SO(2,2)}{SO(2)\times SO(2)}$，複素２変数）とゲージ場（$T^2$上の$E_8\times E_8$平坦接続）のモジュライ空間である．後者があると，その中心化群だけがコンパクト化したあとの重さ０のゲージ場として残る．従って，$E_8\times E_8$がゲージ場に残るのは，後者のパラメータが０のときで，複素２次元である．

一方で，Ｋ３曲面で２つのE_8特異ファイバーを持つElliptic Fibrationを持つものは複素２変数の族を成すという．式で書くと

$$y^2 = x^3 + \alpha z^4 x + (z^5 + \beta z^6 + z^7) \tag{6.5}$$

だそうな．両方２で次元があった．よってこの場合はチェックされた．勿論これでは，「証明」にはほど遠いがこれだけにする．

次に，もう少し難しい，しかし興味深い，Heterotic StringのＫ３曲面によるコンパクト化の場合を考えよう．

前に述べたように，$E_8\times E_8$ HeteroticStringをＫ３曲面でのコンパクト化するには，Ｋ３曲面上に$E_8\times E_8$束Eでそのチャーン数が(n_1,n_2)かつ$n_1+n_2=24$であるものを選ばなければならない．$(n_1,n_2)=(12+n,12-n)$と置いておく．

これに対して，Hirzebruch曲面を考える．つまり，$\boldsymbol{C}P^1$上の直線束でチャーン類がnのものL_nをとり，$L_n\oplus\boldsymbol{C}$の中の１次元部分空間全体を$F_n\to\boldsymbol{C}P^1$とおく．（位相的には$\mathbf{F_n}$は$\mathbf{S}^2\times\mathbf{S}^2$またはそれをねじったものである．）$F_n$上のElliptic Fibration X_nを考える．ただし，切断$F_n\to X_n$を含めて考える．（切断も含めて考えるときWeierstrauss Modelというそうな．多分，楕円曲線のワイエルシュトラウス標準型との関係であろう．）主張は

命題２４　$(12+n, 12-n)$なるベクトル束を持つＫ３曲面で$E_8 \times E_8$ Heterotic Stringをコンパクト化したものの双対は，Ｆ理論をX_n上でコンパクト化したものである．

[32]では，nが小さい場合が書いてあるが，あんまりここで説明するのに向きそうにない．$n=0$のばあいについてだけ一寸触れよう．この場合は，$F_n = \boldsymbol{C}P^1 \times \boldsymbol{C}P^1$である．従って，この２つの$\boldsymbol{C}P^1$を入れ替える対称性がある．この対称性がDuff-Minasian-WittenのＫ３曲面でコンパクト化した$E_8 \times E_8$ Heterotic Stringの自己双対であるという．Duff-Minasian-Wittenでは，可約接続が一方でバブルがもう一方で対応した．これが，Ｆ理論の描像と話が合うことが述べてあるが，省略する．

用語：　<u>Small instanton</u>とは大体バブルのこと．

[33]を少し解説する．命題２４を，次のようにして「示す」．まず，Ｋ３でElliptic fibrationを持つものを考える．$K3 \to \boldsymbol{C}P^1$．これに対して，命題２２をファイバーごとに適用する．すると，$\boldsymbol{C}\mathbf{P}^1$上のＫ３曲面束が得られる．これが$\mathbf{X_n}$である．

もう少し調べる．４章で５とかいたものを調べるとして，特異点の近傍を考えよう．そこで，Heterotic　String側で，コンパクト化に使う$K3 \to \boldsymbol{C}P^1$を考え，$\boldsymbol{C}P^1$の原点と無限遠点のファイバーの近傍に，ベクトル束の接続の全ての曲率が集中している場合を考えよう．この$\boldsymbol{C}P^1$の座標を$\mathbf{z'}$とする．

$z' \neq 0, \infty$とすると，$K3 \to \boldsymbol{C}P^1$の$z' \in \boldsymbol{C}P^1$のファイバーでは，トーラスとその上の自明な接続があることになる．これに，命題２２を適用したものは（6.5）式で与えられていた．（6.5）から生じるEnhanced Gauge Symmetryは$z=0$で１方のE_8を$z=\infty$でもう１方のE_8を与えた．

$z=0$では，（6.5）式は$y^2 = x^3 + z^5$が主要項である．さて，$y^2 = x^3 + z^5$に$\mathbf{z'}$を入れて，特異点の形が，$z'=0$の近くだけで変わるようにしたい．そのために主要項を

$$y^2 = x^3 + g_1(z')z^5$$

としてみよう．これは$g_1(z')=0$の所でおかしくなる．これを，$\deg g_1$個のバブルが$z'=0$の近くでが起こっているとみなす．このバブルは$E_8 \times E_8$の第１成分に対応する．よって，バブルの個数はチャーン数すなわち$n+12$である．

同様に，$z=\infty$の方で考えると，主要項は$y^2 = x^3 + z^7$の方である．これを同様に考察すると，$z=\infty$の近くの主要項は

$$y^2 = x^3 + g_2(z')z^7$$

で，g_2は無限遠の近くに$n-12$個の０点を持つ．これをあわせて，（６乗の項はつ

け加えても， $z=0,\infty$ の近くの振る舞いを変えないから），

$$y^2 = x^3 + g_1(z')z^5 + g_3(z')z^6 + g_2(z')z^7$$

でＦ理論をコンパクト化したものが双対であろう．g_1が$n+12$次式， g_2が$n-12$次式であることを考えると，この式は$F_n \to \mathbf{C}P^1$上のElliptic Fibration X_nを表している．

Gauge Theory Enhanced pointをＦ理論で論づるのは[48]等でも成されている．

この章の最初に紹介したStromingerの論文，および，Morrison Vafa のIIの後半にかかわる話題に少し触れる．ただし，この話題はすこぶる深い代数幾何で，代数幾何のプロでも物理のプロでもない筆者が解説するには不適当なので，少ししか述べない．

Heterotic String をＫ３曲面でコンパクト化するのが$N=1$超対称ゲージ理論を６次元で構成する一つの方法で，もう一つはＦ理論を（Elliptic Fibrationをもつ）カラビ・ヤウ多様体でコンパクト化する事であった．

この２つは，どのくらいきっちりとに対応するのであろうか．これを考えるためにはElliptic Fibrationをもつカラビ・ビヤウ多様体のモジュライ空間と，Heterotic StringをＫ３曲面でコンパクト化したときのモジュライ空間を比べるべきであろう．

カラビ・ヤウ多様体のモジュライ空間は，勿論，色々な成分を持っている．（つまり，違ったDeformation typeに属する多くのカラビ・ヤウ多様体がある．）これらは，しかし，お互いにつがっていて，交点で違ったモジュライに移る．Morrison Vafa のIIの後半の大きな部分はそれを数学として調べている．この交点の所の様子を，弦理論で解釈するための考え方が，Strominger この章の最初に紹介した論文であった．

注１２：　しかしここでは，Elliptic Fibrationをもつカラビ・ヤウ多様体だけを考えているので，そのモジュライ全体は連結ではないであろう．

それでは，この交点の様子は，Heterotic Stringの方で考えると，どのように解釈されるだろうか．「これは物理側で数学よりずっと少ししか分かっていない」と書かれている．物理側であると同時にこれはゲージ理論側であろう．つまり，Ｋ３のモジュライ＋その上のベクトル束の接続モジュライの様子である．これは，やはり，ベクトル束の選び方などによって，いろいろな成分に分かれ，接続が特異になったり可約になったりする点を通じてつがっている．

例えばMorrisonVafaのIIの7.3節を（はっきり理解しないないまま）写すと，Ｋ３曲面上で一方のE_8側がある一点でバブルし，この点を通じてチャーン数が一方のE_8側からもう一方のE_8に移るのは，Ｆ理論ではBlow up とBlow downでF_nから$F_{n\pm1}$に移るのに対応するという．

Ｆ理論のその後の文献など

いままで述べたのは Heterotic String/Ｋ３曲面とＦ理論/カラビ・ヤウ多様体の双対で，６次元$N=1$超対称場の理論に対応する場合であった．４次元に落とせば$\mathbf{N}=2$になる．これに対して，Heterotic String/カラビ・ヤウ多様体あるいはＦ理論/カラビ・ヤウ４foldなる双対があるはずで，これは，４次元で$N=1$である．これについての研究もあるようであるが，はたしてなにをしているのか知らない．４foldの研究には関係あるのかも知れない．また，４次元で$N=1$超対称性というのは，４次元への応用でも大事であろう．その文献は，筆者がたまたま見つけたものをあげると，Klem,Lian,Roan,Yau [29]，P.Mayr[31]である．これらは読んでいないので，ここで引用するのにふさわしいかどうか分からない．

また，最近でたFriedman-Morgan-Witten [15]は，Elliptic Fibrationを持つ多様体の正則ベクトル束のモジュライを調べて，Ｆ理論と話しがあうかチェックしているのだと思う．数学者には読みやすいのではないだろうか．（読んで紹介する予定だったが，間に合わなかった．）

それから，次の論文はＦ理論のGauge Symmetry Enhancementで大切と思われるが，やはり読むのが間に合わなかった．[4]

第７章：D Brane

D Braneの参考文献としては，Polchinsky [39]が標準的で優れている．

開いた元のＴ双対

DBraneとは，そこに，Stringの境界が位置することができるなにか．その説明は開いた元のＴ双対からはじめるのが普通である．そこで，３章の$S^1(r)$でコンパクト化した場合のＴ双対の説明に戻りモード展開をもう一度考える．

（7.1）
$$\varphi_R(s-t) = x_R - p_R(s-t) + \sum a_k e^{2\pi k\sqrt{-1}(s-t)},$$
$$\varphi_L(s+t) = x_L + p_L(s+t) + \sum b_k e^{2\pi k\sqrt{-1}(s+t)}.$$

ここで，考えるのが，開いた元であるとする．すなわち，これは，$\mathbf{t} \mapsto -\mathbf{t}$で対称なものを考えていることになる．

よって，（7.1）で

（7.2）
$$p_L + p_R = 0$$
$$a_{k,25} = b_{k,25}$$

としたことに当たる．（ここで$a_{k,25}$等は，コンパクト化する２６番目の次元の成分である．（Bosonic Stringだから２６次元で考える．）p_Lなどは始めから２６番目の成分しかない．

（7.2）は開いた弦の両端で，ノイマン境界条件

（7.3）
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,0) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,1/2) = 0$$

をかしたことにあたる．別の言い方で（7.3）を導くには次のようにする．Bosinic Stringのラグランジアン（エネルギー）（1.4）から，オイラーラグランジュ方程式（Targetがユークリッド空間なら単なる波動方程式）を導くためには，部分積分しなければならない．開いた弦だと境界があるから，部分積分には（7.3）が必要である．

さて，Ｔ双対

（7.4）
$$\hat{\varphi}_R(s-t) = +\varphi_R(s-t)$$
$$\hat{\varphi}_L(s+t) = -\varphi_L(s+t)$$

をこれに施すと（7.2）は

(7.5)
$$p_L - p_R = 0$$
$$a_{k,25} = -b_{k,25}$$

に変わる．よって$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_R + \hat{\varphi}_L$に対しては

(7.6)
$$\hat{\varphi}_{25}(0,s) = \hat{\varphi}_{25}(1/2,s) = 0$$

を意味する．$\hat{\varphi}_{25}(1/2,s) = 0$の方を説明する．$t \in S^1 = \dfrac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{Z}}$である．もともと，$p_R - p_L$は$\mathbf{S}^1(\mathbf{r})$を動く$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_{\mathbf{R}} + \hat{\varphi}_{\mathbf{L}}$の重心の運動量だったから

(7.7)
$$p_R - p_L = \frac{2n}{r},\quad n \in \boldsymbol{Z}$$

である．よって，$\hat{\varphi}_{25}(1/2,s) = 0$がでる．（$\hat{\varphi} : S^1 \to S^1(1/r) \times \boldsymbol{R}^{1,24}$とみなしている．）

すなわち，Ｔ双対によって，ノイマン境界条件（7.3）がディリクレ境界条件（7.6）に変わったわけである．

（76）は$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_R + \hat{\varphi}_L$のが両端が24Brane$\{0\} \times \boldsymbol{R}^{1,24}$に固定されたいることを示している．このように開いた元のはじがそこで終わるBraneのことをD　Brane呼ぶ．（Dはディリクレの略である．）

Chan-Paton因子

当面の目標は命題２３の説明である．それには，Ｔ双対をとる前の開いた元の場合のゲージ場つまりChan-Paton因子を理解しなければならない．

元々の開いた元の状態はある写像$\ell : [0,1/2] \to \boldsymbol{R}^{1,25}$で決まると考えていた．それをやめて$\ell : [0,1/2] \to \boldsymbol{R}^{1,9}$なる写像と$\mathbf{i}, \mathbf{j}$なる$1 \le i, j \le N$なる数の組，$(\ell, i, j)$を弦の状態を決めるものとする．単純に言ってしまえば，$Map([0,1/2] \to \boldsymbol{R}^{1,25})$　を$Map([0,1/2] \to \boldsymbol{R}^{1,25}) \times \{1,\cdots,N\}^2$で置き換える．

これは，(ℓ, i, j)は$\ell(0)$で$\mathbf{i}$成分目のゲージ場と相互作用し，$\ell(1/2)$で$\mathbf{j}$成分目のゲージ場と相互作用すると読む．

言い換えると，ラグランジアンは次のように変わる．$\varphi : [0,1/2] \to \boldsymbol{R}^{1,9}$としこれには$\mathbf{i}, \mathbf{j}$なるラベルがふってあるとする．

$(A_1,\cdots,A_N)$なる$U(1)^N$ゲージ場が$\boldsymbol{R}^{1,25}$にあったたとき，(φ, i, j)のラグランジアンには普通のエネルギーに加えて，

(7.8)
$$\int_{\{0\}\times \boldsymbol{R}} \varphi^* A_i - \int_{\{1/2\}\times \boldsymbol{R}} \varphi^* A_j$$

なる項がつくとする．これはどういう効果を持つだろうか．

以後$(\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_N)$は定数とする．この項をつけても，両端を止めた，ラグランジアンの積分は，定数しか変わらない．よって，モード展開は（7.1）でよい．また，境界条件（7.2）または（7.3）も不変である．

しかし，$p_R - p_L$は$1/r$の整数倍という条件が変化する．なぜなら，（7.6）から，

２６番目の方向に，運動する一点につぶれた弦に対応するラグランジアンは

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\varphi_{25}}{\partial s}\right|^2 - A_i^{25}\frac{\partial\varphi_{25}}{\partial s} + A_j^{25}\frac{\partial\varphi_{25}}{\partial s}$$

である．これは，S^1上に大きさ$A_i - A_j$の電場がかかっている場合の，荷電粒子のラグランジアンで，従って，ラプラシアンに当たるものは

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\left(\partial x^{25}\right)^2} - \left(A_i - A_j\right)\frac{\partial f}{\partial x^{25}}$$

にずれる．よって，固有値の平方根が$A_i - A_j$だけずれる．すなわち

（7.9） $$p_R - p_L = \frac{2n}{r} + 2(A_i - A_j).$$

になる．（定数倍はまた分からなくなったのほうっておいた．）（7.9）を（7.7）のかわりに使うと，Ｔ双対を取ったあとの式（7.6）は

（7.10） $$\begin{cases}\hat{\varphi}_{25}(0,s) = 0\\ \hat{\varphi}_{25}(1/2,s) = A_j - A_i\end{cases}$$

に変わる．すなわち，Ｔ双対を取ったあとでD Braneがある位置が，右と左でずれることになる．

これが，命題２３の説明の第一歩である．つまり，Ｔ双対を取る前には，電磁場の大きさであったものが，Ｔ双対を取ると，D Braneの位置に変わるわけである．

ここで，余り重要な点ではないが，あとで話を合わせるために，（7.10）を

（7.11） $$\begin{cases}\hat{\varphi}_{25}(0,s) = A_i\\ \hat{\varphi}_{25}(1/2,s) = A_j\end{cases}$$

に取り替える．これは，Ｔ双対を取ったあとでは，S^1の全体を等長変換でずらすことであるが，Ｔ双対を取る前では，Aたちの決める場の位相（Phase）を一斉にずらすことに当たる．（説明を書こうとしたら混乱したから説明は省略する．）

次に，弦の状態を$\left(\ell_{ij}, i, j\right)$たちとしたときのゲージ対称性を説明する．$Map([0,1/2] \to \boldsymbol{R}^{1,25}) \times \{1,\cdots,N\}^2$が配意空間になったから，その上の関数空間は元々のものと$\boldsymbol{C}^{N^2}$のテンソル積である．この$\boldsymbol{C}^{N^2}$の基底を$e_{i,j}$とする．（$e_{i,j}$は$\left(\ell_{ij}, i, j\right)$が含まれ$Map([0,1/2] \to \boldsymbol{R}^{1,25}) \times \{1,\cdots,N\}^2$の連結成分に対応する自由度である．）これを**ij**成分だけ１の行列とみなして，$\boldsymbol{C}^{N^2}$を$N \times N$行列全体の空間とみなす．すると，これから，$U(N)$が，$\boldsymbol{C}^{N^2}$に

（7.12）

$$B \mapsto gB\bar{g}^t$$

で作用する．（$B \in \boldsymbol{C}^{N^2}$）．（7.12）は

$$B_{ij} \mapsto \sum_{kl} g_{ik}\bar{g}_{jl}B_{kl}$$

である．これは，B_{ij} の i が弦の左端0での自由度に，j が弦の右端1/2 での自由度に対応していることを思い出すと，左端で $U(N)$ の $\boldsymbol{C}^{\mathbf{N}}$ の普通の表現に，右端でその共役に対応するゲージ変換をしていると見なせる．この変換に対する不変性は，$(A_1,\cdots,A_N)$ があると破れて，残るのは $(A_1,\cdots,A_N)$ を $u(1)^N$ の元とみなしたときの中心化群の分だけである．

これをＴ双対で移したあとの描像で見ると，Braneがある位置が，全てずれていると，対称性は $U(1)^N$ で，どれかが一致していると，大きくなる．

別の見方をすると，次のようにいえる．Braneの位置は A_i たちであるが，そこにあるBraneを $Brane_i$ と書く．$Brane_i$ に始まり $Brane_j$ に終わる弦を考える．このような弦に対応するのが，ゲージ場 $U(N)$ の ij 成分である．この成分が表すゲージ粒子の重さは，Braneが交わらないと０ではない．より正確にはBrane間の距離に比例する．よって，Braneがある位置が，全てずれていると，ii だけのゲージ対称性つまり $U(1)^N$ が残る．

Orientfold

以上ででてきたのは，$U(N)$ だけだった．他のものがどうでてくるか見るために **SO**の場合を見てみよう．

$[0,1/2] \to S^1(r) \times \boldsymbol{R}^{1,24}$ を考えていたが，これをさらに $\boldsymbol{Z}_2$ の作用 $t \mapsto 1/2 - t$ で割って考える．すなわち

$$\varphi_R = \varphi_L$$

を満たすものだけに制限する．

ただし，我々は，Chan-Paton因子を入れて考えていた．$t \mapsto 1/2 - t$ は，境界の両端を入れ替えるから，$ij \mapsto ji$ とする．すなわち条件は

（7.13）

$$\varphi_{R,ij} = \varphi_{L,ji}$$

である．

$B \in \boldsymbol{C}^{N^2}$ に対してはこの変換は，$B \mapsto B^t$ である．（7.12）がこの変換と交換可能なのは

$$\left(gB\bar{g}^t\right)^t = gB^t\bar{g}^t$$

つまり，$g \in U(N) \cap GL(N;\boldsymbol{R}) = SO(N)$ の時である．

これが，実はTypeI String$SO(32)$ の場合に必要な構成であった．

さて，この対称性で割ってから，T変換をしてみよう．すなわち，（7.13）をT変換で変えると

（7.14） $$\hat{\varphi}_{R\,ij} = -\hat{\varphi}_{L,\,ji}$$

になる．この対称性を表す変換Ωを調べよう．これは，Space TimeとWorld Sheetに同時に作用する．すなわち，Ωは

（7.15） $$\begin{aligned} t &\mapsto 1/2 - t \\ x_{26} &\mapsto -x_{26} \end{aligned}$$

である．もうちょっと数学っぽく書くと，Ωの
$Map([0,1/2] \to \boldsymbol{R}^{1,24} \times S^1(r)) \times \{1,\cdots,N\}^2$ への作用を，(ℓ, ij) に対して(ℓ', ji) を対応させることで定義する．ただし，ℓ'は（7.15）でℓを変換したものである．この作用による商空間を配位空間とみなすわけである．

Ωの作用は定義域と値域への作用を両方使っているから，これで割った$Map([0,1/2] \to \boldsymbol{R}^{1,24} \times S^1(r)) \times \{1,\cdots,N\}^2$の商空間は普通の写像空間とはみなされない．しかし安直に考えれば，Targetは$\dfrac{S^1(1/r)}{\boldsymbol{Z}_2}$を直積成分に持つ．

用語：　　これを，<u>Orientfold</u>という．

このときの，Braneの様子を調べよう．ゲージ群は$SO(N)$であった．（以下 **N**は偶数とし，$SO(2n)$ としよう．従って，入れることができるゲージ場は$(A_1,-A_1,\cdots,A_n,-A_n)$のようなものである．（つまり，$so(2n) \subseteq u(2n)$ 値の接続で$so(2n)$ 極大トーラスに値を持つもの．）従って，Braneは$2n$個であるが，それらは変換$x_{26} \mapsto -x_{26}$で不変なペアを成す．言い換えると$\dfrac{S^1(1/r)}{\boldsymbol{Z}_2} \times \boldsymbol{R}^{1,24}$に$n$枚の24 Braneが存在する．

残されるゲージ対称性は，これらのBraneの相互の位置関係，及び，$\dfrac{S^1(1/r)}{\boldsymbol{Z}_2}$の特異点とBraneの位置関係で決まる．

例えば$n=2$としよう．場合を分ける．

（１）　　２枚のBraneがお互いに離れていて，また，特異点からも離れていると

き．残るゲージ群対称性は$U(1)^2$で，$SO(4)$の極大トーラスである．
（２）　　　２枚のBraneの位置が一致し，しかし，特異点からは離れているとき．対称性は$U(2)$である．
（３）　　　２枚のBraneがお互いに離れていて，うち１枚が特異点と一致するとき．対称性は$SO(3)\times U(1)$である．
（４）　　　２枚のBraneの位置が一致し，しかも，特異点上にあるとき．対称性は**SO**(4)である．

（３）だけ説明しよう．まず，Ｔ双対で移す前を見れば，これは，接続**A**の２６番目の方向の成分が，

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & a \\ & & -a & 0 \end{pmatrix}$$

である場合である．この元の中心化群は$SO(3)\times U(1)$である．

Ｔ双対のあとの描像ではどう見えるであろうか．Ωで割る前つまり$\boldsymbol{R}^{1,24}\times S^1(r)$に４枚のBraneがある描像で考えよう．４枚のBraneの２６番目の座標は$0,0,t,-t$である．これを$Brane_1$から$Brane_4$としよう．重さ０のゲージ粒子は，$Brane_i$とそれ自身を結ぶ弦，及び，$Brane_0$と$Brane_1$を結ぶ弦，$Brane_1$と$Brane_0$を結ぶ弦である．ただし，対称性Ωで割って考える．

これらのうちで，$Brane_i$とそれ自身を結ぶ弦が，$U(1)^2$を作る．（４つあるが対称性で割って２個になる．）残り２つ$Brane_0$と$Brane_1$を結ぶ弦，$Brane_1$と$Brane_0$を結ぶ弦からカラ，対称性Ωで割ることを考えると，複素１次元分ゲージ粒子が現れ，これがをあわせると$SO(3)\times U(1)$が得られる．

これもGauge Theory Enhanced Pointの一種であることが分かるであろう．

以上SOを見たが，USpも同じようにして調べられる．このときは単に$ij\mapsto ji$とせずに，ひねる．ただし，E_8等はＴ双対では説明できるのかどうか知らない．

Braneが重なるとゲージ場が大きくなる，というここの話題に関わる大事な論文に，Witten[62]がある．

原稿を印刷所に持っていく１２時間前になってしまい，ここから，力つきて，腰砕けになる，ご勘弁頂きたい．

D BraneとTypeIIB StringのＳ双対性

について次に書く予定であったが，残念ながらやめる．文献はWittne[60]である．

この文献を読むには，少なくとも，D Braneがどのような電荷（磁荷）を持っているかを理解する必要がある．それは，Polchinskiの仕事（[38]）で，[39]に説明してある．（この仕事がD Braneで画期的であったらしい．）計算法は，X_1，X_2の二つのBraneがあったとき，$S^1\times[0,1]$からの写像で，$\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$を境界に持つものを調べることである．計算は共形場の理論と雰囲気が近い方法で行われる．ただ，筆者が

分からなくなったのは，どうして，そういう量を計算してD　Braneの持つ電荷が分かるかである．

前に述べたが，TypeIIBのＳ双対性が成り立つには，RR側の２型式の場について電荷を持つ，BPS Saturated Stateを探す必要があった．普通のString （Fundamental String）は，NS側の２型式つまりB　Fieldについて電荷を持つ．これを，Ｓ双対で移した状態はだから，摂動論で見えるヒルベルト空間にはない．D BraneがString ソリトンで，TypeIIB StringのRR側の２型式を電荷に持つBPS Saturated Stateはこれを用いて構成できる，とある．

その説明は筆者はまだよく理解していない．

Brane Probing

が当然次の話題であるべきである．

文献はBanks-Douglas-Seiberg[2]，Seiberg [43]，Hanary-Witten [21]あたりであろうか．特に，Hanary-Wittenはおそらく今後トポロジーにも，深く関わってきそうな重要文献である．

また，これと３次元ゲージ理論のミラー対称性は深く関わっている．その文献は，Seiberg-Witten [44]，Intriligator-Seiberg [25]，Boer-Hori-Ooguri-Oz [6]，Charlmers-Hanary [10] あたりか．

またRozansky-Witten [41]はトポロジーへの応用である．

Brane　Probe　そのものを解説するのは筆者の手に余る．Seiberg-Witten　[44]とHanary-Witten [21]のごく一部を簡単に解説してお茶をにごさせていただきたい．

まず箇条書きに要約すると：

１．　$\boldsymbol{R}^3$ 上の $N=4$ Super Symmetric な $SU(2)$ ゲージ理論（物質場なし）の，真空のモジュライ空間は，モノポールチャージ２のBogomolomy方程式の解のモジュライ空間に一致する．
２．　１０次元空間の中の，Brane Probing（Braneによる探査）を考えると，１は説明でき，また，$SU(2)$ を $SU(n)$ にしたり，物質場を入れた場合も分かる．
３．任意の閉（あるいはコンパクトでない場合は何らかの条件の付いた）ハイパーケーラー多様体 X に対して，ホモロジー球面 X の不変量 $Z_X(M)$ が定まる．

４．１と２を用いると，X がモノポールチャージ２のBogomolomy方程式の解のモジュライ空間の時に，$Z_X(M)$ がキャッソン不変量であることが分かる．
５．４はそれとは別に，数学的にも，厳密に示すことができる．

３，４，５はRozansky-Witten[41]にある．これは数学の論文といってもいいので，数学者には比較的読みやすいであろうから，説明は省略する．ここでは，１と２のみごく簡単に説明する．

１の説明：

３次元$\mathbf{N}=4$超対称ヤンミルズ理論のを考える．$SU(2)$束$\mathbf{E}$接続Aから超対称変換で，３種類のスカラϕ_1,ϕ_2,ϕ_3が得られる．一方，

$$*dA = d\phi_0 \qquad (7.16)$$

なる，４番目のスカラーがある．

注意１：　ϕ_iはスカラーといってもそれはAdEの切断である．（スカラーというのは単に多様体の座標変換についての性質を言っている．）

$\Phi=\phi_1+i\phi_1+j\phi_2+k\phi_3$を$AdE\otimes\boldsymbol{H}$の切断と見る．（ここで４元数がでてくるのは$N=4$超対称性による．）$\Phi$を含むラグランジアンの項は

$$|d\Phi|^2+\|[\Phi,\Phi,]\|^2$$

である．ここで，$\|[\Phi,\Phi]\|^2=\sum\left[\phi_i,\phi_j\right]$が分かる．よって，この最小値が実現されるのは

$$\left[\phi_i,\phi_j\right]=0\,,\quad \forall i,j \qquad (7.17)$$

の時である．スカラー場の期待値が真空のモジュライを決める．から，（7.17）の解全体が「量子効果を考える前の真空のモジュライ空間」である．

ところで，（7.17）式はϕ_iが同時対角化可能あることを意味する．よって，$\Phi=\phi_1+i\phi_1+j\phi_2+k\phi_3\in u(1)\otimes\boldsymbol{H}$と見なせる．よって，「量子効果を考える前の真空のモジュライ空間」は$u(1)\otimes\boldsymbol{H}$．

実はこれには２つ嘘がある．

第１：正確には，ϕ_0は$\boldsymbol{R}$値ではなく，$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$値と見るべきである．これを説明する．３次元$\mathbf{N}=4$超対称ヤンミルズ理論（$\boldsymbol{R}^3$上）は，$\boldsymbol{R}^3\times S^1$上の$N=2$超対称ヤングミルズ理論を３次元に落としたものと見ることができる．このとき，（7.16）式は

$$*_{\boldsymbol{R}^3\times S^1}\, dA = d\phi_0\wedge dx^0 \qquad (7.18)$$

となる．すなわち，$\phi_0 dx^0$なる$\boldsymbol{R}^3\times S^1$上の１型式を$\boldsymbol{R}^3$に落としたのが，$\phi_0$である．$\phi_0 dx^0$は，そう考えると，$\boldsymbol{R}^3\times S^1$上の接続である．これには，ゲージ変換，$\phi_0\to 2\pi\sqrt{-1}n\,,n\in\boldsymbol{Z}$が作用する．

第２：$U(1)\subseteq SU(2)$のワイル群は$\boldsymbol{Z}_2$である．これで割る必要がある．

結局「量子効果を考える前の真空のモジュライ空間」は$\dfrac{\boldsymbol{R}^3\times S^1}{\{\pm1\}}$である．

古田氏の項にある４次元の場合には，理論のモジュライ空間は元々$\dfrac{\boldsymbol{C}}{\pm 1}$で，これが，量子効果で変形された．３次元の場合の変化を調べる．「量子効果も考えた真空のモジュライ空間」を$\mathcal{M}$と置く．次の３つのことより，$\mathcal{M}$が決定できる．

（A）　　　$\mathcal{M}$はハイパーケーラーである．

これは超対称性の帰結である．

（B）　　　$\mathcal{M}$は特異点を持たない．

この理由は筆者にはうまく説明できない．

（C）　　　$\mathcal{M}$には$SO(3)$が等長的に作用する．

３次元$N=4$超対称ヤンミルズ理論は，６次元$N=1$超対称ヤングミルズ理論から，次元を減らして得られる．（すなわち，$\boldsymbol{R}^3\times\boldsymbol{R}^3$と分解し，一方の$\boldsymbol{R}^3$について定数のものを取る．）すると，定数とした$\boldsymbol{R}^3$の等長変換$SO(3)$で理論は不変である．

（D）　　　$\pi_1\mathcal{M}=\boldsymbol{Z}_4$.

これは，$\dfrac{\boldsymbol{R}^3\times S^1}{\{\pm 1\}}$の$S^1$方向の$U(1)$の作用が，アノーマリで捻れる様子を調べて分かる．

（A）・・・（D）から，$\mathcal{M}$がモノポールチャージ２のBogomolomy方程式の解のモジュライ空間であることが分かる．（$SO(3)$対称性でわって，常微分方程式に持ち込む．）

２の説明：

まずBrane Probeの大変荒い説明をする．まず，$\boldsymbol{R}^3$に普通に電場があるとする．これを調べるには，荷電粒子を入れて，それがどんな力を受けるか調べる．この荷電粒子がProbeである．

１０次元の超弦理論を考える．この中にまず幾つかBraneを入れておく．すると，Braneが場を作る．この作った場を調べるために，別のBraneを入れる（これをProbeと呼ぶ．）すると，Probeには場から力が働く．Probeの中で見ると，これは，Probe上に場ができたように感ずる．このようにしてProbe上に見える場は，最初に入れるBrane達とProbeの位置関係によって変わる．よって，Brane達とProbeの位置関係をパラメータとした，Probe上の場の理論の族ができることになる．

さてこれを１０次元のTypeIIB弦理論で実行する．

BFieldに対応する磁荷を持つのは，５Braneである．（NS　Brane呼ぶ．）これを１０次元のTypeIIB理論に入れておく．これは

$$x^6=c_i^6,\cdots,x^9=c_i^9$$

で与えられるとする．（c_i^kは定数．$x^0,\cdots,x^5$が座標である．）これは２枚あるとする．（$i=1,2$．）

次にD３BraneをProbeとして入れる．これは

$$x^3 = d_i^3, x^4 = d_i^4, x^5 = d_i^5, x^7 = d_i^7, x^8 = d_i^8, x^9 = d_i^9$$

$$c_1^6 \le x^6 \le c_2^6$$

で与えられるとする．すなわち，二つのNS Braneが境界上に来ている．すると，このような配置が実現されるためには，$d_1^8 = d_2^8 = c_1^8 = c_2^8$，$d_1^9 = d_2^9 = c_1^9 = c_2^9$でなければならない．

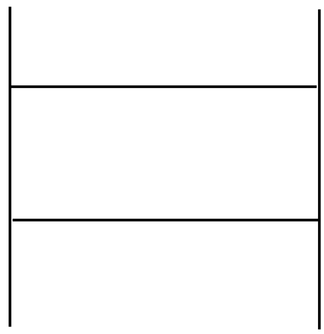

図１：この図で，縦向きのものがNS Brane
横向きのものがProbeであるD Brane

注２：　　　このような配置が可能で，しかも，超対称性を保つことにはまだ議論がいる．筆者はちゃんとは分かっていないから，それは説明しない．

このような配置のパラメータは，d_i^3，d_i^4，d_i^5の配置，及び，$c_2^6 - c_1^6$である．これらをパラメータを持つような，Probe上の場の理論の族がある．$c_2^6 - c_1^6$が小さい場合を考える．すると，Probeは大体$\boldsymbol{R}^{1,2}$になる．よって３次元の場の理論である．$c_2^6 - c_1^6$は結合定数である．

２つのProbeが重なると，２つのD Braneが重なったのであるから，$SU(2)$ゲージ場が見える．（$U(2)$でなくて，$SU(2)$なのは，２つのProbeを同時に平行移動する自由度を捨てているからだと思う．）従って，これは$N=4$超対称な$SU(2)$ゲージ理論である．この理論のモジュライ空間は１で見たように，モノポールチャージ２のBogomolomy方程式の解のモジュライ空間である．これは話があっているだろうか．

結合定数以外のパラメータはd_i^3，d_i^4，d_i^5の配置である．それと各々の点での電場に当たるものがある．（D Brane上には$U(1)$ゲージ場があった．）

これは$\boldsymbol{R}^3$上の２点の配置を表すConfiguration　space+その２点の上の電場，のモ

ジュライ空間である．ただし，２点が交わったところではより慎重に考えないといけない．モノポールチャージ２のBogomolomy方程式の解のモジュライ空間はまさしくそういうものであることが知られている．

本当はもっと複雑なBraneとProbeの組合わせを見て，色々なこと（たとえば，３次元のゲージ理論のヒッグス相とクーロン相をひっくる返す双対性）が統一的に説明できるところが面白いのだが，省略する．

終わり．

文献

数学の文献は関係あるものでも全て省いた．hep-thに載っているものは，調べるのが面倒だったので，出版されていても，hep-thの番号だけ載せた．

[1] P.Aspinwall, *K3 surface and String Duality,* hep-th/9611137.

[2] T.Banks, M.Douglas, N.Seiberg, *Probing F theory with Branes,* hep-th/9605199.
Brane Probing についての初期の大切な論文の一つ．

[3] K.Becker, M.Becker, A.Strominger, *Fivebranes, Membranes and Non-perturbative String Theory,* hep-th/9507158.
Braneが超対称性およびカッパ対称性を持つ条件を決定したもの．これが，A.Strominger S.T.Yau, E.Zaslowにつながり，Special Lagrangian とミラー対称性の関係を導いた．

[4] M.Bershadsky, K.Intriligator, S.Kachru, D.Morrison, V.Sadov, C.Vafa, *Geometric Singularities and Enhanced Gauge Symmetries,* hep-th/9605200.

[5] A.Bilal, *Dualities in N=2 SU(2) Yang-Mills Theory ,* hep-th/9601007.
サイバーグウィッテン理論の解説で進められるものの一つ．

[6] J.Boer K.Hori, H.Ooguri, Y.Oz, *Mirror Symmetry in Three-Dimensional Gauge Thoeries, Quivers and D-branes,* hep-th/9611063
３次元ゲージ理論のMirror Symmetry.

[7] J.Boer K.Hori, H.Ooguri, Y.Oz, Z.Yin *Mirror Symmetry in 2D Gauge Theory and D Brane Moduli,* hep-th/9612131.
３次元ゲージ理論のMirror Symmetry.

[8] P.Candelas, de la Ossa , P. Green, L.Parks, *A Pair of Calabi Yau manifolds as an exactly soluble super conformal theory,* in Essays on Mirror Symmetry, ed by S.T. Yau International Press.
ミラー対称性．

[9] P.Candelas, de la Ossa, A. Font, S. Katz, D. Morrison, *Mirror Symmetry for two parameter models I,* hep-th/9308083.
６章で引いた，複素構造の変形の次元が低い場合の，プレポテンシャル．

[10] G.Chalmers, A. Hanary, *Three Dimensional Gauge Theories and Monopoles,* hep-th/9608105.
7章に説明した，Seiberg - Wittenの３次元ゲージ理論の一般化．

[11] M.Douglas, *Super String Dualities, D-Branes and small scale structure of spaces,*hep-th/9610041.
サーベイ．比較的短いのが取りえか．

[12] M.Duff, *M-theory,* hep-th/9608117.

[13] M. Duff, *Suppemembrane,* hep-th/9611203.

[14] M.Duff, R.Minasian, E.Witten *Evidence of Heteroti / Heterotic Duality,* hep-th/9601036.

[15] R.Friedman, J.Morgan, E.Witten, *Vector bundles and F Theory,* hep-th/9701162.

[16] A.Givons, M. Porrati, E. Rabinovici, *Target space duality in string theory,* Physics Repor 244 (1994) 77 - 202.

[17] B.Greene, D.Morrison, A.Strominger, *Black hole condensation and the unification of String Vacua,* hep-th/9504145.

[18] M.Green. J.Schwarz, E.Witten, *Supestring theory,* Cambridge Monographs on Mathematical Physics.

[19] J.Harvey , G.Moore, *Algebra, BPS States and String*, hep-th/9510182.

[20] J.Harvey, G.Moore, *Exact GravitationalThreshold Correction in the FHSV model* hep-th/9611176.

[21] A.Hanary, E.Witten, *Type IIB String, BPS Monopole, and Three dimensional Gauge Dynamics,* hep-th/9611230.

[22] P.Horava, E.Witten, *Heterotic and Type I String Dynamics from Eleven Dimension,* hep-th/9510209.

[23] P.Horava, E.Witten, *Even-Dimensional Supergravity on a manifold with boundary,* hep-th/9603142.

[24] C.Hull, P.Townsend, *Unity of Super String Duality,* hep-th/9410167.
U双対.

[25] K.Intriligator, N.Seiberg, *Mirror Symmetries in Three Dimensional Gauge Theories,* hep-th/9607207.
３次元ゲージ理論のMirror Symmetry.

[26] S.Kachru, C.Vafa, *Exact Results for N=2 Compactifications of Heterotic String* , hep-th/9505105.

[27] S.Ketov, *Solitons, Monopoles, and Duality*, hep-th/9611209.
サイバーグウィッテン理論の解説で薦められるものの一つ.

[28] A.Klemm, W.Lerche, P.Mayr, *K3 Fibrations and Heterotic - TypeII String Duality,* hep-th/9506112.

[29] A.Klemm, B.Lian, S.Roan, S.T. Yau, *Calabi-Yau fourfolds for M- and F- Theory compactification ,* hep-th/9609239.

[30] J. Lykken, *Introduction to supper symmetry*, hep-th/9612114.
超対称性の解説はこれが今の所一番新しい話題に強そうである.

[31] P.Mayr, *Mirror Symmetry N=1 Superpotential and Tensionless String on Calabi-Yau Four-Folds,* hep-th/9610162.

[32] D.Morrison, C.Vafa, *Compactification of F Theory on Calabi-Yau Threefolds I,* hep-th/9602144.

[33] D.Morrison, C.Vafa, *Compactification of F Theory on Calabi-Yau Threefolds II,* hep-th/9603161.

[34] N.Narain, *New Heterotic String Theories in uncompactified dimension < 10 ,* Physics Letters 169B (1986) 41 - 46.
Narainモジュライの原典.

[35] H.Ooguri, C.Vafa, *Geometry of N=2 String,* Nucl. Phy. B361 (1991) 469 - 581.
N=2弦理論多分Ｆ理論と関係があるのだろう.

[36] H.Ooguri, Z.Yin, *Tasi Lectures on Perturbative String Theories*, hep-th/9612254.
弦理論の基礎のサーベイ．Green-Schwartz-Wittenは読むには長すぎる，という人にはおすすめ.

[37] J.Polchinski, *String Duality,* hep-th/9607050.
読みやすいが，これは完全な「お話」である.

[38] J.Polchinski, *Dirichelet-Branes and Ramond-Ramond Charge,* hep-th/9510017.

[39] J.Polchinski *Tasi Lectures on D Branes*, hep-th/9611050.

[40] J.Polchinski, E.Witten, *Evidence for Heterotic - Type I String Duality,* hep-th/9510169.

[41] L.Rozansky, E.Witten, *Hyper-Kähler Geometry and Invariants of Three-Manifolds,* hep-th/9612216.
３次元不変量.

[42] J.Schwarz, *Lectures on Superstring and M theory Dualities.* hep-th/9607201.
サーベイ．見たサーベイの中では一番良かったように思う．低エネルギー有効場

の理論の立場からのTypeIIBのＳ双対の説明などもある．

[43] N.Seiberg, *IR Dynamics on Branes and Space-Time Geometry*, hep-th/9606017.
Brane Probingの論文.

[44] N.Seiberg, E.Witten, *Gauge Dyamics and compactification to three dimensions,* hep-th/9607163.

[45] N.Seiberg, E.Witten, *Comments on String Dynamics in Six dimsnsion,* hep-th/9603003.

[46] A.Sen, *Strong Weak Coupling Duality in Four Dimensional String Theory,* hep-th/9402002.
3章の予想が書いてある論文[47]と関けいしている．

[47] A.Sen, *Dyon - Monopole Bound States, Self-Dual Harmonic Forms on The Multi-Monopole moduli space and SL(2,Z) invariance of String Theory,* hep-th/9402032.

[48] A.Sen, *F theory and orientfolds,* hep-th/9605150.
$\mathbf{CP}^1$上の４ヶ所で$\mathbf{E}_8$特異ファイバーを持つＦ理論と$\mathbf{T}^2$を群で割ったorientfold上のIIB理論の比較．後にBrane ProbingのSeibergらの論文等と関わる．

[49] A.Strominger, *Special Geometry,* Comm. Math. Phys. 133 (1990) 163 - 180.
超対称性と理論のモジュライのホロノミーの関係.

[50] A, Strominger, *Massless Black Holes and Conifolds in String Theory,* hep-th/9504090.

[51] A.Strominger C.Vafa, *Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*,hep-th/9601029.
ブラックホールの物理学へのString　Dualityへの応用と思われる．よく引かれる重用な論文と思われるが，何しろ読んでいないのでコメントできない．

[52] A.Strominger S.T.Yau, E.Zaslow, *Mirror symmetry is a T duality,* hep-th/9606040.
ミラー対称性をBraneの言葉を使って構成しようとするもの．数学には大変大切なのだが，今回は触れなかった．

[53] P.Townsend, *Four Lectures on M- Theory*, hep-th/9612121 .
M理論のサーベイでは読みやすいものと思う．

[54] C.Vafa, *Evidence of F-Theory,* hep-th/9602022.

[55] C.Vafa, E.Witten, *Strong coupling test of S-duality,* hep-th/9408074.

[56] E.Witten, O.Olive, *Super symmetric algebras that includes topological charge* , Physics Letters 78B (1978) 97 - 101.
BPS Saturated stateの質量が分かること．

[57] E.Witten, *Sigma Modles and the ADHM Construction of Instantons,* hep-th/9410052.
題名どおりADHM構成の物理的説明.

[58] E.Witten, *String Thery Dynamics in various dimension,* hep-th/9503124.

[59] E.Witten, *Strong Coupling and Cosmological Constant,* hep-th/9506101.
なぜアインシュタイン方程式で宇宙定数が０かという問題へのStringDualityを使ったアプローチ．物理としては大変重要なはずだが，筆者には読めなかった．

[60] E.Witten, *Bounded states of String and p Branes,* hep-th/9510135.
D Brane を用いたIIBのＳ双対の確立.

[61] E.Witten, *Five-Brane Effective action in M-theory*, hep-th/9610234.
M理論を実体のあるものにしようとする試みだと思う．

[62] E.Witten, *Small instanton in String Theory*, hep-th/9511030.
バブルから生じるEnhanceced Gauge Symmetryの物理的理解，でいいと思う？

[63] E.Witten, *On Flux quntization in M-theory*, hep-th/9609112.
M理論を実体のあるものにしようとする試みだと思う．

[64] S.Hosono, A.Klemn, S.Theisen, S.T. Yau, *Mirror Syymetry, Mirror map, and application to Complete inersection,* hep-th/9308112
６章で引いた，複素構造の変形の次元が低い場合の，プレポテンシャル．