1997.10 「位相的場の理論」 集中講義ノート

講義：深谷 賢治

講義録作成：横山 美佐子

2000 年 10 月 15 日 ver. 2.72

目 次

図目次

はじめに

このノートは、1997 年の深谷賢治氏による静岡大学での集中講義に基づき、その復習のために作成したものです。忙しい折りにも関わらず、長時間の講義をして下さった深谷氏に感謝します。また、出席して下さった受講生その他の方々に感謝します。それらの方々なしには、このノートは少しも作成できなかったでしょう。さらに、ノートを貸して下さったり、質問の答えやご指摘・情報を下さった方々、芥川和雄、大場清、奥村善英、亀谷幸生、久村裕憲、牛腸徹、竹内義浩、長瀬昭子、橋本義武、南範彦の各氏にも感謝します。3.18 節の一部の絵は橋本義武氏にご教示頂きました。大場清、長瀬昭子の両氏には、それぞれトピックの解説をして頂きました。竹内義浩氏には、特に前半部の記述について、丁寧にご指摘頂きました。また、牛腸徹氏には、不備な点を具体的に多数、コメント付きでご指摘頂きました。

講義全体は第 1 章から第 8 章相当分までありましたが、ここに含むのは、そのうち、第 1 章から第 6 章までです。残りは、かなり資料不備でもあり、話題が変わることもあり、なにより力不足があり、初めから作成を断念しました。ノートは講義形式で書いていますが、講義を正確に再現するということはとてもできませんでした。そもそも、作り始めたときの気持ちは、講義内容を大まかに捉えようというぐらいのことでした。けれども、必要な知識、専門的知識もなく、私にはそれすらも難しいことでした。ノート作成において指針としたのは、講義の味わいや勢いをできるだけ殺さないようにすること、統一された文体にすること、理解の妨げにならないような文章を書くことの 3 つです。編集作業によって、元の講義をそこなったり、間違いをいろいろとしてしまったかもしれないことを恐れています。

2000 年 9 月 15 日　横山 美佐子

第1章　序：代数の変形から、幾何が見える？ — 代数と空間の量子変形

ド・ラム コホモロジーと特異ホモロジーを例として、解析と幾何の双対性について述べる。それを踏まえて、空間概念の量子化という問題に対して、解析的道具の量子化を考察することが、その目標への一助となるであろうことを示唆する。

1.1　担当教官の紹介

この度、「位相的場の理論」という題で集中講義をして頂く、京都大学の深谷先生です。講義内容は、みなさん[1]にとって理解できない所もあるかもしれませんが、その時は全体の雰囲気をつかんで、話を楽しむようにしてください。では先生、お願いします。

1.2　開講にあたって

ええと、特に今回は、雰囲気だけ話そうと思うんですけど。あの、位相的場の理論という話は、何を話せばいいかというのは実は分からなくて。位相的場の理論というのには、多分、定義というものはないと思うのですが。まあ、とにかく、こういうことを、お話したいと思います。

1.3　代数的位相幾何学 ･･･ 空間を代数で近似する

代数的位相幾何学というのがありますが、これは何かと言いますと、空間を代数で近似するということで。

$$\text{代数的 topology} = \text{空間を代数で近似する} \tag{1.1}$$

これが、多分、代数的位相幾何学の一番基本的な発想だと思います。それで、僕は、そういうことをよく知らないのですが、単純なことを言いますと。例えば、一番初めに多様体というものがあるとしますと。代数的位相幾何学では、多様体を考えるのに、幾何学的なものをできる限り代数的なものに置き換えようと考えるわけです。

[1] 集中講義の受講生を指す。

1.4　大事な概念 ･･･ ホモロジー群

代数的位相幾何学で出てくるもので、ホモロジー群というのがあります。

$$M : \text{多様体} \rightsquigarrow \text{ホモロジー群} \tag{1.2}$$

ホモロジー群というのは、ポアンカレが最初、考えたのですが。こういうのが、代数的位相幾何学の基本的題材ですが。これはひとつには、こういうふうに見るわけです。

1.5　微分形式

$$\Omega^*(M) : M \text{ 上の微分形式全体} \tag{1.3}$$

今、 M に対して、 $\Omega^*(M)$ というのを、M 上の微分形式全体という風にします。

$$\text{外微分}\quad d : \Lambda^k M \to \Lambda^{k+1} M \tag{1.4}$$

微分形式というのには、どういう作用があるかというのを考えますと。まず、外微分。

$$\text{ウェッジ積}\quad \Lambda^k M \otimes \Lambda^\ell M \to \Lambda^{k+\ell} M \tag{1.5}$$

あとはですね、何か、積。積っていうのは、要するに、k-form と ℓ-form だったらば、$(k+\ell)$-form になるものですが。

1.6　Differential graded algebra というのは

ここで定義ですが、Differential graded algebra というのは、何かと言いますと。何か、 Λ というのに d と $\wedge$ というのがあって。

$$\begin{array}{l}
\underline{\text{Differential graded algebra}} \\
(\Lambda, d, \wedge) \\
\Lambda = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \cdots \oplus \Lambda^n \\
d : \Lambda^k \to \Lambda^{k+1}, \qquad d^2 = 0 \\
\Lambda : \Lambda^k \bigotimes \Lambda^\ell \to \Lambda^{k+\ell} \\
d(a \wedge b) = da \wedge b + (\Leftrightarrow 1)^{\deg\, a} a \wedge db \\
(\text{但し、} a \in \Lambda^k \text{ のとき}\quad \deg\, a = k.)
\end{array} \tag{1.6}$$

Λ というのは、アーベル群で、まあ、ベクトル空間ですが。それで $d : \Lambda^k \to \Lambda^{k+1}$ は準同型で、$d^2 = 0$ を満たしています。ウェッジは、先ほども言いましたけれども、積で。関係式として、こういうのがありましたね。 $d(a \wedge b) = da \wedge b + (\Leftrightarrow 1)^{\deg a} a \wedge db.$ ここで、 $a \in \Lambda^k$ のとき、$\deg a = k$ であると言います。微分形式の掛け算と、外微分の関係式を使って、こういう Differential graded algebra というものを作るわけです。

1.7 de Rham Theory では何をやったか

それで、de Rham Theory では何をやったかというと。

$$\text{多様体} \quad M \rightsquigarrow \Lambda^k M \qquad \text{DGA } (\underline{\text{D}}\text{ifferential } \underline{\text{G}}\text{raded } \underline{\text{A}}\text{lgebra}) \tag{1.7}$$

多様体 M に対して、何かこういう、differential graded algebra — DGA ですが — こういうのを対応させたわけです。ところで、differential graded algebra といってもですね、あの、代数といっても、無限次元の代数というのは、何か代数ではなくて、最悪なわけです。次元が無限というのは、こんなものは扱いようがないので。それは、ちょっといやなんです。だから、これを有限次元のものにしないといけなくて、コホモロジー群というのがいるわけですが。ド・ラム コホモロジー群ですが。

$$H^k_{DR}(M, \mathbb{R}) = \frac{\mathrm{Ker}\ d : \Lambda^k M \to \Lambda^{k+1} M}{\mathrm{Im}\ d : \Lambda^{k-1} \to \Lambda^k M} \tag{1.8}$$

これは何かと言いますと、 k 次の微分形式を、 $k+1$ 次の微分形式の中に d で写したときの核を、 $k \Leftrightarrow 1$ 次の微分形式を k 次の微分形式の中に d で写した像で割ったものなんです。

$$\text{有限次元} \tag{1.9}$$

これは、よく知られているように有限次元ですから。

1.8 多様体の第一近似 ··· コホモロジー群

何をやっているかと言いますと、こういうことなんです。

$$M^n : \text{多様体} \qquad H^k_{DR}(M, \mathbb{R}) \quad k = 0, \ldots, n \tag{1.10}$$

今考えた多様体 M に対して、コホモロジー群というのを考えます。ド・ラム コホモロジー群ですけれども。

$$\text{コホモロジー群（第一近似）} \tag{1.11}$$

コホモロジー群というのは、多様体の第一近似だというふうに考えます。ついでに言いますと、2 つの多様体が同相であるならば、あるいは、それらの上の可微分構造が同じであるならば、コホモロジー群は同じなわけです。ですから、多様体というのを理解するのに、その第一近似として、コホモロジー群という、何か、次元に応じた n 個の群を考えるわけです。これが、第一近似になる。

$$\text{近似を精密化していって、どこまで } M \text{ を代数で捉えることができるか} \tag{1.12}$$

代数的位相幾何学では、こういう風に多様体 M から出発して、その近似として群を考えるということをするんですが。この近似をだんだん精密化していって、どこまで代数で M を捉えられるかというのを考えるわけです。そういう学問だという風に、ここでは理解します。

1.9 多様体の第二近似 ••• コホモロジー環

多様体の第一近似は群だったわけですが、第二近似というのがありまして。第二近似は、環なんです。今、differential graded algebra というのがあるんですが。Differential graded algebra だと、単に群がたくさんあるだけじゃなくて、もうちょっと違うものもあるわけです。

$$
\begin{aligned}
&H^*_{DR} \text{ は環の構造を持つ。}\\
&\text{なぜならば、}\\
&\quad [u] \in H^k_{DR}\\
&\quad [v] \in H^\ell_{DR}\\
&\text{を取ると、} du = 0,\ dv = 0 \text{ であるので、}\\
&\quad d(u \wedge v) = du \wedge v \pm u \wedge dv = 0 \text{ となる。}\\
&\text{よって、} [u \wedge v] \in H^{k+\ell}_{DR} \text{ となり、}\\
&\text{積が } [u][v] = [u \wedge v] \text{ のように定義できる。}\\
&\text{この積により、} H^*_{DR}(M, \mathbb{R}) \text{ は、環になる。}
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

つまり、環構造というのが決まるわけですが。環の構造っていうのは、こうなんですね。2 つ、$[u]$ と $[v]$ という cohomology class を取ります。$[u]$ が k 次元ド・ラム コホモロジー群の元で、$[v]$ が ℓ 次元ド・ラム コホモロジー群の元だとしましょう。このとき、$d(u \wedge v)$ というのは 0 ですね。ですから、$[u \wedge v]$ というのは、$(k+\ell)$ 次元ド・ラム コホモロジー群の元になりまして、積 $[u][v]$ が $[u \wedge v]$ で定義できます[2]。これにより、ド・ラム コホモロジー群というのは、環になります。

[2]積が well-defined であることは、

$$
\begin{aligned}
(u+db) \wedge (v+dc) &= u \wedge v + db \wedge v + u \wedge dc + db \wedge dc\\
&= u \wedge v + (db \wedge v + (-1)^k b \wedge dv) + (du \wedge c + (-1)^k u \wedge dc) + (db \wedge dc + (-1)^k b \wedge ddc)\\
&= u \wedge v + d(b \wedge v) + d(u \wedge c) + d(b \wedge dc)\\
&= u \wedge v + d(b \wedge v + u \wedge c + b \wedge dc)\\
&\sim u \wedge v
\end{aligned}
$$

より言える。

$$M^n: \text{多様体} \rightsquigarrow \text{コホモロジー環 } H^*_{DR}(M,\mathbb{R}) \tag{1.14}$$

もうちょっと言いますと。これは、コホモロジー 群 として決まるわけですが、第二近似は、コホモロジー 環 というわけです。これは環になります。第一近似が群だったら、第二近似は環なんですね。

1.10 準同型とホモトピック

先の為に、こういうことを考えてみます。Algebraic topology の話をちょこっとしたいのですが。今ですね、2 つ differential graded algebra があったとします。

$$\begin{aligned}&(\Lambda_1, d_1, \wedge)\\&(\Lambda_2, d_2, \wedge)\end{aligned} \tag{1.15}$$

こいつがホモトピックだということについて、ちょっと考えましょう。まず、DGA の morphisms があるわけですが。DGA の間の準同型というのは、何だったかと言いますと。

準同型
$\varphi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$,　map とする。
φ は、環準同型であるとする。　(1.16)
さらに $d_2\varphi = \varphi d_1$ となっているときに、
φ は 準同型 であるという。

φ という Λ_1 から Λ_2 への map が準同型というのは、φ は、環準同型[3]で、 — Λ_1 と Λ_2 は、環なんですね — そして、$d_2\varphi = \varphi d_1$ になっているときを言います。これが準同型の定義です。

これは、ホモロジー論の講義ではないんですが、一般的に言った方がいいので。Homotopic の定義のときに degree というのが出てくるんですが。φ の degree というのは何かと言いますと。

$$\varphi : \Lambda_1^k \to \Lambda_2^{k+\ell} \text{ のとき、 } \varphi \text{ の degree は } \ell \text{ であると言う。} \tag{1.17}$$

これらは graded ですから、こういう風に書けて。φ の Λ_1^k が $\Lambda_2^{k+\ell}$ に入るとき、φ の degree は、ℓ であると言います。あまり、こういうことを覚えても、しょうがないかもしれないけれど。それで、ホモトピックですけれども。

[3] Λ_1, Λ_2 を環で、それらにおける和を $+$, 積を $\cdot$ で書くとする。このとき、写像 $\varphi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ が 環準同型 であるとは、

- $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
- $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

が任意の $a, b \in \Lambda_1$ について成り立つことを言う。

$$\begin{aligned}&\varphi_1, \varphi_2 : \Lambda_1 \to \Lambda_2, \quad \text{degree が } \ell \text{ の準同型}\\&H : \Lambda_1^k \to \Lambda_2^{k+\ell-1}\\&\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 = dH \pm Hd \text{ のとき、}\\&\quad \varphi_1 \text{ と } \varphi_2 \text{ は、}\underline{\text{homotopic}} \text{ と言う。}\end{aligned} \tag{1.18}$$

φ_1 と φ_2 を Λ_1 から Λ_2 への、degree が ℓ の準同型とします。それから、 H を Λ_1^k から $\Lambda_2^{k+\ell-1}$ への map とします。こういうのがあって、 $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ というのが、 — ちょっと、符号があれですが — $dH \pm Hd$ のとき、この 2 つは、homotopic ということにします。

1.11 Homotopic な写像は、homology で見て同じ写像

$$\begin{aligned}&\varphi_1 \text{と } \varphi_2 \text{が homotopic}\\&\Longrightarrow \quad 2 \text{ つは、cohomology に同じ写像を導く。}\\&\qquad \text{すなわち、任意の } [u] \in H^*(\Lambda_1) \text{ に対して、}\\&\qquad\quad (\varphi_1)_*[u]\ (= [\varphi_1(u)] = [\varphi_2(u)]) = (\varphi_2)_*[u]\end{aligned} \tag{1.19}$$

そうするとですね、 φ_1 と φ_2 が homotopic だったらば、この 2 つは、コホモロジーに同じ写像を導きます。

$$\begin{aligned}&H^*(\Lambda_1) = \frac{\mathrm{Ker}\ d}{\mathrm{Im}\ d}\\&\ni [u]\end{aligned} \tag{1.20}$$

ちょっと、ホモロジー代数の話として、これを示しましょう。思い出しますと、differential graded algebra の cohomology というのは、Ker d を Im d で割ったものなんです。今、$[u]$ というのが、cohomology $H^*(\lambda_1)$ の元だとします。

$$du = 0 \tag{1.21}$$

そうしますと、du が 0 になるんですが。

$$\begin{aligned}&\varphi_1 u \Leftrightarrow \varphi_2 u = (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)u = (dH \pm Hd)u = dHu \pm Hdu = dHu\\&\text{ゆえに、} \quad [\varphi_1 u] = [\varphi_2 u] \quad \text{in } H^{k+\ell}(\Lambda_2)\end{aligned} \tag{1.22}$$

$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 = dH \pm Hd$ のとき、(1.21) より $\varphi_1 u \Leftrightarrow \varphi_2 u$ は dHu でして。従って、$\varphi_1 u$ の同値類と、$\varphi_2 u$ の同値類が等しくなる。これで、(1.19) が示せました。

1.12 幾何に代数を対応させる

それで、私はこういうことを言いたかったんですが。

$$\begin{array}{l} M : \text{多様体} \\ \quad\downarrow \\ \Omega^*(M) \quad \text{DGA (differential graded algebra)} \end{array} \tag{1.23}$$

多様体に対して、differential graded algebra というのが決まるわけですが。だけど、differential graded algebra そのものを考えるのは、あまり筋が良くなくて。一番自然なのは、こいつのホモトピー同値類というのを考えるということです。

$$\begin{array}{l} \{\text{多様体全体}\} \\ \quad\downarrow \quad \text{情報が減る} \\ \{\text{DGA のホモトピー同値類}\} \\ \quad\downarrow \quad \text{情報が減る} \\ \{\text{コホモロジー環}\} \end{array} \tag{1.24}$$

ですから、多様体全体というものに対してですね、 — 本当は、もっと一般にしてもいいんだけど — こういう differential graded algebra のホモトピー同値類というのを考えます。

どうしてこんなことをしたいかと言いますと、大体はですね、世の中、幾何の方が代数よりは難しくて。こういう無限次元のはだめですけれど、有限次元の代数というのは、まあ、全部、式で書けますから。どうにかこうにか見えるわけです。しかし、幾何の対象というのは、一般に絵ですから。高次元の絵というのは、何か良く分からないので。ですから、こういう風に代数にすると、物事が良く見えてくる。

それで、これは情報が減っているわけですが。もっと減りまして。大分、減りまして。何ができるかというと、コホモロジー環というのができる。

ここでは、位相的場の理論という話をしたいのですが。Algebraic Topology では、こういうタイプの等化空間を作って、そのうちの幾何学的なものに対して、代数を対応させるという操作をしている。まあ、大体、見やすい代数を対応させようと思うと、情報が減っちゃうわけですが。そういう操作をやろうというわけです。

1.13 コホモロジー環 $+\ \alpha$

$$\begin{array}{l} DGA(\Lambda, d, \lambda) \text{ のホモトピー同値類を} \\ \quad \text{コホモロジー環} + \alpha \\ \text{としたときに、} \alpha \text{ は何か？というのを理解したい。} \end{array} \tag{1.25}$$

ここでですね、DGA のホモトピー同値類というのが何で決まるかということを考えたい。ホモトピー同値類というのをですね、コホモロジー環 $+\alpha$ と思いたいわけです。これを α としたときに、α は何かというのを理解したい。これが 1 つある。

1.14　DGA のホモトピー同値類 $+\ \alpha$

$$
\begin{array}{l}
\text{多様体の可微分同相類} \\
\quad || \\
\Omega^*(M) \quad DGA\ \text{のホモトピー同値類} \\
\quad +\ \alpha \\
\text{としたい。このとき、}\alpha\ \text{は、何か？}
\end{array}
\tag{1.26}
$$

もう１つは、空間、 — まあ、多様体でいいですが — 多様体の、まあ、可微分同相類ぐらいにすると、これに対して、こういった微分形式全体という DGA を対応させるわけです。これにですね、何か $+\alpha$ をして、この対応が等しいとしたいわけです。そのとき、この α は、何か？

もう一回言いますと、トポロジーでは、例えば、多様体の可微分同相類というものを全部決定しようと思うわけですが。大体、トポロジストというのは、こういう幾何のことを代数で理解したいわけです。とりあえず、一番すぐに見えるものは、こういう Differential graded algebra. 微分形式全体に、外微分と積を考えたものですが。だけど、それだけでは、まだ足りないわけです。つまり、Differential graded algebra のホモトピー同値類の意味で全く同じだけども、可微分同相類としては全然、等しくないということは、昔からあるわけですね。そこに対して、何かもっと入れて、一緒にしようという試みがいろいろあるわけです。それは、algebraic topology の中心なんですが。そういうことをやるときに、どういうものを付け加えるかという、そういう問題意識があるわけです。こういうのは、50 年代、60 年代に、ずっとあるわけですけれども。

1.15　こういう問題意識を場の理論に

何でこういうことを、お話の枕にしたかと言いますと、これは、50 ～ 60 年代のトポロジーの主要問題意識だったわけですが。こういう問題意識をですね、場の理論とかに持ち出したいというのが、１つの目的です。

1.16　多様体という概念

それで、こういうことを考えたいわけです。あの、多様体という概念があるわけですが。

$$
\begin{array}{l}
\underline{\text{多様体}} \\
\text{高次元の図形（空間）という概念を} \\
\text{数学的に定式化したもの}
\end{array}
\tag{1.27}
$$

これは、何だったかというと、高次元の図形 — 或いは、空間と言ったほうがいいかも知れませんが — という概念を数学的に定式化、或いは、正確に定式化したものです。

1.17 多様体という概念を ‘量子化’ したい — 夢 —

今、物理の人たちが必要だと考えているのは、多分、多様体という概念を一般化することです。

$$\text{多様体という概念を ‘量子化’ したい — 夢 —} \tag{1.28}$$

その定義は何かというのはできていないんですが。多様体の概念を何か、一般化、乃至は、量子化したいというのが、多分、ずっと、あるわけです。それはなぜかというのは、いろいろ理由がありますが。

あの、リーマンが考えた多様体という概念がありますが、それを使って、一般相対性理論というのができたんですが。

$$\text{リーマンの作った多様体 — 一般相対性理論 —} \tag{1.29}$$

一般相対性理論を量子化しようと思ったらば、多様体のままではだめで、もっと一般的な概念、もっと、もっと、何か別の概念がいるというのが量子力学なんです。

これがだから、夢なんです。多分、これが幾何の最大の難しいことですが。多様体の概念というのを本当にもっと。これをやるのは難しいわけで、まあ、リーマンぐらいがやるといっても、多分、あと 100 年ぐらいかかるでしょうが。それは、なかなかできない。こういうことを考えると、多様体を少し変えたいというのが、ちょっとあるわけです。そのときですね、こういうことができると少しいいだろうというのがあるんです。

> 問:『重力場以外は、空間を量子化する必要はないから、とりあえず多様体でいいですか？』
>
> 重力場以外はですね。。ゲージ場の場合には、確かに空間が多様体でよかったわけですよね。但し、その場合でも、ゲージ場自身は、そんなに量子化された意味で正確に定義されていないから、その辺は、無駄になってしまうだろうけども。
>
> 多分、量子化を考える限りは、すべて、どっかに何かこう多様体という、共通な所がいるんだろうなと。ついでに言うと、ゲージ場を量子化しようと思うと、ベクトル・バンドルという概念が、ある意味で出てくるかもしれない。どのバンドルの connection かとかいうのは、意味がなくなるかもしれないので。

だから、そういう今までの数学の幾何学の枠組みというのは、量子化する前の枠組みとしては、非常に有効なんだけれども、量子化した後の枠組みとして、同じでいいかというのが、多分、いろんな、ここ最近の難しいことです。

1.18 $\Omega^*(M)$ の量子変形なら、今の数学でも手が出る。

それで、非常に単純なことを言ってしまいますと、こうなんですね。例えば、DGA というのがありますが。こういうのを量子化する、こういうのを量子変形するというのを考えやすい。

$$\begin{array}{l} DGA \\ \underline{\Omega^*(M)\text{ の量子変形}}\text{なら、今の数学でも手が出る} \end{array} \tag{1.30}$$

これならまだ、今の数学でも手が出る。つまり、多様体 M に対して、DGA のホモトピー型がありますが。これをですね、何か one parameter で変形する。それを量子コホモロジーと言います。もっと、いろいろあるわけですが。こういうのが、今の数学でもあって、それは少しは手が出るんです。

1.19 空間概念の方を変形したい

$$\begin{array}{ll} M & \text{空間概念の方を変形したい} \\ \downarrow & \\ DGA\text{ のホモトピー型} \rightsquigarrow & \text{変形する} \\ & \text{（量子コホモロジー, etc.）} \end{array} \tag{1.31}$$

しかし、これは何か不満でして。不満というのはどういうことかと言いますと、やっぱりですね、これをしたいわけです。何をしたいかというと、空間の方を変形したい。空間 概念 の方を変形したい。

1.20 環を変形するというのは

ここで、環を変形するっていうことはどういうことかと言いますと。一番、単純な環で、何にしましょうか。

$$\begin{array}{l} \text{環を変形する} \\ x, y, z, w \\ xy = z \quad \rightsquigarrow \quad xy = z + \varepsilon w \\ \qquad\qquad \varepsilon\text{ はパラメータ} \end{array} \tag{1.32}$$

例えば、何か base x, y, z があって、 $xy = z$ という関係式があるとします。もう一個 base w を取って。適当にやるだけですから。これを変形しようと思ったらば、こうやってやるわけです。何を言いたいかを示すためだけの例なんですが。こういうのを変形してみます。もともと、 $xy = z$ だったやつに、何か持ってきて、$xy = z + \varepsilon w$ にする。 ε はパラメータです。掛け算の、何か、構造定数みたいなのが、ちょろっと、1 パラメータだけずれる。そういうことを、実際、量子コホモロジー環でやっているわけなんです。

微分形式全部というのは、無限次元でいやなんですが。大体、これ、コホモロジーだと思っていいわけですが。コホモロジー環っていうのは、まず、多様体があって、そういう環が決まるわけで

す。環構造そのものっていうのは、空間が何かちょっと量子化されると、どういう風に動くかというのには、まあ、数学があるわけです。

そうすると、そういうものには、まあ、手が出るわけで。それはなぜかというと、環というのは、ある意味で見えるわけですから。環を量子変形すると何ができるかというのは、少しはできるわけです。

1.21　M に当たるものは何か

こういうものは、いろいろ具体的な example で話が見えてきて、非常におもしろさが分かって来ている。で、何か、そういう空間概念ていうか、ベクトル環から定義できるコホモロジー環とかいうのが具体的にあるわけですが。

本当は、それをちゃんと理解しようと思ったらば、こういう環があるだけではだめで、M に当たるものは何か、ここを理解する。何か多様体概念の変形にあたる、何らかの意味での空間概念があって、それから、空間に対して、その微分形式を対応させる、その対応の一般化として、ここの対応を理解したい。というのが、まあ、場の理論。そういう場の理論が大事なんですが、それは、なかなかできなくて。ここができれば、多分、重力場の量子化という、大事なものに繋がる何かがあるはずで。

1.22　代数の変形から、幾何が見える？

この辺ができるのが、中島啓氏によると、22 世紀ぐらいで。あと 100 年ぐらいは、できないという話で、今はできないんですが。とにかく、100 年間、寝てるわけにもいかないので。代数の変形なら見えるから、ここをちょうどうまい具合にやって、代数の方で定式化してしまえば、代数の変形から空間の変形が見えるんだったら、見えるでしょうというのが方針です。

とにかく何かやらないといけない。何かやらないと、あと 100 年間、何もできないので。100 年間に少しは想像できる手段として、こちらの代数で、少しは見える方で変形を見ていこう。その為には、何の変形を見たらいいかという、その辺を理解したい。これが、最初の目論見の一つにあるわけです。

1.23　Gromov による幾何と解析の解釈

ここで、そうですね、定義を書きます。

定義　(M. Gromov)

$$\begin{aligned}&M \text{ 上の幾何} = \text{別の空間 } \Sigma \text{ から } M \text{ への写像の研究}\\&M \text{ 上の解析} = M \text{ から別の空間への写像の研究}\end{aligned} \tag{1.33}$$

ここで、ちょっと話が変わりますが。この定義は、Gromov という、非常に偉大な数学者が、数年前、日本数学会に来たときに書いた定義なんですけれども。幾何学とは何か。さっきは、algebraic topology だったんですけれども、幾何学。これは Gromov の責任にすると、彼が怒るかもしれませんが。 M 上の幾何というのがありますが。これは何かと言いますと、何か別の空間 Σ から M への写像を研究するということです。それで、 M 上の解析学というのは何かというと、これは、 M から別の空間への写像を研究するということです。これが、幾何学と解析学の概念の定義なんですが。

で、example ですけれども。

$$\begin{aligned} & M = \mathbb{R}^2 \\ & \underline{\text{平面幾何}} \\ & \quad \mathbb{R}^2 \text{ 上の円, 3 角形, etc.} \\ & \quad S^1 \to \mathbb{R}^2 \text{ なる写像を調べる。} \\ & \underline{\mathbb{R}^2 \text{ 上の解析}} \\ & \quad f(x, y) \cdots 2 \text{ 変数関数を調べる。} \end{aligned} \tag{1.34}$$

M を $\mathbb{R}^2$ としましょう。平面幾何学っていうのは、何か。これはですね、$\mathbb{R}^2$ 上の、例えば、一番良く出てくる $\mathbb{R}^2$ 上の円とか 3 角形とかにします。円とか 3 角形とかいうのは、 S^1 から $\mathbb{R}^2$ への map であると、こういう風に見ます。これが幾何学です。平面幾何。それで、平面上の解析学というのは何かと言うと、これは 2 変数関数全体です。別に何かの役に立つわけじゃないんですが、これが定義です。

このように、幾何学を考えるというのは、何か、そこへの写像を考えるということで、解析学とは、その上の関数を考えるということ。こういう 2 つの見方というのが、幾何学に出てくるものなんです。

1.24　ド・ラム コホモロジーは解析で、singular homology は幾何

さっきですね、多様体 M に対して微分形式の環というのを考えましたけども。

$$\begin{array}{lll} M \to \text{ド・ラム コホモロジー } \Omega^*(M) & \text{微分形式の環} & \text{解析} \\ M \to \text{singular homology} & & \text{幾何} \end{array} \tag{1.35}$$

微分形式の環を考えるっていうのは、これは、まあ、解析ですね。今、理解した定義において、解析なわけです。ちょっと違うのは、関数ではなくて、微分形式だから、対応のやり方がずれていて[4]、（2 次以上だったら）ベクトル・バンドルからの写像には絶対ならないわけですが。うるさいことを言わなけりゃ、今の意味で解析なわけです。これは、ド・ラム コホモロジーですね。

今、 M に対してですね、singular homology というのがあるわけですが。これは、何か M への写像を使うんですね。例えば、トーラスを $\mathbb{R}^2$ 割る $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と考えます。こっちを x で、こっちを y にすると。

[4]関数は、多様体上の各点に対して（ここでは）実数を対応させるものだが、1 次の微分形式は、多様体の各接ベクトルに対して、実数を対応させるものである。さらに、 n 次の微分形式は、接ベクトルの n 個の組に対して、実数を対応させるものである。

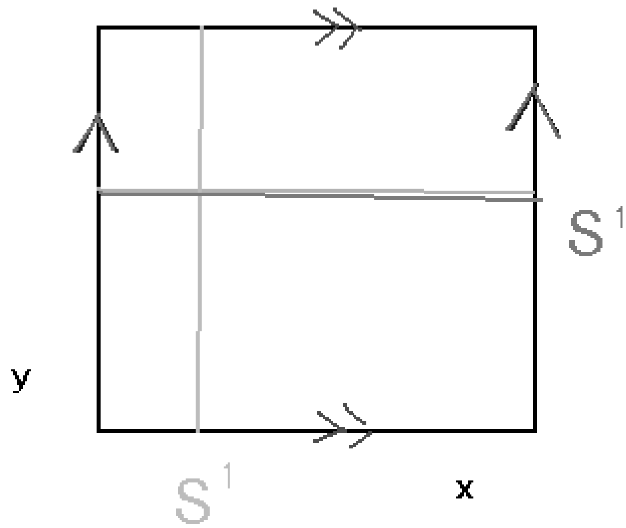

図 1.1: $H_1(T^2)$ の base

T^2

De Rham

$$[dx],[dy] \quad H^1(T^2) \text{ の base} \tag{1.36}$$

singular ホモロジー

$$S^1 \subset T^2 \quad H_1(T^2) \text{ の base}$$

x, y は、1 足すと帰って来るんですが。ド・ラム コホモロジーは、 $[dx]$ と $[dy]$ たちが、トーラスの H^1 の base ですね。で、singular homology というのは何かと言いますと、絵（図 1.1）で描くと、これが S^1. これ、 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ で割ってますから、両方とも S^1 なんです。 S^1 が、こう、入っている。これは幾何的な見方なんです。

もう一回言いますと、ド・ラム コホモロジーっていうのは、そういう dx とか dy とか、微分形式を使ってコホモロジーを定義するんですが。一方、singular homology では、 S^1 とか、そういう submanifold がある。Singular homologyっていうのは、これは、どうしても singular なので。

ついでに言いますと、 T^2 ぐらいだと、これは、S^1 とかの多様体でいいですが、一般には、もっと singular な多様体で、特異点があるサイクルになっています。こういうのが、singular homology. これを幾何と思う。

1.25　環と内積

ここで、ド・ラム コホモロジーの環構造っていうのは、何だったかと言うと。

$$\begin{array}{llllll} & \text{環} & \text{内積} & & & \\ du & u \wedge w & \int u \wedge v & u \in \Lambda^k & v \in \Lambda^{n-k} & \\ & \text{wedge 積} & & & & \end{array} \tag{1.37}$$

積は、ウェッジ積ですね。後、内積っていうのがあるんですが。内積っていうのは、要するに、積分なんですね。 u が k-form だったらば、 v は $(n \Leftrightarrow k)$-form. $\int u \wedge v$ という操作が、ここらにあるわけです。さっき、DGA で言ったときに、これだけ、大事なことが落ちていました。微分形式の構造は何かと言うと、この内積、こういう環の operator と、ウェッジ積、あとはもちろん、外微分ですけれども。

1.26　交点理論

これに対応する、singular な交点理論があります。

$$\begin{array}{ccr} \text{交点理論} & & \text{Poincaré duality} \\ M & : & n \text{ 次元 } \underline{\text{mfd}} \\ N_1 & : & k \text{ 次元 } \underline{\text{mfd}} \\ N_2 & : & n \Leftrightarrow k \text{ 次元 } \underline{\text{mfd}} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} M \\ N_1 \\ N_2 \end{array}}\right) \text{oriented} \tag{1.38}$$

ちょっと、交点理論というのを思い出して、どういうことが成り立つかというのを復習しましょう。これが成り立つのは、コホモロジーとか Poincaré duality の基にあるのと共通なことなんです。交点理論を考えるというのは、ちょうどこちらの積分を考えるということなんですが。交点理論における、この積分という操作。積分、乃至、定積分の操作や、dual の考え方とかが、多分、位相的場の理論にいろいろと出てくる。

で、交点理論を考えましょう。どうせ後で言いますから、singular homology を pseudocycle というもので定義する方法というのを、ちょっとご説明しましょう。

n 次元多様体 M の中にですね、今、k 次元の submanifold N_1 と、$(n \Leftrightarrow k)$ 次元の submanifold N_2 があるとします。全部、向きが付いているとしましょう。そうしますと、交点理論っていうのでは、こういうことを考えるんですね。

Def.

$$
\begin{array}{l}
N_1 \text{と } N_2 \text{が、transversal} \\
p \in N_1 \cap N_2 \\
T_pN_1 + T_pN_2 = T_pM \\
\qquad\qquad\qquad \downarrow \text{自動的に直和になる} \\
T_pN_1 \oplus T_pN_2 = T_pM \\
\qquad\quad \uparrow \text{直和になる} \\
(T_pN_1 \cap T_pN_2 = 0)
\end{array}
\tag{1.39}
$$

N_1 と N_2 が transversal というのは、どういうことだったかと言いますと。 p が、N_1 と N_2 の共通部分に入っていれば、tangent space の N_1 と、tangent space の N_2 を足すと、全体の tangent space になるっていうのが定義です。これは、多様体の話に出てくる定義なんですが。今の場合は、次元の数がちょうど合っていますから[5]、これは自動的に直和です。T_pN_1 と T_pN_2 の intersection が、0. 直和です。

それでですね、こういう Lemma があるわけです。Lemma.

$$
\begin{array}{l}
\underline{\text{Lemma}} \quad \text{(Thom)} \\
\quad N_1, N_2 \subset M \text{ とする。} \\
\quad \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して、} N_2 \text{を } \varepsilon \text{ だけずらして、} \\
\quad N_1 \text{と } N_2 \text{が transversal になるようにできる。}
\end{array}
\tag{1.40}
$$

こう、2 つ多様体 N_1, N_2 があったときに、— この lemma は、証明しませんが。これ、多分、トムですね。ルネ・トムですね。 — 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 N_2 を ε だけずらして、 — ε だけずらすなんていうのは、ちゃんと定義しなければ、いけないんですが。ここでは、やりませんが — N_1 と N_2 が transversal になるようにできる。こういうのがあるわけですね。これを認めて。交点理論というのは、何だったかと言いますと。

$$
N_1 \pitchfork N_2 \quad (N_1 \text{と } N_2 \text{が transversal}) \tag{1.41}
$$

今、 N_1 と N_2 が、transversal とします。

$$
\begin{aligned}
N_1 \cdot N_2 \quad &= \Sigma_{p \in N_1 \cap N_2}\ \varepsilon_p \\
\varepsilon_p \quad &= \begin{cases} \quad 1 & \text{(1.43) の同型が向きを保つ。} \\ \Leftrightarrow\!1 & \text{(1.43) の同型が向きを保たない。} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

そうしますと、 N_1 と N_2 の交点数というのは、ε_p を足し合わせたもので、 p というのは、 N_1 と N_2 の交点。 ε_p というのは、 1 か、または、 ⇔1 なんです。

[5] T_pN_1 の次元 k と、 T_pN_2 の次元 $n-k$ を足したものが、ちょうど T_pM の次元 n に一致している。

$$\underbrace{T_pN_1}_{\text{向き}} \oplus \underbrace{T_pN_2}_{\text{向き}} \cong \underbrace{T_pM}_{\text{向き}} \tag{1.43}$$

ここに、こう書きましたけれども。T_pN_1 と T_pN_2 を足すと、これは T_pM に等しいわけですね。これには、全部、向きがあるわけです。そこで、この同型が向きを保っているときは、$\varepsilon_p = 1$ で、この同型が向きを保っていないときは $\varepsilon_p = \Leftrightarrow 1$ とする。そして、これを全部足したやつが交点数というわけです。

1.27　微分形式の積分と交点数

それで、ええと、こうなんですね。

$$H_k(M) \to H_{DR}^{n-k}(M) \tag{1.44}$$

M の k 次元ホモロジー $H_k(M)$ というのと、同型な、M の $(n \Leftrightarrow k)$ 次元ド・ラム コホモロジー $H_{DR}^{n-k}(M)$ なんですが。ホモロジーの、この同型を何か、思い出して。

$$\int PD[N_1] \wedge PD[N_2] = N_1 \cdot N_2 \tag{1.45}$$

交点数 $N_1 \cdot N_2$, これ、数ですね。こういうの（ $N_1 \cdot N_2$ ）が、積分と関係あるんです。Poincaré duality の N_1 と、wedge の Poincaré duality の N_2 を積分したものというのが、交点数 $N_1 \cdot N_2$ である。これは、多分、ホモロジー論でやることですが。

さっきのトーラスの例を描きますと（図 1.2 参照）、こっちが dx で、こっちが dy で。

$$\begin{aligned} & T^2 \\ & dx \leftarrow N_1 \\ & dy \leftarrow N_2 \\ & \textstyle\int dx \wedge dy = 1 \\ & N_1 \cdot N_2 = 1 \end{aligned} \tag{1.46}$$

何にしましょうか。これを N_1 にして、これを N_2 にしますと。同型で N_1 が対応するのが dx でして。ここに、こうあって。N_2 が dy に対応するんですが。dx と dy をウェッジして積分したやつが 1 になるんです。それで、N_1 と N_2 の交点数というのは、$N_1 \cap N_2$ が一点しかないですから、これは、もちろん 1 なんです。$\int dx \wedge dy$ と $N_1 \cdot N_2$ が等しいというのが、(1.45) に書いたことです。

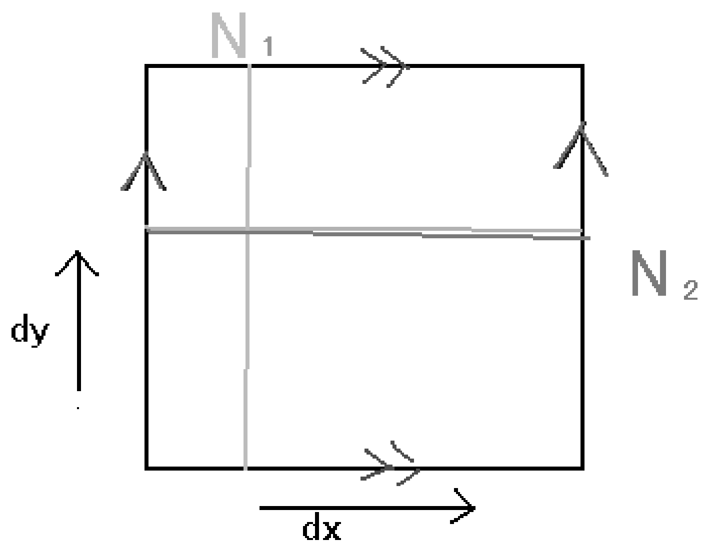

図 1.2: T^2

1.28　解析と幾何は、dual

$$\underline{\text{言いたかったこと}}\quad \text{解析と幾何は dual} \tag{1.47}$$

何を言いたかったかといいますと。解析学と幾何学は、dual です。今、ホモロジーの場合ですけれども。dual.

$$\begin{array}{lcl} \underline{\text{例.}}\ \ \text{(コ) ホモロジー} & & \\ \quad\text{微分形式} & \longleftrightarrow & \text{“部分多様体”} \\ \left.\begin{array}{l}\text{ウェッジ積}\\ \text{積分}\end{array}\right) & \longleftrightarrow & \text{交点数} \end{array} \tag{1.48}$$

（コ）ホモロジーの場合を見ますと、微分形式というのに対して、submanifold（部分多様体）というのがある。これは、後で、ド・ラム コホモロジーと singular homology の対比についての話をするとき（1.35 節）、出てきます。部分多様体である。本当は singular. それで、この微分形式のウェッジ積、あと、もう一個、積分という操作がありますが。こういうものが、右側に行って何に対応するかというと、交点数なんです。この duality を実現するのが、Poincaré duality ですけども。

1.29 操作２つ

ちょっと、こちらの操作を考えたいんですが。さっき、ちらっと言いかけた、こういう操作を説明しますと。

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{I} & H^k_{DR}(M,\mathbb{R}) & \otimes & H^{n-k}_{DR}(M,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & [u] & \otimes & [v] & \mapsto & \int_M u \wedge v \end{array} \tag{1.49}$$

k 次元のド・ラム コホモロジーと、$(n \Leftrightarrow k)$ 次元のド・ラム コホモロジーを考えるとき、これから、ペアリングがあるわけです。何だったかというと、u の表わす cohomology class $[u]$ と、v の表わす cohomology class $[v]$ に対して、u と v をウェッジして、積分したものを対応させなさい。

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{II} & H_k(M,\mathbb{Z}) & \otimes & H_{n-k}(M,\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{Z} \\ & [N_1] & \otimes & [N_2] & \mapsto & N_1 \cdot N_2 \end{array} \tag{1.50}$$

こちら側の、それに対応するやつは何かと言いますと。同じように、k 次元の、— 普通の、これは、$\mathbb{Z}$ にしましょう — k 次元のホモロジー群の元と、$(n \Leftrightarrow k)$ 次元のホモロジー群の元に対して、数を対応させるわけですが。何かというと、N_1 の homology class と、N_2 の homology class に対して、N_1 と N_2 の交点数を対応させる。そういう対応です。2 つが一致するという話があるんですが。

1.30 （コ）ホモロジー類にのみ依る

その前にですね、この写像は well-defined であるというのを。その説明は覚えてもらう必要はないことですが。やさしいことですが。ちょっと復習して。実は、ここでやる証明のパターンというのが、後で出てくる難しい定理の方でも同じように使われるので、ここで説明するわけですけども。

$$\text{右辺が } u, v,\ N_i \text{ の（コ）ホモロジー類のみに依る。} \tag{1.51}$$

もう一回言いますと、$\int_M u \wedge v$ または $N_1 \cdot N_2$ が、u, v 或いは、N_i の（コ）ホモロジー類に、類だけに依るということが分かる。

どういうことかと言いますと。まず、I についてですが。ド・ラム コホモロジーというのは、Kernel の d 割る Image の d ですから、u の取り方というのは一意でないわけで。取り方は、いろいろあるわけですが。取り方を変えてもこの積分の値 $\int_M u \wedge v$ は変わらないというのが、ここで言っていることです。

II の方も、同じホモロジークラスを表わす submanifold は、いっぱいあり得るわけですが。それを取り替えても交点数 $N_1 \cdot N_2$ は変わらないというのがこの定理です。それが、ある意味で両方とも言えるわけですが。

1.31 Stokes & Cobordism

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{I} & \Rightarrow & \text{Stokes の定理} \\ \mathrm{II} & \Rightarrow & \text{Cobordism argument} \end{array} \tag{1.52}$$

I は何から来ているかと言いますと、Stokes から来てまして。で、II はですね、ちゃんと証明しようと思うと、Cobordism argument というのを使う。実は、この Stokes の定理を使うというのと、Cobordism argument をするというのは、位相的場の理論で、両方とも共通して現れる内容なんです。積分でこういうことをやろうとすると、Stokes を使って。交点数でやろうとすると、cobordism argument を使う。この証明は優しいです。I からやりますと。

1.32 I の操作が、well-defined であることの証明 （Stokes を使って）

$$\begin{aligned} &[u_1] = [u_1'] \\ &[u_2] = [u_2'] \\ &u_1 = u_1' + dv_1 \\ &u_2 = u_2' + dv_2 \end{aligned} \tag{1.53}$$

まず、 u_1 と u_1' が同じ cohomology class に入って、 u_2 と u_2' が同じ cohomology class に入るとしなさい。これを仮定すると、— 定義から言えるんですが — $u_1 = u_1' + dv_1$ で、 $u_2 = u_2' + dv_2$ となりますね。

$$\begin{aligned} &\int_M u_1 \wedge u_2 \\ &= \int_M (u_1' + dv_1) \wedge (u_2' + dv_2) \\ &= \int_M u_1' \wedge u_2' + \int u_1' \wedge dv_2 + \int dv_1 \wedge u_2' + \int dv_1 \wedge dv_2 \\ &= \int u_1' \wedge u_2' + \int_M d(\pm u_1' \wedge v_2 + v_1 \wedge u_2' \pm dv_1 \wedge v_2) \\ &\uparrow \quad du_1' = du_2' = 0 \quad \big(\, [u_1'], [u_2'] \in H^* \text{ より} \big) \\ &= \int u_1' \wedge u_2' + \int_{\partial M} (\pm u_1' \wedge v_2 + v_1 \wedge u_2' \pm dv_1 \wedge v_2) \\ &\uparrow \quad \underline{\text{Stokes の定理}} \\ &= \int u_1' \wedge u_2' \\ &\uparrow \quad \underline{\partial M = \emptyset} \end{aligned} \tag{1.54}$$

そうしますと、この積分を計算するわけですね。 $u_1 \wedge u_2$ を計算して、そこに (1.51) を代入しますと、$u_1' + dv_1$ の $u_2' + dv_2$ で。これをばらします。 $u_1' \wedge u_2'$ に、プラスの $u_1' \wedge dv_2$, プラスの $dv_1 \wedge u_2'$ の、プラスの $dv_1 \wedge dv_2$ で。

これ、2 番目以降は、何かと言いますと、 d の — ちょっと、符号をいちいち書くのは、面倒くさいから — こうなりまして。これはこうなんです。これは単に、 $du_1' = du_2' = 0$ と、何か、微分形式の計算でこうなりまして。

ここで、Stokes を使うわけですが。この第 2 項ですけれども。 $\int u_1' \wedge u_2'$ プラスの、boundary M の何かです。 ∂M は空集合とします。だから、第 2 項が 0 で、従って、全体は $\int u_1' \wedge u_2'$ に等しくなります。これは、良く知られていることですが。多分、ド・ラム コホモロジーの講義ですることです。こういう、ウェッジで積分するという操作は、こういう風にしてやるわけで。要点は、Stokes を使うということ。こういう、well-defined を示すのに出て来るのは、全部、Stokes. そういう例は、後で申し上げたいんですが。

1.33　交点数がホモロジー類により定義できる

それで、こっちの方では、ペアリング、交点数というものを、ちゃんと定義できるということをご説明します。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{II}\quad N_1 \text{と } N_1' \text{が、同じ homology 類を定める}\\
&\Longrightarrow N_1 \cdot N_2 \overset{?}{=} N_1' \cdot N_2 \quad \text{を示す。}
\end{aligned}
\tag{1.55}
$$

N_1 と N_1' が、同じホモロジー類ということにします。そうすると、 — 今、ちょっと、 N_2 の方を fix しますけれども — N_1 と N_2 の交点数というのが、 N_1' と N_2 の交点数に一致する、これを証明しようというわけです。絵を描くといいんですが。これ、cobordism argument です。

先に、何をやっているかだけを言いますと、こういうことなんです。本当は、これ、正確じゃないんですが。トーラスがあって、 N_2 を描いて、 N_1 はこの辺が、ちょっと、出ていて。 N_1' の方は、素直にこう描く。

$$
\begin{aligned}
&N_1 \cap N_2 = 3\,\text{点}\\
&\left.\begin{aligned}
N_1 \cdot N_2 \quad &= \Leftrightarrow 1 + 1 \Leftrightarrow 1 \quad = \Leftrightarrow 1\\
N_1' \cdot N_2 \quad &= \Leftrightarrow 1
\end{aligned}\right\}\text{一致}
\end{aligned}
\tag{1.56}
$$

証明は抜きに答えを言いますと。まず、 N_1 と N_2 の交わりというのは、3 点。点は、3 点あるんです。

符号を考えるために、まず、 N_2 の向きをこう入れます。それで、 N_1 の向きをこうやっておいて。それで、 N_1' に入れる。 N_1 と N_1' は同じ向きにしますね。それで、全体の M の向きは、こういう向き。

そうすると、 N_1 と N_2 の交わりの点での符号ですが、ここは、マイナスですね。どうしてかというと、これは一番目で、これは二番目だから、全体の向きと逆ですね。マイナスです。ここは、プラス。ここは、マイナスです。

これ、3 点あるんですが。交点数というのは、この符号を全部、足さなくちゃいけないので、 $\Leftrightarrow 1 + 1 \Leftrightarrow 1$ で、 $N_1 \cdot N_2$ は $\Leftrightarrow 1$ になります。それで、 N_1' の方は、 N_2 との交点は、1 点しかない

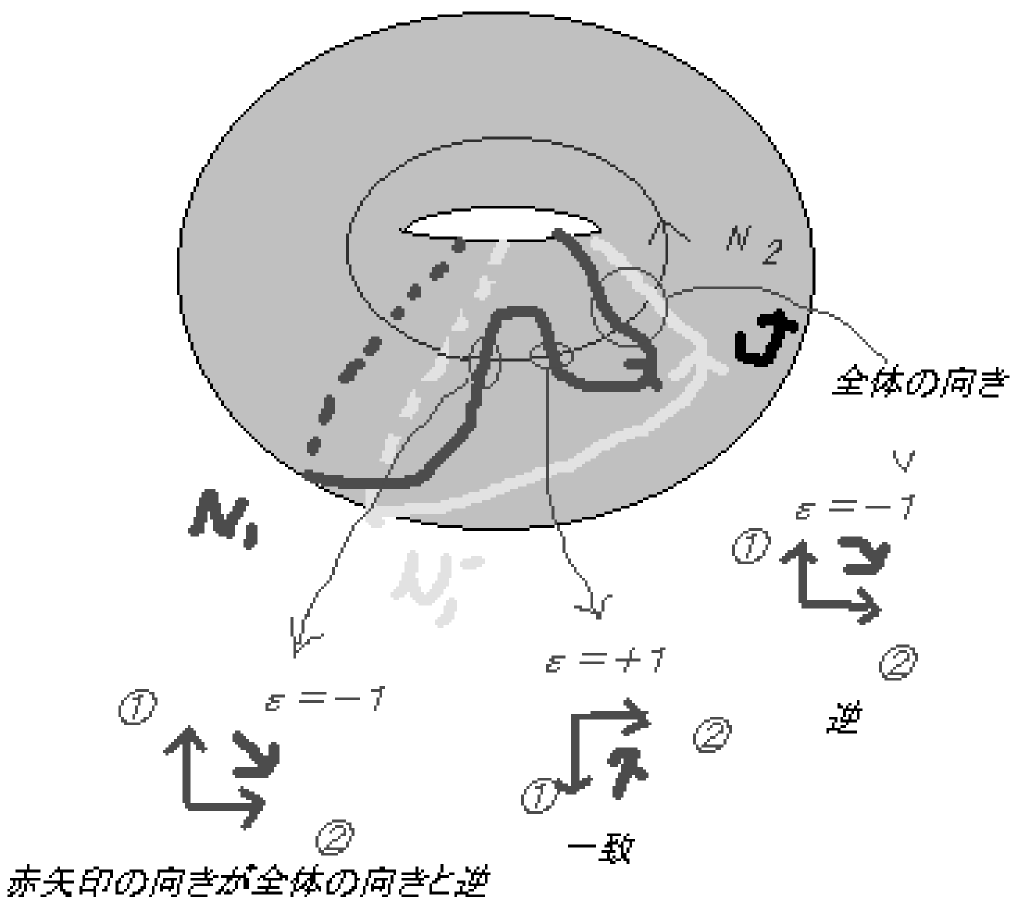

図 1.3: $N_1 \cdot N_2 = N_1' \cdot N_2$

んですが。 $N_1' \cdot N_2$ は、$\Leftrightarrow 1$. これ、等しいわけです。一致する。これは、ホモロジーの基本的な性質なんですが。

1.34 Cobordism Argument

それで、ホモロジー論の、そういう、交点数の well-definedness の証明が、実は、cobordism argument というものの、一番、単純な例になっている。Cobordism argument というのは、多分、Donaldson invariant とか、Chern-Simons とか、そういう最近のですね、非線型方程式に沿った不変量が well-defined だってことを証明するのに、いつも使われるような議論なんですが。もともとは、この単純な、交点数の well-definedness を証明するものです。

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{II} & N_1 \text{ と } N_1' \text{が、同じ homology class に入る} \\
 & \exists L \ : \ (k+1) \text{ 次元の境界付き部分多様体} \\
 & \text{s.t.} \quad \partial L = N_1 \cup (\Leftrightarrow N_1') \\
 & \Leftrightarrow N_1' \text{ は } N_1' \text{ の向きを変えたもの}
\end{array}
\tag{1.57}
$$

これを、どうやって証明するかと言いますと、こうなんです。今、同じ k 次元ホモロジー類に入る元を 2 つ取ってやります。これ、ちょっと、うそなんですが、うそはですね、そのうち、ちゃんと説明して、訂正しますから、ちょっと、うそのままやりますと。

そうするとですね、 L という、 $(k+1)$ 次元の境界付き部分多様体があって、 — この辺は、後で、もう一回描き直しますが — boundary の L が、 $N_1 \cup (\Leftrightarrow N_1')$ になっている。 $\Leftrightarrow N_1'$ というのは、 N_1' の向きを変えたものです。

本当だったら、これ、うそなんですが。いろいろ map がどうのこうのとか、そういう言い方をすると面倒くさいから、こういう言い方をしますが。正確な言い方は、後でします。

さっきの絵をもう一回、描きましょう。こんな絵だったんですね。 N_1 と N_1' と L. これ、 N_1 と N_2 が混じったやつがだめなんで。実は、もっと、深刻なことがあるんですが。それは後で説明するとして、こうなんです。

今、 N_1 と N_2 の交点は、3 点なんです。それで、 N_1' と N_2 の交点は、1 点なんですね。

$$
\begin{aligned}
&\partial(L \cap N_2) \\
&= \partial L \cap N_2 \\
&= (N_1 \cap N_2) \cup (\Leftrightarrow (N_1' \cap N_2))
\end{aligned}
\tag{1.58}
$$

さらにですね、 L と N_2 を考えます。 L と N_2 の交わりというのは、これですね。Arc. それで、 L と N_2 の交わり、こいつの境界を取ると、これは ∂L と N_2 の交わりとなっている。さらにこれは、 N_1 と N_2 の交わりと、符号を変えたものの N_1' と N_2 の交わりになっています。

$$
\begin{array}{l} N_1 \cap N_2 \\ N_1' \cap N_2 \end{array} \text{ は、1 次元 manifold } L \cap N_2 \text{ の境界である。}
\tag{1.59}
$$

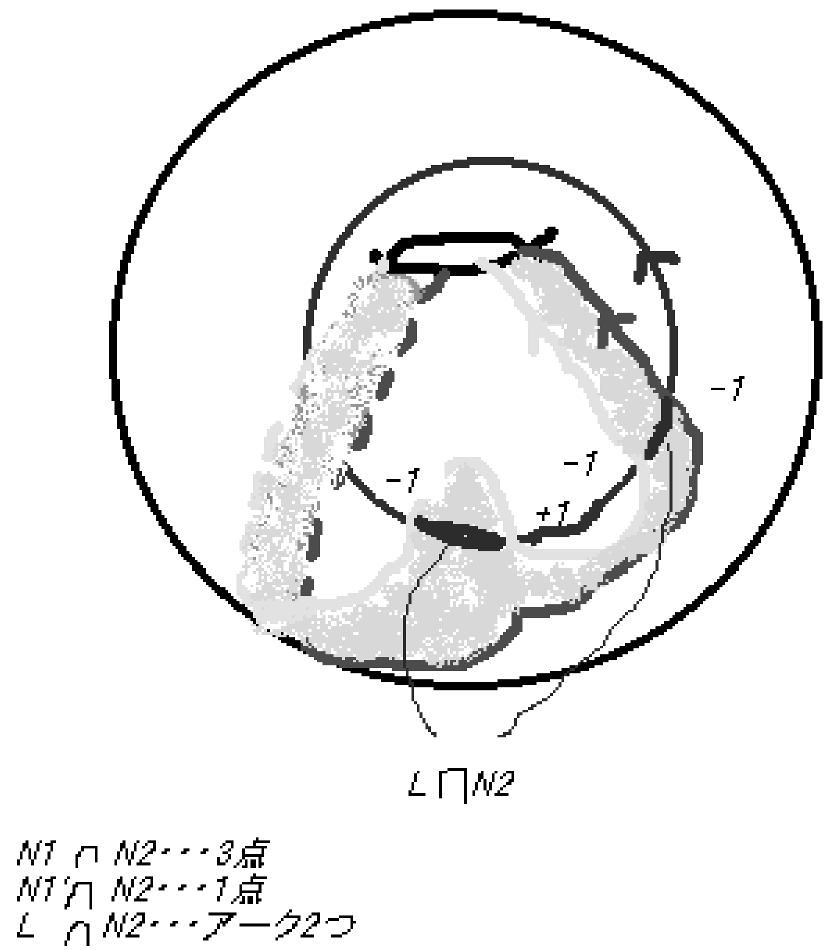

図 1.4: $\partial(L \cap N_2) = \partial L \cap N_2 = (N_1 \cap N_2) \cup (\Leftrightarrow(N_1' \cap N_2))$

今、知りたかった、この $N_1 \cap N_2$ と $\Leftrightarrow(N_1' \cap N_2)$ は、何か、ある 1 次元多様体、1 次元 manifold $L \cap N_2$ の境界である。これが、cobordism argument です。

$$\begin{aligned}&\text{符号付きで数を数えると } 0\\&N_1 \cap N_2 \text{の符号付きの数}\\&\Leftrightarrow N_1' \cap N_2 \text{の符号付きの数}\\&= 0\\&\text{ゆえに、} N_1 \cdot N_2 = N_1' \cdot N_2 \quad \text{Q.E.D.}\end{aligned} \tag{1.60}$$

そうしますと、これの境界というのは、こっちが 1 で、こっちが $\Leftrightarrow 1$ だとすると、$1 \Leftrightarrow 1 = 0$ ですから、従って、符号付きで数を数えると 0 になる。というのが交点数の性質で。これが、cobordism argument と言われているものの、一番単純なモデルケースです。

1.35　ド・ラムと singular の対比

何を言っているかというと、交点数というのは、多様体、または、空間のホモロジー類にしか依らないということです。だから、一方で Stokes を使って、一方でこういう風に、cobordism argument を使って、well-definedness を証明する。これは、abelian theory というもので、普通、ホモロジー論の方では、こういう風に、cobordisim argument をしてやる。

ド・ラム コホモロジー	Singular homology	
解析	幾何	
微分形式	“Submanifold”	(1.61)
$\int u \wedge v$	交点数 $\to$ 数を符号付きで数える	
Stokes の定理	Cobordism argument	

さっき言ったのをもう一回言いますと。まず、左側に de Rham theory というのがあって、右側には singular homology があるんですが。左が微分形式で、右が “submanifold.” 左には積分。右には交点数。これは、要するに、数を数えるんです。符号付きで数を数える。これがここにある。$\int u \wedge v$ の well-definedness は、Stokes から来て。交点数の well-definedness は、cobordism argument から来る。今、言ったように、cobordism argument です。この辺の対応は、ずっと、あるわけですが。こういうものがある。

で、左側が解析で、右側が幾何なんです。これは、ある意味で同じものを、dual で、2 通りに見ているということになるんですが。見方は、ずいぶん違うんでしょうけども。これが、解析と幾何で、ホモロジー論を研究するということです。

1.36　非可換幾何学

ホモロジー論を、こういったレベルで、ここに当たることをしたいというのが、motivation で。さらに、それを量子化したいというのがあって。

$$
\begin{array}{ll}
\text{空間概念の “量子化”} & \\
\text{非可換幾何学} & \\
M \rightsquigarrow C^0(M) & M\ \text{上の continuous function} \\
\quad\ \ \uparrow \text{可換環} &
\end{array}
\tag{1.62}
$$

ところで、空間概念の量子化というものとして、真剣に為されている内容は、いっぱいあるわけですが。一番、良くされているのは、非可換幾何学とかいうものです。それは、こういうものです。今ですね、空間に対して、まあ、連続関数、— smooth function でも、いいですけども — M 上の連続関数全体 $C^0(M)$, こういうのを考えます。この $C^0(M)$ というのは、可換環なんです。

$$
\begin{array}{l}
C^0(M) \rightsquigarrow \text{非可換環} \\
\text{Cyclic cohomology etc. (Connes)} \\
\text{こういう枠組みで、}\begin{bmatrix} \text{微分形式} \\ \int u \wedge v \\ \text{Stokes} \end{bmatrix}\text{を非可換環に一般化しよう。}
\end{array}
\tag{1.63}
$$

それで、この可換環というのを、非可換環に一般化しよう、そういうのがあるんです。量子群というのに、同じようなところがありますが。こういうのを非可換環に一般化しようというのが、非可換幾何学。非可換環というのには、何か、積構造の中に ε が入っていて、 ε を 0 にすると、もとの可換環にあたる。そうなるわけです。これが、何か、よくある所の、空間を量子変形するということで、非可換幾何学というものです。

ついでに言いますと、この枠組みの中で微分形式があるかというと、それはありまして。それは、今後の何か、Seiberg theory というのが、多分、こういう枠組みの中で、微分形式とか、微分形式の積分とかですね、Stokes とかいうのがどうなるかというのを、一生懸命にやっているんだという風に、こう、理解できるわけです。

ちゃんと言いませんが、そういうのは、僕はあんまり、よく知らないんだけど。あの、cyclic cohomology とか、そういう話がいろいろあるんです。Connes ですけれども。こういうのは、こういう枠組みで。微分形式とか、Stokes とか、こちらは、この辺ぐらいですね。これを理解しよう。これを一般化しよう。というものだという風に、私は理解しています。

K-theory とか、微分形式の積分とか、いろいろあるんです。ただ、難しいのは、 — 良く知らないことで、あれですが — 一つだけ言っておくべきなのは、これ、 $C^0(M)$ でして。こうやると、C^∞ にしなくちゃいけなくて。そうすると、そこはいやらしいんですが。それは、私は良く知らないのでやめます。

それとですね、これは、さっきの定義 (1.33) によると、解析なんです。だから、空間概念の非可換化というのは、こういう解析的な対象というものを、非可換化することによって出るわけです。

1.37　答えは、string theory？

それで、私が言いたいのは、幾何で、こちら側の枠組みでやるということで。解析の方は、ある意味で成功手段、成功はしていないんだけれども、認知されたというんですかね。ある意味で、

establish[6]されている方法。それは、いろいろ、対応しなくちゃいけないものがあるわけですけども。

それに比べると、まだ、establish されていない、こちらの枠組みでやる。少なくとも、ホモロジーのレベル、或いは、algebraic topology のレベルでは、こいつとこいつは等価なんです。もう一回言いますと、algebraic topology のレベルでは、左側と右側が等価なんです。それは、Poincaré duality で、或いは、ド・ラムの定理で、ホモロジー論を展開するのに、微分形式でやろうと、singular homology でやろうと、同じものが出てくるというのが、20 世紀前半に理解したことなんです。

$$\left[\begin{array}{l}\text{Singular homology}\\ \text{幾何}\\ \text{Submanifold}\\ \text{交点数}\\ \text{コボルディズム}\end{array}\right] \begin{array}{l}\Longrightarrow \text{これを “量子化” したい}\\ \qquad\qquad\downarrow\\ \quad\text{これの答えが }\underline{\text{string theory}}\text{ であろう。}\\ \qquad\qquad\qquad\downarrow\\ \quad\text{なぜ、それが string theory なのか？}\end{array} \tag{1.64}$$

そこで、こちら側の方に関して、これの非可換幾何学、これの非可換化は何か。これを、今言った意味で、量子化したい。というのがあるんです。これは何かというのが問題なんですが。恐らく、私が思うところ、これの答えが string theory である。これは、何かというと、これの答えが、string theory であろう。

だから、理想的に言えば、理想的に言えばですね、string theory に基づいた空間概念の非可換化、こういう story の非可換化があって、それが、こちらに出てきた関数か何かと、ある意味で等価になるわけなんです。そういうことがもしできれば、非常にうれしいというわけです。

1.38　2 つの物の間に働く力と交点数 — 古典的な状況

それでですね、これが、どうして、string theory になるかということをお話ししたいわけですが。

$$M \supset N_1, N_2 \tag{1.65}$$

まずですね、交点数というのをもう一回よく考えてみると、こうなんですね。今、 M 上に、2 つサイクルがあるとしましょう。Submanifold があるとします。それでですね、なぜ、こういう風に考えるかという荒い説明をしますと。このですね、 M というでっかい所に、この N_1 というのと、 N_2 というのがあるわけです。これ、こうやって、ちょっと交わりますね。これが N_1 で、これが N_2.

$$\left.\begin{array}{l}\text{あるものが、}N_1\text{の所だけにある。}\\ \text{別のものが、}N_2\text{の所だけにある。}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{この 2 つの間の力 : }N_1\cdot N_2\text{ で分かる。}\\ \text{この 2 つの間の力 : }N_1\cap N_2\text{ でだけ働く。}\quad\text{(classical)}\end{array} \tag{1.66}$$

それで、今、何かですね、ある物が N_1 の所にだけあるとします。で、別の物が N_2 の所にだけあるとします。

[6] 確立する。

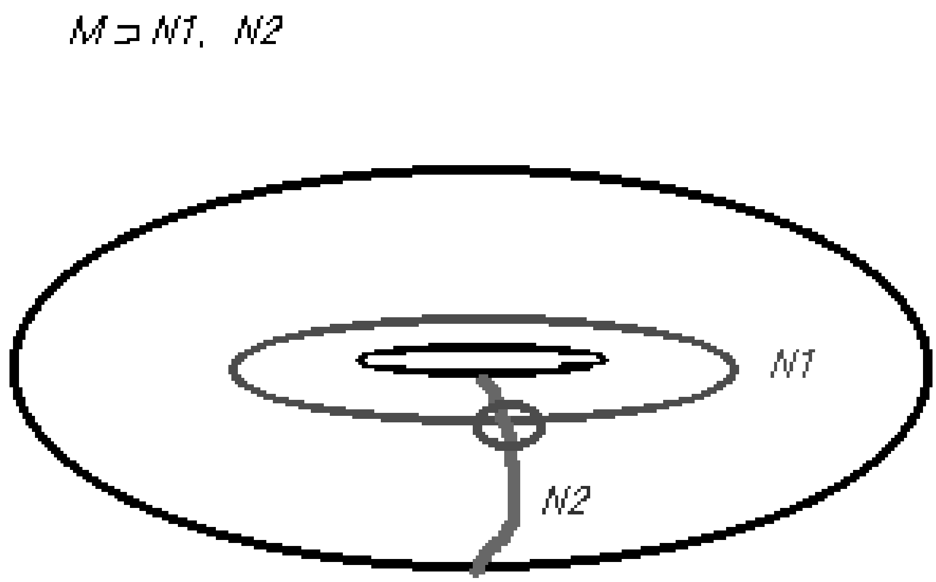

図 1.5: 2つの間の力は、 $N_1 \cdot N_2$ で分かる。

あの、「物が」という言い方は、量子力学だから。例えば、粒子があったらば、これ、 N_1 のどこにあるかというのは、よく分からない。ただ、 N_1 のどこかに、 N_1 のどこかにあるということが言える。で、別の物は、 N_2 のどこにあるかは分からないけれど、 N_2 のどこかにあるとしましょう。そうするとですね、この 2 つの間の力というのは、ここにだけ、 N_1 と N_2 の交点符号だけで、こう、働くというのが古典的な状況だろうと思うんです。

つまり、「物があったらば、ぶつからない限りは、力が働かない。2 つの物があったらば、同じ所にそれが行って、ぶつからない限りは、力が働かない。」というのが古典的な状況です。

だから、この 2 つの間の力というのは、交点数みたいなもので理解できる。Topological field theory というのは、こういうのをああいう風に考えてやると、交点の数だけ、プラス・マイナスの符号を込めて考えると、交点数としてできるわけですが。そうでない、もっといろいろな、幾何学的な計量とか、この辺の数を数えるとか、topological な方法とか。それがだから、古典的な状況だと思われるんです。

多分、ここで言っているのは、あまり精密に考えると、うそなんです。この辺は、お話です。いろいろ言いまして、多分。

1.39　写像空間と定値写像 — 場の量子論の式の例 —

そこで、こういうことを考えるわけです。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(\Sigma, M) \ni \varphi & \overset{\text{evaluation}}{\mapsto} & (\varphi(p), \varphi(q)) \in M^2 \\ \infty \text{ 次元空間} & & \end{array} \tag{1.67}$$

Σ というのを考えて。Map (Σ, M) という、無限次元空間を考えます。

$$\begin{array}{lll} N_1, N_2 \subset M & (\Sigma, p, q) & \\ u_1, u_2 & \mathcal{L}(\varphi) = 0 & \varphi \text{ は constant} \\ & \mathcal{L}(\varphi) > 0 & \varphi \text{ は nonconstant} \end{array} \tag{1.68}$$

N_1 と N_2 というのがこの辺にあるんですが。対応して、微分形式 u_1, u_2 があるとしましょう。今、$\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ からですね、 M^2 という所への map を取るわけです。 Σ の、何でもいいから、2 点 p, q を fix します。そうしますと、 φ に対して、 $\varphi(p)$ と $\varphi(q)$ という、この 2 点が決まります。

$$\begin{array}{l} \int_{\varphi \in \mathrm{Map}(\Sigma, M)} \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes u_2) e^{-\mathcal{L}(\varphi)/\varepsilon}\, \mathcal{D}\varphi \\ \varepsilon \to 0 \quad \int_M u_1 \wedge u_2 \quad \text{もとの形} \end{array} \tag{1.69}$$

これは、非常にいいかげんなことなんです。 u_1, u_2, これは、こう、何か、evaluate しますと、こいつでですね、 u_1 と u_2 をやったやつを引き戻して、これに何か掛けて、積分したというものです。これも無限次元なんかどうでもいいですけども。もっと、この式、ちゃんと書きますね。ここに、何かあって。これ、 ε にしましょうか。

そこで、今ですね、$\mathcal{L}(\varphi)$ っていうのは正で、φ は nonconstant なんです。φ が定数でなければ、$\mathcal{L}(\varphi)$ は正で、$\mathcal{L}(\varphi) = 0$ なら、φ は constant.

そうするとですね、これ、ε を 0 に持って行きますと、φ が、constant なものしか。本当は、これ、うそなんですね。これ、$\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ が付くから、本当はもっとデリケートなんだけど。ここは、非常にいいかげんに言っているんです。普通、いいかげんに言うときは、なるべく式は書いて、説明がいいかげんなんですが、これ、式も間違っていて、いいかげんです。これ、$\Leftrightarrow\infty$ になります。0 を含む。

$$\begin{aligned}&\varepsilon \to 0\\ &\quad \varphi \text{ が constant な所しか } 0 \text{ がない。}\\ &\quad \mathrm{Map}(\Sigma, M) \supset M \leftarrow \text{constant map 全体}\end{aligned} \tag{1.70}$$

そうすると、$\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ の中にですね、M というのがあります。これ、constant map、定値写像全体です。写像の空間の中で、定値写像が絶対あるわけですが、そういう所で考えます。そうすると、φ がですね、定値写像になるから、この $\mathcal{L}(\varphi)$ が 0 になります。だから、これ、なくなってしまうので。大体、どうなっているかというと、M 上での、u_1, u_2 の積分に他ならない。こういうのがとにかくある。

それで、「こういう φ という、Σ から M への map が使われている」という感じを出す為に、こういう積分をするわけです。

$$\begin{array}{ll}(\Sigma, p, \varepsilon) & \int_{\varphi \in \mathrm{Map}(\Sigma, M)} \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes u_2) e^{-\mathcal{L}(\varphi)/\varepsilon}\, \mathcal{D}\varphi \\ \Sigma\text{: 1 次元} \quad \Sigma\text{: 2 次元} & \text{string theory}\end{array} \tag{1.71}$$

多分、元々は、Σ が 1 次元の場合ですが。これを式で書くと、場の量子論の式で。Σ が 2 次元になると、string theory になる。で、3 次元、4 次元というのは、これは brane ですが、それは私はちょっと知らないのでやめて。

1.40 ぐるっと回って — topological field theory —

ですから、こういう効果を取り入れることによって、何か、例えば、交点数みたいなですね。元々の古典的なものというのを、こういう風にぼかしたわけです。本当に見つかっていない所の寄与を、何か、生かすようにしたんですね。こういう交点数みたいな、元々の古典的な量というのを、こういう風に、量子変形、perturb するいきさつがあるはずだという風に思われるわけです。

M の topology　$\Leftrightarrow$　M の topology を変形したもの

$\downarrow$ $\uparrow$

数たち
$\int u_1 \wedge u_2$　etc.　$\Leftrightarrow$　$\int_{\varphi \in \mathrm{Map}(\Sigma, M)} \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes u_2) e^{-\mathcal{L}(\varphi)/\varepsilon} \mathcal{D}\varphi$　(1.72)

$\downarrow$

M の topological type を決める

数たち　$\Leftrightarrow$　代数系 DGA　$\rightarrow$　量子変形とれる

そうしますと、こういうですね、classical な topology で決まる状況、 M の topologyっていうものがあるとします。これに何か数を対応させる。例えば、積分 $\int u_1 \wedge u_2$ ですね。もっと、いっぱいあるわけです。それらを perturb したものを考えます。

多様体というものに対して、それを代数で近似したいということがあるけれども、そのとき、まず、第一近似として、differential graded algebra というもので近似したわけです。それでは足りないので、もっと、何か入れて、こういう風に、逆向きの矢印[7]を作りたいけれども、何がいるかは分からない。だけど、もっとたくさん、いろんなものを持ってくれば、少なくとも M の topology ぐらいは、全部、理解できる。そういうものは、こういうタイプの積分的な量で、全部書けると思われるわけです。

それで、こういうですね、数たちを決めるということが、さっきの言い方をすると、何か、代数的なシステムを決めるということに対応する。例えば、differential graded algebra を決めることに対応する。

そうすると、 M の topology を perturb した瞬間に、この代数系というのは、何か、変わるはずなんです。それが、代数的な量子変形になるんです。そうすると、 M の topologyっていうのは、元々、分からなかったんだけど、もし、この逆向きの矢印を信じるならば[8]、ここに何か、 M の topology を量子変形したものというのがあるはずなんです。何かあるものが、ここに 何かがある だろうと思われるわけです。そうすると、この矢印がぐるっと回るだろう。これが目標なんです。

で、こういうことをすれば、空間概念、topology というものに関しては、量子変形できる。多分、こういうものを作ることが、topological field theory の1つの目標だと思うんです。

1.41　M の topology を、ある種の algebra で決定できるならば、答えは元々あるだろう

ここでですね、 Σ というのを2次元に取る。この Σ を2次元空間に取ったもののことを、多分、ここでは、string theoty というんですが。

[7]数たちから M の topology への矢印。
[8]数たちから M の topology への矢印があるならば、代数系を変形したときにも、同様の矢印があるだろうということ。

$$
\begin{array}{l}
\int u_1 \wedge u_2 \to \text{量子化} \\
\quad \updownarrow \\
\int \|u_1\|^2 \quad L^2\text{ノルム} \quad \text{リーマン計量を決めないと決まらない} \\
\quad \downarrow \\
\text{量子化} \quad \text{難しい}
\end{array}
\tag{1.73}
$$

今、ここでやっているのは、この数たち（ $\int u_1 \wedge u_2$ ）なので。Differential graded algebra のコホモロジー類で決まるものなので。topological にしか依らないものなので。

例えばですね、そうでない例をいうと、こういうもの（ $\int \|u_1\|^2$ ）がある。 L^2-norm ですが。これは、metric に依る。リーマン計量。微分形式の積分というのは、多様体の topology で決まるわけですが。そうでなく、微分形式の L^2-norm, 長さの 2 乗っていうのを考えると、まず、長さっていうものが決まらないといけないし、積分するためには、ちゃんと、リーマン多様体でなくちゃいけない。

で、こういうのはどうしてやるか。今、しゃべっているのは、こいつを量子化しようという話。だから、こういうタイプのものを量子化しようというのが、いわゆる topological field theory と呼ばれているものになるわけです。

$$
\begin{array}{l}
M \text{ の } \underline{\text{topology を決定する代数的なもの}} \text{ が見つかるだろう？} \\
\qquad\qquad \downarrow \\
M \text{ のリーマン構造を決定する代数的なもの（膨大なものが要る？）難しい}
\end{array}
\tag{1.74}
$$

それで、取りあえずはですね、これ[9]だけはやりたい。なぜ、これだけやるかというと、こっち[10]は、もっと難しいんです。なぜかというと、topological field theory だと topological なので、多分、そこの矢印が確定するものが見つかる可能性が少しはあるんです。もう一回言いますと、 M の topology というのを、ある種の algebra で、完全に決定できるということだったらば、答えは、多分、元々あるんです。しかし、リーマン多様体 M を全部、特徴付けようと思ったらば、それは膨大な情報だから、多分、代数では絶対追いつかないんです。

大体、今、私がお話ししている方針は、降りて、横に行って、上に上がろうということですが、これ、topological にしかうまくいかない。なぜかというと、実際には、世の中、平均的に進むのは、こっちが優先なんだけど、そこまでやろうと思ったらば、そういうリーマン計量まで含めたこっちを置き換えなくちゃならない。それは、どうしていいか分からないし、こちらは難しそうだから、ちょっと、みんなやらない。で、とにかく、 M から決まるこういう量、積分とか、こういう量の中で、 M の topological な情報だけから決まるものを全部持ってくる。それをどうやったら量子化できるか。そういうのがあるわけです。

[9] 代数的なものにより、 M のトポロジーを決定すること。
[10] 代数的なものにより、 M のリーマン構造を決定すること。

1.42　積分を数を数える問題に帰着させたい

$$\begin{array}{c}\text{（無限次元の積分なんて、どうしようもない）}\\ \text{この量を数学的にそのまま定義するのは、まず不可能}\end{array} \tag{1.75}$$

それが目標なんですが。そういうことを考えるとき、やらなくちゃいけないのは何かということですが。このですね、こういうもの $\int_{\varphi\in\mathrm{Map}(\Sigma,M)}\mathrm{ev}^*(u_1\otimes u_2)e^{-\mathcal{L}(\varphi)/\varepsilon}\mathcal{D}\varphi$ を調べたい。これは、何か分からないことがあって、それは私も良く分からないんだけど。何か分かってなくて。いろんな言い方があるかもしれないんだけれど、これは計算できないんです。これをまともに定義して、定義通りに計算するというのは、無理なんです。これは無限次元の積分で、絶対無理なんです。

これをですね、実際に求めることはできない。この量を、数学的にそのまま定義するのは、多分無理。まあ、無限次元の積分なんて無理なんです。

$$\begin{array}{cc}\text{積分} & \int u\wedge v\\ \updownarrow & \|\\ \text{数を数える} & \begin{array}{c}[N_1]\cdot[N_2]\\ \text{交点数}\end{array}\end{array} \tag{1.76}$$

じゃあ、どうするかというと、先程言った、こういうことがあるんですね。こういう積分というのは、— これ、有限次元ですが — これは、数を数えるということに対応する。$\int u_1\wedge u_2$ は、交点数 $[N_1]\cdot[N_2]$ に等しくなる。

$$\text{これが、}M\text{ の topological な情報から決まる量である場合だけを考える} \tag{1.77}$$

で、どうするかというと、これは積分だから、積分ていうのは、多分、長さ、メジャーが要りますから、あれなんだけど。これがですね、M の topological な情報から決まる量である — つまり、長さとか、metric に関することが要らない場合ですけれども — そういう場合だけを考える。まず、これが第一です。

$$\begin{array}{ccc}\text{積分} & \Leftrightarrow & \text{数を数える問題に帰着}\\ & & \downarrow\\ & & \text{数を数える問題を解く}\end{array} \tag{1.78}$$

で、次ですけれども、この積分というのを、数を数えるということに帰着できないかという。自在に議論して、積分を何か、数を数えるという問題に帰着したい。

私は、よく分からないけれど、多分、今まで知られているほとんどはですね、topological な情報から決まる量だったらば、結局は、こういうのを使っているという風に思われるわけです。逆に言いますと、こういう choice[11]が存在しないと、この積分が、本当に、topological な情報だけで決

[11] 何か数を数えることに帰着させること、そういう帰着させるべき適当なものを選ぶことを指す。

まるかどうかというのは分からないことで。従って、それは、しょうがないわけです。とにかく、この process[12]というのを明らかにしなくちゃいけない。

この process をやるときには、この積分は定義されていないから、それを使って厳密な議論はできないんだけども。何らかのですね、— あまり、うるさいことを言わなければ — Lagrangian の変形をしてですね、最終的には数が出てくることを納得しなさい。納得したらば、この問題は数学的に解けるだろう というのが方針なんです。もう一回言いますと、この積分を計算したいとしてもこれは計算できないから、これを何らかの形で、数を数えるという問題に帰着して、最終的に帰着された、数を数えるという問題の方を解きたい。そうすることによってですね、この量というのは、 定義できる。

$$\begin{array}{l}\text{Topological な情報から決まるという根拠} \\ \quad \text{Stokes' theorem} \\ \quad \text{Cobordism argument}\end{array} \tag{1.79}$$

それによって、先ほどの process をこうやろうというのがあるわけです。例えば、この積分は、ここで言った topological な情報から決まるということを証明しよう。Topological な情報から決まるというのは、どういう効果でそうなっているかというと、それは、やっぱり、Stokes の定理です。さっき言いましたけど、これが、元の topological な情報から決まるということの根拠は、Stokes の定理です。

で、cobordism argument を使って、こいつが topological な量から決まるということを証明する。そういう、さっきのですね、有限次元の議論を、そのまま、こう、無限次元の方でやってやれば、どんどんですね、これができるだろうと思われるわけです。

それでは、ちょうど時間ですので、今回はこの辺で終わります。

[12]積分を、数を数える問題に帰着させる過程。

第2章　（前半）カップ積を変形したい

カップ積とポアンカレ双対を、$H^k \otimes H^\ell \otimes H^{n-k-\ell}$ という3つ組からの写像 Q_0 を使って考察する。このとき、カップ積の結合法則を、Q_0 の言葉を使って関係式として表わし、その関係式を保ったまま Q_0 を変形したいということを述べる。また、$M \times M$ の対角成分をホモロジー的に考察する。

2.1　cup 積 ＋ Poincaré 双対の復元

ちょっと、一言だけ。

$$
\begin{array}{ccccc}
H^k(M) & \otimes & H^{n-k}(M) & \Leftrightarrow\!\rightarrow & \mathbb{R} \\
{[u_1]} & & {[u_2]} & \mapsto & \int_M u_1 \wedge u_2
\end{array} \tag{2.1}
$$

前回、2個の微分形式 u_1, u_2 を持って来といて、こういうの $\int_M u_1 \wedge u_2$ を考えたんですけど。これは、H^k と H^{n-k} から、$\mathbb{R}$ への map だったんですね。

$$
\text{cup 積} + \text{Poincaré 双対} \tag{2.2}
$$

それで、cup 積プラスの Poincaré 双対というのを復元したいんですが。そうしようと思ったらば、多分、微分形式を3つ使った方がいいですね。ちょっと、前回とは変えますけども。

$$
\begin{array}{cccccccc}
(\heartsuit 1) & Q_0: & H^k(M) & \otimes & H^\ell(M) & \otimes & H^{n-k-\ell}(M) & \Leftrightarrow\!\rightarrow & \mathbb{R} \\
 & & {[u_1]} & & {[u_2]} & & {[u_3]} & \mapsto & \int u_1 \wedge u_2 \wedge u_3
\end{array} \tag{2.3}
$$

これは、H^k と H^ℓ と $H^{n-k-\ell}$ から $\mathbb{R}$ への map ですが。今、こういう map を Q_0 とします。

$$
Q_0 \quad \rightsquigarrow \quad H^k(M) \otimes H^\ell(M) \quad \Leftrightarrow\!\rightarrow \quad H^{n-k-\ell}(M)^* \tag{2.4}
$$

Q_0 っていうのは何に当たるかというと、M の k 次元 cohomology と、M の ℓ 次元 cohomology から、M の $(n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow \ell)$ 次元 cohomology の dual への map に当たるわけですね[1]。

$$
n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow \ell = 0 \tag{2.5}
$$

[1] (2.3) 式において、H^k の元と H^ℓ の元が決まっているとき、後、$H^{n-k-\ell}$ の元が決まれば、$\mathbb{R}$ の元が決まる。これは言いかえると、H^k の元と H^ℓ の元によって、$(H^{n-k-\ell})^*$ の元が決まるということに当たる。

そして、(2.3) で、 $n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow \ell = 0$ の場合を考えます。

$$(\heartsuit 2) \quad H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) \quad \Leftrightarrow\!\!\to \quad \mathbb{R} \tag{2.6}$$

こうなりますね。

$$\begin{array}{ccc} (\Diamond 1) H^k(M) & \underset{\text{同型}}{\Leftrightarrow\!\!\to} & (H^{n-k})(M)^* \\ & \text{(Poincaré duality)} & \end{array} \tag{2.7}$$

このとき、 H^k から、 H^{n-k} の dual への map ができるんですが。実は、これは、同型なんです。Poincaré duality ですけれども。

$$Q_0 \quad \rightsquigarrow \quad H^k(M) \otimes H^\ell(M) \quad \Leftrightarrow\!\!\to \quad (H^{n-k-\ell})(M)^* \quad \overset{\Diamond 1}{\Leftrightarrow\!\!\to} \quad H^{k+\ell}(M) \tag{2.8}$$

(2.4) に戻って考えます。 $(H^{n-k-\ell})(M)^*$ というのは、 $H^{k+\ell}(M)$ に同型だから。この同型を合成してやりますと、これを全部つなげたものが、実は cup 積なんです。

$$\begin{array}{cccc} (\heartsuit 3) \quad H^k(M) \otimes H^\ell(M) & \Leftrightarrow\!\!\to & H^{k+\ell}(M) & \\ [u_1] \otimes [u_2] & \Leftrightarrow\!\!\to & [u_1 \wedge u_2] & \text{と一致} \end{array} \tag{2.9}$$

$$(\heartsuit 1) = (\heartsuit 2) + (\heartsuit 3) \tag{2.10}$$

u_1 の cohomology class と、 u_2 の cohomology class の cup 積が、 $u_1 \wedge u_2$ の cohomology class ですけれども。この map というのは、cup 積を定義しているわけです。ちょっと、いいかげんですが。

なぜ、こんな回りくどいことを言ったかというと、群の map とか言わずに、こういう 3 つのものを使って考えたいからなんですが。Poincaré 双対の構造、プラス、cup 積の構造を与えるということと、今、見たような map を与えるというのは、等価なんです。これ、ちょっと注意しましょう。

$$\begin{array}{l} \text{cup 積を deform する} \\ \qquad \downarrow \\ H^k \otimes H^\ell \otimes H^{n-k-\ell} \to \mathbb{R} \\ \text{を deform する} \end{array} \tag{2.11}$$

ですから、「cup 積を deform するというのは、この 3 つテンソルの所からの、こういう map を deform するということである」と、そういう風に思えるわけです。

2.2 今度は、singular homology で書くと

$$\text{Singular homology で書くと} \tag{2.12}$$

今まで、cohomology で書きましたけれども、これを singular homology で書くと、こうなります。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bar{Q}_0 : & H_{n-k}(M) & \otimes & H_{n-\ell}(M) & \otimes & H_{k+\ell}(M) & \Leftrightarrow\!\to & \mathbb{Z} \\
& N_1 & & N_2 & & N_3 & \mapsto & \bar{Q}_0(N_1, N_2, N_3) \\
& (n \Leftrightarrow k)\ \text{次元の} & & (n \Leftrightarrow \ell)\ \text{次元} & & (k+\ell)\ \text{次元} & & \\
& \text{oriented submanifold} & & & & & &
\end{array} \tag{2.13}$$

Singular homology で書きますと、添え字は下ですね。これ、行き先は $\mathbb{Z}$ です。 $n \Leftrightarrow k$, $n \Leftrightarrow \ell$, $k+\ell$ 次元の oriented submanifold[2] N_1, N_2, N_3 を考えて。こういう N_1, N_2, N_3 で、homology class を実現しているとします。前回は 2 つでやりましたけれど、3 つでも、全く同じことです。

$$\text{transversality を仮定する} \tag{2.14}$$

まず、transversality を仮定します。つまり、 N_1 と N_2 が transversal に交わっていて、かつ、 N_2 と N_3 が transversal に交わっている。これを仮定します。

$$\varepsilon_p = \begin{cases} +1 \\ \Leftrightarrow 1 \end{cases} \tag{2.15}$$

今、 ε_p というのは、 $+1$ か $\Leftrightarrow 1$ です。

$$\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{l}{N_1, N_2, N_3 \text{ から誘導される base が}} \\
T_pM \text{ の向きを保った base であるとき} & \Leftrightarrow\!\to & \varepsilon_p = +1 \\
\text{そうでないとき} & \Leftrightarrow\!\to & \varepsilon_p = \Leftrightarrow 1
\end{array} \tag{2.16}$$

N_1, N_2, N_3 は、oriented submanifold ですね。このとき、 N_1, N_2, N_3 から誘導される base が、 T_pM の向きを保った base のときには、 $\varepsilon_p = 1$, そうでなければ、$\varepsilon_p = \Leftrightarrow 1$ と、こう付けるわけですが。

$$\sum_{p \in N_1 \cap N_2 \cap N_3} \varepsilon_p \ = \ \bar{Q}_0(N_1, N_2, N_3) \tag{2.17}$$

[2] ここでは、簡単に submanifold と言っている。以下、同様。

それで、 ε_p を、 $p \in N_1 \cap N_2 \cap N_3$ に渡って足し合わせたものが、 $\bar{Q}_0(N_1, N_2, N_3)$ であるとして map (2.13) が定義されています。

$$\text{これは、}[N_1], [N_2], [N_3] \text{ なる homology 類で決まる} \tag{2.18}$$

で、前回、説明したような、cobordism argument という議論によって、こいつ $\bar{Q}_0(N_1, N_2, N_3)$ はですね、 N_1, N_2, N_3 の homology class だけに依って決まる。

2.3 Cohomology の性質を抽象化すると

$$\text{次数付きの Abel 群} \tag{2.19}$$

今、ベクトル空間、まあ、Abel 群ですね。次数付きの Abel 群。Homology では、まず、次数付きの Abel 群というのがある — ちょっと、cohomology を使わせてください。どっちでも、同じことですから — こういうのがあって。

$$H^*(M, \mathbb{Z}), \quad 1 \in H^0 \tag{2.20}$$

そして、 1 ってやつが、 H^0 に入っている。

$$\begin{array}{ll} Q_0: & H^k(M) \otimes H^\ell(M) \otimes H^{n-k-\ell}(M) \quad \Leftrightarrow\!\!\!\to \quad \mathbb{Z} \\ & \qquad \uparrow \\ & (H^k,\ \text{cup 積},\ H^k \otimes H^{n-k} \ \overset{\text{非退化}}{\Leftrightarrow\!\!\!\to}\ \mathbb{Z}) \end{array} \tag{2.21}$$

それから、 Q_0 という、 H^k, H^ℓ, $H^{n-k-\ell}$ から $\mathbb{Z}$ への map がある。ここで、cohomology の積の構造と、後ですね、 H^n は $\mathbb{Z}$ に同型ということ。これらの性質を抽象化すると、こうですね。

$$\begin{array}{l} (1)\ H^k : \text{次数付きの Abel 群} \\ (2)\ \cup : H^k \otimes H^\ell \quad \Leftrightarrow\!\!\!\to \quad H^{k+\ell} \\ (3)\ \langle\ ,\ \rangle : H^k \otimes H^{n-k} \quad \overset{\text{非退化}}{\Leftrightarrow\!\!\!\to} \quad \mathbb{Z} \\ \quad \text{s.t.} \ \text{（イ）} \ (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) \\ \qquad\quad\ \text{（ロ）} \ \langle a \cup b, c \rangle = \langle a, b \cup c \rangle \end{array} \tag{2.22}$$

1 番目として、次数付きの Abel 群があって、これを H^k と置く。2 番目に、 H のこういう積ですね。3 番目に、 H^n が、 $\mathbb{Z}$ と同型ということを使って。写像 $H^k \otimes H^{n-k} \to \mathbb{Z}$ が非退化。

そして、次の 2 つの性質を満たしています。（イ）として、カップ積の結合法則、$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$ ということ。

もう一つ、（ロ）はですね、cup 積と内積との関係なんですが。この内積を、 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と書きますと。 $a\cup b$ と c の内積というのは、 a と $b\cup c$ の内積になります。後、何か、trivial なものが。

$$\begin{array}{lcl} \text{（イ）} & \Longleftarrow & \text{ウェッジ積の結合法則} \\ \text{（ロ）} & \Longleftarrow & \int(a\wedge b)\wedge c = \int a\wedge(b\wedge c) \end{array} \tag{2.23}$$

条件の（イ）は何から言えるかというと、微分形式のウェッジ積の結合法則からで。それで、（ロ）の方は、微分形式で書いてやれば明らかで。要するに、 $a\wedge b$ に c をした積分というのは、a に $b\wedge c$ をした積分。つまり、両方ともウェッジ積の結合法則。こういう、（イ）と（ロ）、2 つの関係式を満たしている。

2.4 コホモロジーの構造を Q_0 の言葉で言うと

コホモロジーというのは、積の構造だけを考えてやると、これは、(2.22) になっている。本当は、もっと、積分を見なくちゃいけないんだけど、カップ積は、こうやって作る。今ですね、内積の構造と、積の構造を両方考えたんですが、それは、単に、3 つから出ている map だけ決めればいいと、こう理解する。

満たすべき性質というのは、これだという。それで、こういう性質を保ったまま、元々のコホモロジー環の構造というのを変形する。そういう作業をやりたいわけです。唯、変形するときに、 Q_0 の言葉でやる。つまり、ここに書いたこの性質。やっていることは、ほとんど、微分形式のウェッジ積が結合法則を満たすということだけなんだけれども。それを Q_0 の言葉で言い換えるとどうなるか。

もう一回、さっきの process を見なくちゃいけないんですが。どう復元するかというのを思い出して。復元したときの、特に、これですね。この（イ）、結合法則。これですけども。

$$\begin{array}{l} \text{（イ）を} \\ \quad Q_0 : H^k\otimes H^\ell\otimes H^{n-k-\ell} \quad \Leftrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \quad \mathbb{Z} \\ \text{の言葉で言うと、どうなるか？} \end{array} \tag{2.24}$$

この（イ）の法則を、 Q_0 の言葉で言い換えたい。これをしないと、後で、一般化をするときに、これが何になっているのかということが言えないので。

$$\begin{array}{l} Q_0 \text{ があるとする。} \quad 1\in H^0 \\ Q_0 : H^k\otimes H^{n-k} \quad \overset{\text{非退化}}{\Leftrightarrow\!\!\!\!\rightarrow} \quad \mathbb{Z} \end{array} \tag{2.25}$$

まず、 Q_0 っていうのがあって。 Q_0 から、カップ積をどうするかというのを思い出したいんですが。 — Q_0 の 0 というのは、後で perturb しなくちゃいけないから付けているものです。 — それから、もう一個、 1 っていうのがある。こういうのがあって。これは非退化です。

$$Q_0(a,b) = (\Leftrightarrow 1)^{\deg a \deg b}\, Q_0(b,a) \tag{2.26}$$

本当は、まだ、こういうのが要りますね。やっていないんだけども。交換に関する公理を、全部、さぼっているんですね。これは、したいんですけど。もうちょっと、あるけど。

2.5 Dual base を取る

$$\begin{array}{l} 3\text{ 番目を }1\text{ と置く。} \\ Q_0 : H^* \otimes H^* \quad \Leftrightarrow\!\!\to \quad \mathbb{Z} \end{array} \tag{2.27}$$

H^k を全部の次元 k について足して、それを H^* と書きます。 Q_0 というのを、コホモロジー群の間の非退化な 2 次形式と見ます。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{lll} H^* & \text{base} & x_i \\ H^* & \text{base} & y_j \end{array} \quad \text{dual base} \\ Q_0(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{array} \tag{2.28}$$

それでですね、 x_i, y_j という、コホモロジーの dual base を持ってきて、 $Q_0(x_i, y_j)$ が非退化とします。

さっきの Q_0 から、こういうの、 $H^k \otimes H^\ell \to H^{k+\ell}$ を復元したかったんですが。どうやって復元するかというと、この base を使って。この baseっていうのは、 Q_0 から決まる。この 3 つのやつで、単に、3 番目を 1 と置く。

$$\begin{array}{cccc} Q_0 & \rightsquigarrow & H^k \otimes H^\ell \quad \overset{m}{\Leftrightarrow\!\!\to} \quad H^{k+\ell} \\ & & m(a,b) = \sum_i Q_0(a,b,x_i) y_i \end{array} \tag{2.29}$$

それで、こうなんですね。これを m と置くと、 $m(a,b)$ は、 $\sum_i Q_0(a,b,x_i)y_i$ で、 — 符号がちょっと分からない。まあ、符号はちょっと — さっきの定義をじっと見れば、こうなるんですが。

$$\begin{array}{rcl} H^k \otimes H^\ell \otimes H^{n-k-\ell} & \overset{Q_0}{\Leftrightarrow\!\!\to} & \mathbb{Z} \\ & \downarrow & \\ H^k \otimes H^\ell & \Leftrightarrow\!\!\to & (H^{n-k-\ell})^* \quad \text{dual} \quad \text{線型代数} \quad \text{双対基底} \\ & & \cong H^{k+\ell} \end{array} \tag{2.30}$$

H^k と H^ℓ と $H^{n-k-\ell}$ から $\mathbb{Z}$ への map, これが Q_0 だったんですが。これから、何ができるかというと、 — これ、線型代数ですけれども — H^k と H^ℓ から、 $H^{n-k-\ell}$ の dual に行って。これが、 $H^{k+\ell}$ と同型になる。

$$\begin{array}{ccc} a\otimes b & \Leftrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & (c\mapsto Q_0(a,b,c)) \\ & & \downarrow \\ & & \sum_i Q_0(a,b,x_i)\, y_i \end{array} \tag{2.31}$$

今、この map で、 $a\otimes b$ というのは、どこに行くかというと、これは、 c を $Q_0(a,b,c)$ に写す写像に行く。そして、この写像は、この同型で何に行くかというと、双対基底を使って書くと、$\sum_i Q_0(a,b,x_i)y_i$ に行く。これが定義です。

2.6 結合法則を Q_0 の言葉で書いてみる

$$m\bigl(m(a,b),c\bigr)=m\bigl(a,m(b,c)\bigr)\quad を\ Q_0\ の言葉で書くと？ \tag{2.32}$$

ところで、やりたかったのは、結合法則だったんですが。 $m\bigl(m(a,b),c\bigr)=m\bigl(a,m(b,c)\bigr)$. これを Q_0 の言葉で書くと、こうなんですね。

$$\begin{aligned} m\bigl(m(a,b),c\bigr) &= m\bigl(\sum_i \pm Q_0(a,b,x_i)\,y_i,c\bigr) \\ &= \sum_i \pm Q_0(a,b,x_i)\,m(y_i,c) \\ &= \sum_i \pm Q_0(a,b,x_i)\,\sum_j \pm Q_0(y_i,c,x_j)y_j \\ &= \sum_{i,j} \pm Q_0(a,b,x_i)\,Q_0(y_i,c,x_j)\,y_j \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} m\bigl(a,m(b,c)\bigr) &= m\bigl(a,\sum_i \pm Q_0(b,c,x_i)\,y_i\bigr) \\ &= \sum_i \pm Q_0(b,c,x_i)\,m(a,y_i) \\ &= \sum_i \pm Q_0(b,c,x_i)\,\sum_j \pm Q_0(a,y_i,x_j)y_j \\ &= \sum_{i,j} \pm Q_0(b,c,x_i)\,Q_0(a,y_i,x_j)\,y_j \end{aligned} \tag{2.34}$$

$m\bigl(m(a,b),c\bigr)$ というのは、こうですから。係数を前に出して、 $m(y_i,c)$. それで、 $Q_0(a,b,x_i)$ の $Q_0(y_i,c,x_j)$ の y_j, こうですね。

$m\bigl(a,m(b,c)\bigr)$ というのは、 — ちょっと、符号は。上の式も符号が分からないんですが — こちらを、まず、ばらすと、 $Q_0(b,c,x_i)$. 残りをばらすと、 $Q_0(b,c,x_i)$ の $Q_0(a,y_i,x_j)$, これの y_j. こういうことになるんです。単に、元の式に代入して書いただけです。

$$
\begin{aligned}
&\text{この 2 つ (2.33) と (2.34) が等しい}\\
&\iff \quad \textstyle\sum_i Q_0(a,b,x_i)\, Q_0(y_i,c,x_j) = \sum_i Q_0(a,y_i,x_j)\, Q_0(b,c,x_i)\\
&\text{が、全ての } j \text{ について成立} \quad (\forall a,b,c)
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

この 2 つが等しいというのは、何だったかと言いますと。今、 y_j の係数が等しければいいので、 $Q_0(a,b,x_i)$ の $Q_0(y_i,c,x_j)$ — これが、 i, j 成分なんですが、ちょっと、符号はもう — イコール、 $Q_0(a,y_i,x_j)$ の $Q_0(b,c,x_i)$, これが全ての j について言えればいいんですね。

$$
\begin{aligned}
&\forall\, a,b,c,d\\
&\textstyle\sum_i Q_0(a,b,x_i)\, Q_0(y_i,c,d) = \sum_i Q_0(a,y_i,d)\, Q_0(b,c,x_i)
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

(2.35) は、全ての a, b, c ですけれども。 x, y は base ですから、 x_j を唯 d としてやりますと。全ての a, b, c, d に対して $Q_0(a,b,x_i)$ の、 $Q_0(y_i,c,d)$ が、 — ちょっと、符号をもう気にしないことにすると — $Q_0(a,d,y_i)$ の $Q_0(b,c,x_i)$, こうなっているんです。これ、 a, b, c, d になっていて、これ、 x, y. これ、 a, d, b, c の x, y ですね。こういう式が成り立ちます。これが大事なことで、結合法則を、 Q_0 っていう、3 つからの map で書いたものです。

2.7　Q_0 を変形したい

$$
\begin{aligned}
&Q_0 \leftrightsquigarrow Q_\varepsilon\\
&\text{(2.36) を保ったまま変形したい。}
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

これが 1 つ言えまして。もうちょっと、ホモロジー論をやることにします。やりたいことは何かというと、 Q_0 というのをですね、こう、何か変形して、この関係式 (2.36) が満たされているようにしたい。今、計算をやりましたけど、ほとんど、トポロジーじゃなくて、何か線型代数の計算だけなんですが。

2.8　Diagonal

$$
x_i, y_i : H^*\text{の base} \tag{2.38}
$$

今、 x_i, y_i というのは、両方とも cohomology の base なんですね。

$$
\int x_i \wedge y_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{2.39}
$$

条件は何だったかというと、 x_i の y_j というやつの積分が、1 または 0. $i=j$ か $i \neq j$ で、こうなんですね。この辺がすらすらっと分かるようでしたら、ちゃんとホモロジー論の基礎が分かっているということですが。こういうのは、ホモロジー論の主要部分ですが。

これを言い換えますと、こういうことなんです。今、 $M \times M$ というのを考えましょう。

$$\begin{array}{l} M \times M \\ \quad\cup \\ \triangle = \{(p,p) \mid p \in M\} \end{array} \tag{2.40}$$

そして、 $M \times M$ の中に、diagonal $\triangle$ を考えます。

$$\begin{array}{l} PD : \text{Poincaré dual} \\ PD(\triangle) \in H^n(M \times M) \cong H_n(M \times M) \end{array} \tag{2.41}$$

そうしますと、これの Poincaré 双対 $PD(\triangle)$ を、これに対応するド・ラム cohomology class というので表わします。まあ、同じことですが。

$$\begin{array}{l} \underline{\text{Lemma}} \\ PD(\triangle) = \sum_i x_i \otimes y_i \quad (\clubsuit) \\ \text{但し、} x_i, y_i : M \text{ 上の微分形式} \\ \left(\begin{array}{l} \text{注：} \\ \pi_1 : M \times M \Leftrightarrow\!\!\!\rightarrow M,\ \text{第 1 成分への射影} \\ \pi_2 : M \times M \Leftrightarrow\!\!\!\rightarrow M,\ \text{第 2 成分への射影} \\ \text{とすると、}(\clubsuit) \text{ の右辺は、} \\ \sum_i \pi_1^*(x_i) \wedge \pi_2^*(y_i) \text{ と書ける。} \end{array} \right) \end{array} \tag{2.42}$$

x_i, y_i というのは、 M 上の微分形式です。 ($\clubsuit$) の右辺を $M \times M$ 上の微分形式と見るには、まず、 $M \times M$ からの projection を考えます。 π_1 は、第 1 成分に、 π_2 は、第 2 成分に落とすものとします。そうすると、 ($\clubsuit$) の右辺は、 Σ_i の、 π_1 で引き戻した x_i と、ウェッジすることの、 π_2 で引き戻した y_i. Diagonal の Poincaré 双対 $PD(\triangle)$ というのは、こういうものなんです。

2.9 練習：Lemma の証明

この lemma の証明をやってみましょう。ホモロジー論ですが。

$$H_n(M \times M) = \oplus_{k=0}^n H_k(M) \otimes H_{n-k}(M) \tag{2.43}$$

$M \times M$ の n 次元ホモロジーは、こう、テンソル積です。有名な公式ですね[3]。

[3] Kunneth の公式： $H_m(X \times Y; Q) = \oplus_{k+\ell=m} H_k(X;Q) \otimes H_\ell(Y;Q)$.

$$\begin{aligned} &N_1^k \subset M \\ &N_2^{n-k} \subset M \end{aligned} \tag{2.44}$$

そこで、今、何でもいいから、 N_1 という、何か、 k 次元の submanifold と、 N_2 という、 $n \Leftrightarrow k$ 次元の submanifold を取ります。

$$\begin{aligned} &PD(\triangle)(N_1 \times N_2) \\ &= (\Sigma x_i \otimes y_i)(N_1 \times N_2)(= \Sigma a_i b_i) \\ &\text{を言えばよい。} \end{aligned} \tag{2.45}$$

で、代入したやつが等しいことを言えばいい。こういうのは、base ですから。$PD(\triangle)$ に、$N_1 \times N_2$ を代入したやつと、 $\sum_i x_i \otimes y_i$ に $N_1 \times N_2$ を代入したやつが等しい、これを言えばいい。

$$PD(\triangle)(N_1 \times N_2) = \triangle \cdot N_1 \times N_2 = N_1 \cdot N_2 \quad (\cdot \text{ は、交点数}) \tag{2.46}$$

ここでですね、この、 $PD(\triangle)(N_1 \times N_2)$ ですが。ポアンカレ双対の定義から、これは、diagonal $\triangle$ と、 $N_1 \times N_2$ の交点数。符号は、いいかげんです。

$$\begin{aligned} \triangle \cap N_1 \times N_2 \quad &= \{(p,p) \mid p \in M\} \cap N_1 \times N_2 \\ &= \{(p,p) \mid p \in M,\ p \in N_1,\ p \in N_2\} \\ &= \{(p,p) \mid p \in N_1 \cap N_2\} \end{aligned} \tag{2.47}$$

$\triangle \cdot N_1 \times N_2$ というのは、 (p,p) と、 $N_1 \times N_2$ の交わりだから。従って、これは N_1 と N_2 の交点数。こっち側が分かりました。

$$\begin{aligned} N_1 \quad &= \sum a_i x_i^* \\ N_2 \quad &= \sum b_i y_i^* \end{aligned} \tag{2.48}$$

それで、こっち側ですけど。今、 N_1, N_2 を base で書きます。 x_i, y_i は cohomology の base ですから、 x_i^*, y_i^* にしますと。

$$\langle x_i, x_j^* \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned} &x_i \in H_{DR}^*(M) \\ &x_i^* \in H_*(M) \end{aligned} \tag{2.50}$$

この x_i^*, y_i^* というのは、ホモロジーの base です。 x_i は、ド・ラム コホモロジーの元で、 x_j^* は、singular homology の元です。

$$\langle x_i, x_j^* \rangle = \int_{x_j^*} x_i \quad \text{dual base} \tag{2.51}$$

で、 $\langle x_i, x_j^* \rangle$ は、単に、積分ですね。ただの積分です。こうですね。

$$\begin{aligned} PD(x_i^*) &= (\Leftrightarrow 1)^{\deg x_i \cdot \deg y_i} y_i \\ PD(y_j^*) &= x_j \end{aligned} \tag{2.52}$$

それで、Poincaré dual の x_i^* というのが $(\Leftrightarrow 1)^{\deg x_i \cdot \deg y_i} y_i$ で、Poincaré dual の y_j^* というのが x_j なんです。これは、Poincaré 双対の定義です。

$$\int x_i \wedge y_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{2.53}$$

そうすると、 x_i の y_j のウェッジの積分というのが、1 または 0 ですね。

$$x_i^* \cdot y_j^* = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{2.54}$$

従って、これ、2 つ合わせますと、 x_i^* と y_j^* の交点数、大体、要するに、積分というのは交点数で書けるんです。

$$\Big(\sum_i x_i \otimes y_i\Big)(N_1 \times N_2) = \sum a_i\, b_i = N_1 \cdot N_2 \tag{2.55}$$

で、$(\sum_i x_i \otimes y_i)(N_1 \times N_2)$ は、 $\sum a_i\, b_i$ なので。従って、この和というのは、(2.48) と (2.54) をじっと見てやりますと、 N_1 と N_2 の交点数になります。従って、(2.42) の Lemma が示せました。

2.10 Lemma についての考察

$$\triangle = \sum x_i^* \times y_i^* \qquad \text{homology} \tag{2.56}$$

結局、何を証明したかと言いますと、こういうことなんです。Diagonal というのが、大体、 Σ の $x_i^* \times y_i^*$, こうなんです。ホモロジーですけれども。こっちに $*$ がつく。

$$\sum_i Q_0(a, b, x_i)(y_i, c, d) = \sum_i Q_0(a, y_i, d) Q_0(b, c, x_i) \tag{2.57}$$

さっきの、証明すべき式というのはこうなんですね。この a, b, x_i の y_i, c, d, これは、 a, b, c, d を a, d, b, c に入れ替えたものがイコールであることを証明する。まあ、こんな式だったんですが。

こういうですね、 $M \times M$ の diagonal というのを、何か、直積型に書いて、これをこう、何かやってやる。実は、こういう風に見たら、けっこう難しい話なので。

ちょっと雑談をしますと。交点数というのが難しいのは、 M をですね、三角形分割しますよね。そうすると、 $M \times M$ の三角形分割が決まるんだけど、その diagonal というのは、三角形分割の中で、subcomplex にならない。もう一回言うと、三角形分割したときの直積の中では、diagonal そのものというのは、部分複体ではない。 $p = p$ なんていう条件は、よくないですから。これをこっちにずらすというのは、何かいろいろデリケートな問題があるんで。後で、もうちょっと言いますから。

というわけで、こういうですね、 Q_0 というのが、ホモロジーの diagonal をここに分割したペアに対して、こういう関係式 (2.57) が成り立ちます。で、この関係式を保ったまま Q_0 を変形するというのをどうやってやるかというのが、次のステップなんです[4]。

[4]この 2 節前半のテーマは、6 章で再び出て来る。

第2章 （後半） 対称性で割る — 無限次元空間の積分を有限次元空間のものにしようという話

2 章後半では、閉曲面上のリーマン計量と、閉曲面から多様体への写像の組が作る無限次元空間の積分を有限次元空間の積分として表わしたいという話の導入を行なう。

2.11 計量と写像の空間での積分を考える

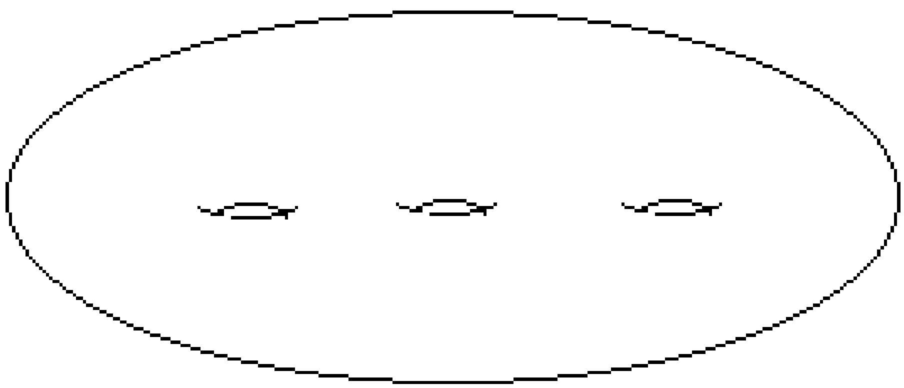

図 2.1: Oriented closed 2-manifold Σ

前回、訳の分からない積分を書きましたが、それを修正したいのですが。ちょっと一般化して書きましょう。 Σ というのを、向きの付いた 2 次元多様体で、Closed なもの。要するに、向きの付いた閉曲面とします。

$$z_1, \ldots, z_m \in \Sigma,\ \mathrm{fix}, \quad z_i \neq z_j\ (i \neq j) \tag{2.58}$$

そこで、 Σ の中にですね、 m 個の点を fix します。但し、 i と j が異なるときには、異なる点であるとします。

$$g : \Sigma \text{ の穴の数 (genus)} \tag{2.59}$$

Σ に genus, 穴があるとします。この個数を g とします。

$$M : \text{多様体}, \quad g_{ij} : M \text{ の計量} \tag{2.60}$$

これとは別に、何か、 M という多様体を考えて、それに計量を入れる。計量を入れるということに関しては、後でちょっと注意します。

$$\begin{array}{ccc} h & & \varphi \\ \mathrm{Met}\,\Sigma & \times & \mathrm{Map}(\Sigma, M) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Sigma \text{ 上のリーマン計量} & & \Sigma \text{ から } M \text{ への map 全体} \end{array} \tag{2.61}$$

そこで、今、こういう空間を考えましょう。まず、Met Σ. これは、何かと言いますと、 Σ 上のリーマン計量です。そして、$\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ は、 Σ から M への写像全体です。Met Σ の元を h で書いて、$\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ の元を φ で書きましょう。

$$E(h, \varphi) = \int g_{ij}\, h^{ab}\, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_a}\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_b}\, \Omega \tag{2.62}$$

今、エネルギーという汎関数を使います。実は、エネルギーというのは、本当は、いけないんですが。正しい数を書こうとしても僕もよく覚えていないし、それでいいという議論を説明できるほど分かってないんで、ここではエネルギーにします。これは何かと言うと、何かの積分なんですけども。

$$\varphi : \Sigma \to M, \quad \Sigma \text{ の局所座標} : x_1, x_2 \tag{2.63}$$

ここで、 φ というのは、 Σ から M への写像です。 Σ の局所座標を x_1, x_2 とします。

$$\begin{array}{ccccc} & & y_1 & & y_n \\ \varphi & \to & (\varphi_1(x_1, x_2), & \ldots, & \varphi_n(x_1, x_2)) \end{array} \tag{2.64}$$
$$y_1, \ldots, y_n : M \text{ の座標}$$

φ を x_1, x_2 で書いてみましょう。 M の座標の方は $y_1, \ldots, y_n$ で書いておきます。

$$\begin{array}{lcl} g_{ij} & : & M \text{ のリーマン計量} \\ h = (h_{ab}) & : & \Sigma \text{ のリーマン計量}, (h^{ab}) = (h_{ab})^{-1} \\ \Omega & : & \sqrt{\det(h)} dx_1 \wedge dx_2 \end{array} \tag{2.65}$$

後の記号を見ておくと、 g_{ij} は M のリーマン計量、 h は Σ のリーマン計量です。 Ω は、$\sqrt{\det(h)}dx_1 \wedge dx_2$ です。

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{ev} : \mathrm{Map}(\Sigma, M) & \to & M^m \\
\varphi & \mapsto & (\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_m))
\end{array}
\tag{2.66}
$$

今、 Σ の m 個の点 $z_1, \ldots, z_m$ を取り、それを使って、$\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ から M^m への写像 ev というのを作ります。

$$
\int_{\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M)} \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes \cdots \otimes u_m)\, e^{-E(h,\varphi)} \mathcal{D}h\mathcal{D}\varphi
\tag{2.67}
$$

このとき、次のような積分を考えましょう。$\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ 上での積分ですが。

$$
\begin{array}{l}
E(h,\varphi) \text{ を topological twist} \\
\rightsquigarrow M \text{ の metric に依らなくなる} \\
(M \text{ に概複素構造を入れる})
\end{array}
\tag{2.68}
$$

$E(h,\varphi)$ を topological twist すると、これは M の metric に依らなくなる。

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{Diff}(\Sigma, \overleftrightarrow{z}) = \{\Psi : \Sigma \to \Sigma \mid \text{微分同相}, \Psi(z_i) = z_i\} \\
\infty \text{ 次元の群} \\
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Diff}(\Sigma, \overleftrightarrow{z}) & \to & \mathrm{Met}(\Sigma) \times \mathrm{Map}(\Sigma, M) \\
\Psi & & (h,\varphi) \\
 & & \downarrow \Psi \\
 & & (\Psi^* h, \varphi \circ \Psi)
\end{array}
\end{array}
\tag{2.69}
$$

$\mathrm{Diff}(\Sigma, \overleftrightarrow{z})$ というのを考えるんですが、これは、 Σ から Σ への微分同相 Ψ の集合であって、条件は何かと言うと、 $\Psi(z_i) = z_i$ というもの。これは ∞ 次元の群で、 $\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ の空間に作用しています。作用の仕方はと言うと、 (h,φ) に対して、 Ψ が作用した結果が $(\Psi^* h, \varphi \circ \Psi)$ というわけですが。

2.12 対称性で割る

$$
\begin{array}{c}
E(\Psi(h,\varphi)) = E(h,\varphi) \\
\mathrm{ev}(\Psi(h,\varphi)) = \mathrm{ev}(h,\varphi)
\end{array}
\tag{2.70}
$$

この作用に関して、すぐ分かることですが、実は、 $E(\Psi(h,\varphi))$ は $E(h,\varphi)$ ですし、それから、evaluation map と Ψ の合成 $\mathrm{ev}(\Psi(h,\varphi))$ というのは、$\mathrm{ev}(h,\varphi)$ になるんです。

$$\int_{\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M)} \mathrm{ev}^*(u_1\otimes\cdots\otimes u_m)\, e^{-E(h,\varphi)}\mathcal{D}h\mathcal{D}\varphi \tag{2.71}$$

$$\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M) \to \frac{\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})} \tag{2.72}$$

つまり、$\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})$ は、被積分関数を不変に保ったまま、無限次元空間に作用しているんです。これ、割ることにしましょう。積分する空間をですね、商空間 $\frac{\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})}$ にします。つまり、この積分をするときに、まず対称性の方で割ってしまって、積分するわけです。この汎関数は商空間上でも意味があるわけです。で、メジャーが云々という話はあるけど、そこは一切やらない。

$$\text{さらに、対称性で割る} \tag{2.73}$$

さらに、この汎関数を対称性で割ります。

$$\Sigma\ \text{上の正値 function}\ \beta\ \text{を考える} \tag{2.74}$$

どうするかというと、今度は、 Σ 上の正値 function を考えるんですが。これを β と書きます。

$$\text{全体}\ C_+(\Sigma),\quad \text{掛け算で群} \tag{2.75}$$

これ全体を $C_+(\Sigma)$ と書きますと。これには掛け算が定義されて、群になる。

$$\begin{aligned} &\beta(h,\varphi) := (\beta^2 h,\varphi)\ \text{とする。} \\ &E(\beta(h,\varphi)) = E(h,\varphi) \end{aligned} \tag{2.76}$$

そこで、正値 function β が (h,φ) にどう作用するかと言うと、単に metric h を $\beta^2 h$ にするんですね。そうすると、これは良く知られたことなんですが、 $E(\beta(h,\varphi))$ というのは、 $E(h,\varphi)$ になります。不変性として大事な性質ですが。

$$g_{ij}\ h^{ab}\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x^a}\ \frac{\partial\varphi_j}{\partial x^b}\ \Omega \tag{2.77}$$

これはどうしてかと言うと、(2.62) の被積分関数 $g_{ij}h^{ab}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x^b}\Omega$ というのを見るんです。

$$\begin{array}{lcl} h^{ab} & \to & \beta^{-2}\ h^{ab} \\ \Omega & \to & \beta^{\dim\Sigma}\ \Omega \end{array} \tag{2.78}$$

h^{ab} は、 — これ、上付きですから — $\beta^{-2}h^{ab}$ になりますね。(2.76) の $E(\beta(h,\varphi)) = E(h,\varphi)$ というのは、定義域が 2 次元だということを使っていますね。Metric tensor を 4 倍にすると、長さが

2 倍になりますから。で、この 2 というのは、 Σ が何次元でも同じなんですね。これは、なぜ、この話が 2 次元だけあるかということと関わっている。だから、この汎関数の、今、書いた、(2.76) のこの性質ですね、これは Σ が 2 次元じゃないと成り立たなくなってしまう。どういうことかというと、 h^{ab} というのが、 $\beta^{-2}h^{ab}$ になるんですが、volume form Ω というのは、 β の Σ の次元乗の、volume form Ω になるんですね。こいつとこいつがぴったりキャンセルするのは、 Σ が 2 次元のときだけですから。2 次元でないと、(2.76) の式はうまく出ないんです。

2.13 大事な性質：有限次元になる

$$\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M)\to\frac{\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})\ltimes C_+(\Sigma)}\quad \ltimes:\text{skew product} \tag{2.79}$$

そこで、これ、もう一回割ります。今度はこいつをこれで割るわけです。そうするとですね、再び非常に大事な性質として、次のことが出て来ます。

<u>大事なこと</u>

$$\frac{\mathrm{Met}(\Sigma)}{\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})\ltimes C_+(\Sigma)} \text{ は、有限次元になる。}\quad \dim\Sigma=2 \tag{2.80}$$

($\dim\Sigma=3$ のときは、無限次元）

Σ の metric 全体というやつを考えて、そいつをですね、 Σ の diffeomorphism 全体という群で割って、さらに、 Σ 上の正値関数、 — これ、本当は skew product ですね — こいつで割って。 Σ 上の、これとこれの作用は交換可能じゃないですね。あの、base を動かすと入れ替えだから、これ、skew product. 両方で割ると、これは有限次元になることが証明できる。これは非常に大事な性質で、これはですね、 Σ が 2 次元ということが役に立つんです。

どうしていろいろ注意しているかというと。 Σ が 2 次元のやつというのは、topological sigma model の中で、string theory と関係あるやつなんだけれども、ここ数年、 Σ を 3,4 次元にするという話が、いろいろ出てきているんです。それは、非常にうまくいかない理由がいっぱいあるわけですが。特に、これは一番うまくいかない。こういうところで、ものを積分したいわけですけれども、無限次元のところで積分するというのは、話が困るわけです。で、無限次元で積分することはできないから、これを対称性で割ってしまって、有限次元の積分に話を帰着したいんです。そのときに、今考えているですね、被積分関数の対称性と、商空間上の積分というのが。

今の場合に何をやるかというと、 Σ の diffeomorphism, つまり、座標変換と、metric を定数倍すること。この 2 つの操作を使ってやると、有限次元に落ちてしまうということが実はある。これは、リーマン面の場合、つまり、2 次元の場合に特有の現象です。ところが、3 次元以上の多様体に関して同じことをやっても、無限次元の多様体にしか落ちてくれないんです。無限次元ですから、そこに落としたからといって、話が分かりやすくなるとは限らない。

2.14　概複素構造

$$\Sigma\text{の概複素構造　（高次元でも適用できるように、概を付けた）} \tag{2.81}$$

今、2 次元多様体 Σ を考える。 Σ の複素構造を考えてみます。 Σ の複素構造とは何か。定義は、高次元でも通用するように「概」を付けておきます。

$$\begin{cases} J_\Sigma : T_p\Sigma \to T_p\Sigma, \quad \forall p \\ J_\Sigma^2 = \Leftrightarrow 1 \end{cases} \tag{2.82}$$

Σ の概複素構造[1]は何かといいますと、 J_Σ というですね、tangent space $T_p\Sigma$ から、tangent space $T_p\Sigma$ への、こういう map があって、こいつ J_Σ を 2 回やると、 $\Leftrightarrow 1$ になる。こういうものです。

$$\begin{aligned} &T_p\Sigma = \mathbb{R}^2 \\ &\quad J_\Sigma\text{を}\sqrt{\Leftrightarrow 1}\text{ 倍だと思う} \\ &J_\Sigma : T_p\Sigma \to T_p\Sigma = \mathbb{C} \end{aligned} \tag{2.83}$$

$T_p\Sigma$ は $\mathbb{R}^2$ なんですが、ここで、 J_Σ というのを $\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ 倍する操作だと思うことによって、$T_p\Sigma$ というのは、複素ユークリッド空間と思えます。 $T_p\Sigma$ の複素ユークリッド空間としての思い方というのを、まあ概複素構造というわけですけど。

$$\forall(\Sigma, h) \quad h : \text{計量}, \quad T_p\Sigma\text{ 上の内積} \tag{2.84}$$

これから、こういうことが分かるんです。今ですね、 Σ と、 h という任意の計量に対して、何か、 J というのがあって、これは、oriented です。

---

[1] (n,m)-テンソルとは、

$$TM \times \cdots \times TM \times T^*M \times \cdots \times T^*M \to \mathbb{R}$$

のことである。よって、 $(1,1)$-テンソルは、

$$TM \times T^*M \to \mathbb{R}$$

となる。 TM から TM への写像 J は、 $(1,1)$-テンソルと見なせる。

$$\left(\begin{array}{ll} \because & J : TM \to TM\text{ とすると、}J(v) \in TM \\ & \text{ゆえに、}w \in T^*M\text{ に対して、}w(J(v)) \in \mathbb{R} \\ & \text{よって、}J : TM \times T^*M \to \mathbb{R}\text{ を} \\ & (v,w) \mapsto w(J(v))\text{ と定義できる。} \quad \square \end{array} \right)$$

さて、 n 次元複素多様体 M は、 $2n$ 次元実多様体と見なせる。その座標を $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ とすると、

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \to \frac{\partial}{\partial y_i}, \ \frac{\partial}{\partial y_i} \to -\frac{\partial}{\partial x_i}$$

と対応させることによって、写像 $J : TM \to TM$ （つまり、 $(1,1)$-テンソル）で、 $J^2 = -1$ となるものが作れる。これを踏まえて、逆に、 $2n$ 次元実多様体 M に対して、 $(1,1)$-テンソル J で、 $J^2 = -1$ を満たすものが与えられたとき、M に概複素構造が与えられたと言う。（岩波・数学辞典 第 2 版 p.265 参照。）

概複素構造とは、T_pM に C^n の構造を入れられるような M の構造である。（物理学者のためのトポロジーと幾何学 C. ナッシュ, S. セン著 p.167 参照）概複素構造については、第 3 章で、もう一度触れる。

$$\exists J \begin{cases} h(JV, JW) = h(V, W) \\ h(JV, V) = 0 \end{cases} \tag{2.85}$$

どうしてかというと、これは、ほとんど明らかでして。各点 p で考えるんですが。 $T_p\Sigma$ の orthogonal basis e_1, e_2 をこっちに代入する。90 度回転。

$$\begin{aligned} &\because \quad T_p\Sigma \text{ の正規直交基底 } e_1, e_2 \\ &e_1, e_2 \text{ は向きを保つ} \\ &\begin{cases} J(e_1) = e_2 \\ J(e_2) = \Leftrightarrow e_1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$J \text{ は } (T_p\Sigma, h, p) \text{ で決まって、} e_1, e_2 \text{ の取り方に依らない。} \tag{2.87}$$

2 次元であることを使うと、 J はですね、 $T_p\Sigma$ と h, p で決まっている。 e_1, e_2 は、向きを保つ正規直交基底です。要するに、 J というのは、 e_1, e_2 の取り方に依らないわけです。これは、線形同型。この J は、正の向きに 90 度回転ですから。これも 2 次元を使っていますけれども。

$$(\Sigma, J) : \underline{\text{2 次元の}}\text{概複素多様体} \tag{2.88}$$

次にですね、もう一回、2 次元を使います。2 次元の概複素多様体というわけですが。

$$\forall p \in \Sigma, \quad \exists \varphi : p \text{ の neighbourhood の座標}, \quad \varphi : U_p \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \tag{2.89}$$

今、任意の p に対して、 φ という、 p の neighbourhood U_p の座標がある。要するに、 U_p から、 $\mathbb{R}^2$ 上に行くわけですが。これ、 $\mathbb{C}$ だと思って。

$$\begin{aligned} &q \in U_p \\ &T_q\Sigma \to T_{\varphi(q)}\mathbb{C} = \mathbb{C} \end{aligned} \tag{2.90}$$

q を U_p の任意の点とすると、 $T_q\Sigma$ は、 φ の微分によって $T_{\varphi(q)}\mathbb{C}$ に写る。これは $\mathbb{C}$ ですけれども。

$$\begin{aligned} &T_q\Sigma \to \sqrt{\Leftrightarrow 1} \text{ 倍に写る} \\ &\text{つまり、local には } (\Sigma, J) \text{ は } \mathbb{C} \text{ と思い、複素多様体 (complex manifold)} \end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\begin{array}{lll} (\Sigma, h) & (\Sigma, J_h) & \\ \quad\downarrow & \swarrow & \\ (\Sigma, J_\Sigma) & \text{2 次元 complex manifold} & \end{array} \tag{2.92}$$

ここに J_Σ というのがあるわけですが。これは、この $\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ 倍。つまり、local には、 J_Σ は、 $\mathbb{C}$ と。こういうとき「概」を付けて、概複素構造という風に言います。 (Σ, h) を考えると、こいつからですね、こういう、 (Σ, J_Σ) という複素多様体があるんです。リーマン面ですけれども。

2.15　今後の話の見通し

$$\begin{cases} h(JV,JW) = h(V,W) \\ h(JV,V) = 0 \end{cases} \text{は、}h\text{ を }\beta h\text{ に置き換えても同じ} \tag{2.93}$$

さっきの条件というのは、$h(JV,JW)$ というのが $h(V,W)$ で、後、 $h(JV,V)$ が 0 でした。これはですね、 h を β 倍の h で置き換えても同じなわけです。だから、これは、 (Σ,h) を $(\Sigma,\beta h)$ としても同じことです。

$$\begin{aligned} &\mathrm{Met}(\Sigma)/C_+(\Sigma) \circlearrowleft \mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z}) \\ &\mathrm{Hol}(\Sigma) = \{J_\Sigma | J_\Sigma^2 = \Leftrightarrow 1\} \circlearrowleft \mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z}) \end{aligned} \tag{2.94}$$

さっき、Met(Σ) を $C_+(\Sigma)$ で割ったこういうところから、Hol(Σ) への map ができた。リーマン計量の共形類から複素構造への写像ができたわけです。これが実は同型になっているというのが良く知られている。さらに、$\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})$ というのが作用するわけですが。

$$\begin{aligned} &J : T\Sigma \to T\Sigma \\ &\Psi : \Sigma \to \Sigma \\ &(\Psi^* J)(V) = (d\Psi^{-1} \circ J \circ d\Psi)(V) \end{aligned} \tag{2.95}$$

$\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})$ の作用は何かというと。 $J : T\Sigma \to T\Sigma$ というのを $\Psi^* J$ で写したというのは、こうなるんですね。

$$\frac{\mathrm{Hol}(\Sigma,\vec{z})}{\mathrm{Diff}(\Sigma)} = \mathcal{M}_{g,m} \text{ は、}6g \Leftrightarrow 6 + 2m\text{ 次元の orbifold になる。} \tag{2.96}$$

そこでですね、こういうことが成り立ちます。Hol(Σ) というのを、$\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})$ で割ったやつというのは、有限次元の orbifold — orbifold については、後で説明しますが[2] — $6g \Leftrightarrow 6 + 2m$ 次元の orbifold になる[3]。これは、誰でしょう、リーマンかな。大切なことは、こういう複素構造の話に持ち込むことによって、 $\mathcal{M}_{g,m}$ というのが有限次元になるということで。これは概複素構造なんですが。これが自動的にいつも複素構造になるかというと、そういうのは 2 次元特有の現象で、高次元では期待できない。

$$\frac{\mathrm{Met}(\Sigma) \times \mathrm{Map}(\Sigma,M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z}) \times C_+(\Sigma)} \tag{2.97}$$

$$\frac{\mathrm{Met}(\Sigma)}{\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z}) \times C_+(\Sigma)} = \mathcal{M}_{g,m} \tag{2.98}$$

[2]第 3 章で説明する。
[3]これについては、第 3 章でもう一度述べる。

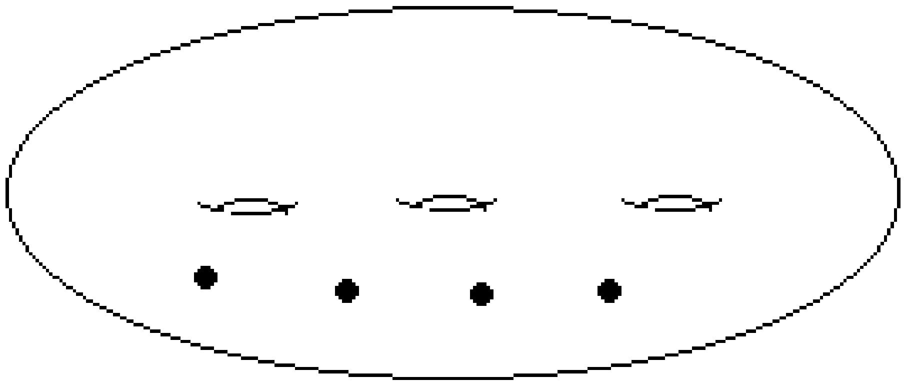

図 2.2: Orbifold : $m = 4$, $g = 3$

これは有限次元空間です。この商空間は、モジュライ空間というもので。 g は穴の数で、 m は点の数です。今、こういう有限次元の空間を考えます。そうするとですね、さっき、metric 全体というのと map 全体というのを考えて、これを、この 2 つの群で割ったわけです。

$$\mathrm{ev} : \mathrm{Map}(\Sigma, M) \to M^m \tag{2.99}$$

さっきの evaluation map というのは、$\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ というところから、 M^m への map です。

$$\begin{gathered} \int_{\mathcal{M}_{g,m}} \mathcal{D}h \int \mathcal{D}\varphi \ \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_m) e^{-E(h,\varphi)} \\ \mathcal{M}_{g,m}\text{は、全部でなく、一部分でもよい} \\ u_1, \ldots, u_m \in H^*_{DR}(M) \end{gathered} \tag{2.100}$$

さっき考えた積分というのは、結局こういうことになるんですね。まず、後から積分するのは、Riemann 面の複素構造の方であるとします。その前に、map の方で積分して、evaluation map の $u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_m$ の $e^{-E(h,\varphi)}$, これは、well-defined です。こういうことですね。この積分をもうちょっと一般化したいんです。 $\mathcal{M}_{g,m}$ 全部で積分しているんですが、これは全部でじゃなくて、一部分で積分しても十分なんです。一部分というのはどういうことかといいますと。

$$[w] \in H_*(\mathcal{M}_{g,m}) \text{ を取る　（} w \text{ は submanifold）} \tag{2.101}$$

今、何でもいいからですね、 $[w]$ という、 $\mathcal{M}_{g,m}$ のホモロジーの元を取りましょう。 w は、有限次元の部分多様体ですけれども。

$$\int_w \mathcal{D}h \int \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_m) e^{-E(h,\varphi)} \mathcal{D}\varphi \tag{2.102}$$

そこで、 $\mathcal{M}_{g,m}$ での積分の代わりに w での — w は、有限次元ですから — こういう積分をする。 u_1 から u_m というのは、ド・ラム コホモロジーの元。こういうことを計算したいんだということだけ説明しているわけで、この積分が実際に実行できるわけじゃないんですが。もうちょっと正確に言いますと、こうなんですね。

$$\underline{\text{話をちょっと変えて、 }[w]\text{ と }[u_i]\text{ だけで決まるようにできる。}} \tag{2.103}$$

この積分が、 w の homology class $[w]$ と u_i の cohomology class $[u_i]$ だけで決まるようにできる。話をちょっと変えて、この（コ）ホモロジー・クラスだけで決まるようにできる。これは全然、trivial じゃなくて、この式をまともにやると、そういうことは言えないわけで。これがですね、topological な状況、そういう状況では、これを 数学的に解釈できる というものなんですが。ええと、それはまた次にして、今回はここまでにしたいんです。

第3章　（上） 点付きリーマン面のモジュライ空間とそのコンパクト化

第 3 章（上）では、点付きリーマン面の複素構造の同値類 $\mathcal{M}_{g,m}$ とそのコンパクト化について、簡単な例を見ながら述べる。コンパクト化をするとき、単に singular なものを足すだけでは、全体がハウスドルフ空間にならないという問題について触れ、Mumford のコンパクト化を紹介する。そして、「コンパクト化が、 $6g-6+2m$ 次元の orbifold になる。」という定理を述べる。

3.1　今回は、 $\mathcal{M}_{g,m}$ とそのコンパクト化を

$\mathcal{M}_{g,m}$ とはどんなものかということを説明して、 $\mathcal{M}_{g,m}$ のコンパクト化の話をします。 $\mathcal{M}_{g,m}$ のコンパクト化というのは、実は代数幾何の方で、わりと昔からあるんですけれども。まあ、ちょっとだけ説明したいんです。

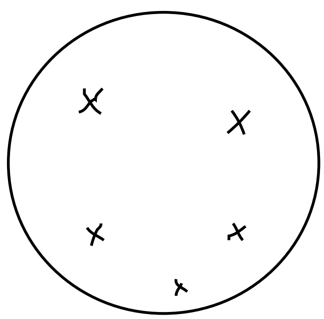

図 3.1: $\mathcal{M}_{0,m}$: $m=5$ の例

3.2　まず、 $\mathcal{M}_{0,m}$ を

一番単純な場合として、 $\mathcal{M}_{0,m}$ というのがあります（図 3.1 参照）。

$$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \tag{3.1}$$

$$((S^2, J), m\ \text{個の点}) \tag{3.2}$$

$\mathcal{M}_{0,m}$ というのは何かと言いますと、 S^2 がありまして、後、 J という complex structure と、 m 個の点があるんですね。

$$z_1, \dots, z_m \in S^2 \tag{3.3}$$

m 個の点を $z_1, \dots, z_m$ と置きましょう。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{0,m} = \frac{\{J \mid S^2\text{上の complex structure}\}}{\mathrm{Diff}(S^2, \vec{z})} \\
&\mathrm{Diff}(S^2, \vec{z}) : S^2\text{の diffeo で、決めていた } z_1, \dots, z_m \text{ を動かさないもの}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$\mathcal{M}_{0,m}$ というのは、 J という、 S^2 上の complex structure を、$\mathrm{Diff}(S^2, \vec{z})$ で割ったものなんですが。$\mathrm{Diff}(S^2, \vec{z})$ は何かというと、 S^2 の diffeo であって、fix した m 個の点を動かさないものです。

$$\begin{aligned}
&\underline{\text{リーマンの写像定理}} \\
&(S^2, J) \overset{\alpha}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\
&\begin{array}{llll} \alpha: & S^2 & \to & \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad \text{diffeomorphism} \\ & J & \leftrightarrow & \sqrt{-1}\ \text{倍} \end{array}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで、リーマンの写像定理というのを使いますと、 S^2 の J というのは、複素構造も込めて、$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ です。すなわち、 Ψ という、 S^2 から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への diffeo があって。こっち側が J だったら、こっち側に、普通の complex structure がある。こういう定理が知られているんです。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{0,m} = \frac{\{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \in S^2,\ x_i \neq x_j\}}{\sim} \\
&(x_1, \dots, x_m) \sim (x'_1, \dots, x'_m) \\
&\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \Psi : S^2 \to S^2, \text{biholo (1 次分数変換)} \\
&\qquad \text{s.t.} \quad \Psi(x_i) = x'_i
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$\mathcal{M}_{0,m}$ は、リーマンの写像定理を使うと、こういうものと同じになります。 m 個の点 $x_1, \dots, x_m$ を同値関係で割ったものなんですけれども。 $(x_1, \dots, x_m)$ と $(x'_1, \dots, x'_m)$ が同値であるのは、何か Ψ という S^2 の biholomorphic map — 1 次分数変換です — こういうのがあって、 $\Psi(x_i) = x'_i$ となるときであるとします。ちょっと見づらいのは、こっち (3.4) は点を決めていて、こっち (3.6) は点を動かしていいと。(3.4) の complex structure というのは、この点を動かしてもよければ、standard な complex structure だと思っていいよというのが、リーマンの写像定理なので。この点

が動きますから、動いた点だけに注目します[1]。

3.3 $m=3$ のとき、つまり、 $\mathcal{M}_{0,3}$

$$\begin{array}{l} \underline{\mathrm{m{=}3}} \\ \mathcal{M}_{0,3} = 1\text{ 点} \\ \text{i.e. } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}\cup\{\infty\} \\ \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) = \Psi(z) \\ \Psi(x_1)=0, \Psi(x_2)=1, \Psi(x_3)=\infty \text{ なる } \Psi \text{ が唯一つある。} \end{array} \tag{3.7}$$

例えば、 m が 3 ですと、こいつは、1 点になります。どうしてかと言うと、任意の 3 点 x_1, x_2, x_3 に対して、ある 1 次分数変換 Ψ があって、 x_1 が例えば 0 で、 x_2 が 1 で、 x_3 が ∞ に写る。こういう 1 次分数変換が唯一つ存在する。これが、有名な関数論の定理です。

3.4 $m=4$ のとき、つまり、 $\mathcal{M}_{0,4}$

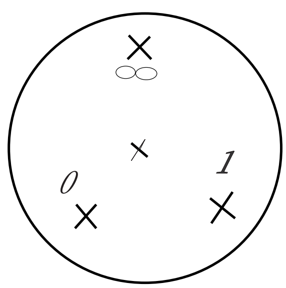

図 3.2: $\mathcal{M}_{0,4}$

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{C}\backslash 2\text{ 点} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \qquad \downarrow \Psi \\ (0, 1, \infty, x_4') \qquad x_4' \text{ が } \mathcal{M}_{0,4} \text{ を決める} \end{array} \tag{3.8}$$

[1] $(S^2, J) \sim (S^2, J')$ であることと $(x_1, \ldots, x_m) \sim (x_1', \ldots, x_m')$ であることの間の関係を見る。下の図式を参照。

$$\begin{array}{ccc} (S^2, J) & \xrightarrow{\varphi\ ;\quad \varphi(z_i)=z_i} & (S^2, J') \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} \\ \mathbb{C}\cup\{\infty\} & \xrightarrow[\Psi\ ;\quad \Psi(x_i)=x_i']{} & \mathbb{C}\cup\{\infty\} \end{array}$$

そうすると、4点ぐらいというのが問題になるんですが。$\mathcal{M}_{0,4}$ というのにしますと、これは、$\mathbb{C}$ 引く2点になるんです。どうしてかと言いますと、(x_1, x_2, x_3, x_4) は、一次分数変換で $(0, 1, \infty, x_4')$ に行くようにできる。こういう一次分数変換 Ψ が唯一つある。従って、4つ目の座標 x_4' というのが、これを決めるわけです[2]。

$$\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{C} \backslash 2\text{ 点} = \mathbb{C}P^1 \backslash 3\text{ 点} \tag{3.9}$$

そこで、複素平面から2点を引いたものというのが、$\mathcal{M}_{0,4}$ になる。或は、もっと canonical にしますと、もともとのリーマン球面から3点を引く。こういうものになるんです。

3.5 コンパクト化は、どうする？

$$(?) \quad \bar{\mathcal{M}}_{0,4} = \mathbb{C}P^1 = \mathcal{M}_{0,4} \cup 3\text{ 点} \tag{3.10}$$

これ、コンパクトじゃないですね。そこで、一番、スタンダードに考えられるのは、こいつに点を付け加えてコンパクト化するということ。この場合、コンパクト化したものが何かというのはいいですね。$\mathcal{M}_{0,4}$ に3点を足せばいいから。これは $\mathbb{C}P^1$ です。つまり、$\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$ は、$\mathcal{M}_{0,4}$ の3点、この抜けている点を付け加えるだけだという風に思えるわけです。でも、これだけでは、何を言っているか分からない。

$$\mathcal{M}_{0,4}\text{の点} \rightarrow \text{幾何学的な対象に対応} \tag{3.11}$$

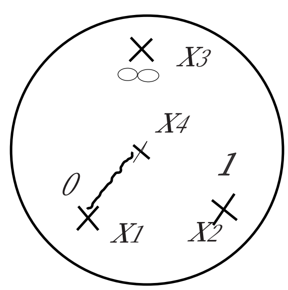

図 3.3: $\mathcal{M}_{0,4}$

$\mathcal{M}_{0,4}$ は、こういう、4点付きのリーマン面のモジュライ空間という幾何学的なものに対応するわけですが。この絵（図3.3）を考えまして。3点は、$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \infty$ なんですが。4点目はですね、こう、動いている。x_4 というのは、段々、0に近づくとします。これをどう考えるか。

[2] 4つ目の座標 x_4' は、0, 1, ∞ 以外の任意の点を取る。従って (3.6) より、$\mathcal{M}_{0,4}$ の各点は、$\mathbb{C} \backslash 2$ 点 の各点と対応する。

$$
\begin{aligned}
&x_i \neq x_j \\
&x_4 \text{ が段々 } x_1 \text{ に近づくとき、} S^2 \text{ 上の complex structure の極限は？}
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

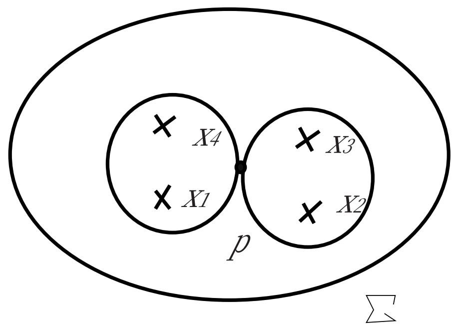

図 3.4: Σ : これが limit とみなす

さっきの定義でいくと、 x_i と x_j というのは違ってないといけない。すると、 x_4 が、例えば、 x_1 に近づくとき、その極限をどう考えるか。

非常に安直に考えてしまうと、「この条件、単に落として ⋯ 」と、そういう風に思えるわけですね。「この条件を落っことして一致してもいいというようにすれば、コンパクト化ができるでしょう」と思えるんだけれども、それは安直で、そういう所へ逃げるわけにはいかない。

それで、こう考えるんですね。これが x_1 で、これが x_4 で、1 点で切って、ここに x_2 があって、ここに x_3 がある。これが limit とします。こっち（図 3.3）は、こういう普通の S^2 だったんですが、こっち（図 3.4）は singular な S^2 です。

けれど、 S^2 に 4 点があって、ある点が別の点に近づいて、これ（図 3.4）になると言われても、慣れている人は、そう思うかもしれないけど、まずく見るとそうは見えないですね。じゃあ、どうしてそういう風に思えるか。

今、この絵（図 3.4）を考えましょう。この絵のですね、この点を考えましょう。この singular point を p, 絵（singular な S^2）を Σ とし、 p の Σ での neighborhood を、 $\mathbb{C}^2$ に描こうとしてみます。

$$
\begin{aligned}
&p \text{ の } \Sigma \text{ での neighbourhood} \subset \mathbb{C}^2 \ni (z, w) \\
&\quad\downarrow \\
&zw = 0
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

$\mathbb{C}^2$ の座標を、 z, w にしましょう。これは、 $\mathbb{C}^2$ の中で、 $zw = 0$ という方程式の解だという風に思えるわけです。 $zw = 0$ という方程式の解は、 $z = 0$ または $w = 0$ ですから、絵を描けばこう（図 3.5）なるんですね。全体が 4 次元で描けないから、2 次元のものを 1 次元にして描いている。2 個の 2 次元の — 何か、ディスクでいいですけど — D^2 が 1 点で交わっている。これとこの近くというのは、複素構造まで込めて、全く同じものです。

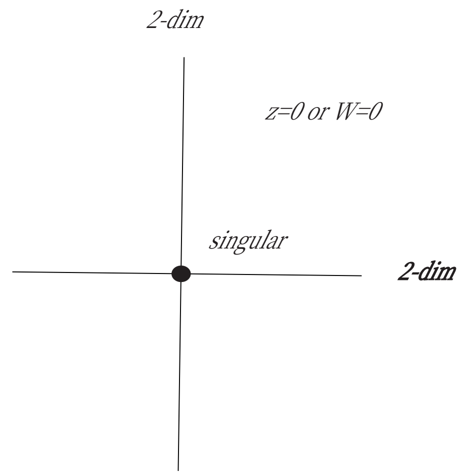

図 3.5: 2 コの D^2 が 1 点で交わっている

3.6 $zw = 0$ をちょっと動かす

$$
\begin{array}{c} zw = 0 \\ \downarrow \\ zw = \varepsilon \end{array} \tag{3.14}
$$

そこで、この方程式を、ちょっと perturb します。つまり、$zw = 0$ という方程式を one parameter で動かして、$zw = \varepsilon$ というのにするんです。4 次元だから絵が描けないですけれど（図 3.6 参照）。Perturb した後のこれは smooth だから、さっきと同じものですね。

このくっついている 2 個の S^2 というのは同値なんです（図 3.4 参照）。x_2 と x_3 は離れていて、x_1 と x_4 はくっついているのに、何で同じになるか変に思われるんだけど。それについて、次のことを考えてみましょう。

$$
\begin{array}{l} S^2\text{の点} \\ \quad x_1 \to x_4 \quad x_2, x_3 : \text{fixed} \\ \quad x_2 \to x_3 \quad x_1, x_4 : \text{fixed} \\ \text{一次分数変換で写すと同じこと} \end{array} \tag{3.15}
$$

S^2 の中で、x_1 が x_4 に近づいて、x_2, x_3 は fix されたものと、x_2 が x_3 に近づいて、x_1, x_4 は fix されたものは、実は、1 次分数変換で写すと同じものなんです。

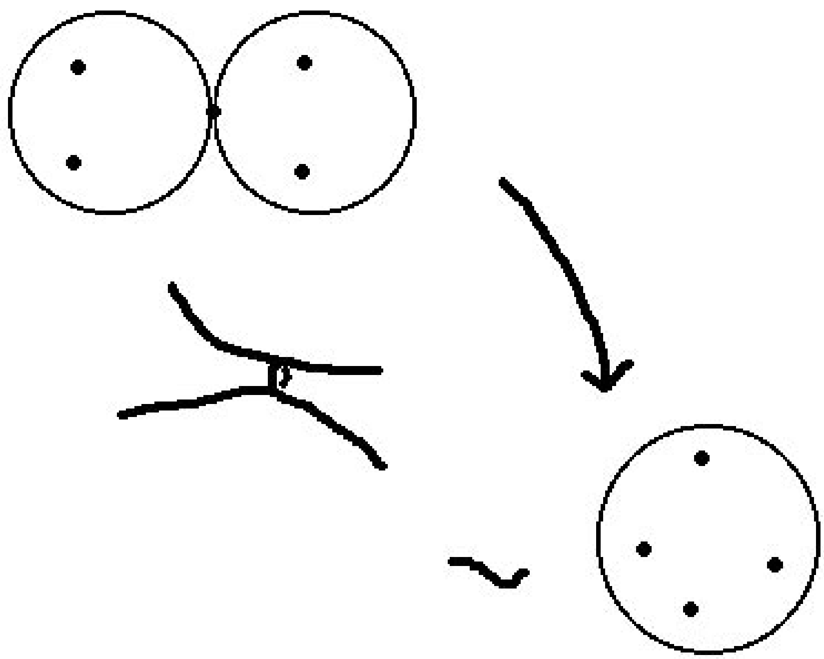

図 3.6: ちょっと動かす

$$\begin{array}{lcl} x_1 = 0 & \Rightarrow & x_1 = 0 \\ x_4 = \varepsilon & & x_4 = 1 \\ x_2 = 1 & & x_2 = \frac{1}{\varepsilon} \to \infty \\ x_3 = 2 & z \mapsto \frac{1}{\varepsilon} z & x_3 = \frac{2}{\varepsilon} \to \infty \end{array} \tag{3.16}$$

どうしてかというと、例えばですね、x_1 が 0 で、x_4 が ε で、x_2 が 1 で、x_3 が 2 だとしますね。すると、$\varepsilon = 0$ で、x_1 と x_4 がくっつくわけです。これを、$z \mapsto \frac{1}{\varepsilon} z$ という 1 次分数変換で写してやります。そうすると、x_1 が 0 で、x_4 が 1 になって、x_2 が $\frac{1}{\varepsilon}$ になって、x_3 が $\frac{2}{\varepsilon}$ になります。ε を 0 にやると、x_2 と x_3 は、両方とも ∞ に行くわけです。x_1 と x_4 がくっつく代わりに、今度は、x_2 と x_3 がくっつく。

3.7 Singular な曲面まで入れるとどうなる？

一般化すると ⋯

$\mathcal{M}_{g,m}$を compact 化するには、
singular な曲面まで考える (3.17)

一般に、$\mathcal{M}_{g,m}$ をコンパクト化するには、singular な曲面まで考えれば十分である。これでいいかという風に思えるんだけど、もう一つ非常に大事なことを理解しないといけない。

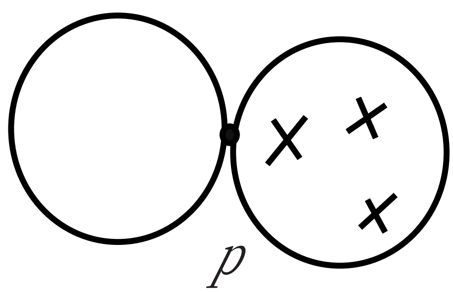

図 3.7: α ⋯ これを $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}$ に入れるか?

例えば、こういうもの（図 3.7）を考えてみましょう。これは singular なんですが、これを α と置きます。

こういうものまで $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}$ に入れると？
（ $\Longrightarrow$ $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}$ は Hausdorff 空間にならない） (3.18)

$\mathcal{M}_{0,3}$ のコンパクト化 $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}$ の中に、α まで入れてしまうと、何が起こるか。まずいことが起こる。これについては、$\bar{\mathcal{M}}_{0,3}$ に topology を入れて考えましょう。今、$\bar{\mathcal{M}}_{0,3}$ の中に、α を入れたとします。

$$\bar{\mathcal{M}}_{0,3}\ \text{の中での}\ \alpha\ \text{の neighbourhood} \tag{3.19}$$

$\bar{\mathcal{M}}_{0,3}$ の中で、 α の neighbourhood というのは何かというのを考えましょう。さっきと同じことをやります。

$$\begin{aligned}&\alpha\ \text{の中での}\ p\ \text{の neighbourhood}\\ &\Longleftrightarrow zw = 0 \subset \mathbb{C}^2\end{aligned} \tag{3.20}$$

α における、点 p の neighbourhood, これは、さっき言いましたように、 $zw = 0 \subset \mathbb{C}^2$ という風に思えるわけですね。

$$\begin{aligned}&\alpha_\varepsilon \not\Leftrightarrow \alpha\\ &\alpha_\varepsilon\ \text{は何か？}\\ &zw = 0\ \text{を}\ zw = \varepsilon\ \text{にする}\end{aligned} \tag{3.21}$$

これをちょっとずらす。さっき説明しましたが、 $zw = 0$ を $zw = \varepsilon$ にするわけです。この図形（図 3.7）を、ここだけ張り替えるんだから、こう（図 3.8）なっている。これ（図 3.8）を α_ε と置きましょう。

3.8 まずい！ $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}$ は、ハウスドルフにならない

$$\alpha_\varepsilon\ \text{は}\ \varepsilon\ \text{が何であっても、}(\mathbb{C}P^1, (0, 1, \infty))\ \text{と同じ} \tag{3.22}$$

それでですね、何がまずいかと言いますと、 α_ε は、 ε が何であっても、一番スタンダードな $\mathbb{C}P^1$ に、 $0, 1, \infty$ を入れたやつと同じになるということです。それについては、さっきやったわけで、 S^2 の上に 3 点があるというのは、その 3 点がどこにあって、どういう複素構造を取っていようと、全部、同じものなんです。リーマンの写像定理です。

$$\alpha_\varepsilon : \varepsilon\ \text{に依らない。}\quad \alpha_\varepsilon \neq \alpha \tag{3.23}$$

つまり、 α の近傍に、 α_ε があったんだけれども、 α_ε は、 ε に依らないわけです。ところが明らかに、 α_ε と α は違いますね。 α_ε は smooth なもので、 α は singular なものですから、違うものなんです。

$$\text{まずい！}\ \bar{\mathcal{M}}_{0,3}\ \text{は、ハウスドルフでない。（収束を考えると言える。）} \tag{3.24}$$

α_ε は ε に依らないのだから、 $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}$ がハウスドルフ空間だったらば、 α_ε の limit というのは、 α_ε そのものに収束するわけです。ところが、違うものに収束しているから、ハウスドルフ空間に

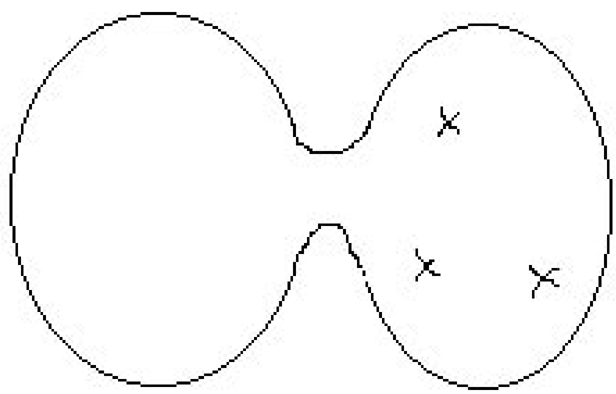

図 3.8: α_ε

ならない[3]。これは、決定的にまずいですね。大体、ハウスドルフでない位相空間は、あんまりよくないから。このことは、多分、リーマン面のモジュライの問題というのをやるときに、いろいろな人が頭を痛めている問題です。

まとめると、リーマン面のモジュライ空間というのを考えるんだけど、そのままでは何か扱いづらいから、コンパクトなものにしたい。コンパクト化しようと思うと、リーマン面として、singularity のあるものも考えることが自然である。ところが、こういうものを許すとですね、それで作った全体というのが、ハウスドルフ空間にならない。これは、なんとかしないといけない。

そこでですね、Mumford という人が考えたのが、stability という概念なんです。それは、代数幾何の概念なんですが。

3.9 ハウスドルフ性についての命題 ⋯ 当てはまらないけれど、参考になる

その前にですね、次を考えましょう。位相空間論の命題です。

$$\begin{aligned}&\mathcal{X}\ :\ \text{空間}\\&\mathcal{G}\ :\ \mathcal{X}\ \text{に作用する群}\\&\Longrightarrow \mathcal{X}/\mathcal{G}\ \text{は Hausdorff ?}\end{aligned} \tag{3.25}$$

一般にですね、「空間 $\mathcal{X}$ に群 $\mathcal{G}$ が作用したときに、この商空間がハウスドルフになるか」というのを考えましょう。これは、一般には成り立たないわけですが。

$$\begin{aligned}(1)\quad &\mathcal{X}\quad \text{Haudorff}\\&\mathcal{G}\quad \mathcal{X}\ \text{に作用する compact な群}\\&\Longrightarrow \mathcal{X}/\mathcal{G}\quad \text{Hausdorff}\end{aligned} \tag{3.26}$$

だけど、こういうのがあります。$\mathcal{X}$ がハウスドルフで、$\mathcal{G}$ がコンパクトだったらば、$\mathcal{X}/\mathcal{G}$ は、ハウスドルフ。商位相ですから[4]。

[3] 空間の異なる 2 点 α, α_ε それぞれを含む任意の開集合 U_α, U_{α_ε} を取る。U_α は、α のある近傍 V を含む。$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon=\alpha$ より、$\alpha_\varepsilon\in V\subset U_\alpha$ となる。よって、$U_\alpha\cap U_{\alpha_\varepsilon}\neq\emptyset$ が成り立つ（共通な元として、α_ε を取ればよい)。従って定義より、この空間は、ハウスドルフではないことが分かる。

[4]（「群と位相」横田一郎著、裳華房の pp.109–110, 補題 89 より。）

$[x]$, $[y]$ を $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ の異なる 2 点とすると、$x\mathcal{G}\cap y\mathcal{G}=\emptyset$ である。$x\mathcal{G}$, $y\mathcal{G}$ はコンパクトであるから、開集合 O_1, O_2 を

$$O_1\cap O_2=\emptyset,\quad x\mathcal{G}\subset O_1,\quad y\mathcal{G}\subset O_2$$

となるように取れる。次に、写像 $\mu:\mathcal{X}\times\mathcal{G}\to\mathcal{X}$, $\mu(x,g)=xg$ は連続であるから、各元 xg の近傍 O_1 に対して、x の近傍 U_g と g の近傍 V_g を $U_gV_g\subset O_1$ となるように取ることができる。$\mathcal{G}=\cup_{g\in\mathcal{G}}V_g$ とできるが、さらに、$\mathcal{G}$ がコンパクトより、有限個の $g_1,\dots,g_k$ を選んで、$\mathcal{G}=\cup_{j=1}^k V_{g_j}$ とできる。$U_1=\cap_{j=1}^k U_{g_j}$ と置くと、U_1 は x の近傍であり、かつ

$$x\mathcal{G}\subset U_1\mathcal{G}=(\cap_{j=1}^k U_{g_j})\mathcal{G}=\cap_{j=1}^k U_{g_j}(\cup_{\ell=1}^k V_{g_\ell})=\cap_{j=1}^k\cup_{\ell=1}^k(U_{g_j}V_{g_\ell})\subset O_1$$

を満たしている。同様にして、y の近傍 U_2 を

$$y\mathcal{G}\subset U_2\mathcal{G}\subset O_2$$

となるように取ることができる。このとき、$U_1\mathcal{G}\cap U_2\mathcal{G}\subset O_1\cap O_2=\emptyset$ である。射影 $p:\mathcal{X}\to\mathcal{X}/\mathcal{G}$ は開写像であるか

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & \mathcal{X}:\text{locally compact, Hausdorff} \\
& \forall K \subset \mathcal{X} \quad \text{compact に対して、} \\
& \qquad \{g \in \mathcal{G} \mid gK \cap K \neq \emptyset\}：\text{有限} \\
& \Longrightarrow \mathcal{X}/\mathcal{G} \text{ は、Hausdorff}
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

或いはですね、もうちょっと、強く。任意のコンパクト集合 K に対して、 $gK \cap K$ が空集合でないような $\mathcal{G}$ の元 g の集合が有限という仮定をする。それで後、空間 $\mathcal{X}$ は、locally compact で、ハウスドルフ。すると、商空間 $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ は、ハウスドルフ。こういうことが言えますね[5]。

今の場合、これ (1) は、ちょっと、だめなんです。今、 $\mathcal{G}$ というのは、diffeo の群ですよね。こんなものは、無限次元ですから、コンパクトになりようがない。だから、これは絶対にだめなんです。じゃあ、これ (2) はいいかと言われると、これもだめなわけで。なぜかというと、 $\mathcal{X}$ というのは、今の場合、すべての J です。これも無限次元ですから、ちょっと難しいですね。

こういう一般論だと、多分、解決しないんです。でもですね、この 2 つの、こういうタイプのことが参考になる。次のことをちょっと考えるんです。

3.10 I_α は有限群

$$
\begin{aligned}
& \alpha \in \mathcal{X} \\
& \{g \mid g\alpha = \alpha\} = I_\alpha \text{ が無限群だとまずいであろう。} \\
& I_\alpha \text{ が有限群になるような } \alpha \text{ を持ってくる}
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

$\mathcal{X}$ の元 α があったときに、 $\{g \mid g\alpha = \alpha\}$ が、無限群だとまずいだろう。なぜかと言いますと、(3.27) で、コンパクト集合 K として、一点を考えると、 $\{g \in \mathcal{G} \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ は、ちょうど、この I_α ですね。この I_α が有限群になるような α だけを取って来る。これ、ちょっとデリケートなんですね。

実はですね、これでは、ちょっとまずいです。それを説明しましょう。こうだったんですね。

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{X} \rightsquigarrow \{J \mid J : T\Sigma \to T\Sigma,\ J^2 = -1\} \\
& \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

J は、複素構造ですね。

$$
\begin{aligned}
& \alpha = J_\Sigma \\
& I_\alpha = \{\Psi \mid \Psi : \Sigma \to \Sigma,\ \text{diffeo},\ \Psi(z_i) = z_i,\ \Psi^* J_\Sigma = J_\Sigma\}
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

ら、$p(U_1)$, $p(U_2)$ はそれぞれ、 $[x]$, $[y]$ の近傍であり、かつ、 $U_1\mathcal{G} \cap U_2\mathcal{G} = \emptyset$ は $p(U_1) \cap p(U_2) = \emptyset$ を意味している。よって、 $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ は、ハウスドルフである。

[5]岩波数学辞典第 2 版 p.272 参照

α を J_Σ とします。今の場合、 I_α の元は何かと言いますと、diffeo であって、 J_Σ を引き戻したこの構造が、もとの J_Σ と一致するものです。

$$\begin{aligned} &\Psi : \Sigma \to \Sigma \quad \text{holomorphic 正則} \\ &J\Psi = \Psi J \end{aligned} \tag{3.31}$$

これは、何を言っているかというと、 Ψ が正則写像、holomorphic map ということです。 $J\Psi = \Psi J$.

$$\begin{aligned} &I_\alpha \\ &\left(\begin{array}{l} g = 1 \\ m = 0 \end{array} \right. \quad \text{または} \quad \left(\begin{array}{l} g = 0 \\ m = 0, 1, 2 \end{array} \right. \\ &\text{を除いて、}I_\alpha \text{ は有限群} \end{aligned} \tag{3.32}$$

この群 I_α は、 g が 1 で m が 0, または、 g が 0 で m が 0, 1, 2 のときを除いては、いつも有限群です。

$$\left. \begin{array}{l} g = 0 \\ m \geq 3 \end{array} \right) \Rightarrow I_\alpha = \{1\} \tag{3.33}$$

例えば、 g が 0 の場合を見てみましょう。 m は 3 以上です。

$$\Psi : S^2 \to S^2, \quad \text{biholo （一次分数変換）} \tag{3.34}$$

この元は、 Ψ という S^2 から S^2 への一次分数変換ですね。biholomorphic.

$$\Psi(z_i) = z_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{3.35}$$

それで $\Psi(z_i) = z_i$ で、 i が 1 から m ですね。一次分数変換で、3 点以上を止めるものは、恒等写像ですから、この場合には、 I_α が $\{1\}$ なんです。Trivial group です。

3.11 観察 1, 2, 3

もう一回、話のストーリーを思い出しましょう。リーマン面のモジュライ空間である $\mathcal{M}_{g,m}$ をコンパクト化しようという話をしました。Singularity があるものを付け加えれば、コンパクト化ができるだろうということが、1 番目の observation です。

2 番目の observation として、singularity があるようなものを何でも付け加えてしまうと、作った空間がハウスドルフ空間でなくなってしまうからまずいということがある。

3 番目の observation ですが、位相空間論の類推をすると、自己同型群 I_α が、無限群になっているような場合というのがまずいだろうと思われる。ところが、やってみると、自己同型群は、 $\{1\}$ だったんですね。

3.12 Singular なものの自己同型群を考える

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{X} & \rightsquigarrow & \{J \mid J : T\Sigma \to T\Sigma,\ J^2 = \Leftrightarrow 1\} \\
\mathcal{G} & \rightsquigarrow & \mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})
\end{array}
\tag{3.36}
$$

さっき、 $\mathcal{X}$ は、 $J : T\Sigma \to T\Sigma$ の $J^2 = \Leftrightarrow 1$ で、 $\mathcal{G}$ が $\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ だと、こう言ったわけですけれども。

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_{g,m} = \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{G}} \text{ は、Hausdorff} \\
\bar{\mathcal{M}}_{g,m} = ?
\end{array}
\tag{3.37}
$$

さっきの $\mathcal{M}_{g,m}$ というのは $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{G}}$ ですが、これはハウスドルフ。ところが、今、問題にしているのは、この $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}$ なんですね。こいつがハウスドルフになるかというのが問題です。

そうすると、さっきの位相空間論の場合とは、ちょっと話が違ってくるんです[6]。図 3.7 の Σ の自己同型を考えます。これは、さっき書いた I_α ですけれども。

$$
\{\Psi : \Sigma \to \Sigma,\ \text{diffeo}, \text{holo}, \Psi(z_i) = z_i\} = \{z \mapsto az + b \text{ なる形の変換（１次変換）}\}
\tag{3.38}
$$

Ψ という Σ から Σ への diffeo, すなわち、component ごとに diffeo を与えるもの。Singularity がない場合と同じように考えて、複素構造を保つ。Holomorphic です。そして、 $\Psi(z_i) = z_i$ を満たす。こういうやつを考えるんですね。これは、 z を $az + b$ に写すもの、つまり、一次変換です。

$$
\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2
\tag{3.39}
$$

どうしてかというと、今、 Σ というのは、左側と右側に分かれているんですね。こっち（3 点が指定されていない方）が Σ_1 で、こっち（3 点が指定されている方）が Σ_2 とします。

$$
\Psi : \Sigma \to \Sigma, \quad \Psi(\Sigma_2) = \Sigma_2
\tag{3.40}
$$

Ψ は、 z_i を z_i に写さなければいけないから、 Σ_2 は、 Σ_2 に行かないといけない。

$$
\Psi|_{\Sigma_2} = \mathrm{id}
\tag{3.41}
$$

そうすると、 Ψ の Σ_2 への制限というのは、identity.

$$
\Psi|_{\Sigma_2} : S^2 \to S^2, \quad \text{biholo （1 次分数変換）}
\tag{3.42}
$$

[6] $\mathcal{M}_{g,m}$ の元の自己同型群が有限かどうかを調べるのではなく、singular なものについて、その自己同型群を調べる。

どうしてかというと、Ψ は、S^2 の一次分数変換ですけども、この点、この点、この点と singular point を止めています。つまり、4 つ止めていて、動きようがないから、これは identity です。

$$\begin{aligned} &\Sigma_1 = S^2 \\ &p \in S^2, \quad p = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \end{aligned} \tag{3.43}$$

今度は、Σ_1 について考えましょう。今、$\Psi|_{\Sigma_1}$ というのは、S^2 から S^2 への biholomorphic であって、一次分数変換です。

$$\Psi(p) = p \tag{3.44}$$

で、条件は何かというと、$\Psi(p) = p$ なんです。つまり、こちら側 Σ_1 上の一次分数変換であって、この 1 点 p を止めているんです。

$$\begin{aligned} \text{求める群} &\cong \{\Psi \mid \text{一次分数変換},\ \Psi(\infty) = \infty\} \\ &= \{z \mapsto az + b \text{ なる形の変換（一次変換）} \mid a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0\} \cdots \text{無限群} \end{aligned} \tag{3.45}$$

従って、求める群というのは、Ψ という一次分数変換であって、1 点を止めているもの、例えば、無限大を止めているもの全体である。一次分数変換で無限大を止めてるやつというのは、一次変換 $z \mapsto az + b$ になる。分母があったら、無限大は動く。b は任意の複素数で、a は 0 以外の任意の複素数だから、無限群ですね。

ここで注意しておくと、商空間になっているのは、$\mathcal{M}_{g,m}$ だけで、それをコンパクト化したものというのは、商空間になっていないんです。そこでの自己同型群というのは、無限群なんです。で、こういうことが起きているからこそ、これを足すとハウスドルフでなくなってしまう。これが前から知られている observation です。

3.13 Mumford のコンパクト化

$$\begin{aligned} &\underline{\text{Mumford の def}} \\ &\bar{\mathcal{M}}_{g,m} = \mathcal{M}_{g,m} \cup \frac{\{(\Sigma, \vec{z})\}}{\sim} \\ &\text{Deligne-Mumford のコンパクト化} \end{aligned} \tag{3.46}$$

それでですね、Mumford のやった解決というのは、こういうのを捨てなさいということなんです。つまり、singular なものを足すんだけれども、こういうことが起きているやつは足さない。$\bar{\mathcal{M}}_{g,m}$ は何かと言いますと — Mumford の定義ですけれども — $\mathcal{M}_{g,m}$ にですね、$(\Sigma, \vec{z})$ というもののモジュライを足すんですが。

$$\begin{aligned}&(\Sigma, \vec{z})\\&\Sigma : \text{singular で stable なリーマン面 (genus } g)\\&\vec{z} = (z_1, \ldots, z_m), \quad z_i \in \Sigma, \quad z_i \neq z_j \ (i \neq j)\\&\Sigma \text{ は } \underline{\text{stable}}\\&\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \{\Psi : \Sigma \to \Sigma \mid \text{biholo}, \ \Psi(z_i) = z_i, \ i = 1, \ldots, m\} \text{ は有限群}\end{aligned} \tag{3.47}$$

ここで $(\Sigma, \vec{z})$ というのはどういうものかと言うと、まず、 Σ というのは、singular なリーマン面で、genus g のもの[7]。複素構造まで込めて。で、 $\vec{z}$ というのは、 z_1 から z_m の組ですけれども。 z_i は、 Σ の点で、 z_i と z_j は違う点。それで、条件として、 Ψ という Σ から Σ への biholomorphic map であって、 z_i を 全部止めるものが有限群であるということ。 — コンパクトで、有限群でない場合が一つだけありますが、それは後で — こういう仮定を付けます。これを Deligne-Mumford のコンパクト化というんです。

Deligne-Mumford の論文があるんですが、こういう場合の話じゃなくて、標数 p のリーマン面で同じことをやろうというのを扱っているらしくて。標数 0 の場合は、よく知られているらしいんですけれども。

3.14 どういうものが入らないか — 例 —

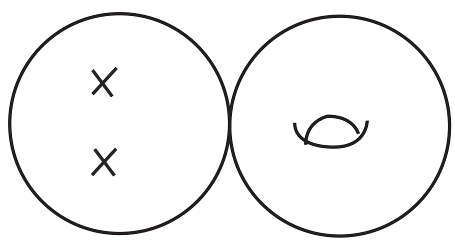

図 3.9: この場合は、OK （$\bar{\mathcal{M}}_{1,2}$ に入る）

$\bar{\mathcal{M}}_{g,m}$ に何が入らないかというのをみてみます。例えば、こういうの（図 3.9）は、OK です。これ（図 3.9）の自己同型を考えます。こっち側は、3 点。こっち側、トーラスに 1 点というのは、自己同型群は有限群です。

で、だめなのは、例えば、こういうの（図 3.10）ですね。ここと ここに genus が一個あって、ここに S^2 がある。こういうのはだめなんです。

$$(S^2, 2\text{ 点}) \circlearrowleft \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\} \tag{3.48}$$

これ（図 3.10）、まん中は、 S^2 に 2 点ですね。 S^2 に 2 点の自己同型群は、 $\mathbb{C}^*$ です。どうしてかというと、2 点というのを、0 と無限大にしますと、0 と無限大を止める一次分数変換という

[7] Singular なリーマン面の genus とは何かについては、3.15 節で解説している。

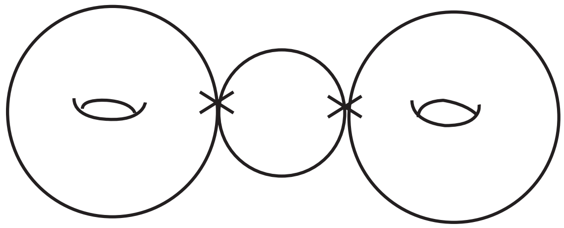

図 3.10: この場合は、ダメ（$\bar{\mathcal{M}}_{2,0}$ に入らない）

のは、 $z \mapsto az$ $(a \neq 0)$ です。こういうのは無限群だから、だめなんです。これが、コンパクト化というものの 1 つの key point になるんですね。

3.15 Singular なリーマン面の genus とは？

本当は、singular なリーマン面の genus とは何かを定義しなくちゃいけない。これは、ちょっと考えれば、当たり前のことですけれども。

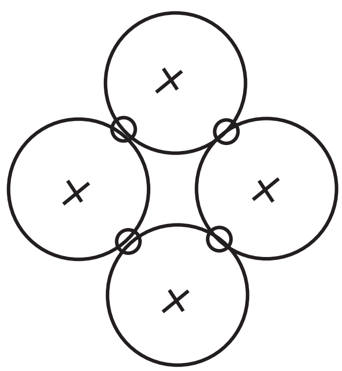

図 3.11: この genus は、1

例えば、こういうやつ（図 3.11）を考えましょう。これの genus はいくつか。これは全部 S^2 なんですね。これの genus は 1 なんです。それは、どうしてかというと、これは特異点解消してやると、つまり、特異点を滑らかに直してやると、こう（図 3.12）なります。つまり、singular なリーマン面の genus というのは、特異点を解消したやつ、smooth にしたやつの genus だという風に思うことにします。それで、genus g を attain するやつを全部集めなさい。それを自己同型で割ってやる。

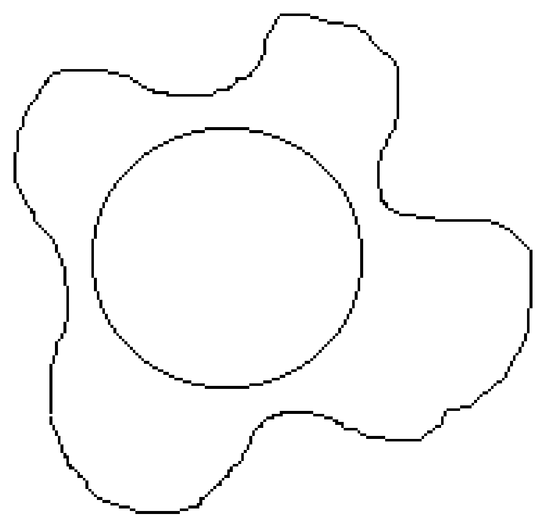

図 3.12: 特異点を解消すると、トーラスになる

3.16 $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}$ は、$6g-6+2m$ 次元の orbifold になる

$$\underline{\text{Thm}} \quad \bar{\mathcal{M}}_{g,m} \text{ は、} 6g \Leftrightarrow 6+2m \text{ 次元の orbifold になる。} \tag{3.49}$$

そうすると、この $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}$ というのは、 $6g \Leftrightarrow 6+2m$ 次元の orbifold[8] になる。こういう定理ができます。

$$g=0 \text{ のとき、manifold} \tag{3.50}$$

もし、 g が 0 なら、これは、manifold になります。

$$\bar{\mathcal{M}}_{0,4}=\mathbb{C}P^1 \tag{3.51}$$

3.17 $\mathcal{M}_{0,5}$ について

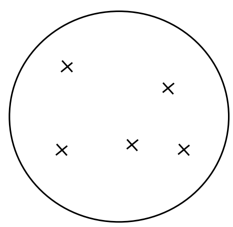

図 3.13: $\mathcal{M}_{0,5}$

それで、何かしなくちゃいけないから $\mathcal{M}_{0,5}$ というのを（図 3.14）調べてみる。これ、今度は、5 点あるんですね。

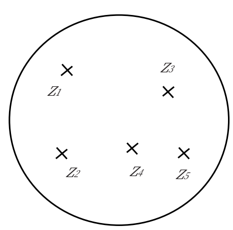

図 3.14: $\mathcal{M}_{0,5}$

例えば、こういうの（図 3.17）と、こういうの（図 3.18）を考えます。これらは、違う元なんです。そこで、もとを考えるんですが、それは両方ともこれ（図 3.15）なんですね。

[8] Orbifold については、(3.64) で定義を述べる。

$$
\begin{aligned}
&z_1, z_2 : \text{fix} \\
&z_{3,\varepsilon},\ z_{4,\varepsilon},\ z_{5,\varepsilon} \to p \\
&\text{1 点に近づける}
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

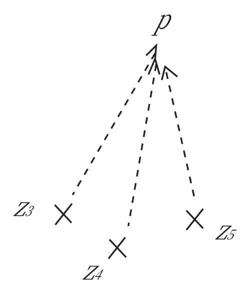

図 3.15: 1 点に近づける

図 3.15 で、2 点 z_1, z_2 を fix して、 z_3, z_4, z_5 を、1 点に近づけなさい。これらに、パラメーターを入れておきます。これの limit は何か。

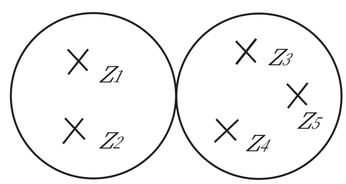

図 3.16: (1) の場合

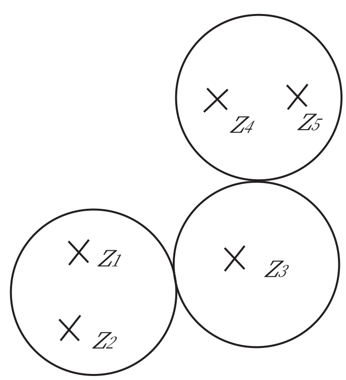

図 3.17: (2) の場合

ついでに言うと、こういう風に描きましたけど、この絵 (2) は一通りなんですが、この絵 (1) は、一通りではないです。一通りという意味は、こういう絵を描いたらば、これ (2) は holomorphic の

意味では、一つしかないわけです。それはどうしてかというと、これは、 S^2, 3 点ですから。 S^2, 3 点というのは、複素構造として一意で、それが 3 つあるわけだから、これは一通りなんです。こいつ (1) はですね、こっちは 4 点あるんですね。 S^2, 4 点だから、この 4 点の位置関係によって、いろいろ種類がある。だから、こういう limit は、いろいろ種類が出てくる。どういう風にやれば、この limit が見えるかというのを考えてみましょう。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\mathbb{C}P^1, (z_1, z_2, z_{3,\varepsilon}, z_{4,\varepsilon}, z_{5,\varepsilon})) = ? \quad (1) \text{ or } (2) \tag{3.53}$$

今、 z_3 と z_4 と z_5 が、全部同じところに行くとします。

$$\frac{|z_{4,\varepsilon} \Leftrightarrow z_{5,\varepsilon}|}{|z_{3,\varepsilon} \Leftrightarrow z_{4,\varepsilon}|} \to 0 \quad \text{となる場合} \qquad (\to (2)\,) \tag{3.54}$$

ここで、 $z_4 \Leftrightarrow z_5$ のノルムを、例えば、 $z_3 \Leftrightarrow z_4$ のノルムで割ったものが 0 に行くとします。これは絵で見ると、 z_4 と z_5 が近くって、こんな感じになっている。両方とも p に行くんだけど、z_4 と z_5 がすごく近くって、で、 z_3 は近いけど、もう少し遠い。そうするとですね、この limit は、こっち (2) なんです。なぜかというと、要するに、これは入れ子になってまして、ここと ここが決まると、こうなので、この limit はこれになる。それを証明しようと思ったら、特異点を解消するわけですね。こういうのを作って、こいつを biholomorphic で写してやると、こういうものになっているというのを実際、チェックすればいい。それはやりませんが。

$$z_3,\ z_4,\ z_5 \text{ のお互いの距離の比が、0 にも } \infty \text{ にも行かない場合} \tag{3.55}$$

で、これ (1) は、どういう場合かというと、この 3 つの距離が、大体、均等な場合です。つまり、z_3, z_4, z_5 のお互いの距離の比が、0 にも ∞ にも収束しない場合。だから、大体、この 2 つの limit が意味を持っている。こういうときは、こういう風になる。全体のスピードに依って、どれになるかというのが決まる。

例えば、 z_3 と z_4 が決まるスピードが同じだったならば、今度は飛び出すのは z_3 と z_4 になる。要するに、どういう点どうしが、どれだけ速く行くかというのを見てやると、limit が見えてくる。それを数学的にちゃんとやろうと思ったら、こういう各点の neighbourhood を定義してやるんです。さっき言ったように、 $zw = 0$ というのを、 $zw = \varepsilon$ というのに動かす。 ε をパラメーターだと思ってやれば、具体的に座標が書ける。

で、genus 0 の場合は、こういうことをやってやると、コンパクト化の近くに座標系ができて、ちゃんと多様体を定義しているということです。それは、多様体の定義をちゃんとやらないと証明できないけど。多分、genus 0 だったらすぐできるんですけど。これが、genus 0 のリーマン面のモジュライのコンパクト化というのが何をやっているかということの説明です。

第3章　（中） Orbifoldについて

第 3 章（中）では、orbifold の定義や、なぜ、モジュライ空間が orbifold になるかということについて述べる。

3.18　なぜ、orbifoldが出てくるのか？

次にですね、どうして orbifold が出て来るかというのを考えましょう。

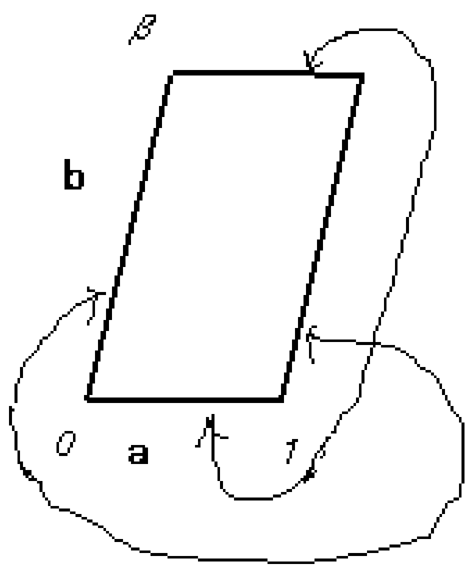

図 3.18: $\mathcal{M}_{1,0}$ ：トーラス

$\mathcal{M}_{1,0}$ というのは何かというのを考えます。Genus 1 のリーマン面というのは、平行四辺形をこう貼り合わせて作る。平行四辺形は、こう取ります。ここを 0 に取って、ここを 1 に取って、ここ

を β に取って、こういう平行四辺形[1]。そうすると、普通の記法では、こうなっているんですね。

$$\begin{array}{l} \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\beta} = T^2 \\ \beta \text{ がパラメータ} \\ \text{base の取り方は自由} \end{array} \tag{3.56}$$

$\mathbb{C}$ を $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\beta$ で割ったやつ、こういうトーラスがあるんですね。 β がパラメータなんですが。

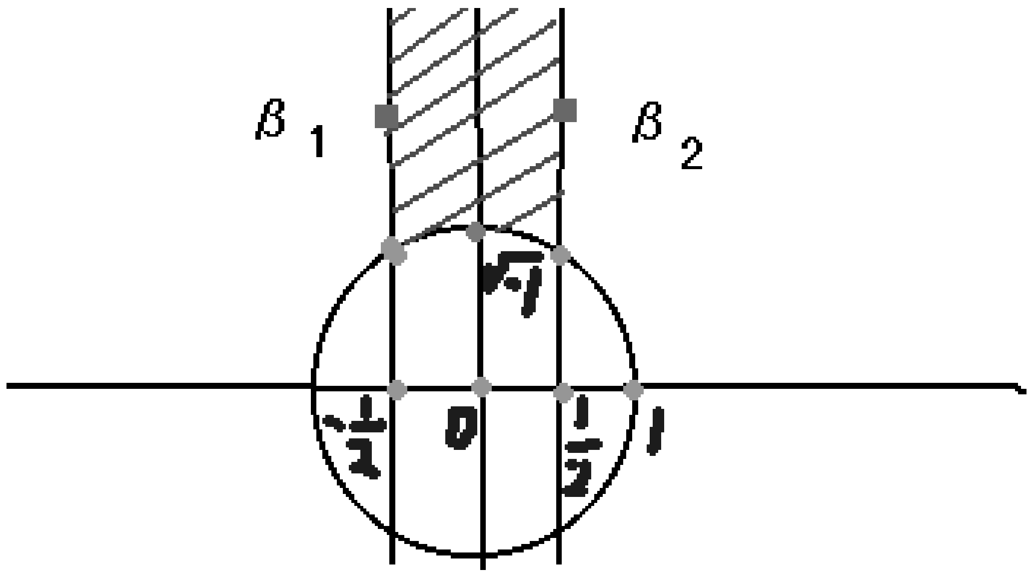

図 3.19: β の範囲

但しですね、この base の取り方というのは、自由に変えられるわけです。比較的よく知られている例があって、Gauss がした例なんですが。これは、実軸ですね。今、 β を斜線部（図 3.20 参照）に入るやつで取る[2]。但し、異なる β に対して、同じ複素構造を与えるところがあります。つまり、 β がここ β_1 にあろうと、ここ β_2 にあろうと、これは同じ物です[3]。

ところがですね、ちょっと特別なやつがありまして。それは、この平行四辺形の対称性が高いものなんですが。

$$\beta = \sqrt{\Leftrightarrow 1} \tag{3.57}$$

今、 β を $\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ にします。対応する平行四辺形は、正方形になります（図 3.21）。

[1]適当な相似拡大を行なって、平行四辺形の長くない方の辺の長さを 1 としておく。さらに、平行移動と回転により、平行四辺形の長くない方のひとつの辺 a を実軸上の $[0,1]$ におき、原点をはさむ他の一辺 b を上半平面内に取る。

[2]b は、短くない方の辺だから、 β は、原点中心の半径 1 の円上または、その外側にある。また、 $\beta=\beta_0$ と $\beta=\beta_0+1$ は、同じ複素構造を表わす平行四辺形に対応するので、 β の実数部分は、 $-\frac{1}{2}$ 以上 $\frac{1}{2}$ 以下としてよい。よって、 β は、図の斜線部に取ってよい。

[3]斜線部のうち、境界の左右の縦線の同じ高さの点（ 例えば、 β_1 と β_2 ）は、同じ複素構造を与える。

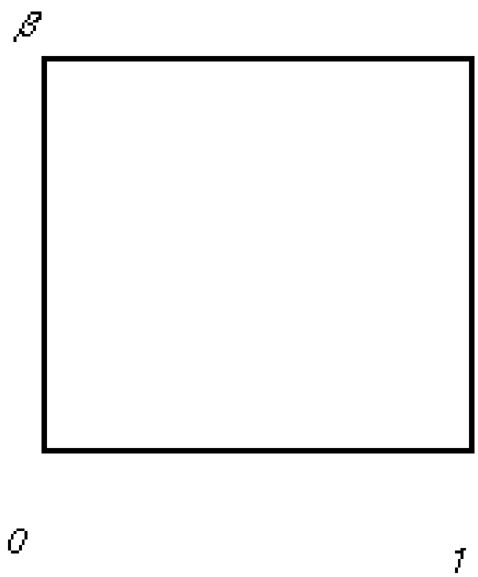

図 3.20: $\beta = \sqrt{\Leftrightarrow 1}$：正方形の場合

$$\mathcal{M}_{1,0} \text{ における } \beta = \sqrt{\Leftrightarrow 1} \text{ の近傍は、} \mathbb{C} \text{ の open set ではない。} \tag{3.58}$$

この近傍を考えましょう。 $\beta = \sqrt{\Leftrightarrow 1}$ の近傍で、 $\mathcal{M}_{1,0}$ というのは、 $\mathbb{C}$ の open set でないわけです。普通の点は、 β を局所的に動かすと、本当に全部違うものが出てくるから、ちゃんと $\mathbb{R}^2$ に homeomorphic になるんですけど。この点というのは、ちょっと動いた点が同じものを表わすから[4]、そういう所が違うわけです。

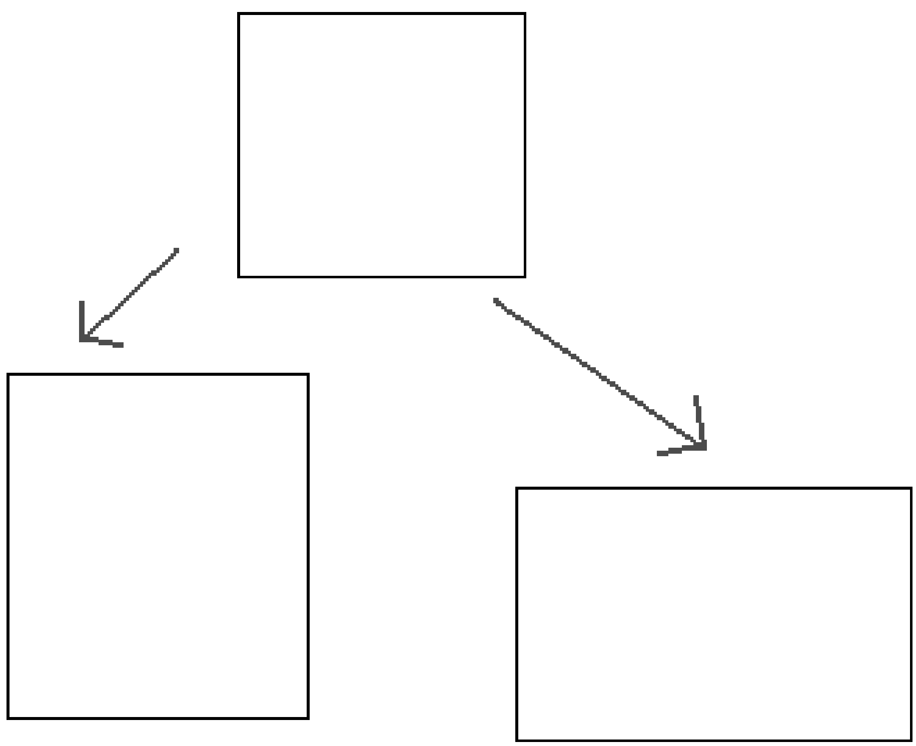

図 3.21: こっちに増やそうと、こっちに増やそうと同じ点を表わす

この β の近傍では、こっちに増やそうと、こっちに増やそうと、同じ点を表わすんです（図 3.22 参照)。同じことを見るには、寝せればいいです。そうすると同じものですね。

$$\because \ \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{\Leftrightarrow 1}} \text{ が自己同型を持つ} \tag{3.59}$$

[4]例えば、 $\beta = \sqrt{-1}$ の近くで、虚数軸上（長方形たちに対応する部分）を上下にちょっと動かすと、同じ複素構造に対応するペアが現れる。
注：境界の円弧上（ひし形に対応する部分）で、 β から左右に同じだけ行った 2 点が同じ複素構造に対応する。

なぜかと言うと、この正方形に対応するリーマン面は、こういう 90 度回転を自己同型として持ちますから。

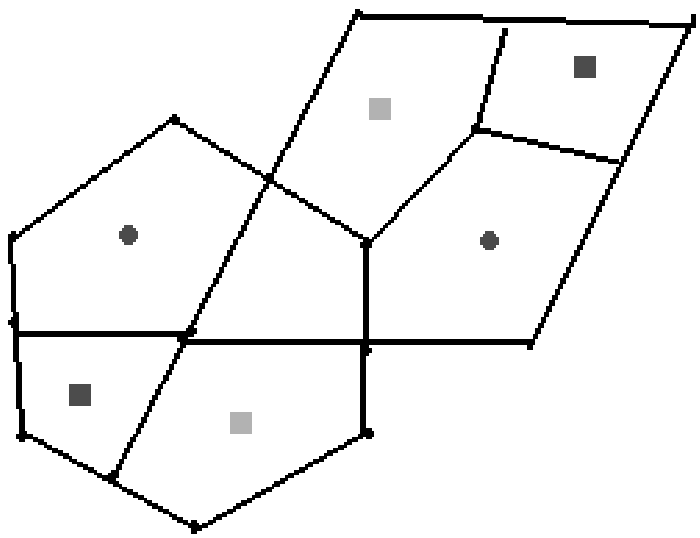

図 3.22: ひし形を六角形に考え直す

この正方形が $\mathbb{Z}_2$ に対応していて、このひし形[5]が $\mathbb{Z}_3$ に対応している。このひし形自体には自己同型がないんですが、これから作ったリーマン面には、自己同型があって（図 3.23, 3.24 参照)。こうした自己同型が存在するために、この 2 つの点が singular point になるわけですね。 S^2 に singular point が、こう 2 点。これが $\mathcal{M}_{1,0}$ です（図 3.25)。

3.19 Orbifold になる別の例

$$\begin{aligned}&\text{一般に、}\\&\bar{\mathcal{M}}_{g,m} \text{ の元の代表元が自己同型を持つと、}\\&\text{その neighbourhood で } \bar{\mathcal{M}}_{g,m} \text{ は、manifold にならない。(orbifold)}\end{aligned} \tag{3.60}$$

[5]斜線部で、実数部分 $\frac{1}{2}$ の縦線と、半径 1 の円弧の交わりに対応するもの。

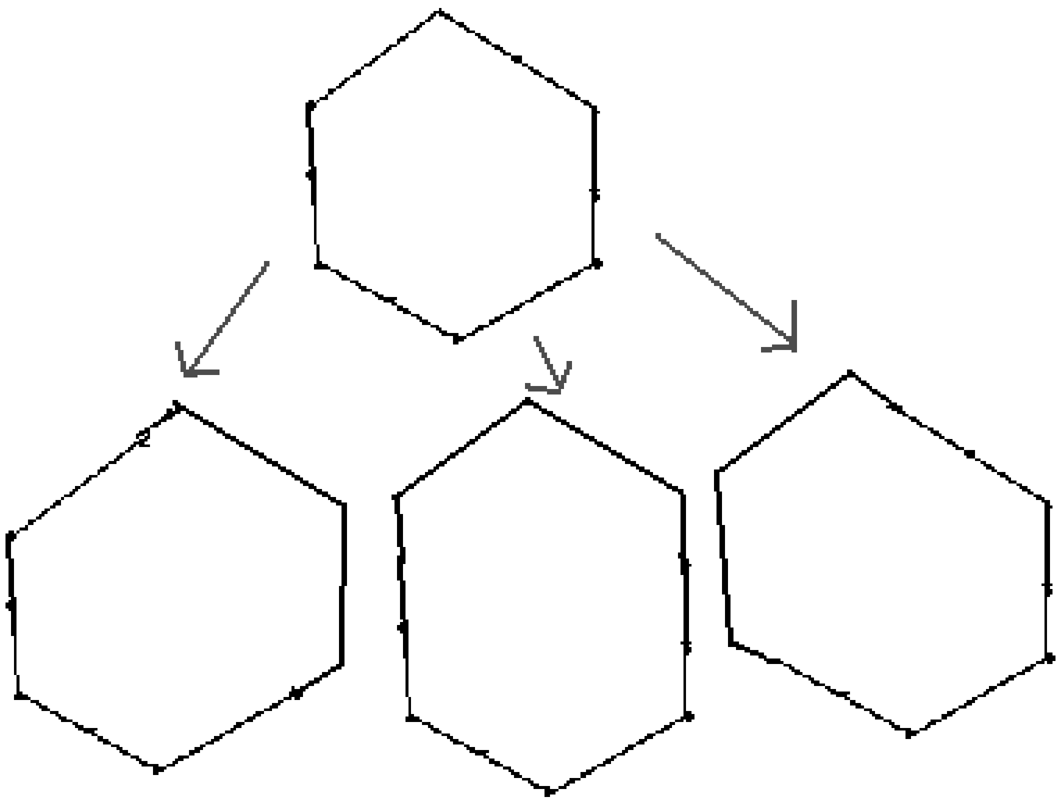

図 3.23: 3 つのどの方向に増やしても同じ点を表わす

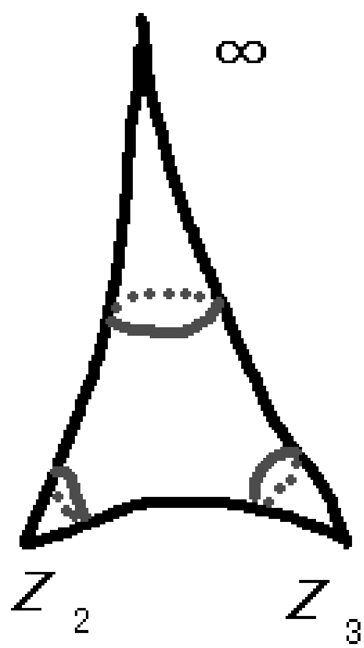

図 3.24: $\mathcal{M}_{1,0}$ は、こうなる

一般に、 $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}$ の元の代表元が自己同型を持つと、その neighbourhood は、多様体としての近傍ではないんです。

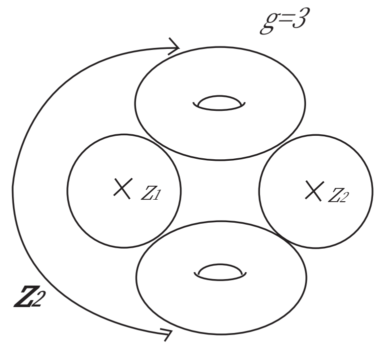

図 3.25: 多様体にならない別の例

例えばですね、 — singularity があって申し訳ない — 図 3.26 を考えましょう。これ、genus が 3 なんですけれども。これは、上下対称だから、ガタッと引っ繰り返して、これとこれを入れ替えるような、こういう $\mathbb{Z}_2$ みたいなのがある。こういう自己同型があるとき、この近傍は、manifold の点の近傍とは違うわけです。

3.20 というわけで、orbifold

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Aut}(\Sigma, \vec{z}) = \{\Psi : \Sigma \to \Sigma \mid \text{biholomorphic},\ \Psi(z_i) = z_i,\ i = 1, \ldots, m\} \\
&(\Sigma, \vec{z}) = \alpha \in \bar{\mathcal{M}}_{g,m}
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

一般に、 Σ と $\vec{z}$ というのがあって、 Ψ という、 Σ から Σ への biholomorphic であって、$\Psi(z_i) = z_i$ になる。こういうのを考えるんですが、これは一般に有限群なんです。

$$
I_\alpha = \,,\ : \text{有限群} \Longleftrightarrow \Sigma \text{ は stable}
\tag{3.62}
$$

さっきの付け加えるコンパクト化のときの条件を stability といいます。それで、この群を , と書きますと、

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{C}^{3g-3+m} \text{への線型な有限群 , の作用があって、} \\
&\alpha \text{ の neighbourhood は、} \frac{\mathbb{C}^{3g-3+m}}{\Gamma} \text{ と同相}
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

, の $\mathbb{C}^{3g-3+m}$ への — 複素ですから、 $3g \Leftrightarrow 3 + m$ 次元ですが — 線型な作用があって、 α の neighbourhood というのは、こいつで割ったやつに等しい。と、orbifold. Manifold というときは、有限群がなくて、ただ単に、こういう $\mathbb{C}^{3g-3+m}$ と同相であるというのが定義だったんですが。Orbifold のときは、有限群で割ったものと同相です。

3.21 Orbifold とは

こういうのを orbifold といいます。Orbifold の定義を書いておきましょう。

<u>Def</u>

M^n が n 次元の<u>orbifold</u>

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

- M はハウスドルフ空間である
- 任意の $p \in M$ に対して、

  (1) 有限群 $,_p$ の $\mathbb{R}^n$ への線型な作用 (3.64)

  (2) $U_p : p$ の neighbourhood

  (3) $\varphi_p : U_p \to \mathbb{R}^n/,$, homeomorphism

  が存在する
- $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ のとき

  φ_p と φ_q の間の座標変換は、C^∞-map

M が n 次元の <u>orbifold</u> というのは、ハウスドルフ空間 M の各点 p に対して、 $\mathbb{R}^n$ への有限群 $,_p$ の線型作用があって、それから、 p の neighbourhood U_p から、 $\mathbb{R}^n/,_p$ への homeomorphism φ_p がある。これ、座標系ですね。で、多様体の定義に習って、 $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ だったらば、 φ_p と φ_q の間の smooth な座標変換がある[6]。これが、orbifold の定義です。注意しておくと、位相空間が orbifold と言うんじゃなくて、位相空間に、この座標系を込めたやつを、orbifold と言うんです[7]。

3.22 Orbifold の例

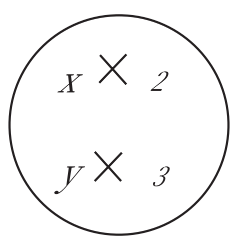

図 3.26: Orbifold の例

さっきのトーラスのモジュライ空間の例で考えてみましょう。 S^2 に特異点が 2 点あるとします。それらを x, y と置きましょう。

[6] この場合、smooth な orbifold を考えている。

[7] ハウスドルフ空間 X と条件を満たす座標系があるとき、 X にこの座標系を合わせたものを orbifold M と思う。このとき X を orbifold M の underlying space と言う。

$$
\begin{aligned}
&p \neq x, y \text{ のとき} \\
&U_p : p \text{ の neighbourhood} \\
&\varphi_p : S^2\text{の普通の座標}
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

p が x でも y でもなければ、 φ_p は、 S^2 の普通の座標ですね。

$$
\begin{aligned}
&p = x \text{ のとき} \\
&\mathbb{R}^2 / \pm 1 \overset{\text{homeo}}{\cong} \mathbb{R}^2
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

p が x で、指数は 2 だとします。 $\mathbb{R}^2$ を ± 1 で割ります。そうすると、また、 $\mathbb{R}^2$ になります[8]。 U_x は、 x の neighbourhood で、 φ_x は、 U_x から $\mathbb{R}^2 / \pm 1$ まで持っていくものです。 $,_x$ は ± 1 です。普通の多様体の構造では、 $,_x$ で割るところはないんですね。

$$
\begin{aligned}
&p = y \text{ のとき} \\
&\mathbb{R}^2 / \{1, \omega, \omega^2\} \overset{\text{homeo}}{\cong} \mathbb{R}^2 \\
&\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} \\
&,_p = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \{1, \omega, \omega^2\}
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

p が y で、指数は 3 だとすると、このときは、 $\mathbb{R}^2$ を 1 の 3 乗根で割る。これもまた、 $\mathbb{R}^2$ になりまして、 $,_y$ は、 $\mathbb{Z}_3$ です。こういう風にする。

これら 2 点 x, y が、singularity です。位相空間としては S^2 だけど、singular point が 2 点あるから、orbifold です。 $\bar{\mathcal{M}}_{1,0}$ というのは、topological には、 S^2 と homeomorphic なんだけれども、ちゃんと考えると、orbifold になる[9]。結局、リーマン面のモジュライ空間というのは、コンパクト化してやると orbifold になって、それは、多様体にはならないというのが知られていることです。

[8] この場合、 $\mathbb{R}^2$ を $\frac{1}{2}$ 回転で割る。直線に関する折り返しではないことに注意。

[9] $\bar{\mathcal{M}}_{1,0}$ の underlying space は S^2 という位相空間、かつ、位相多様体で、 $\bar{\mathcal{M}}_{1,0}$ そのものは、 $S^2(2,3)$ という orbifold になる。

第3章　（下）例の積分の話

第 3 章（下）では、この講義のテーマにまた戻って、例の積分を定義したいのだがという話をする。

3.23　今までのあらすじ

ここで、今までの話のストーリーを見ていきたいんですけども。さっき、こういうことをやったんですね。

$$\begin{array}{c} M \\ \downarrow \end{array} \tag{3.68}$$

M から出発して、

$$\int_{\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M)} \mathrm{ev}^*(u_1\otimes\cdots\otimes u_m)e^{-E(h,\varphi)}\mathcal{D}h\mathcal{D}\varphi \tag{3.69}$$

こんな積分を考えようという話をしていました。

$$(h,\varphi)\in\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M) \tag{3.70}$$

但し、(h,φ) というのは、リーマン面 Σ 上の metric と $\mathrm{Map}(\Sigma,M)$ の元というペアだったんですけれども。

$$\frac{\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})\ltimes C_+(\Sigma)} \quad \Psi\in\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z}),\ \beta\in C_+(\Sigma) \tag{3.71}$$

これを、$\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})$ と、$C_+(\Sigma)$ — これは、Σ 上の正値関数 — で割った。

$$\Psi(h,\varphi)=(\Psi^*h,\varphi\circ\Psi) \tag{3.72}$$

$\Psi\in\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})$ の作用は、h は、Ψ で引き戻してやって、φ は Ψ を合成するというものです。

$$\beta(h,\varphi)=(\beta^2h,\varphi) \tag{3.73}$$

$\beta \in C_+(\Sigma)$ は、metric に作用させる。

$$\frac{\mathrm{Met}(\Sigma)}{\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) \ltimes C_+(\Sigma)} = \mathcal{M}_{g,m} \tag{3.74}$$

それで、前回説明したことは、こいつが等しいことの $\mathcal{M}_{g,m}$ です。

$$\begin{aligned} &g : \Sigma \text{ の genus} \\ &\vec{z} = (z_1, \ldots, z_m) \end{aligned} \tag{3.75}$$

g は、 Σ の genus の数で、 m は点の個数ですね。

$$\begin{aligned} &\mathrm{ev} : \mathrm{Map}(\Sigma, M) \to M^m \\ &\mathrm{ev}(\varphi) = (\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_m)) \end{aligned} \tag{3.76}$$

Evaluation map は、$\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ から M^m への写像です。 $\varphi \in \mathrm{Map}(\Sigma, M)$ のとき、evaluation map の φ というのは、 $(\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_m))$. z_i は fix した点です。

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_w \int_{\mathrm{Map}(\Sigma,M)} \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) e^{-E(h,\varphi)/\varepsilon} \mathcal{D}\varphi = (*) \\ &\Omega(M) \ni u_i \\ &w \subset \bar{\mathcal{M}}_{g,m} : \text{submanifold} \\ &\Leftrightarrow E(h, \varphi) \to \text{ これを topological twist すると} \\ &\text{（}M\text{ の概複素構造を使う）} \end{aligned} \tag{3.77}$$

u_i は、$\Omega(M)$ の元で、w は、submanifold ですね。ここで、この積分の値を $(*)$ と置きましょう。

$$(*) \text{ の値が} \left\{ \begin{array}{ll} [w] & \text{Homology class} \\ [u_i] & \text{de Rham cohomology class} \end{array} \right. \text{ のみに依るようにできる} \tag{3.78}$$

これが、w の homology class と u_i の cohomology class のみに依るようにできます。

$$E(h, \varphi) \text{ が大きい所は、積分に効かない。} \tag{3.79}$$

ちょっとだけ説明しますと、 $E(h, \varphi)$ が大きい所では、あまり積分に効かないわけです。

$$E(h, \varphi) \text{ が極小} \Rightarrow \text{harmonic map} \Leftarrow \text{holomorphic} \tag{3.80}$$

そこで、これが極小のところ、これはいわゆる harmonic map です。これが実は holomorphic map, holomorphic な harmonic map ですから、ちょっとそこは注意しなくちゃいけないことがあるわけですが。

ε を 0 にすればするほど、積分というのは、抑えられるはずなんですね。だから、大体、極小値のところだけで見えるようになるんです。ところがですね、いくら ε が 0 になっても、ちゃんとそうなるとは言えない。こうだったんです、本当は。ところが私の理解するところでは、多分、super symmetry と言われている何かがあると、0 以外の項というのは、何かキャンセルして 0 になってしまうというメカニズムがどっかにあって、最終的に、topological な量ということになっているんだと思うんです。

もう一回言いますと、こういう積分を考えて、ε が 0 の極限を考えます。ε を冪級数で展開しますと、これが E というこの肩の関数が一番小さい所が本質的に効くはずなんだけれども。唯、それだけだと、先の方にはもっと、ε が有限なところでは、全部 0 でない。

ところが、これの toplogical twist した後の super symmetric なものでは、一番、最低次の項が生き残るけれども、それ以外の所では、0 になる。最低次の項というのが基本的には、toplogical な道具立てでできるというのがメカニズムですけれども。

3.24 Topological field theory と topological twist

それで、結果的に何ができるかということを。Topological な field theory でやることは、第一近似。Topological field theory が分かったからといって、場の理論が分かるわけではないんだけれども、多分、場の理論では、exact な計算はやりようがないんです。

Topological twist する前のやつの第一近似と topological twist したやつの第一近似というのは、それも、似ていて違う量になっちゃうんだけども。似ていて違う量の方だったらば、exact に解ける。元は、そういう有限個の計算に帰着しないものだから、少なくとも今の所、計算のしようがない。

その twist するというのが重要です。僕もそれを理解したくて、例えば物理の論文を見るんですが。Exact に計算して、答えがばしっと書いてあって、チェックができている例というのは、ある意味で toplogical field theory になる例なんだろうけれども。そうでない例というのは、「それから類推できるでしょう」といって話が進んでいるだけで、多分、びしっと書かれている例というのは非常に少ないだろう。それはやっぱり、人間が何を計算できるかということがあって。無限個のパラメータがある場合は、まあ計算できないから、有限個の例だけを取り上げている。もっと素朴に疑問に思うのは、そういう toplogical twist がいつ決まるかということ。或いは topological twist をするための組織的な方法があるかとか。そういうのは私が非常に興味を惹かれている問題なんですけども。

でも、江口先生に聞きましたけども、一般的な処方箋は、ないんじゃないかと言っていました。多分、ケース・バイ・ケースで調べて、実際、topological field theory だということをチェックしているだろう。ただ、数学者に分かるような明確に書いた処方箋はないけれど、その道のプロだったらば、何か分かっているような技が、あるかもしれませんけれど。それは、私にはちょっと。

数学的に応用されている例というのは、全部 toplogical になっている。Donaldson invariant とか、Witten invariant とか、或いは、Seiberg-Witten Theory とか。もっといろいろありますけども。全部 topological な計算に帰着している例だけで、そうでない例は計算できないんです。計算のしようがない。数学的に定義のしようがないんですけれど。これは、ちょっといろいろ難しいことがあって、私によく分かっていないから。今、言ったような状態なので、本当に 100% 分かった

人はいないかもしれないから。

3.25 この積分を定義したいが …

とにかく、これを定義したいわけです。前回、最初の方で、こんなことをしゃべったんですね。

$$\begin{array}{lcl} Q_0(a,b,c) \in \mathbb{Z} & & \\ a,b,c \in H^*(M) & \overset{\text{dual}}{\Leftrightarrow} & a^*,b^*,c^* \in H_*(M) \\ \int a \wedge b \wedge c & & \#(a^* \cap b^* \cap c^*) \end{array} \tag{3.81}$$

a, b, c がコホモロジーの元のとき、 $Q_0(a,b,c)$ の定義はこう $(\int a \wedge b \wedge c)$ だったんですね。これよりもっと見やすいのは、dual に持っていって、ホモロジーの元だと思ってやると、 — これ符号付きですけれども、交点の数を数える — $\#(a^* \cap b^* \cap c^*)$, こういうものです。

$$E(h,\varphi) : \text{本当に最小} \tag{3.82}$$

今ですね、 $E(h,\varphi)$ が本当に最小なときを考えましょう。

$$\varphi = \text{ constant} \tag{3.83}$$

$E(h,\varphi)$ を twist します。これが一番 leading term だから。そうするとですね、 φ が constant なところは、どうなっているかというと。

$$\mathrm{Map}(\Sigma, M) \supset M = \{\text{constant map}\} \tag{3.84}$$

$\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ の中にですね、 M そのものが入っているんです。

$$\begin{aligned} & \int_{\mathrm{Map}(\Sigma,M)} \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) e^{-E(h,\varphi)} \mathcal{D}\varphi \\ & \qquad E(h,\varphi) \overset{\text{twist}}{\Leftrightarrow} i\,\mathcal{L}(h,\varphi)/\varepsilon \\ = \; & \int_M \mathrm{ev}^*(a \wedge b \wedge c) \\ = \; & \int_M a \wedge b \wedge c \qquad \text{元の項} \\ = \; & Q_0(a,b,c) \end{aligned} \tag{3.85}$$

これは何かといいますと、$\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ で積分することの evaluation map の、

$$\Sigma = (S^2, 3\,\text{点}) \tag{3.86}$$

例えば、 Σ を S^2, 3 点とします。

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Map}(\Sigma, M) & \to & M^3 \\
\varphi & \mapsto & (\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3))
\end{array}
\tag{3.87}
$$

この Map (Σ, M) から、 M の 3 乗に map があるわけですが。 φ から $(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3))$ に行くんですね。

$$
\begin{array}{rcl}
M & \to & M^3 \\
p & \mapsto & (p, p, p)
\end{array}
\tag{3.88}
$$

ここに M というのが入っているんですが、それは constant map 全体です。これは、 p から (p, p, p) に行くわけです。

本当にこうやって書いて、 ε を 0 にしたときの leading term だと言われると、多分、これですよね。後は、leading term にならない。これは、元々の交点数。元々の交点数、乃至、カップ積の表わすものというのが leading term になるんです。ところが、twist していると、極小値。そうすると、別のものです。別のものは何かというとき、この $\mathcal{L}$ という、オイラー・ラグランジュ係数を調べるんです。これが元の leading term です。さっきの定義の $Q_0(a, b, c)$ です。

前々回や前回で言ったんですが、この $Q_0(a, b, c)$ というやつを perturb したいわけで、それが leading term として出てきたので、何か気分がいいんです。

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{L}(h, \varphi) \text{ が極値になる } (h, \varphi) \\
\quad \uparrow \\
\mathcal{L} = E(h, \varphi) \text{ のとき } \Rightarrow \varphi : (\Sigma, h) \to (M, g), \quad \text{harmonic map}
\end{array}
\tag{3.89}
$$

そこでじゃあ、perturb するとどうなるかというとですね、一番効く所はこれの最小値だった。取りあえず、極小値。 $\mathcal{L}$ が元のエネルギー E だと、 φ は harmonic map なんですね。

さっきの説明は極小値ですね。本当にそうすると、極値なんですね。さっきの説明は、本当はうそでして。ここに φ がありますと、これ等しくなる。

$$
\int_{x \in M} e^{\sqrt{-1} f(x)/\varepsilon} \fallingdotseq \left(\Sigma df = 0 \text{ の所の nbd}\right) \varepsilon^{\square} + \text{error terms}
\tag{3.90}
$$

そうすると、別の議論で、積分するときは、これの極値のところが効くというのが。

$\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ を入れて考えると。普通の有限次元のとき、例えば、こうしますね。M は compact manifold. こうやったときの、これの leading term というのは、$\sum df = 0$ のところの neighbourhood だけで効く。この式を逆にそうして思い出してやると、 $\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ があっても同じことが言えるというのが分かるので。

Topological field theory で大事なのは、そこに本当に動かない。これは漸近展開。 ε が掛かってて、exponential の出てくる所があって。この漸近展開の式で、その点の近くのこの点にかからない所が全部キャンセルしてしまうというのが。それを説明する。

とにかく、取りあえず、こういう (h, φ) を調べる。で、これがですね、エネルギーだと harmonic map になる。

$$
\begin{aligned}
&\text{twist した } E \rightsquigarrow \mathcal{L} \\
&\mathcal{L} \text{ の極値} : \varphi \\
&\varphi : (\Sigma, h) \to (M^{2n}, g, J), \text{ pseudo holomorphic} \\
&J : \text{almost complex structure}
\end{aligned}
\tag{3.91}
$$

Twist するとき、さっき J というのを使ったんですが、これを twist したラグランジアンでやってやると pseudo holomorphic curve になるというのが、ラグランジアンを計算するときに出てくるんですが。Twist したエネルギーと $\mathcal{L}$ の極値というのは、今、 (Σ, h) に入っています。

3.26 概複素構造と複素構造

<u>M 上の almost complex structure （概複素構造）</u>

$$
\begin{aligned}
&J : TM^{2n} \to TM^{2n}, J^2 = -1 \text{ なるもの} \\
&\text{（今までは、} n = \dim M \quad \text{これからは、} 2n = \dim M \text{）} \\
&TM \text{ は complex vector space}
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

ここで、 M 上の almost complex structure というのは何かと言いますと、さっきのリーマン面で考えたときと同じで、こういうものなんです。 TM から TM への map J であって、$J^2 = -1$ であるもの。 M というのは必然的に偶数次元です。今まで n と書いていましたが、これからは、$2n$ と書きます。

<u>Remark</u>

$n = 1$

「$J_\Sigma : T\Sigma^2 \to T\Sigma^2, J_\Sigma^2 = -1$」$\cdots$ almost complex structure

このとき、次が成り立つ。即ち、

$$
\left.
\begin{aligned}
\forall p \in \Sigma, \quad &\exists U_p : \text{neighbourhood} \\
&\exists \Psi_p : U_p \to V_p \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C} \\
&\quad J_\Sigma \leftrightarrow \sqrt{-1} \text{ 倍} \\
&\text{s.t. } d\Psi_p \circ J_\Sigma = \sqrt{-1}\, d\Psi_p \\
&\quad \Psi \text{ の微分は complex linear}
\end{aligned}
\right\} \text{compolex structure}
\tag{3.93}
$$

この Fact は、$2n \geq 4$ $(n \geq 2)$ のときには正しくない。

Remark なんですが。 n を 1 にすると、 Σ^2 の場合になる。そのときに、こういうことを説明しましたね。任意の p に対して、 U_p という neighbourhood があって、 Ψ_p という U_p から $\mathbb{C}$

の open set への map があって、こちら側に J_Σ を考えて、こちら側に $\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ 倍。 Ψ_p の微分は complex linear. こういう neighbourhood が取れるということを前に言いました。これはですね、n が 1 では、OK. n が 2 以上では、正しくないということが知られている。こういうのを complex structure（複素構造）といって、こういう J があることを almost complex structure（概複素構造）といいます。

前回ですね、曲面上の metric 全体というのを $\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ と $C_+(\Sigma)$ で割ったやつというのが、複素構造のモジュライと一致するということを言ったんですが、その key point というのは、2 次元のとき、almost complex structure は、complex structure と同じということなんです。これは、4 次元以上のときには通用しないわけです。

$$
\begin{aligned}
&T\Sigma : \text{complex vector space} \\
&TM : \text{complex vector space} \\
&\varphi : (\Sigma, h) \to (M, g, J),\ \underline{\text{pseudo holomorphic}} \\
&\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \varphi \text{ の微分 } d\varphi \text{ が complex linear}
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

Pseudo holomorphic の定義をしておきます。 $T\Sigma, TM$ は complex vector space ですが。このとき、 φ が pseudo holomorphic というのは、 φ の微分が complex linear であるということです。

3.27 Symplectic structure

$$g : M \text{ 上の metric} \tag{3.95}$$

ここで g というのは M 上の metric ですけれども。

$$\text{仮定：} g(JX, JY) = g(X, Y) \tag{3.96}$$

こういう仮定をしていました。

$$\omega(X, Y) := g(X, JY) \tag{3.97}$$

それで、今、 $g(X, JY)$ を $\omega(X, Y)$ と置きましょう。

$$\omega(Y, X) = g(Y, JX) = g(JY, JJX) = \Leftrightarrow g(JY, X) = \Leftrightarrow g(X, JY) = \Leftrightarrow \omega(X, Y) \tag{3.98}$$

そうすると、 ω は反対称になるんですね。なぜなら、 $\omega(Y, X)$ というのは、 $g(Y, JX)$ で、もう一回 J をやると、 $g(JY, JJX)$ になる。 $J^2 = \Leftrightarrow 1$ ですから、これは、 $\Leftrightarrow g(JY, X)$. g は、リーマン計量だから、引っ繰り返してよくて、 $\Leftrightarrow g(X, JY)$ で。これは定義から、 $\Leftrightarrow \omega(X, Y)$ と、こうなります。

$$\begin{aligned} &\omega : \text{2-form} \\ &\omega : T_pM \text{ の反対称 2 次形式として非退化} \end{aligned} \tag{3.99}$$

ω は 2-form. 反対称 2 次形式で、しかも非退化です。それは、 J が同型写像だからというわけなんですが。

$$\begin{aligned} &\omega \text{ が} \underline{\text{symplectic structure}} \\ &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} d\omega = 0 \end{aligned} \tag{3.100}$$

このとき、ω が symplectic sturcture であるというのは何かというと、$d\omega$ が 0 ということです。これが実は必要なんです。このことについては後で説明しますが。以下はこの symplectic sturcture が入る所で考えます。なぜ、symplectic structure がいいかというのは、後で説明します。

3.28 集合の数を数えるという問題に帰着する

$$\int_w \mathcal{D}h \int \mathcal{D}\varphi \ \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) e^{-\sqrt{-1}\mathcal{L}} \text{ は、次の所から決まる。} \tag{3.101}$$

そこで、さっきの積分ですけれども。これがですね、 $\mathcal{D}h$ とか $\mathcal{D}\varphi$ の evaluation の $*$ の $(u_1 \otimes \cdots \otimes u_m)$ というのは、 — 最終的には toplogical field theory になる場合ですけれども — これは、次の所から決まるわけです。

$$\begin{aligned} &\{[\varphi, h] \mid \varphi : (\Sigma, J_\Sigma) \overset{\text{pseudo holo.}}{\Leftrightarrow} (M, J_M),\ \varphi \text{ の微分が complex linear},\ [h] \in w\} \\ &J_\Sigma : T_\Sigma \to T_\Sigma \end{aligned} \tag{3.102}$$

つまり、ペアとして $[\varphi, h]$ を考えますが、 $[\varphi, h]$ は自動的に、この J_Σ, リーマン面上の almost complex sturucture になるんですね。 φ は、 (Σ, J_Σ) という所から、(M, J_M) への map ですが、これが pseudo homolorphic. つまり、これは、 φ の微分が complex linear. こういう所の寄与が、後、 h の同値類というのが、今、考えている w になる。こういう所から決まるわけです。

この積分というのは、実は、無限次元の大きい所の積分をしているんだけれども、考えている有限次元の局所の情報だけで決まってしまうという場合がある。こんな風に話がなっていないと、成立しない。

$$\text{この集合の数を数えるという問題に帰着する。} \tag{3.103}$$

実は、これが数に本質的になるというのが、一番基本的です。もう一回言うとですね、この集合の数を数えるという問題に基本的には帰着する。これが、もともとの場の理論が topological field theory になる場合の著しい特徴で、そういうものは、数学的には少なくとも扱え得る、ある集合

の数を数えるというタイプの問題に帰着する。そこで、そういう風に帰着した、数を数えるという問題を使って、最初のときに言ったような話というのを、積構造の変形とか、あるいはもっと本当は、chain complex の homotopy type とかあるんですが。あるいは本当は smooth structure の変形とか言いたいんですが、それは僕はあんまり。

だから、本当にこう考えちゃっていいかというのは、ある意味で分からないところがあって。まあ、toplogical に数学に成り得るかというのは。

じゃあ、今回はここまでにして、数を数えるというのは、実はどういうことを意味するかというのをもうちょっと説明します。

第4章　（前半） 点付きリーマン面と写像のペア

第 4 章前半では、リーマン面の複素構造と写像の組の空間（を群で割ったもの）を扱う。それについては、ベクトルバンドルの（群作用で不変な）切断を考え、切断の 0 点（を群で割った空間）として理解する。割られる空間と割る群のどちらも無限次元の場合である。

4.1　話の状況を思い出す

$$\begin{aligned}
&\Sigma : \text{genus } g \text{ の曲面} \\
&z_1, \ldots, z_m \in \Sigma \\
&M : 2n \text{ 次元のリーマン多様体} \\
&J : M \text{ の概複素構造}, \; J^2 = \Leftrightarrow 1
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Σ は genus g の曲面で、 z_1 から z_m という Σ の点を取って、 M というリーマン多様体とその上の J という almost complex structure（概複素構造）があります。これは、 J^2 が $\Leftrightarrow 1$ ですね。

$$\mathcal{M}_{g,m} = \frac{\{J_\Sigma \mid J_\Sigma : T\Sigma \to T\Sigma, \; J_\Sigma^2 = \Leftrightarrow 1\}}{\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) := \{\Psi \mid \Psi : \Sigma \to \Sigma, \; \text{diffeo}, \; \Psi(z_i) = z_i\}} \tag{4.2}$$

そして、 $\mathcal{M}_{g,m}$ という、 Σ 上の複素構造を $\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ — Σ から Σ への diffeomorphism で、 z_i を z_i に写すものからなる群 — で割ったものがあります。

$$\bar{\mathcal{M}}_{g,m} : \mathcal{M}_{g,m} \text{の compact 化} \tag{4.3}$$

前回説明した、 $\mathcal{M}_{g,m}$ のコンパクト化 $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}$ を考えましょう。Deligne-Mumford の。

$$\begin{aligned}
&w : \text{ある } H_*(\bar{\mathcal{M}}_{g,m}) \text{ の元を実現する submanifold} \\
&u_1, \ldots, u_m : H^*_{DR}(M; \mathbb{R}) \text{ の元を実現する微分形式} \\
&\bigstar \; \int_w \mathcal{D}h \int_{\mathrm{Map}(\Sigma, M)} \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) e^{-\mathcal{L}(h,\varphi)} \mathcal{D}\varphi \text{ を調べる}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

w を $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}$ のホモロジーのある元を実現する submanifold, u_1 から u_m を、 M のド・ラム コホモロジーの元を実現するような微分形式とします。考えるのは、 w で積分することの、もう一

つは、写像空間 $\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ で積分することの、こういうものです。ここに、evaluation map があって、これが、exponential map, h は Σ 上の計量で、 φ は Σ から M への写像、とこういうものを考えるんです。

$$\begin{array}{l}\underline{\mathcal{L}\text{ をうまく取って}}\ \text{(topological twist) 気楽な推論をすると、}\\ \bigstar\ \text{は、ある集合の数であることが分かる。}\end{array} \tag{4.5}$$

$\mathcal{L}$ をうまく取って気楽な推論をやると、 — 気楽という意味は、厳密性はあまり気にしないということですが — この $\bigstar$ という式は、ある集合の数であるということが分かる。「気楽な推論」というのは、ちょっと説明できないんですが、「ある集合」というのが、どういう集合かというのを説明したいんです。

$$PD[u_i] = \text{“ある submanifold”}\ N_i \subset M \tag{4.6}$$

今、微分形式 u_i を取ってますけど、u_i のポアンカレ双対にあたる、N_i という M の submanifold を使いましょう。

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{ev} : \mathrm{Map}(\Sigma, M) & \to & M^m\\ \varphi & \mapsto & \big(\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_m)\big)\end{array} \tag{4.7}$$

思い出しますと、Evaluation map というのは、 $\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ から M^m への写像ですね。これは、 $\varphi \in \mathrm{Map}(\Sigma, M)$ を $\big(\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_m)\big)$ に写します。

$$\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})\ \text{で不変} \tag{4.8}$$

これは、さっき書いた $\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ で不変なんです[1]。

4.2 $\hat{\mathcal{M}}_{g,m}$ ： Σ の複素構造と写像の組の空間

$$\begin{array}{ll}\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M) & \\ := \{(J_\Sigma, \varphi) \mid & J_\Sigma : T\Sigma \to T\Sigma,\ J_\Sigma^2 = -1,\\ & \varphi : \Sigma \to M,\ \varphi\ \text{の微分}\ d\varphi : T\Sigma \to TM\ \text{は complex linear}\}\end{array} \tag{4.9}$$

今、$\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M)$ を次のような J_Σ と φ のペアの集合とします。すなわち、 J_Σ は、Σ の complex structure で、 φ というのは、 Σ から M への map であって、 φ の微分は、 — これは $T\Sigma$ から TM への map ですけれども — こいつは、complex linear になるものとします。

[1] $\Psi \in \mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ は、 $\Psi(z_i) = z_i$ を満たしているので、 $\mathrm{ev}(\varphi \circ \Psi) = (\varphi \circ \Psi(z_1), \ldots, \varphi \circ \Psi(z_m)) = (\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_m)) = \mathrm{ev}(\varphi)$ となる。

$$T\Sigma \text{ は } J_\Sigma \text{ を } \sqrt{\Leftrightarrow 1} \text{ 倍と思えば、complex vector space} \tag{4.10}$$

Complex linear ということについてですが、まず、 $T\Sigma$ というのは、 J_Σ を $\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ 倍だと思えば、complex vector space になります。

$$TM \text{ は } J_M \text{ を } \sqrt{\Leftrightarrow 1} \text{ 倍と思えば、complex vector space} \tag{4.11}$$

もう一方の TM も、 J_M を $\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ 倍だと思えば、やはり、complex vector space になります[2]。そう思ったときに、この微分 $D\varphi$ が complex linear になる。普通に座標で書けるときは正則関数です。 M が複素多様体になるときは正則関数です。こういうものを考えます。

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(h,\varphi) : \text{energy functional } E \text{ を topological twist したもの}\\ &h \in \mathrm{Met}(\Sigma) : \Sigma\text{上の metric}\\ &\varphi \in \mathrm{Map}(\Sigma, M)\end{aligned} \tag{4.12}$$

それで、 $\mathcal{L}(h,\varphi)$ を考えるんですが。思い出しますと、 h は、 Σ 上の metric で、 φ は、 Σ から M への map だったんですね。

$$\mathcal{L} : \mathrm{Met}(\Sigma) \times \mathrm{Map}(\Sigma, M) \to \mathbb{R} \tag{4.13}$$

---

[2]実 $2n$ 次元多様体 M の概複素構造 J とは、 M の tangent bundle TM から TM への（bundle としての）自己同型写像（よって、 J は底空間 M を動かさない。）であって、各点 $x \in M$ における tangent space T_xM 間の線型写像 $J_x : T_xM \to T_xM$ が、 $J_x^2 = -1$ を満たすものをいう。 T_xM は、 $2n$ 次元の $\mathbb{R}$ 係数線形空間であるが、上の J_x を用いて、 n 次元の $\mathbb{C}$ 係数線形空間と見ることができる。それは、次のようにするとよい。

初めに、任意の元 $v \in T_xM$ に対する $\sqrt{-1}$ 倍の操作を

$$\sqrt{-1}\, v = J_x(v)$$

により定義する。$J_x^2 = -1$ より、これは、すでに定義されている -1 倍の操作と矛盾しないように定義できる。

今度は、基底について考える。 T_xM の $\mathbb{R}$ 係数線型空間としての基底 $2n$ 個を次のようにして取る。まず、 0 でないベクトル v_1 を取る。 $J_x^2 = -1$ より、 v_1 と $J_x(v_1)$ は、$\mathbb{R}$ 係数で一次独立である。 $v_1, J_x(v_1), v_2, J_x(v_2), \ldots, v_k, J_x(v_k)$ が $\mathbb{R}$ 係数で一次独立であり、かつ $k < n$ とすると、あるベクトル v_{k+1} が存在して、 $v_1, J_x(v_1), \ldots, v_k, J_x(v_k), v_{k+1}$ が $\mathbb{R}$ 係数で一次独立となる。さらに、 $v_1, J_x(v_1), \ldots, v_k, J_x(v_k), v_{k+1}, J_x(v_{k+1})$ も $\mathbb{R}$ 係数で一次独立となる。帰納法により、 $v_1, J_x(v_1), \ldots, v_n, J_x(v_n)$ は、 $\mathbb{R}$ 係数で一次独立となり、 T_xM の $\mathbb{R}$ 係数線形空間としての基底になる。

このようにして取った基底のうち、 $v_1, \ldots, v_n$ は、 T_xM の $\mathbb{C}$ 係数線形空間としての基底になることを示す。まず、これらが生成系であることを言う。任意の元 $v \in T_xM$ は、適当な実数 a_j, b_j を用いて次のように書ける。

$$v = \sum_{j=1}^{n} \big(a_j v_j + b_j J_x(v_j)\big) = \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j\sqrt{-1})\, v_j .$$

これは、 $v_1, \ldots, v_n$ が $\mathbb{C}$ 係数での T_xM の生成系であることを示している。

次に、 $v_1, \ldots, v_n$ が $\mathbb{C}$ 係数で一次独立であることを言う。

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j\sqrt{-1})\, v_j = 0, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

と置く。これより、

$$\sum_{j=1}^{n} \big(a_j v_j + b_j J(v_j)\big) = 0$$

となるので、任意の j に対して、 $a_j = b_j = 0$, すなわち、 $a_j + b_j\sqrt{-1} = 0$ となり、 $v_1, \ldots, v_n$ の一次独立性が示せた。

従って、 $v_1, \ldots, v_n$ は $\mathbb{C}$ 係数での T_xM の基底であり、 T_xM は複素 n 次元線形空間となる。

従って、 $\mathcal{L}$ というのは、$\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ から $\mathbb{R}$ への写像だという風に思えます。

$$\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) \ltimes C_+(M) \text{ で不変} \tag{4.14}$$

前に、お話ししましたように[3]、こいつが、$\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ と M の上の正値関数の作用で不変だとします。これを割ってやるというのは、こういう風に思えるわけです。

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathrm{Met}(\Sigma)\times\mathrm{Map}(\Sigma,M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma,\vec{z})\ltimes C_+(M)} & \leftarrow & \mathrm{Map}(\Sigma, M) \\ \downarrow & & \\ \mathcal{M}_{g,m} & & \end{array} \tag{4.15}$$

$\mathrm{Met}(\Sigma)$ と $\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ というのを、$\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ と、半直積の、正値関数 $C_+(M)$ で割ってやるというのは、ここから自然に、こちらで割ったやつがあって。ここから $\mathcal{M}_{g,m}$ という所に map があるんですが[4]。

$$\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M) \subset \mathcal{A}_{g,m}(M) = \{(J_\Sigma, \varphi) \mid J_\Sigma : T\Sigma \to T\Sigma,\ J_\Sigma^2 = \Leftrightarrow 1,\ \varphi : \Sigma \to M\} \tag{4.16}$$

$\mathcal{A}_{g,m}$ という集合を考えます。さっきの $\hat{\mathcal{M}}_{g,m}$ を含んでいるんですね[5]。

$$\mathcal{A}_{g,m}(M) \circlearrowleft \mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) \tag{4.17}$$

Diff $(\Sigma, \vec{z})$ の各元は、 z_i を fix しているわけですが。これは、 $\mathcal{A}_{g,m}(M)$ にどう作用するかというと。

$$\Psi(J_\Sigma, \varphi) := (\Psi^* J_\Sigma,\ \varphi \circ \Psi) \tag{4.18}$$

$\Psi \in \mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ は、 $(J_\Sigma, \varphi) \in \mathcal{A}_{g,m}$ に対して、最初の成分は、 Ψ で J_Σ を引き戻してやって、後の成分は、 $\varphi \circ \Psi$ とします。

$$\mathcal{B}_{g,m} := \frac{\mathcal{A}_{g,m}(M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})} = \frac{\mathrm{Met}(\Sigma) \times \mathrm{Map}(\Sigma, M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) \ltimes C_+(\Sigma)} \tag{4.19}$$

$\mathcal{A}_{g,m}(M)$ を $\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ で割るんですが、これは、こういう風に思った方がいいですね。すぐ分かることですが。右側の式ではリーマン計量の方を動かしていて、左側の式では複素構造の方を動かしています。

$$\mathcal{L} : \mathcal{B}_{g,m} \to \mathbb{R} \tag{4.20}$$

---

[3]第 2 章の 2.9, 2.10 節を参照。

[4]$[(h, \varphi)] \mapsto [h]$ という map で、fiber は $\mathrm{Map}(\Sigma, M)$ となる。

[5]$\hat{\mathcal{M}}_{g,m}$ は、 $\mathcal{A}_{g,m}$ において、 φ の微分 $d\varphi$ が complex linear であるという条件を付け加えたものになっている。

そこでさっきの $\mathcal{L}$ という関数は、 — 形は書いてないけど — $\mathcal{B}_{g,m}$ という所からの map だと思えるわけです。

$$\mathcal{L} \text{ の極値を与える } (J_\Sigma, \varphi) \text{ たち} = \frac{\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})} = \mathcal{M}_{g,m}(M) \tag{4.21}$$

これ、ちょっとうそなんだけど。 $\mathcal{L}$ の極値を与えるような (J_Σ, φ) たちというのが、実は、この場合には、さっき書いた $\hat{\mathcal{M}}_{g,m}$ を $\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ で割ったものになる。

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M) \\ &= \{(J_\Sigma, \varphi) \mid \quad J_\Sigma : T\Sigma \to T\Sigma,\ J_\Sigma^2 = \Leftrightarrow 1, \\ &\qquad\qquad\qquad \varphi : \Sigma \to M,\ \varphi \text{ の微分 } d\varphi : T\Sigma \to TM \text{ は complex linear}\} \end{aligned} \tag{4.22}$$

$\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M)$ というのはこうでした。

$$\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M) \circlearrowright \mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) \tag{4.23}$$

これには、$\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ が作用しているんですが。

$$\mathcal{M}_{g,m} = \frac{\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})} \tag{4.24}$$

これを割るわけですけれど。これは critical point の集合になるわけです。

$$\mathcal{L} : X \to \mathbb{R},\ X : \text{manifold} \tag{4.25}$$

それで、 $\mathcal{L}$ という、有限次元のコンパクトな manifold X 上の関数を考えます。

$$\begin{aligned} &\int e^{\sqrt{-1}\mathcal{L}(x)/\varepsilon}\, dx \quad \varepsilon : \text{十分小さいとき} \\ &= \text{const} \sum \frac{\varepsilon^{\dim X/2}}{\sqrt{\det(\mathrm{Hess}_p \mathcal{L})}} \quad \text{こんな風な式？} \\ &p \in \{p \in X \mid d\mathcal{L}_p = 0\} \end{aligned} \tag{4.26}$$

e の $\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ の $\mathcal{L}(x)$ の、何か ε というのがありまして。 ε が小さいとき、これがどういう格好をしているか。これは良く知られていまして、こういう感じの有限和なんです。大体どんな感じかというと。定数があったんですが。 p という、 $\mathcal{L}$ が 0 の所を考えて、 $\mathrm{Hessian}_p$ の $\mathcal{L}$ の何か determinant term の、ちょっと忘れました。こんな格好をして。

$$\mathcal{L}(x) = \sum a_i x_i^2 \tag{4.27}$$

$\mathcal{L}(x)$ が例えばこういうのを考えるんですね。 a_i の x_i の 2 乗ですね。

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}\sum a_i x_i^2}\, dx = \frac{\pi^{n/2} e^{\frac{\sqrt{-1}\pi}{4}\sum_i \operatorname{sign} a_i}}{\sqrt{\pi_i a_i}} \tag{4.28}$$

こいつを $\mathbb{R}^n$ で積分する。これは有名なガウスの公式で。こういう式を使えば。

大体、こういうタイプの積分というのは、漸近的には、この肩に乗っている関数が 0 の所だけでほとんど様子が分かる、という classical な漸近展開の話があるんですが。そうすると、これが、漸近的ではなくて、本当に数を数えるという問題になってしまうということがあります。

$$\mathcal{M}_{g,m}(M) \text{ の数を数えるとは？} \tag{4.29}$$

じゃあ、この集合の数を数えるというのは、どういうことか。こういう風に与えられている、この集合の数を数える。これは、当たり前のことに見えるけど、実はそんなに単純なことではない。

問い Pseudo holomorphic になるように、 $\mathcal{L}$ が取れるということですか？

答え はい、そういう $\mathcal{L}$ が存在するということです。その中での式はすごく複雑な式で、普通にやると holomorphic map になっちゃうんですね。それで、Hermion part(?) を付け加えて、流してやると、pseudo holomorphic curve になる。その式は覚えてなくて、御興味があれば、Witten の書いた “Topological Sigma model” というのに、その式が書いてありますから。

4.3 交点数についての考察：transversal でないとき

この講義の初めの方で交点理論というのを少しやりました[6]。

$$M \supset N_1, N_2 : \text{submanifold} \tag{4.30}$$

一般にですね、 M という多様体があって、その中に、 N_1, N_2 という submanifold があるとします。

$$N_1 \cdot N_2 = \#(N_1 \cap N_2) \tag{4.31}$$

交点数というのは、要するに、intersection の数を数えるものなんです。

$$N_i : F_i = 0 \text{ と書けるとせよ。} \tag{4.32}$$

例えば、 M 上の F_i というのがあって、 N_i が、 $F_i = 0$ という方程式で書けるとします。

[6] 第 2 章を参照。

$$N_1 \cap N_2 : \begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{cases} \tag{4.33}$$

そうすると、 $N_1 \cap N_2$ は、 $F_1 = 0$ と $F_2 = 0$ との連立方程式で書けるわけです。

$$\begin{aligned} &M : \mathbb{C} \ni (x, y) \\ &N_1 : x = 0 \\ &N_2 : x \Leftrightarrow y^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.34}$$

一番単純な例として、 M を $\mathbb{C}$ にしましょう。N_1, N_2 は、 — 本当はコンパクトじゃないといけないんだけど — N_1 を $x = 0$, N_2 を $x \Leftrightarrow y^2 = 0$ と、こういう風にします（図 4.1 参照）。

$$N_1 \cap N_2 : \begin{cases} x = 0 \\ x \Leftrightarrow y^2 = 0 \end{cases} \tag{4.35}$$

そうすると、 $N_1 \cap N_2$ は、こうなんですが。

$$N_1 \cap N_2 = \{(0, 0)\} \tag{4.36}$$

これは解けば、 $(0, 0)$ だけですね。

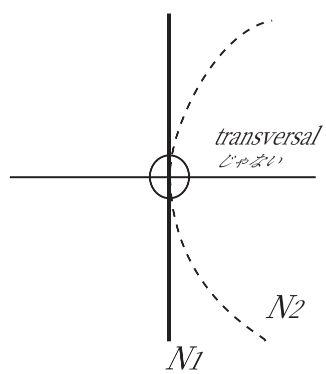

図 4.1: $N_1 \cap N_2 = \{(0, 0)\}$

絵（図 4.1）を描いておきましょう。これが N_1 で、これが N_2. そうすると、交点数は、0 なんですね。それを見るには、これは、transversal じゃないので、ちょっとずらすわけですけれども。ちょっとずらすと、交わらなくなります（図 4.2）。

$$\#(N_1 \cap N_2) \text{ をうまく数えるには、transversal にしておく必要あり。} \tag{4.37}$$

つまり、交点の数をうまく数えるには、transversal にしておかなければならない。

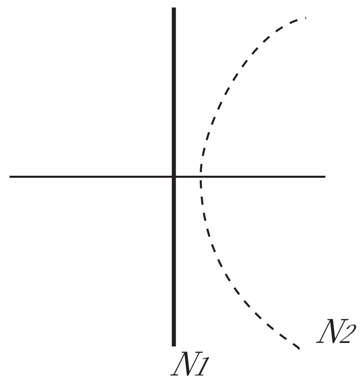

図 4.2: $N_1 \cdot N_2 = 0$

4.4 交点数についての考察：コンパクトでないとき

$$\begin{aligned} &M^+ : \mathrm{compact} \\ &M = M^+ \backslash 1\ \text{点} \\ &N_1 \cap N_2 = \emptyset \end{aligned} \tag{4.38}$$

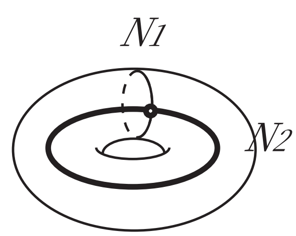

図 4.3: $N_1 \cap N_2 = \emptyset$

変な例を出しましょう。今、 M^+ をコンパクトにしておいて、 M として、 M^+ 引く 1 点だとしますね（図 4.3）。それで、これを N_1 として、ちょうど、除いている点だけで交わっているのを N_2 とします。そうすると、 N_1 と N_2 の交わりは、空集合です。

$$\text{compact でない所で } \#(N_1 \cap N_2) \text{ を数えようとしても、良い量にはならない。} \tag{4.39}$$

だけど、こういうのは全然安定ではない。コンパクトでない所で交点の数を数えようとしても、良い量にはならないんです。

4.5 complex linear な部分と、complex anti linear な部分に分解する

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{g,m}(M) = \{(J_\Sigma, \varphi) \mid J_\Sigma : T\Sigma \to T\Sigma,\ J_\Sigma^2 = \Leftrightarrow 1,\ \varphi : \Sigma \to M\} \\
&\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) = \{\Psi \mid \Psi : \Sigma \to \Sigma,\ \mathrm{diffeo},\ \Psi(z_i) = z_i\} \\
&\mathcal{B}_{g,m}(M) = \frac{\mathcal{A}_{g,m}(M)}{\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})}
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

さっきの状況というのは、 J_Σ と φ のペアを考えていて、これに、$\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ が作用している。あと、 $\mathcal{B}_{g,m}(M)$ というのがありました。

$$
\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M) = \{(J_\Sigma, \varphi) \mid d\varphi \circ J_\Sigma = J_M \circ d\varphi\} \tag{4.41}
$$

考えたいのは、 $\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M)$ ですが、この元は、 J_Σ と φ のペアであって、何か方程式を満たしている。 $d\varphi$ は complex linear だったけれども、 φ の微分に J_Σ を掛けたやつが、 J_M の $d\varphi$. こういう式。これは、 φ に関する方程式だと思えます。

$$
\mathcal{A}_{g,m}(M) \ni (J_\Sigma, \varphi) \tag{4.42}
$$

今、 $\mathcal{A}_{g,m}(M)$ の元 (J_Σ, φ) に対して、次のようなベクトル空間を考えましょう。

$$
,\ \big(\Sigma, T^*\Sigma^{0,1} \otimes_{\mathbb{C}} \varphi^*(TM)\big) \tag{4.43}
$$

記号だけ書きますと、これは , の $0, 1, \Sigma$ の φ^* の TM ですが。

$$
\begin{aligned}
&,\ (\Sigma, T^*\Sigma^{0,1} \otimes \varphi^*(TM)) \text{ の元は、} \\
&\quad \text{各 } p \in \Sigma \text{ に対し} \\
&\quad T_p\Sigma \text{ から } T_{\varphi(p)}M \text{ への complex anti linear な map を対応させるもの} \\
&,\ (\Sigma, T^*\Sigma^{0,1} \otimes \varphi^*(TM)) := \amalg_{p\in\Sigma}\big(T_p^*\Sigma^{0,1} \otimes T_{\varphi(p)}M\big) = \amalg_{p\in\Sigma}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_p\Sigma^{0,1}, T_{\varphi(p)}M)
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

これ , $(\Sigma, T^*\Sigma^{0,1} \otimes \varphi^*(TM))$ の元というのは、 Σ の点 p に対して、 $T_p\Sigma$ から、 $T_{\varphi(p)}M$ への complex anti linear な map[7]を対応させる対応です。

$$
p \in \Sigma, \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p\Sigma, T_{\varphi(p)}M) \tag{4.45}
$$

一般に、 $p \in \Sigma$ に対して、 $T_p\Sigma$ から $T_{\varphi(p)}M$ への $\mathbb{R}$ 線形写像を考えます。

[7](4.47) を参照。

$$
\begin{array}{ccc}
\left(T_p^*\Sigma^{1,0}\otimes T_{\varphi(p)}M\right) & \oplus & \left(T_p^*\Sigma^{0,1}\otimes T_{\varphi(p)}M\right) \\
T_p\Sigma\text{から } T_{\varphi(p)}M \text{ への} & & T_p\Sigma\text{から } T_{\varphi(p)}M \text{ への} \\
\text{complex linear なもの全体} & & \text{complex anti linear なもの全体}
\end{array}
\tag{4.46}
$$

これを 2 つに分けましょう。左側は何かといいますと、 $T_p\Sigma$ から $T_{\varphi(p)}M$ への complex linear なもの全体です。一般に、複素ベクトル空間から複素ベクトル空間への実線型な写像というのは、複素線型な写像と、複素 anti linear な写像とに分かれます。右側は、 $T_p\Sigma$ から $T_{\varphi(p)}M$ の complex anti linear なやつです。

$$
\begin{aligned}
&u = u_1 + u_2 \\
&\quad u_1 : \text{complex linear} \qquad u_1(\alpha x) = \alpha\, u_1(x), \\
&\quad u_2 : \text{complex anti linear} \quad u_2(\alpha x) = \bar{\alpha}\, u_2(x)
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

$u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p\Sigma, T_{\varphi(p)}M)$ は、 $u = u_1 + u_2$ と書かれます。ここで、 u_1 は complex linear で、 u_2 は complex anti linear です。つまり、 $u_1(\alpha x)$ は $\alpha\, u_1(x)$ で、 $u_2(\alpha x)$ は α に バー がついて、 $u_2(x)$. こういう風に、実線形写像が、複素線型写像と複素 anti linear な写像に一意に分解するというのが、線型代数では、よく知られています。

$$
\begin{aligned}
&\varphi : \Sigma \to M \\
&\varphi \text{ の微分は} \\
&J_p\varphi : T_p\Sigma \to T_{\varphi(p)}M, \quad \mathbb{R}\text{-linear}
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

今、 φ という Σ から M への map に対して、その微分は、 p においては、 $T_p\Sigma$ から $T_{\varphi(p)}M$ への $\mathbb{R}$-linear な map ですね。ヤコビ行列だから、 J と書いておきます。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow \\
J_p\varphi & = & J_{p,1}(\varphi, J_\Sigma) & + & J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma) \\
 & & \text{complex linear} & & \text{complex anti linear}
\end{array}
\tag{4.49}
$$

ですから、これを (4.47) のように分解するわけです。つまり、 $J_p\varphi$ というのは $J_{p,1}(\varphi, J_\Sigma)$ と $J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma)$ に分かれます。但し、 $J_{p,1}(\varphi, J_\Sigma)$ は、complex linear で、 $J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma)$ は、complex anti linear です。

$$
p \mapsto J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma) \text{ は },\ (\Sigma, T^*\Sigma^{0,1} \otimes \varphi^*(TM)) \text{ の元}
\tag{4.50}
$$

各 p に対して、 $J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma)$ を対応させる。この対応は、ここに書いたこいつ , $(\Sigma, T^*\Sigma^{0,1} \otimes \varphi^*(TM))$ の元なんです。

(4.49) で $J_{p,2}\varphi$ などではなく、 $J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma)$ などと書きましたけれど、それは、この分解 $J_p\varphi = J_{p,1}(\varphi, J_\Sigma) + J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma)$ の仕方が J_Σ に依るからです。なぜかというと、complex anti linear な

どと言うときには、複素線型空間の構造が必要なんですが、それには、行った先では J_M を使っていて、こちらでは J_Σ を使っています。こちら $T_p\Sigma$ の $\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ 倍を変えてしまうと、この分解は変わるので、これは J_Σ に関係あるんです。

$$\begin{aligned}&(\varphi, J_\Sigma) \in \hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M)\\ &\Leftrightarrow J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma) \equiv 0\end{aligned} \tag{4.51}$$

このペア (φ, J_Σ) が、$\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M)$ に入っているというのは、ここに書いた分解の 2 番目 $J_{p,2}$ が 0 ということと同値なんです[8]。これはまあ、定義ですけれども。Anti linear part が 0 ということ。

4.6 ベクトル・バンドルで考える

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_{g,m}(M) \ni \forall(\varphi, J_\Sigma)\\ &\text{vector space}\\ &\quad \hat{E}_{\varphi,\Sigma} := \,,\,(\Sigma, T^*\Sigma^{0,1} \otimes \varphi^*(TM))\end{aligned} \tag{4.52}$$

このようにして、$\mathcal{A}_{g,m}(M)$ の元に対して、ベクトル空間が決まったわけです。これを $\hat{E}_{\varphi,\Sigma}$ と書きましょう。ベクトル・バンドルになっているわけですが。

$$\begin{aligned}&(\varphi, J_\Sigma) \in \mathcal{A}_{g,m}(M)\\ &J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma) \in \hat{E}_{\varphi,\Sigma}\end{aligned} \tag{4.53}$$

(φ, J_Σ) に対して、$J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma)$ は、ここ $\hat{E}_{\varphi,\Sigma}$ の元です。

$$\begin{aligned}&\text{Vector bundle over } X \text{ とは、}\\ &\quad x \in X \text{ に対して、}\\ &\quad \text{vector space } E_x \text{ が決まるもの}\end{aligned} \tag{4.54}$$

一般に、manifold X 上のベクトル・バンドルというのは、ちょっと荒い言い方をすると、$x \in X$ に対して、何か E_x という、ベクトル空間が対応するものです。但し、いろいろな条件があるんですが。

$$s : x \in X \mapsto s(x) \in E_x \tag{4.55}$$

例えば、各 x に対して、$s(x)$ という E_x の元 — こういう s を切断といいますが — こういうのが決まります。

[8] $J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma) \equiv 0$ ということと、φ の微分が complex linear ということは同値だから。

$$\begin{array}{lll} X & \rightsquigarrow & \mathcal{A}_{g,m}(M) \\ E_x & \rightsquigarrow & ,(\Sigma, T^*\Sigma^{0,1} \otimes \varphi^*(TM)) \\ s & \rightsquigarrow & J_{p,2} \end{array} \tag{4.56}$$

ここでの状況に当てはめてみると、 X を先ほどの $\mathcal{A}_{g,m}(M)$ として、 E_x を $,(\Sigma, T^*\Sigma^{0,1} \otimes \varphi^*(TM))$ とします。 s は $J_{p,2}$ です。

$$\{x \in X \mid s(x) = 0\} \rightsquigarrow \hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M) \tag{4.57}$$

今、 $s = 0$ という集合を調べたいんですね。 $s = 0$ という集合が $J_{p,2}(\varphi, J_\Sigma) = 0$ という集合、すなわち、 $\hat{\mathcal{M}}_{g,m}(M)$ にあたる。こういう状況が、けっこう出てきます。

$$G \rightsquigarrow \mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) \tag{4.58}$$

実は、もっとありまして。 G という群があって、これが X に作用している。対応を書きますと、 G は、ここでは $\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ です。

$$\begin{array}{ccc} G & \circlearrowleft & X \\ g & & x \end{array} \tag{4.59}$$

$g \in G, x \in X$ としますと。

$$g : E_x \to E_{gx} \tag{4.60}$$

g は、 E_x から E_{gx} へ。

$$s(gx) = g(s(x)) \tag{4.61}$$

もっと言いますと、 $s(gx)$ というのは、 $g(s(x))$ になっている。こういう状況を考えます。

$$\frac{\{x \in X \mid s(x) = 0\}}{G} \rightsquigarrow \mathcal{M}_{g,m}(M) \tag{4.62}$$

本当に知りたいのは、これではなくて、こいつをさらに G で割ったようなやつです。こういう状況というのは、非常に起こる。本当は、これ、コンパクト化をしたい。それは、まあ。

$$\begin{array}{l} X : \text{manifold} \\ E : \text{vector bundle over } X \\ G : \text{リー群} \\ s : X \to E \quad G\text{-不変な切断} \end{array} \tag{4.63}$$

一般に、 X という manifold, その上の E というベクトル・バンドルと、 G というリー群を考えます。 s は、 G-不変な切断です。

$$\frac{s^{-1}(0)}{G} \tag{4.64}$$

それで、 $s^{-1}(0)$ を G で割ったやつ、これの数を数えるというのを考える。これがやりたいことです。

4.7 無限次元で！

$$\begin{aligned} &X : \text{無限次元多様体} \cdots \text{map のなす空間} \\ &G : \text{無限次元リー群} \\ &s = 0 : \text{微分方程式} \end{aligned} \tag{4.65}$$

どんな状況で考えたいかというと、 X は、無限次元の多様体。それで、 G は、やっぱり、無限次元のリー群。で、 s というのは、何か、微分方程式。こういうのを考えたいんです。

さっきの例は、そうなっているんですが。 X は、無限次元の、写像の空間です。有限次元の多様体の話ではなくて。それは、座標変換という、無限次元の対称性があるような空間。そして、それに対する微分方程式がある。その微分方程式の解の数を数えようということです。

Topological field theory では、考えている問題を最終的に、何かものを数えるという問題に帰着する。数えるときに、対称性がない場合というのは、あんまりおもしろくなくて。幾何学的におもしろい問題というのは、大体、何か、無限次元のリー群の対称性がある。ゲージ変換と言われるもの、いろいろあるわけですが。さっきの場合には、曲面の diffeomorphism の群。そういうような無限次元の対称性がある。で、方程式を立てるべき関数空間があって、一方、方程式を与える何か、ベクトル空間がある。 $s = 0$ というのが、その方程式。そういう状況というのが非常に大事で、そのとき、 G で割ったこういうのをモジュライ空間と言います。

問い G の無限次元リー群としての構造は使わないのですか？

答え そうですね、同値関係であればいいですね。 G が無限次元リー群になっていない大事な例というのは、僕は知りませんが。

問い 今の場合では、どうでしょうか？

答え 使ってないと言えば使ってないんだけど、使っていると言えば使っていて。今の場合の G というのは、曲面の diffeomorphism の群ですよね。そうすると、 G のコホモロジーとか、そういうものを計算するときに、こういうモジュライ空間のときに出てくる。

$$
\begin{array}{ll}
G = \mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) & \\
\quad\uparrow \quad \text{homotopy 同値類} & \\
\pi_*(G) &
\end{array}
\tag{4.66}
$$

例えば、今、考えている、曲面の可微分同相群のコホモロジーというのは、実は、ホモトピー同値類というのをですね。

$$
H^*(G, \mathbb{Q}) = H^*(\mathcal{M}_{g,m}, \mathbb{Q}) \tag{4.67}
$$

そうすると、こいつの群のコホモロジーというのが考えられますけども、これは、さっき書いた $\mathcal{M}_{g,m}$ のコホモロジー。こういうもののホモロジーとか、コホモロジーとかが大事で、そういう意味では、 G のコホモロジーというのは大事です。これの元を使って、invariant を作るというのをやりたいので。

これ、いくつかごまかしていて、今の場合はいいんですが、一般には、この作用は自由な作用ではないんです。Fixed point があるときは、この空間には singularity があるんです。そうすると、単に、空間として見るだけじゃなくて、 G まで覚えておいて、いろいろな構成をしないと、物事がうまくいかなくて。Equivariant cohomology とか使って。

第4章 （後半）微分作用素の作る chain complex とそのコホモロジー

4 章後半では、線型化方程式について解説したあと、微分作用素の作る chain complex を考え、それを使ってコホモロジーを定義する。0,1,2 次元のコホモロジーの幾何的意味についても触れる。章の最後に、 $d\omega = 0$ が成り立てば、 $\mathcal{M}_{g,m}(M, \beta)$ は、コンパクトなハウスドルフ空間であるという定理を述べる。

4.8 複素座標が取れれば、線型の方程式

$$s = 0 \text{ は、非線型} \tag{4.68}$$

$s = 0$ は、一般には非線型方程式です。

$$d\varphi \circ J_\Sigma = J_M \circ d\varphi \tag{4.69}$$

さっきの我々の例では、こういう方程式ですね。

$$J_\Sigma \text{ は fix して、} \varphi \text{ に対する equation とする} \tag{4.70}$$

簡単のために、 J_Σ は止めておいて、 φ に対する方程式とします。

$$\begin{aligned} &\text{local に考える} \\ &p \in \Sigma \\ &\varphi(p) \in M \end{aligned} \tag{4.71}$$

Local に考えると、この方程式はどうなっているか。今、 $p \in \Sigma$ とすると、 $\varphi(p) \in M$ です。

$$\begin{aligned} &p \text{ の neighbourhood で、複素座標 } z \\ &J_\Sigma\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \sqrt{\Leftrightarrow 1}\,\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{4.72}$$

p の neighbourhood で複素座標 z を取ります。 $J_\Sigma(\frac{\partial}{\partial z}) = \sqrt{\Leftrightarrow 1}\,\frac{\partial}{\partial z}$ です。

$$\begin{aligned}&\text{仮に、}\varphi(p)\text{ の neighbourhood で複素座標 }w_1,\dots,w_n\text{ が取れるとすると}\\&J_M\left(\tfrac{\partial}{\partial w_k}\right)=\sqrt{\Leftrightarrow 1}\,\tfrac{\partial}{\partial w_k}\end{aligned}\tag{4.73}$$

仮に、 $\varphi(p)$ の neighbourhood で、複素座標が取れるとしましょう。

$$\begin{aligned}&\text{（注：上の複素座標 }w_1,\dots,w_n\text{ は取れないかもしれない。）}\\&\text{取れる }=J_M\text{ は complex structure}\end{aligned}\tag{4.74}$$

そのときには、 J_M は almost complex structure でなくて、complex structure, 複素構造です。複素座標が取れないような almost complex structure というのは、いっぱいあるわけですが。

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\bigl(\varphi_1(z),\dots,\varphi_n(z)\bigr)\\&=(w_1,\dots,w_n)\end{aligned}\tag{4.75}$$

取れるとき、この $\varphi(z)$ を座標で書いてやります。$\varphi_1(z)$ から $\varphi_n(z)$ とすると、これを $w_1,\dots,w_n$ として。

$$z=x+\sqrt{\Leftrightarrow 1}\,y\tag{4.76}$$

$z=x+\sqrt{\Leftrightarrow 1}\,y$ と置いて。

$$\varphi_k(z)=\varphi_{k,1}(z)+\sqrt{\Leftrightarrow 1}\,\varphi_{k,2}(z)\tag{4.77}$$

$\varphi_k(x)$ も同様に置きます。

$$\begin{aligned}&\text{コーシー・リーマン方程式：}\begin{cases}\frac{\partial\varphi_{k,2}}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_{k,1}}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi_{k,2}}{\partial x}=\Leftrightarrow\frac{\partial\varphi_{k,1}}{\partial y}\end{cases}\rightsquigarrow\text{線型楕円型方程式}\\&\Longleftrightarrow d\varphi\text{ は complex linear}\end{aligned}\tag{4.78}$$

これは、いわゆるコーシー・リーマン方程式ですね。これと等しいのは、 φ の微分 $d\varphi$ が complex linear であることです。これは線型楕円型偏微分方程式。こういうのが出てくるわけですが。

4.9 複素座標が取れないときは、非線型

一般には、こういう風な座標は取れないんです。そのとき、どんな感じの方程式になるか。

$$\begin{array}{ccc}\varphi(p)\text{ の neighbourhood} & \overset{\text{diffeo}}{\cong} & \mathbb{C}^n\\ J_M & & J_M(w_1,\dots,w_n)\end{array}\tag{4.79}$$

今、$\varphi(p)$ の neighbourhood と、$\mathbb{C}^n$ を diffeomorphism で同一視する。こちらに $J_M(w_1, \ldots, w_n)$ というのがあるんですが、これは、その diffeomorphism の取り方に従属するわけです。

$$J_M(w_1, \ldots, w_n) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \tag{4.80}$$

$J_M(w_1, \ldots, w_n)$ は、$\mathbb{R}^{2n}$ から $\mathbb{R}^{2n}$ への線型写像です。

$$\text{もし、complex coordinate} \Leftrightarrow J_M(w_1, \ldots, w_n) = \sqrt{\Leftrightarrow 1}\ \times \tag{4.81}$$

もし、複素座標だったらば、J_M が constant になる。こいつは、掛ける $\sqrt{\Leftrightarrow 1}$ なんです。一般には、constant には取れない。

$$\begin{aligned}
&J_M(\varphi(z))\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \leftarrow \varphi \text{ についての微分} \\
&J_M(\varphi(z)) \text{ が function になり、} \\
&\varphi \text{ についての nonlinear equation になる。}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

元の方を書きますと、こういう方程式になる。$J_M(\varphi(z))\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ です[1]。これは、φ に関する非線型方程式。$J_M(\varphi(z))$ が constant だったら、φ に関する線型方程式なんですが、function だから非線型方程式になってしまう。

4.10　線型化方程式

$$\begin{aligned}
&E \\
&X \\
&s = 0 \\
&s : X \to E, \quad \text{nonlinear equation} \\
&s \text{ の微分 } D_p s : T_p X \to E_p, \quad \text{linear map} \\
&\text{線型化 equation}
\end{aligned} \tag{4.83}$$

こういう nonlinear equation があったときに、線型方程式を対応させるということを考えるんです。大体、非線型方程式というのは、無限次元空間から無限次元空間へのただの写像だと思ってよくて。s の微分は、X の tangent space T_pX から線型空間 E_p への linear map です。これを、線型化方程式と呼びます。微分するというのは、φ に関して微分するわけですが。

$$\varphi + \varepsilon\delta\varphi, \quad \delta\varphi = u \text{ と置く} \tag{4.84}$$

[1] $J_M : TM \to TM$ で、$J_M(\varphi(z)) : T_{\varphi(z)}M \to T_{\varphi(z)}M$ である。

$\varphi + \varepsilon\delta\varphi$ とやって、 $\delta\varphi$ を u と置きます[2]。

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial J_M(\varphi)}{\partial w}\ u\ \tfrac{\partial\varphi}{\partial x} + J_M(\varphi)\ \tfrac{\partial u}{\partial x} \Leftrightarrow \tfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ &u \text{ についての linear equation} \end{aligned} \tag{4.85}$$

こういう微分方程式ですね。これは、 u に関しての linear equation. φ は、fix している。非線型方程式を調べるときに、微分して考える。微分して考えるというのは、こういうタイプのことをする。

4.11 Chain complex

次に、chain complex を考えましょう。

$$\begin{aligned} &G \circlearrowleft X \quad \text{作用} \\ &T_eG = \mathfrak{G} \\ &e \in G : \text{単位元} \end{aligned} \tag{4.86}$$

今、 G が X に作用しています。 G の単位元 e での tangent space T_eG — こういうのをリー環というわけですが — を考えます。

$$\begin{array}{ccc} T_eG = \mathfrak{G} & \overset{\text{act } p}{\Leftrightarrow\!\!\rightarrow} & T_pX, \quad \text{linear} \\ v & \mapsto & \frac{d}{dt}(\exp(tv))_p|_{t=0} \end{array} \tag{4.87}$$

[2]元の式

$$J_M(\varphi)\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{4.82}$$

において、 φ を $\varphi + \varepsilon\delta\varphi$ に変え、 $\delta\varphi$ を u と置くと、次のようになる。

$$J_M(\varphi + \varepsilon u)\frac{\partial}{\partial x}(\varphi + \varepsilon u) = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi + \varepsilon u)$$

これは、 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ の線型性より、

$$J_M(\varphi + \varepsilon u)\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varepsilon J_M(\varphi + \varepsilon u)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varepsilon\ \frac{\partial u}{\partial y}$$

となる。ここで、 (4.82) を使って、

$$\{J_M(\varphi + \varepsilon u) - J_M(\varphi)\}\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varepsilon J_M(\varphi + \varepsilon u)\ \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

と変形できる。この両辺を ε で割る。

$$\frac{J_M(\varphi + \varepsilon u) - J_M(\varphi)}{\varepsilon u} u\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + J_M(\varphi + \varepsilon u)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$\varepsilon \to 0$ とすると、求める式

$$\frac{\partial J_M(\varphi)}{\partial w}\ u\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + J_M(\varphi)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{4.85}$$

を得る。

そうすると、 $\mathfrak{G}$ という所から T_pX への linear map があるんです。 $v \in \mathfrak{G}$ を何に写すかというと、exp (tv) を p に作用させたものを $t = 0$ で微分したものです[3]。

$$\begin{array}{ll} (\clubsuit) & s(g(x)) = g(s(x)) \\ & \quad\downarrow \\ & D_p s(\mathrm{act}_p(v)) = 0 \cdots\clubsuit \text{ を微分する。} \quad (\text{if } s(p) = 0) \end{array} \tag{4.88}$$

s は、 $s(g(x)) = g(s(x))$ を満たしていると仮定しています。この $\mathrm{act}_p(v)$ というのは、tangent space T_pX の元だから、これに代入すると 0 です。どうしてかというと、この式を微分するわけですが。

$$\begin{array}{c} E \\ s \uparrow\downarrow \circlearrowleft G \\ X \end{array} \tag{4.89}$$

さっきの一般的な状況、 E と X と全体に作用する G, それと、 s.

$$\begin{array}{l} \mathfrak{G} \overset{\mathrm{act}_p}{\Leftrightarrow\!\!\!\to} T_pX \overset{D_p s}{\Leftrightarrow\!\!\!\to} E_p \\ D_p s \cdot \mathrm{act}_p = 0 \quad \text{chain complex} \end{array} \tag{4.90}$$

このとき、こういう map ができます。2 回やると 0 です。こういうのが chain complex ですけれども。

$$\frac{s^{-1}(0)}{G} : \text{moduli space} \tag{4.91}$$

これ、両方とも微分作用素なんですね。こういう設定で、 $s^{-1}(0)/G$ っていうのを考えます。

$$\text{moduli の問題} \overset{1\text{ 点での微分}}{\rightsquigarrow} \text{微分作用素の作る chain complex} \tag{4.92}$$

これ、moduli の問題ですが。こういう、微分作用素から決まる複体、complex を考えます。1 点で微分します。

4.12 その cohomology を考える

$$\text{その cohomology を考える} \tag{4.93}$$

[3] exp は、リー環 $\mathfrak{G}$ の原点の近傍 U をリー群 G の単位元 e の近傍 V へ写す写像。$tv \in U$ のとき、$\exp(tv) \in V \subset G$ であって、 G は X に作用しているから、 exp (tv) は、 $p \in X$ を $\exp(tv)(p) \in X$ に写す。 t をパラメータとすると き、exp $(tv)(p)$ は、 $t = 0$ で p を通るような X 上の曲線である。

Chain complex がありますから、cohomology があるわけですが。こういうのを考えます。

$$\begin{aligned}&\text{Ker act}_p = H^0 = I_p \text{ のリー環}\\&I_p = \{g \mid g\,p = p\} \quad p \text{ の固定群}\end{aligned} \tag{4.94}$$

Kernel の act_p. これは、 I_p のリー環です[4]。 I_p は、 p の固定群です。

$$I_{(\varphi, J_\Sigma)} = \{\Psi : \Sigma \to \Sigma \mid \varphi \circ \Psi = \varphi,\ \Psi^* J_\Sigma = J_\Sigma\} \tag{4.95}$$

最初に考えていた situation だと、$I_{(\varphi,J_\Sigma)}$ っていうのは、Ψ という Σ から Σ への diffeomorphism であって、 $\varphi \circ \Psi = \varphi$ で、 $\Psi^* J_\Sigma = J_\Sigma$ となるものです。

4.13 $G = 1$ の場合

$$G = 1 \text{ の場合を有限次元で考える} \tag{4.96}$$

ちょっと、 G が 1 の場合を、有限次元で考えましょう。

$$\begin{array}{l}E\\ \downarrow\!\uparrow s\\ X\end{array} \tag{4.97}$$

今、切断 s とベクトル・バンドル E があって、ここに多様体 X があるんですが。

$$T_pX \overset{D_ps}{\Leftrightarrow} E_p \tag{4.98}$$

s の微分 D_ps は、 T_pX から E_p への写像です。

$$\begin{aligned}&s^{-1}(0) \text{ に対して、} p \text{ で陰関数定理が使える。}\\&\Leftrightarrow\ D_ps \text{ の coker} = 0\\&\quad \uparrow H^2\end{aligned} \tag{4.99}$$

今、 $s^{-1}(0)$ に対して、 p で陰関数定理が使えるという状況は何かというと。陰関数定理が使えるというのは、 D_ps の cokernel が 0 ということです。これは普通の有限次元多様体の smooth map だから、それの 0 点集合が陰関数定理で分かるというのは、微分が surjective ということです。

$$\begin{aligned}&H^0 \cdots \text{ 自己同型}\\&H^2 \cdots \text{ transversal か}\end{aligned} \tag{4.100}$$

[4] $\text{Ker act}_p = \{v \in \mathfrak{G} \mid \frac{d}{dt}(\exp(tv))(p)\ |_{t=0} = 0\}$

H^0 は自己同型で、 H^2 というのは transversality です。

$$H^2 = 0 \Rightarrow H^1 = \mathrm{Ker} D_p s \text{ は、} T_p s^{-1}(0) \tag{4.101}$$

今の場合 G が 1 だから、 H^1 は、Ker $D_p s$ なんです[5]。これは、 H^2 が 0 だったらば、 s の 0 点集合の tangent space. 陰関数定理ですね。

$$H^1 \text{ は、moduli の tangent space} \tag{4.102}$$

H^1 というのは、大体、moduli の tangent space. こういうのが一般的な状況です。

4.14 有限次元

$$\text{以後は、} H^0, H^1, H^2 \text{ が全て有限次元である場合しか考えない。} \tag{4.103}$$

今、話が無限次元だったので、ちょっと難しかったんですが、これからは、 H^0, H^1, H^2 が有限次元である場合しか考えないことにします。

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \mathfrak{G} \overset{\mathrm{act}_p}{\Longleftrightarrow} T_p X \overset{D_p s}{\Longleftrightarrow} E_p \\ D_p s \cdot \mathrm{act}_p = 0 \\ \text{chain complex} \end{array} \tag{4.104}$$

これは、何かを使っているんですが。

$$\begin{array}{l} \underline{\text{満たさない例}} \\ \Sigma \to M, \text{ holomorphic} \\ \Sigma \text{ の } \mathbb{C} \text{ 次元} \geq 2 \\ \text{chain complex をもっと長くしないといけない。} \end{array} \tag{4.105}$$

Σ から M への holomorphic なものを考えます。もし、 Σ の複素次元が 2 以上だと、これはだめなんです。上の 3 ステップでこの例を考えるんですが、こういう場合は、chain complex をもっと長くしないと、コホモロジーがちゃんと有限次元にならないんです。

---

[5] $G = 1$ より、 $\mathrm{act}_p = 0$ となる。よって、 $H^1 = \mathrm{Ker}\ D_p s / \mathrm{Im}\ \mathrm{act}_p \cong \mathrm{Ker}\ D_p s$ である。

4.15 幾何学的な意味は？

$$
\begin{aligned}
&H^0 : \text{自己同型} \\
&H^1 : \text{tangent space} \\
&H^2 : \text{obstruction} \\
&H^3 \text{ 以上の意味は？　分からない。}
\end{aligned} \tag{4.106}
$$

H^0, H^1 H^2 の幾何学的意味は、はっきりしている。 H^0 は、自己同型で、 H^1 は、tangent space で、 H^2 は、obstruction です。 H^3 以後の意味は、分からない。こういう finite cohomology を考えれば、何か、やりたいことができるとすれば、できるんですが。Finite cohomology というのは何か幾何学的な意味があるのかと言われると、分からない。これは難しい。例えば、Yang-Mills connection の anti self-dual connection の問題というのに H^2 が出てくるんですが、次元が高いとき、2 次元じゃないときに、そういうことをやろうとすると難しいですね。

4.16 $s^{⇔1}(0)$ を smooth manifold に取れるか

$$
\begin{aligned}
&E \\
&\downarrow\uparrow s \circlearrowleft G \\
&X
\end{aligned} \tag{4.107}
$$

一般的な問題として、 E というベクトル空間と、 X という多様体と、 G という群、それに s という G-不変な切断があって。

$$
\frac{s^{-1}(0)}{G} \text{ の数を数える} \tag{4.108}
$$

$s^{-1}(0)$ を G で割ったもの、これを考える。

$$
\begin{aligned}
&\forall p \in s^{-1}(0) \\
&D_p s : T_pX \to E_p \text{ が全射} \\
&\Rightarrow \\
&s^{-1}(0) : \text{smooth manifold}
\end{aligned} \tag{4.109}
$$

s をこのように取れるか？

今の場合、ちょっと問題があって。最初にちらっと言いましたが、 X は、noncompact だと。もし、すべての $p \in s^{-1}(0)$ に対して、 s の微分が全射だとすると、 $s^{-1}(0)$ は、smooth manifold. s をこういう風に取れるか。こういう問題があります。

4.17 Thom の transversality

$$
\begin{array}{l}
\underline{\text{Thom の transversality}} \\
\forall s : X \to E \\
\exists s_\varepsilon ; |s \Leftrightarrow s_\varepsilon| < \varepsilon, \\
D_p s_\varepsilon \text{ は、surjective, } \forall p \in s_\varepsilon^{-1}(0)
\end{array}
\tag{4.110}
$$

そこで定理ですが、任意の s という map があったときに、何か s_ε という、 s に非常に近い map が存在して、 s_ε の微分 $D_p s_\varepsilon$ は、surjective. こういうのがあるんです。Thom の transversality 定理です。

4.18 問題 2 つ

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{ccc} X & \Leftrightarrow\!\!\rightarrow & E \\ & \circlearrowleft G & \end{array} \text{ のとき、} \\
s \text{ が } G\text{-不変でも、} \\
s_\varepsilon \text{ を } G\text{-不変には、一般に取れない。}
\end{array}
\tag{4.111}
$$

ところが、全体に G の作用があるとき、この s が G-不変であっても、 s_ε を G-不変には、一般に取れないんです。これが、一つの問題ですけれども。

$$
\begin{array}{l}
s^{-1}(0) \text{ が smooth でも、} \\
s^{-1}(0)/G \text{ が smooth かどうか分からない。}
\end{array}
\tag{4.112}
$$

もう一つ問題があって、 $s^{-1}(0)$ が smooth であっても、 $s^{-1}(0)$ を G で割ったやつというのは、smooth であるかどうか分からないんです。

4.19 有限群

$$
\begin{array}{l}
\underline{\text{仮定}} \\
\quad \forall p \in X \text{ に対して} \\
\quad I_p = \{g \in G \mid g\, p = p\} \text{ は、有限群}
\end{array}
\tag{4.113}
$$

次の仮定をします。任意の p に対して、 G の元であって、 p を fix するやつというのは、有限群である。

$$
\begin{aligned}
&X = \mathcal{A}_{g,m}(M) = \{(\varphi, J_\Sigma)\} \\
&G = \mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) \\
&I_{(\varphi,J_\Sigma)} = \{\Psi \mid \Psi : \Sigma \to \Sigma,\ \varphi \circ \Psi = \varphi,\ \Psi^* J_\Sigma = J_\Sigma\} \\
&\quad \cap \\
&\{\Psi \mid \Psi : \Sigma \to \Sigma,\ \Psi^* J_\Sigma = J_\Sigma\} \\
&\text{これは、}\begin{pmatrix} g = 0,\ m = 0,1,2 \\ g = 1,\ m = 0 \end{pmatrix}\text{の場合を除いて、常に有限群。}
\end{aligned}
\tag{4.114}
$$

今の場合、 X は、 $\mathcal{A}_{g,m}(M)$ で、 G は、$\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ です。 $I_{(\varphi,J_\Sigma)}$ は、 Ψ という diffeo であって、 φ を合成したもの $\varphi \circ \Psi$ が、 φ に等しくて、 J_Σ を Ψ で引き戻してやったもの $\Psi^* J_\Sigma$ が、また、 J_Σ になる。こういうものです。これは、 $\{\Psi \mid \Psi^* J_\Sigma = J_\Sigma\}$ に含まれているわけですが、前回、言いましたように、これは、 g が 0 で、 m が $0, 1, 2$ の場合と、 g が 1 で、 m が 0 の場合を除いて、常に、有限群です。

4.20 高々、orbifold

$$
\frac{s^{-1}(0)}{G} \rightsquigarrow \text{高々、orbifold} \tag{4.115}
$$

この $s^{-1}(0)$ を G で割ったやつは、高々、orbifold になる。有限群で割っているから manifold にならないけど、orbifold になる。それは、前回やった orbifold の定義を考えてみると分かります。

$$
\begin{aligned}
&D_p s \text{ が、surjective} \\
&\Rightarrow \\
&\mathcal{M}_{g,m}(M) \text{ は、orbifold}
\end{aligned}
\tag{4.116}
$$

もし、 $D_p s$ が surjective だったらば、考えていた $\mathcal{M}_{g,m}(M)$ は、orbifold ということが成り立ちます。この条件、transversality については、最後の方で、もうちょっと言いますが。

4.21 コンパクト化について

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{g,m}\text{の compact 化} \\
&\quad \downarrow \\
&\text{Singular なリーマン面まで考えよ。} \\
&\text{但し、stable なものだけを考える。}
\end{aligned}
\tag{4.117}
$$

そこで、このコンパクト化を考えます。アイディアは、前回、 φ がないとき、つまり、単にリーマン面のときに説明してたんですね。どうするかというと、singular なリーマン面まで含める。但

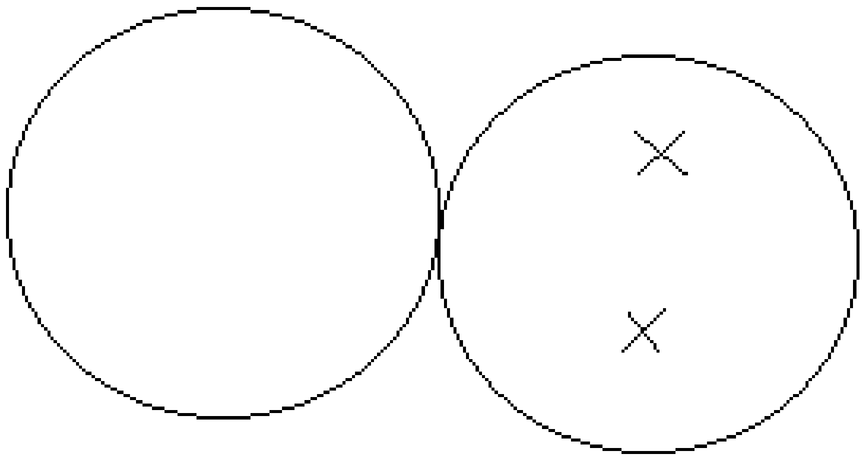

図 4.4: これはダメ

し、stable なリーマン面だけを考える。Stable というのは、自己同型群が有限なもの。例えば、これ（図 4.5）はだめです。

$$\bar{\mathcal{M}}_{g,m} \text{ を、}\underline{\text{Hausdorff}}\text{ 空間としたい。} \tag{4.118}$$

なぜだめかというと、ハウスドルフにならない。

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M) = \{(\Sigma,\varphi) \mid \quad & \Sigma \text{ は、genus が } g \text{ で、点が } m \text{ 個の stable なリーマン面},\\ & \varphi : \Sigma \to M,\ d\varphi J_\Sigma = J_M d\varphi,\ \text{pseudo holomorphic}\}\end{aligned}$$

としたいが、これは compact にならない。

(4.119)

安直に考えると、$\mathcal{M}_{g,m}(M)$ のコンパクト化として、Σ と φ のペアであって、Σ は、genus が g で、点が m 個ある stable なリーマン面、φ は、Σ から holomorphic, 正則としたいのですが、これでは、コンパクトにならないんです。

4.22 反例

$$
\begin{array}{cccc}
\underline{\text{反例}} & & & \\
\varphi_\varepsilon : & \mathbb{C}P^1 & \to & \mathbb{C}P^2 \\
& [z:w] & & [z^2 : \varepsilon w^2 + z^2 : z(z+w)]
\end{array}
\tag{4.120}
$$

例えばですね、 $\mathbb{C}P^1$ から $\mathbb{C}P^2$ への function として、斉次座標で書いて、 $[z:w] \mapsto [z^2 : \varepsilon w^2 + z^2 : z(z+w)]$ というのを考えましょう。

$$[1:1], [2:1], [0:1] \tag{4.121}$$

今、3 点を $[1:1]$, $[2:1]$ $[0:1]$ とします。

$$\varepsilon \to 0 \tag{4.122}$$

それで、 ε を 0 に持っていくわけです。単純に、 $\varepsilon = 0$ を代入すると、こうなるんですね。

$$\varphi_0[z:w] = [z^2 : z^2 : z(z+w)] \overset{z \neq 0}{=} [z:z:z+w] \tag{4.123}$$

これは斉次座標だから、 z が 0 でなければ、こいつ $[z^2 : z^2 : z(z+w)]$ は、 $[z:z:z+w]$ です。

$$
\begin{array}{l}
z = 0 \text{ の neighbourhood を除くと、} \\
\varphi_0([z:w]) = [z:z:z+w]
\end{array}
\tag{4.124}
$$

$z = 0$ の neibourhood を除くと、 φ_ε は、こういうものに収束しているわけです。

$$
\begin{array}{l}
z = 0 \text{ の neighbourhood} \\
[z:w] \to \frac{z}{w} \in \mathbb{C}
\end{array}
\tag{4.125}
$$

ところが、 z が 0 の近くではこうですね。 $z = 0$ の所では、 $[0:0:0]$ になっちゃうから、意味がないわけです。

$$\frac{z}{w} = 0 \text{ の neighbourhood で考える。} \tag{4.126}$$

そこでどうやるかというと、これを $\frac{z}{w} = 0$ の neighbourhood で考えるんですね。

$$V := \frac{z}{w}, \quad \bar{V} := \frac{V}{\varepsilon} \text{ と置く。} \tag{4.127}$$

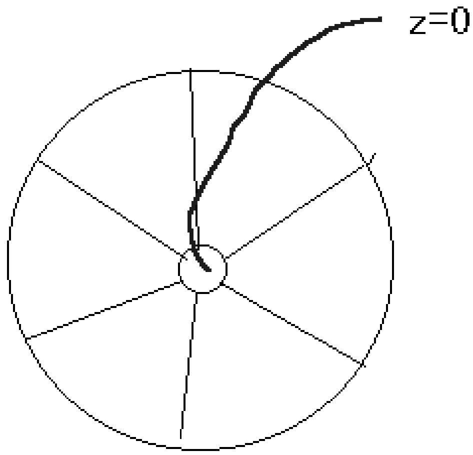

図 4.5: $z=0$ の neighbourhood

今、$V=\frac{z}{w}$ と置いて、$\bar{V}=\frac{V}{\varepsilon}$ と置きます。

$$\begin{aligned} & [z^2:\varepsilon w^2+z^2:z(z+w)] \\ = & [\tfrac{z^2}{w^2}:\varepsilon+(\tfrac{z}{w})^2:\tfrac{z}{w}(\tfrac{z}{w}+1)] \\ \overset{V:=\frac{z}{w}}{=} & [V^2:\varepsilon+V^2:V(V+1)] \\ \overset{\bar{V}:=\frac{V}{\varepsilon}}{=} & [\varepsilon^2\bar{V}^2:\varepsilon+\varepsilon^2\bar{V}^2:\varepsilon\bar{V}(\varepsilon\bar{V}+1)] \\ = & [\varepsilon\bar{V}^2:1+\varepsilon\bar{V}^2:\bar{V}(\varepsilon\bar{V}+1)] \\ \overset{\varepsilon\to 0}{\to} & [0:1:\bar{V}] \end{aligned} \tag{4.128}$$

まず、$[z^2:\varepsilon w^2+z^2:z(z+w)]$ の各項を w^2 で割ります。で、$V:=\frac{z}{w}$ とする。次に、$\bar{V}:=\frac{V}{\varepsilon}$ とすると、こうですね。これをもう一回、ε で割ります。そして、ε を 0 に飛ばしますと、こいつは、$[0:1:\bar{V}]$ になります。

そうすると、$[0:1:\bar{V}]$ で、さっきのが $[z:z:z+w]$. これらは、$[0:0:1]$ という点で交わっているんです。$[0:1:\bar{V}]$ は、$\bar{V}$ を無限大にすると、$[0:0:1]$ ですね。$[z:z:z+w]$ は、z を全部 0 にすると、$[0:0:1]$ になって交わるんです。

$\varepsilon\to 0$ としたときの limit は、$\mathbb{C}P^2$ の中に 2 個の $\mathbb{C}P^1$ があって、$[0:0:1]$ という 1 点で交わっている。こういう絵が見えてくるんです。元々の 3 個の点というのは、2 と 3 と ∞ ですけど、この辺にあるんですね。この 3 点というのは、こっち側に来てるんです。φ_ε の limit というのは、絵を描くとですね、こちら側に、3 個あって、こちらには何もない。こんな絵になっています。

リーマン面だけのモジュライを考えるときは、こういうリーマン面は排除して考えないとハウス

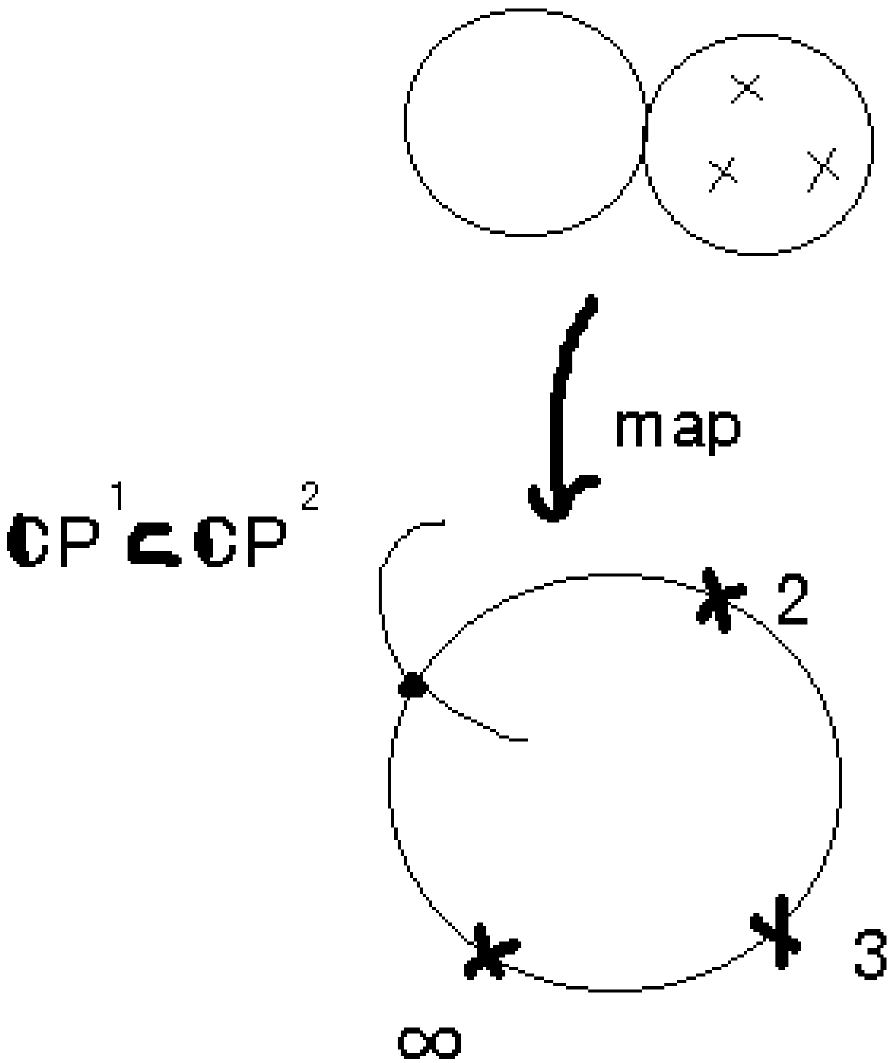

図 4.6: $\varphi_\varepsilon \to$ の絵

ドルフにならないというのがあるので、これは排除しちゃったわけです。ところが、今、map も込めて考えるとき、こういうものを排除しちゃうとですね、これが limit に現れて欲しいのに、現れていないわけです。だから、今、考えたこの limit が、こういうものからの map だと思うんですね。そこがちょっといやらしいわけです。こういう所からの map の、こういうのを込めて考えない限りは、良いコンパクト化は得られないんです。そのとき、map 付きで考える。Limit のこちら側をですね、忘れちゃう。その為に出てきた概念というのが stable map なんですが、その定義を説明をして、今回は終わりにしたいんです。

4.23 Σ と φ のペアが stable というのを考える

$$\begin{aligned}&\text{リーマン面 } (\Sigma, J_\Sigma)\\ &\text{自己同型 } \Psi : \Sigma \to \Sigma\\ &\text{s.t. } d\Psi \circ J_\Sigma = J_\Sigma \circ d\Psi\end{aligned} \tag{4.129}$$

このリーマン面だけを考える場合は、自己同型 Ψ というのは、リーマン面からリーマン面への map であって、 $d\Psi \circ J_\Sigma = J_\Sigma \circ d\Psi$. これが定義だったんです。

$$\text{リーマン面 } (\Sigma, J_\Sigma) + \text{ map } \varphi : \Sigma \to M \tag{4.130}$$

ところがですね、リーマン面、プラス、map φ というのを考えるんです。

$$\begin{aligned}&\text{自己同型 } \Psi : \Sigma \to \Sigma\\ &\text{s.t. } d\Psi \circ J_\Sigma = J_\Sigma \circ d\Psi,\ \varphi \circ \Psi = \varphi\end{aligned} \tag{4.131}$$

φ についての条件を付け加えると、自己同型は、もっと小さくなります。今度は、自己同型 Ψ というのは、 $\Psi : \Sigma \to \Sigma$ であって、この complex structure を保っていて、それに加えて、この Ψ と φ を合成して、 φ になるものです。

$$\mathcal{A}_{g,m}(M) = \{(J_\Sigma, \varphi)\} \circlearrowleft \mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z}) \ni \Psi \tag{4.132}$$

$\mathcal{A}_{g,m}(M)$ は、 J_Σ と φ のペアなんですが、これに、$\mathrm{Diff}(\Sigma, \vec{z})$ が作用しています。

$$\Psi(J_\Sigma, \varphi) = (\Psi^* J_\Sigma, \varphi \circ \Psi) \tag{4.133}$$

この action は、こうだったんですね。

$$\begin{aligned}&\Psi(J_\Sigma, \varphi) = (J_\Sigma, \varphi)\\ &\Longleftrightarrow \Psi^* J_\Sigma = J_\Sigma,\ \varphi \circ \Psi = \varphi\end{aligned} \tag{4.134}$$

これが元に戻るという条件を書いてやると、こうですね。

$$\begin{aligned}&\text{singular でもよいリーマン面 } \Sigma \text{ が stable}\\&\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \{\Psi : \Sigma \to \Sigma \mid d\Psi \circ J_\Sigma = J_\Sigma \circ d\Psi,\ \Psi(z_i) = z_i\} \text{ が有限群}\end{aligned} \tag{4.135}$$

Singular でもよいリーマン面 Σ が stable curve という条件は、 Ψ であって、$d\Psi \circ J_\Sigma = J_\Sigma \circ d\Psi$ で、あと z_i を保つもの、これが有限群というので定義するんです。こうしてやると、モジュライ空間がハウスドルフになるというのを、前回、ご説明しました。

$$\begin{aligned}&\text{pair } (\Sigma, \varphi) \text{ が stable}\\&\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \{\Psi \mid d\Psi \circ J_\Sigma = J_\Sigma \circ d\Psi,\ \varphi \circ \Psi = \varphi\} \text{ が有限群}\end{aligned} \tag{4.136}$$

ここで、 Σ と φ というペアが stable という条件を考えましょう。それは、これを少しずらしてやって、これがコンパクト、こう定義してやる。

4.24 さっきの例で考えると

$$\text{例} : \Sigma \overset{\varphi}{\Longleftrightarrow} M \tag{4.137}$$

さっき、こういうの（図 4.4）を考えたんです。例えば、こういう組を考えて、これ、3 点。で、ここから、 φ という map が来てるんですが、

$$\begin{aligned}&\varphi = \varphi_1 \cup_p \varphi_2\\&\varphi_1 : S^2_1 \to M,\ \text{holomorphic}\\&\varphi_2 : S^2_2 \to M,\ \text{holomorphic}\\&\varphi_1(p) = \varphi_2(p) \quad \text{一致}\end{aligned} \tag{4.138}$$

今、 S^2_1 と S^2_2 があって、 φ は、 φ_1 と φ_2 で、 φ_1 は、 $S^2_1 \to M$, これが holomorphic で、 φ_2 は、 $S^2_2 \to M$, これも holomorphic です。これは連続にならないといけないので、繋がっている点 p では、一致している。

$$(\Sigma, \varphi) \text{ が stable なのは？} \tag{4.139}$$

このペア Σ と φ, これが、stable というのはいつか。

$$\{\Psi : \Sigma \to \Sigma \mid d\Psi \circ J_\Sigma = J_\Sigma \circ d\Psi,\ \Psi(z_i) = z_i\} \tag{4.140}$$

まず、 Ψ という、 Σ から Σ への holomorphic な map ですね。

$$\Psi \text{ は } S_2^2 \text{ では、constant} \tag{4.141}$$

前回説明したと思いますが、 Ψ は、 S_2^2 では constant です。

$$\begin{aligned} &p = \infty \text{ とすると、} \Psi \text{ は } S_1^2 \text{ 上では、} \\ &\Psi(z) = az + b,\ a \in \mathbb{C}\backslash 0,\ b \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{4.142}$$

で、 $p = \infty$ とすると、 S_1^2 では、 $\Psi(z)$ は、 $az + b$ という形、 a は、 $\mathbb{C}$ から 0 を引いたものの元で、 b は、 $\mathbb{C}$ の元。こういうものの自己同型というのは、これだけだと、noncompact です。

$$\varphi_1(z) = \varphi_1(az + b),\ \forall z \tag{4.143}$$

それで、2 番目の条件ですが。 $\varphi \circ \Psi = \varphi$ で、 $\varphi \circ \Psi(z) = \varphi(az + b)$ だから、要するに、$\varphi_1(z) = \varphi_1(az + b)$ というのが、全ての z に対して成り立つ。

$$\begin{aligned} &\text{もし、} \varphi_1 \text{ が nonconstant} \\ &\Leftrightarrow \text{ こういう } a, b \text{ は、有限個。} \end{aligned} \tag{4.144}$$

そうすると、もし、 φ_1 が nonconstant だったら、こういう a, b は有限個しかないということが分かります。これは、多分、関数論の演習問題です。要するに、holomorphic map があって、こういう、何か、無限個の元が invariant になっていたならば、これは constant です。例えば、 $\varphi_1(z)$ というのが、 z^2 になっている。こんなものだったらば、 $a = 1, \Leftrightarrow 1$ にして、 $b = 0$. こんな感じですね。こういう事があるから、有限個というのはいいわけですけれども。

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi_1 \cup \varphi_2 \text{ が stable} \\ &\Leftrightarrow S_1^2 \text{ 上で } \varphi_1 \text{ が nonconstant} \end{aligned} \tag{4.145}$$

今の場合、こいつが stable というのは、 S_1^2 上、 φ_1 が nonconstant. こういう、条件と一致することが分かっている。

4.25 一般に (Σ, φ) が stable とは

$$\begin{aligned} &(\Sigma, \varphi) \text{ が stable} \\ &\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \Sigma \text{ の stable でない component では、} \varphi \text{ は nonconstant} \end{aligned} \tag{4.146}$$

Σ と map φ のペアが stable というのは、 Σ のまずい component, つまり、stable でない component の上では、 φ は nonconstant になっている。これが、stable map の定義です。

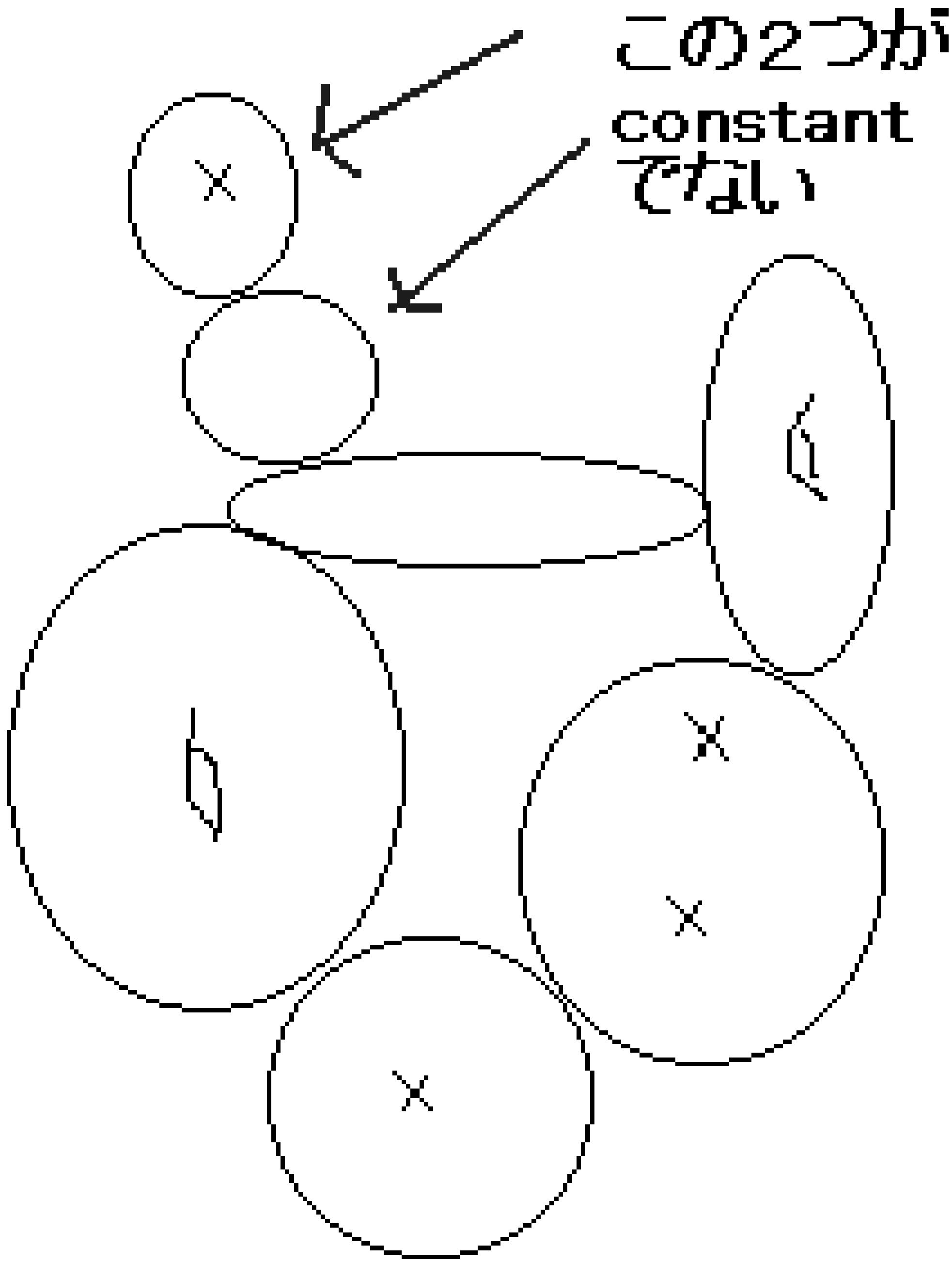

図 4.7: 2 つが stable でない。

$$
\begin{aligned}
&\Sigma = \cup\, \Sigma_i \text{ と書くとき、} \\
&\Sigma \text{ が stable でない。} \\
&\stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \Sigma_i = S^2 \\
&\text{s.t.}\quad \Sigma_i \text{ 上、（特異点 } + z_i \text{ ）が合計 2 個までしかない。}
\end{aligned}
\tag{4.147}
$$

ここで、 Σ が stable でないというのは、あるまずい component Σ_i があって、 $\Sigma_i = S^2$ で、 Σ_i 上に、特異点プラス z_i が、合計、2 個までしかないということです。

例えば、絵を描きますと（図 4.7）、この component は、genus があるから stable で、この component は、 z_i と特異点を数えると 3 つあるんですが。Unstable な component は、これとこれの 2 つ。ここに乗っている φ は nonconstant で、後は全部、constant というのが、stable になります。

4.26 (Σ,φ) のホモロジー類

$$
\begin{aligned}
&(\Sigma,\varphi) \text{ の homology 類} \\
&= \varphi_*([\Sigma]) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \varphi_*([\Sigma_i]) \in H_2(M) \\
&\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_k
\end{aligned}
\tag{4.148}
$$

(Σ,φ) の homology class を定義します。それは、 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_k$ とすると、 $\varphi_*(\Sigma_i)$ を i について全部、足すわけです。こいつは、 $H_2(M)$ に入っている。

4.27 $\mathcal{M}_{g,m}(M,\beta)$

$$
\begin{aligned}
&\beta \in H_2(M) \text{ に対して、} \\
&\mathcal{M}_{g,m}(M,\beta) = \{(\Sigma,\varphi) \mid (\Sigma,\varphi) : \mathcal{M}_{g,m}(M) \text{ の stable な元、} \varphi_*([\Sigma]) = \beta\}
\end{aligned}
\tag{4.149}
$$

今、 $\beta \in H_2(M)$ に対して、 $\mathcal{M}_{g,m}(M,\beta)$ というのを定義します。その元は、 Σ と φ のペアであって、 $\mathcal{M}_{g,m}(M)$ の stable な元。それで、homology class $\varphi_*([\Sigma])$ が β になっている。こういうものです。

4.28 定理： $\mathcal{M}_{g,m}(M,\beta)$ は、コンパクト

$$
\omega(X,Y) = g(X,JY), \quad \text{2-form} \tag{4.150}
$$

ω というのは、 $g(X,JY)$ です。2-form ですね。

$$
\begin{array}{l}
\underline{\text{定理}} \\
d\omega = 0 \\
\Rightarrow \\
\mathcal{M}_{g,m}(M,\beta)\ \text{は、compact, Hausdorff}
\end{array}
\tag{4.151}
$$

ω が closed form であるという仮定を置きます。それは、絶対要るんですけれども。Stokes に要るんですが。 $d\omega = 0$ だったらば、こいつは、compact. 本当は、位相を入れないといけないんですが。で、Hausdorff. 証明は、ちゃんとはできないんだけど、証明の解析的なものは、全くやらないんですが。

$$
d\omega = 0 \cdots \text{これが、なぜ要るか} \tag{4.152}
$$

$d\omega = 0$ がどうして要るかというのと、後、ここでの収束というのは、どういうものかということを少し説明したい。その後、位相不変量というものと、いくつか規則、性質というのを説明したい。

ということで、今回は、ここまでにします。続きは、また、休憩後に。

第5章　(上) Stable map

第 5 章（上）では、stable map の収束に関して述べる。

5.1　前回の復習

$$\mathcal{M}_{g,m}(M,\beta) = \{(\Sigma,\varphi) \mid \star\} \tag{5.1}$$

前回、 $\mathcal{M}_{g,m}(M,\beta)$ というのを導入したんですね。これは、 Σ と φ があって、条件 $\star$ は、これなんですが。

$$\star \quad \begin{array}{l} \Sigma = \cup\, \Sigma_i : \text{singular でもよい、genus } g \text{ で点が } m \text{ 個の Rieman 面} \\ \varphi : \Sigma \to M \\ \varphi \text{ の微分} : T\Sigma \to TM \text{ は、complex linear} \\ \varphi_*([\Sigma]) = \sum_i \varphi_*([\Sigma_i]) = \beta \\ \mathrm{Aut}(\Sigma,\varphi) = \{\Psi : \Sigma \to \Sigma \mid \Psi \text{ は、holo. diffeo., } \varphi \circ \Psi = \varphi\} \text{ は、有限群} \end{array} \tag{5.2}$$

Σ は、singular でもいい、genus が g で点が m 個のリーマン面。リーマン面というのは曲面で、複素構造を持っている。 φ は、 Σ から M への map です。 φ の微分は、 Σ の tangent space $T\Sigma$ から、 M の tangent space TM への map ですが、これは complex linear になっている。それで、後は、 φ_* で $[\Sigma]$ を写した homology class — $\varphi_*([\Sigma_i])$ を i について全部足したもの — これが β であるとします。それで、大事な条件として、ペアの自己同型、— 自己同型ですから、 $\mathrm{Aut}(\Sigma,\varphi)$ と書きますと — これは、 Ψ という、 Σ から Σ への map であって、 Ψ は holomorphic な diffeo であって、それで、 Ψ に φ を合成したやつは、また、 φ になるもの。これが有限群だとします。$\mathcal{M}_{g,m}(M,\beta)$ は、こういうものの集合だったんです。

$$\underline{\text{Theorem}} \quad \mathcal{M}_{g,m}(M,\beta) \text{ は、compact.} \tag{5.3}$$

前回、定理として書いたんですが、 $\mathcal{M}_{g,m}(M,\beta)$ は、compact です。これは、いろんなことの基礎になっているものですが。それをいくつか説明したいと思うんです。

5.2 Σ の singularity は、double point のみ

$$\underline{\text{Remark}} \quad \Sigma \text{ の singularity は double point のみ。} \tag{5.4}$$

ちょっと、注意します。 Σ の singularity ですけれども。これは、double point だけです。

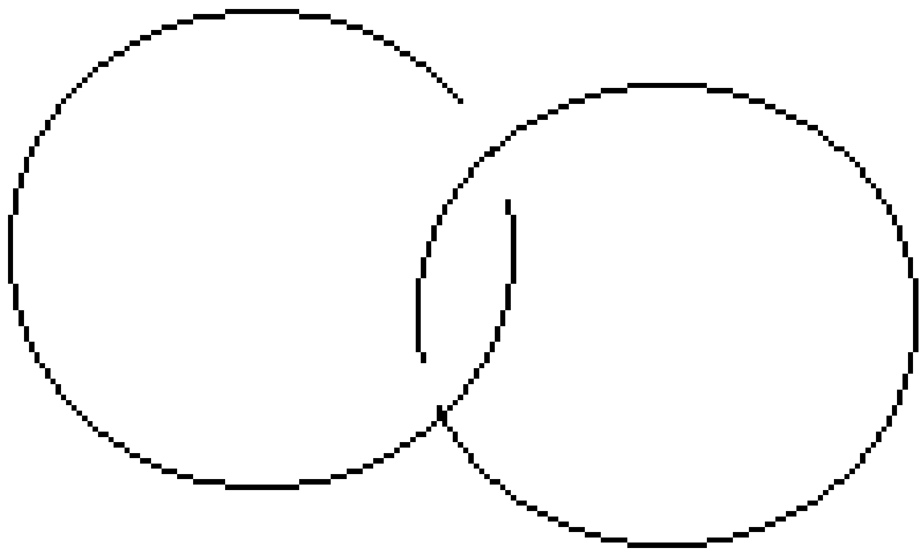

図 5.1: Double point は OK

リーマン面が 2 個あって、1 点で交わっている（図 5.1)、これは OK なんですが。
3 つのリーマン面が 1 点で交わったものは考えない（図 5.2)。これはだめです。

5.3 Degree

$$\mathbb{C}P^2 \supset \text{リーマン面 } \Sigma \tag{5.5}$$

ここで、デリケートな例をちょっと書いてみたいんですが。本当に収束性がうまくいくのかという例を書いてみます。 $\mathbb{C}P^2$ の中に holomorphic に入ったリーマン面というのを考えますと。

$$\begin{aligned} &[\Sigma] \in H_2(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Z} \\ &\text{degree } d \end{aligned} \tag{5.6}$$

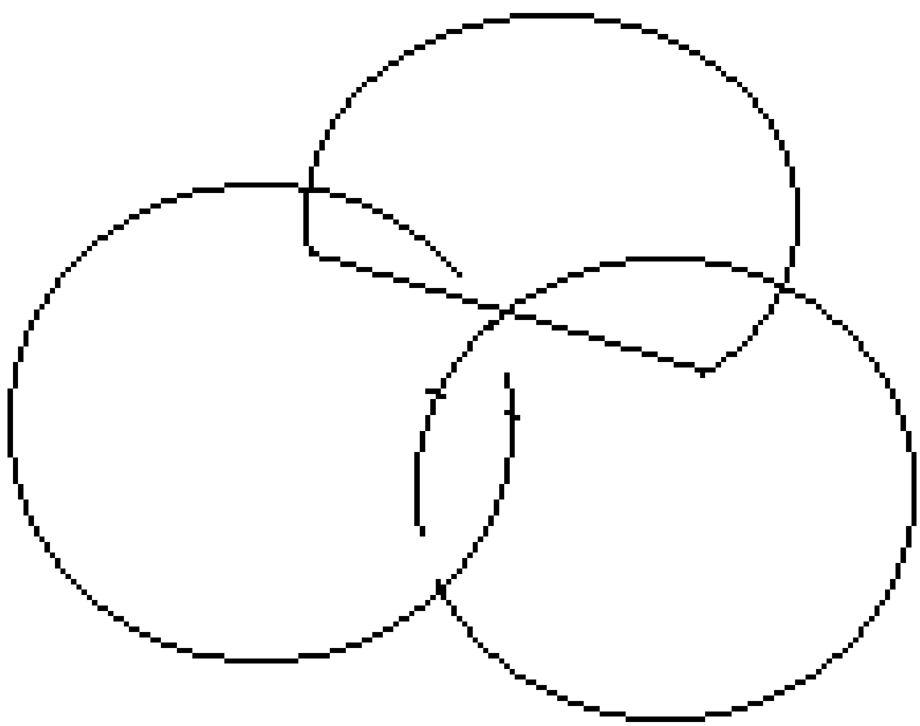

図 5.2: 3 重点はだめ

Σ には、degreeっていうのがあるんですね。 $H_2(\mathbb{C}P^2)$ は、 $\mathbb{Z}$ ですから。 Σ の homology class $[\Sigma]$ が $\mathbb{Z}$ の中で何になるかを考えて、それを degree とします。

$$d = 1, 2 \Rightarrow \Sigma \text{ は、} \mathbb{C}P^1 \tag{5.7}$$

Degree と genus には関係がありまして、degree d が 1 か 2 だとすると、 Σ は $\mathbb{C}P^1$ になります。

5.4 Σ_1 と Σ_2 の関係：2 点で交わっているか、1 点で接しているか

$$\Sigma_1 : \text{degree } 1, \quad \Sigma_2 : \text{degree } 2 \tag{5.8}$$

今、 Σ_1 の degree を 1, Σ_2 の degree を 2 だとします。

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(x : y : z) \mid z = 0\} \\ \Sigma_2 &= \{(x : y : z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \end{aligned} \tag{5.9}$$

例えば、 Σ_1 を $\{(x : y : z) \mid z = 0\}$ で、 Σ_2 を $\{(x : y : z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ としましょう。

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = [1 : i : 0],\ [1 : -i : 0] \tag{5.10}$$

Σ_1 と Σ_2 の交点を調べます。 $z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 0$ より、 $x^2 + y^2 = 0.$ ここで、 $x = 1$ とすると、 $y = \pm i$ となります。 Σ_1 と Σ_2 の交点というのは、2 個。 $(1 : i : 0)$ と $(1 : -i : 0)$ です。 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ を Σ と書きましょう。これは、transversal になります（図 5.3 参照)。

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \text{ の genus} = 1. \tag{5.11}$$

これの genusっていうのは、1 ですね[1]。

$$[\Sigma] = 3 \in \mathbb{Z} \cong H_2(\mathbb{C}P^2) \tag{5.12}$$

ついでに言いますと、 $\mathbb{C}P^2$ の中の、 Σ の homology class は 3 です。

Σ_1 と Σ_2 が接している場合というのがいくつかあるわけですが。これ、パラメータがあるとします。図 5.4 は、transversal な場合で、図 5.5 は接している場合ですね。 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ が 2 点になっているか、或いは、 Σ_1 と Σ_2 が 1 点で接しているかです。要するに、2 次方程式の根というのは、2 個あるか、重根が 1 個あるかであって。これは 2 個ある場合で、これは重根の場合です。そうすると、これは、同じ絵だという風に思えるんです。こういう風に描きます。 Σ_1 と Σ_2 が 2 点で交わっている。これは、1 点で接している場合。こう描きます。

[1] 3.15 節を参照。

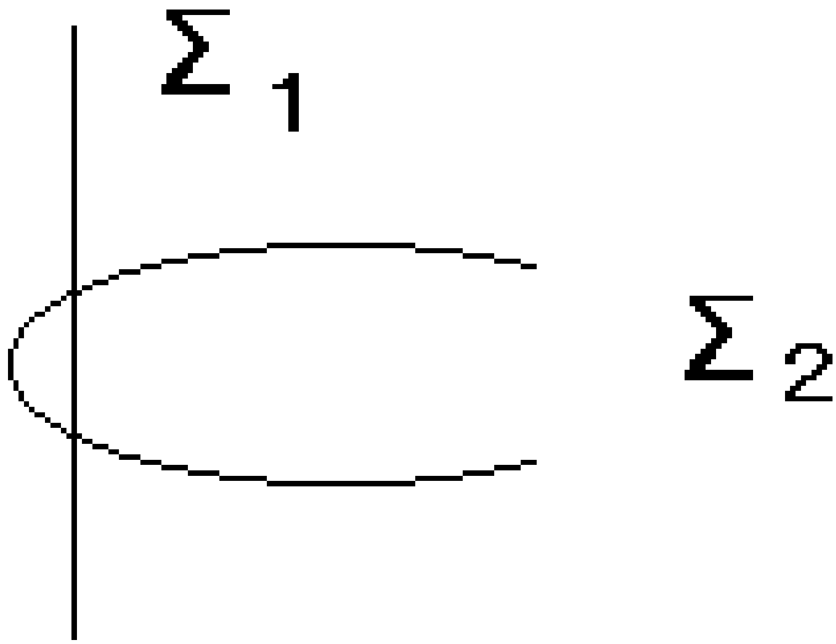

図 5.3: Transversal に交わる

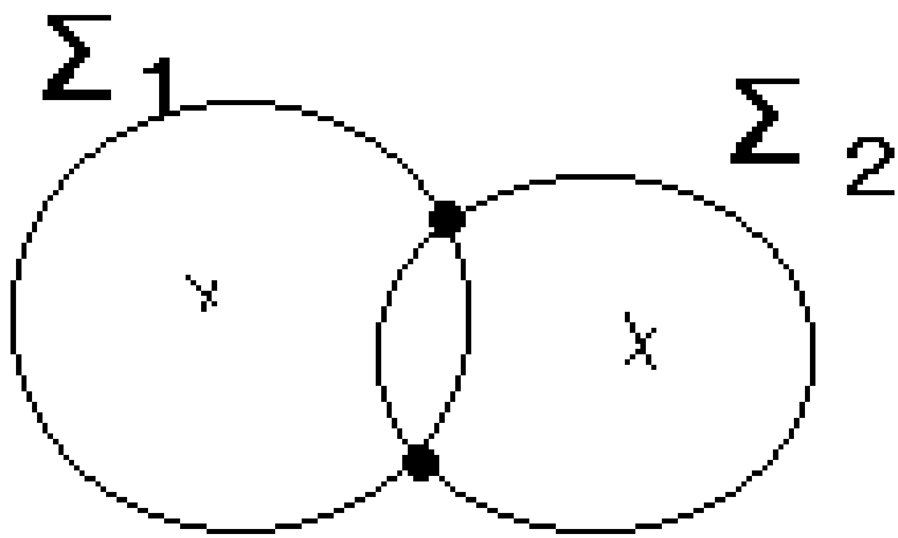

図 5.4: $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = 2$ 点

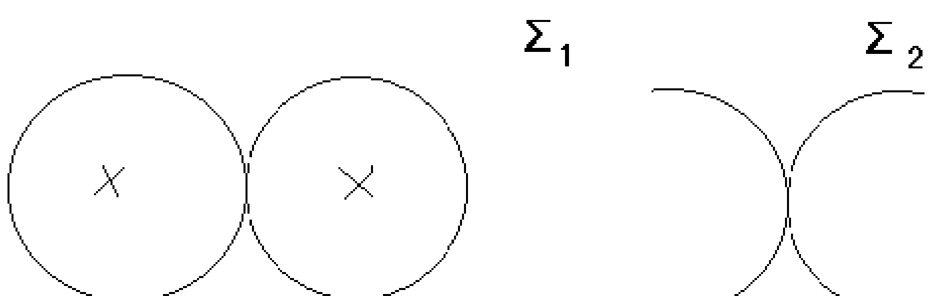

図 5.5: Σ_1 と Σ_2 が 1 点で接するとき

5.5 Limit は何か？ ⋯ $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C}P^2)$ と $\mathcal{M}_{0,2}(\mathbb{C}P^2)$

こういう sequence を付けますと、こういうのが limit で接するということが、当然、あるんです（図 5.6）。

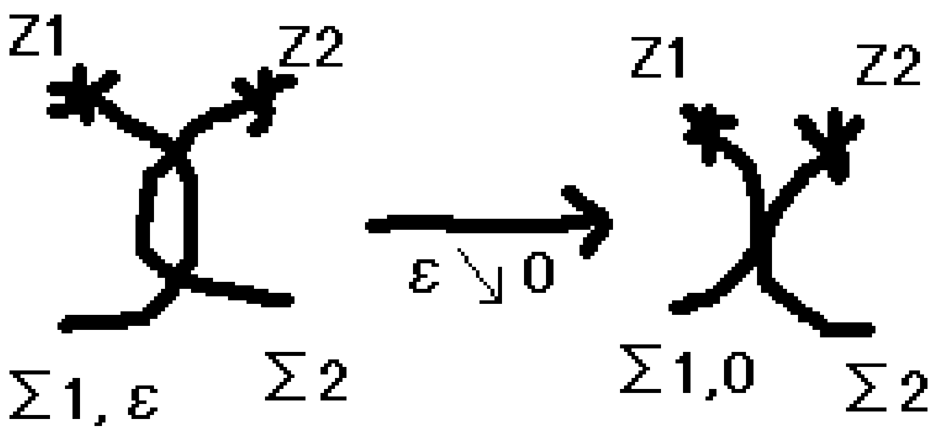

図 5.6: $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C}P^2)$ の元

$$S^2 \cup_{2\,\text{点}} S^2 \text{ からの stable map} \tag{5.13}$$

これ、stable じゃないです。ここに何でもいいから、点 z_1, z_2 を付けるんです（図 5.6 左側参照）。これ、stable です。2 つの S^2 が、2 点でこう、交わっている。ここからの stable map だという風に思うことができるわけです。で、これを stable map だと思いなさい。これ、定義するわけです。

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(S^2 \cup_{2\,\text{点}} S^2, \varphi_\varepsilon) \neq \varphi \quad \leftarrow \text{ 問題！} \tag{5.14}$$

こういうのは、それぞれ、 S^2 に 3 点だから、singular なリーマン面だと思うと 1 個しかないんですが。この 2 点が近づいて行くに従って、map の方が変わって行くんだという風に思うわけです。そうすると、この limit は、果たして何でしょうというのが問題になる。

こうやって考えてみると、この定義が何を言っているのかが、少しは分かるだろうと思うんですけど。これ、今から考えると悩ましい。何かまちがえたかと悩んだんですけど。この悩ましさは何かといいますと、この図形そのもの（図 5.6 右側）は、ここからの正則写像のイメージには絶対にならないんです。それは、そうですね。もう一回言いますと、2 個の $\mathbb{C}P^1$ が 1 点で接していると

いう図形がありますけれども、この図形を、このリーマン面からの holomorphic map からの limit として実現することはできないんです。それはどうしてかというと、この点とこの点がくっつくから、だめなんです。これは、このリーマン面の limit ではないわけです。そうすると、極限では何かというのが、こう、悩ましいわけです。だから、さっきのコンパクト性を証明しようと思うと、こういう現象というのをちゃんと考えないといけない。

それで、こういう風に考えると話が分かりやすくなる。

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_{0,1}(\mathbb{C}P^2)\ \text{の元} \\ \mathbb{C}P^1 \cup_{1\ \text{点}} \mathbb{C}P^1 \stackrel{\varphi}{\to} \text{接している図} \\ \text{genus } 0 \end{array} \tag{5.15}$$

まず、この絵を抽象的に考えるんですね。この limit は何か。この絵をどう考えると、一番自然に holomorhpic map になるかというわけですが。要するに、 $\mathbb{C}P^1$ と $\mathbb{C}P^1$ がこう、1 点で繋がっているやつならば、これはもちろん行くわけです。明らかに。ここが接しているから。

だけど、これ、こうは思いたくない。なぜかというと、こう思っちゃうと、これ、genus が 0 です。すると、これは $\mathcal{M}_{0,2}(\mathbb{C}P^2)$ の元です。今、考えたのは、genus が 1 で、点が 2 個だから、$\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C}P^2)$ の元なんですが。だから、こいつの limit は、これにしたいんだけども、ここの元だということになっちゃうから困るわけです。

5.6 点を付け加えて、stable にする

$$(\mathbb{C}P^1 \cup_{1\ \text{点}} \mathbb{C}P^1, \varphi)\ \text{は、stable でない。} \rightsquigarrow \text{点を付け加えて、stable にする。} \tag{5.16}$$

で、なにがまずいかというのを考えますと、この絵はうそで、実は、このペアというのは、stable map ではないんです。今、ここに点は、2 個だけ入れたわけですけれども。Limit では 1 個だけある。こういうのが 1 個ずつあるんです。これは、stable map なんだけれど、こいつが stable ではない。これが stable じゃないから、こんなことになる。それは、なぜかというと、これ、2 点しかないですから。そこでですね、stable じゃない所がいやだから、stable だという風に思うんです。Stable だと思いたい。だから、stable にしちゃいましょう。

何をするかというと、点を付け加えて、stable にする。これに行くように、何でもいいから付け加えましょう。こことここに付け加えるんです。元々あった点を z_1 と z_2 として、付け加えるのを w_1, w_2 だとしましょう。

5.7 Limit は、どんな絵になるか？

$$\begin{array}{l} \varphi(w_1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(w_{1,\varepsilon}) \\ \varphi(w_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(w_{2,\varepsilon}) \\ w_{1,\varepsilon}, w_{2,\varepsilon} \in S^2 \cup_{2\ \text{点}} S^2 \end{array} \tag{5.17}$$

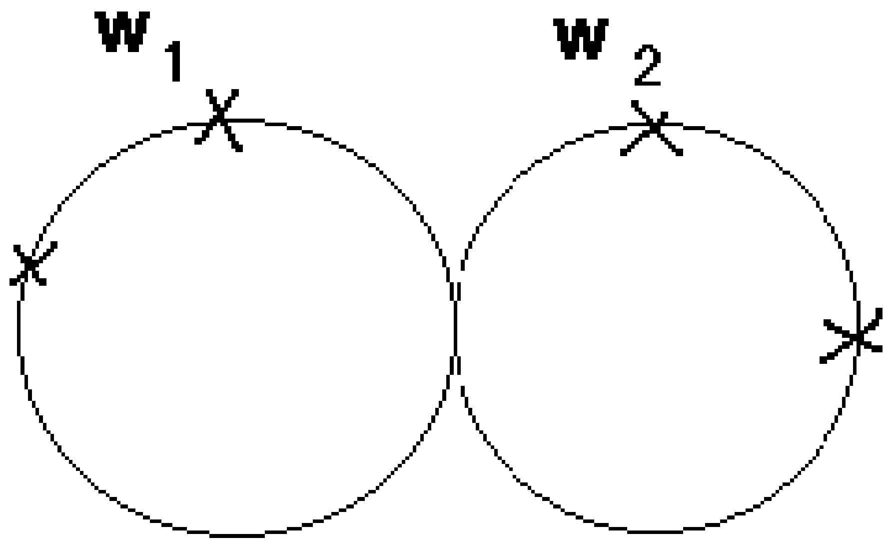

図 5.7: 点を付け加えて stable にする

次に、 w_1, w_2 の φ によるイメージを考えてみます。 $\varphi(w_1)$ に行くように、何か、$w_{1,\varepsilon}$ いうのを、こっちに付け加えましょう。 $w_{1,\varepsilon}$ とか、 $w_{2,\varepsilon}$ というのをどこに付け加えるのかというと、$S^2 \cup S^2$, 元の方の 2 点の所にこう付け加えてやります。

$$(S^2 \cup_{2\,点} S^2, z_1, z_2, w_{1,\varepsilon}, w_{2,\varepsilon}) \in \mathcal{M}_{1,4} \tag{5.18}$$

2 点を付け加えるわけですから、点は、全部で、 $z_1, z_2, w_{1,\varepsilon}, w_{2,\varepsilon}$ になる。こういうのを考えましょう。これは genus が 1 で、点は 4 点ありますから、 $\mathcal{M}_{1,4}$ というのに入っています。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (S^2 \cup_{2\,点} S^2, z_1, z_2, w_{1,\varepsilon}, w_{2,\varepsilon}) \tag{5.19}$$

これは、 ε を変えても、リーマン面としては、全く同じものですね。変わってないです。この limit を考えます。元の絵では、こうなっていて、ここに 2 点でこう交わっているわけですが。

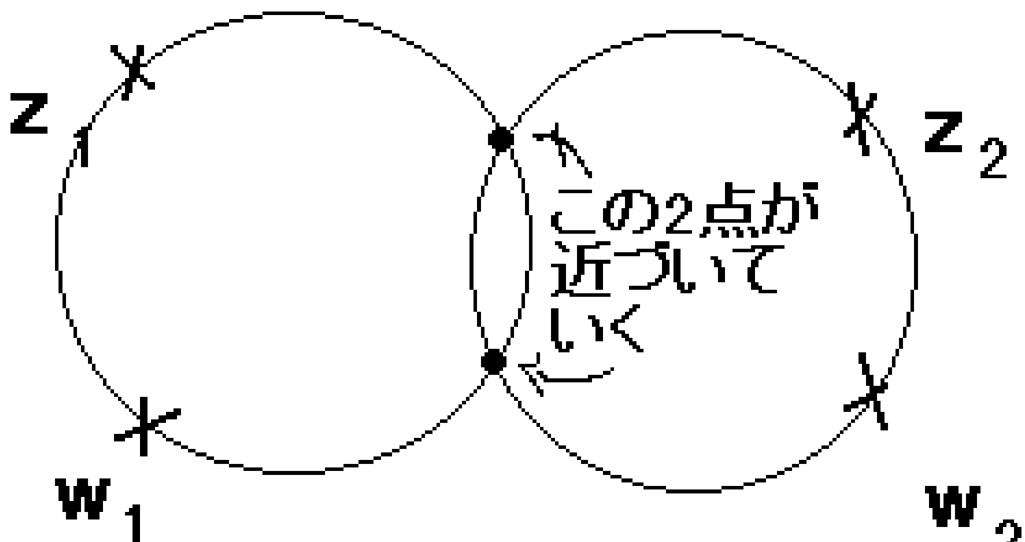

図 5.8: 2 点が近づいていく

この 2 点が、段々くっつくわけです。近づいて行く。この limit は何か。前やったことから分かるんです。まず、こちら側の limit はどうなっているかと言いますと、ここに z_1, z_2 と w_1, w_2 が fix されていて、それ以外に 2 点こうあって、これが近づいて行くんです。

この limit というのは、この近づいたやつがころっと分かれて、こうなるんです。これが limit です（図 5.9)。これ、前にやりましたように、4 点あって、4 点のうち 2 点くっつくと、その 2 点の部分だけもう一個、別の component ができて、1 点だけで交わる。

じゃあ、これはどうなるかと言うと、この 2 個を 2 重にすればいい。この limit は、線で描きますと、こういう風なものです（図 5.10)。こっちに線があって、1 点で交わっていて、ここが 2 点

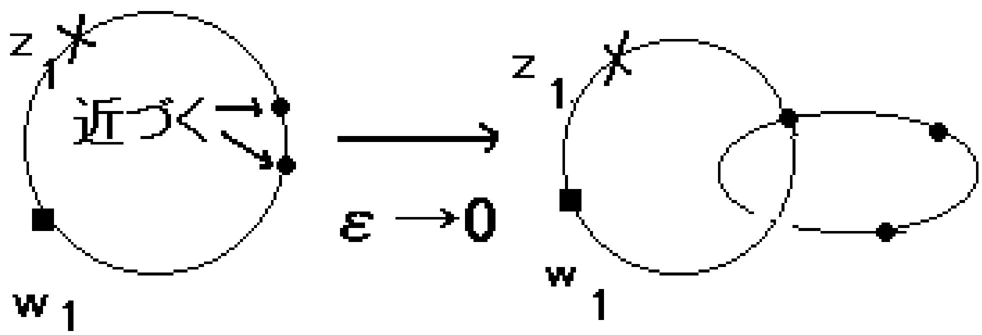

図 5.9: 4 点のうち、2 点くっつくと

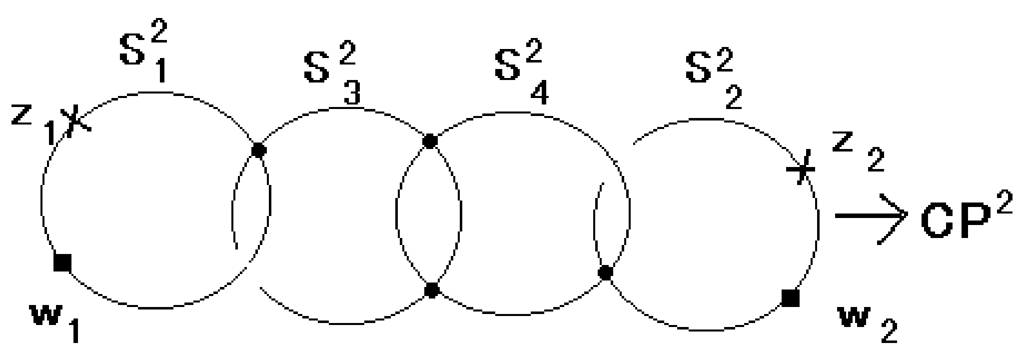

図 5.10: さっきの絵を 2 つ

で交わっていて、こうなる。ここは交わっていて、ここは交わってないです。図 5.9 の絵と同じものを持って来て、こう 2 回ぐらい貼っただけですから。これは、genus 1 です。この 2 つの絵がここで交わっていて、穴があいちゃうんです。こっちは、genus は変わらない。

5.8 $\mathbb{C}P^2$ への map をどう取るか？

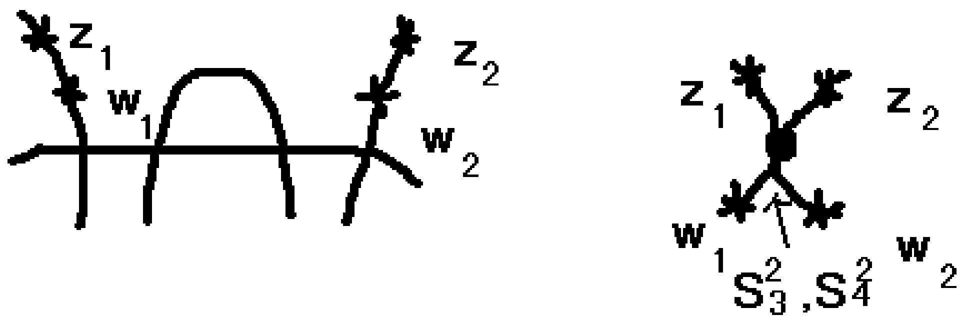

図 5.11: map をどう取るか

ここから $\mathbb{C}P^2$ への map をどう取るか。 S_1^2, S_2^2 は、最初からあるやつ。それと新しく付けたやつが S_3^2, S_4^2 とあるんですね。このですね、真ん中にある 2 個は、つぶれてしまって、1 点に行くわけです。これは、trivial な map です。こちら側とこちら側の方は生き残って、こっちとこっちになります。こいつらは接しているんです。こういう map になります。

これは、stable curve です。これは、map を忘れたら、stable curve です。これ、4 つの component, 全部、3 個ずつ。特異点、または、 z_i か、 w_i に関して、stable curve です。Stable なリーマン面。Singular.

それで、今、ここに z_i というのがいて、ここに、 w_i がいるんですね。これで、こう考えると、genus 1 の所から、ちゃんと欲しい所へ map ができたんです。で、こう作った後で、今度は、 w_i は、さっき、新しく足しましたから、 w_i は、忘れなさい（図 5.12 参照)。

これを Σ としますと、こいつは stable でないわけです。どうしてかというと、両端のこれとこれは、 $\mathbb{C}P^1$ なんだけども、2 点しかない。 $\mathbb{C}P^1$ に 2 点というのは、 C^* という、無限群の自己同型がありますから、ここで stable ではないわけです。しかし、ここからの map φ というのを考えてやると、この悪い 2 つの component S_1^2 と S_2^2 に関しては、 φ は nontrivial です。残っている 2 つの component S_3^2, S_4^2 上では、 φ は trivial ですね。1 点になります。だけど、こっちの component 上では、ちゃんと、リーマン面の方が stable だから、いいわけです。で、こっちの component は、リーマン面だけ考えると、自己同型がたくさんあるんだけれども、map が nontrivial. だから、このペア (φ, J_Σ) は、stable map です。これは、けっこうデリケートなんです。

Topological field theory は、本当はこういう現象を考えてやらなくちゃいけないということだけ、ちょっと話しておきたかったんです。

結論としてどうなっているかというと、これが limit です。この 2 点が近づいて行くんですね。

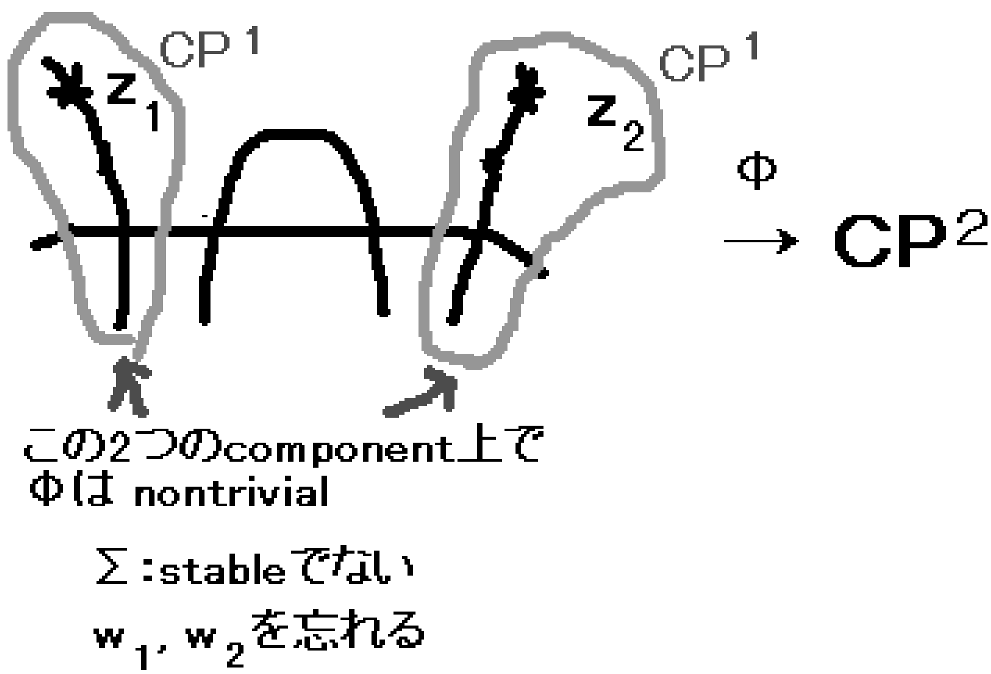

図 5.12: (φ, J_Σ) : stable map ← OK !

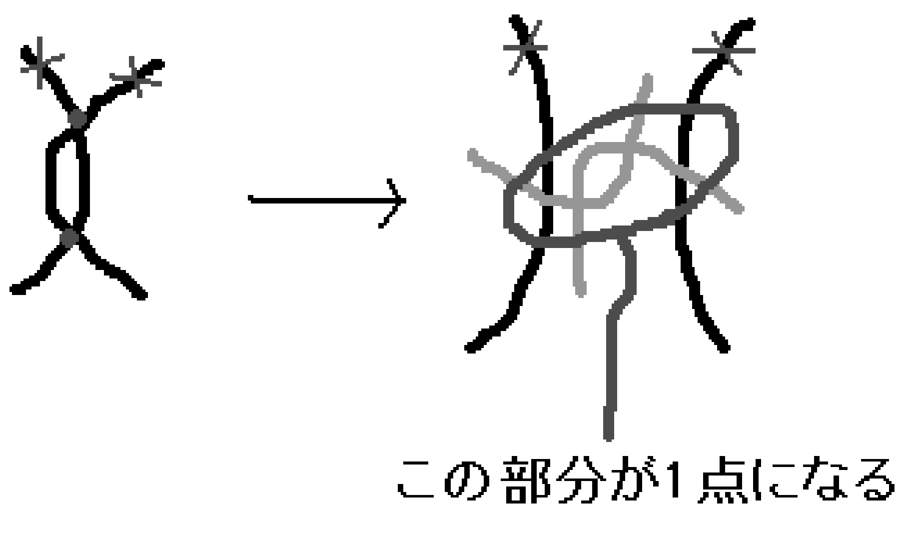

図 5.13: 2 点が近づいて行く

最終的には、こういうものになる。Map としては、こういう部分が 1 点につぶれて（図 5.13 参照）、limit が stable になる。これが、stable map の収束というものを定義する答えです。これは、やると、割とデリケートだということがが分かるんだけれども。

普通は、大体、イメージの集合そのものが収束しているんだと思えば、自然にものは分かるんだけど、これはこういう風にいっぱいあるので、それだけでは捉えきれない。

5.9 もう一つ、いやな例

$$T^2 \overset{\varphi_\varepsilon}{\Leftrightarrow\!\!\to} M, \quad \text{holomorphic} \tag{5.20}$$

もう一ついやな場合というのに、こういう例があります。今、トーラスから M に、holomorphic map の family $\{\varphi_\varepsilon\}$ がありまして。

$$\varepsilon > 0, \qquad \varphi_\varepsilon : T^2 \to M, \quad \text{smooth embedding} \tag{5.21}$$

ε が正のときには、 φ_ε というのは、smooth embedding になる。これ、holomorphic ですが。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(T^2), \quad \text{singular} \tag{5.22}$$

但し、この limit を取ってしまうと、 — limit もちゃんと、 T^2 だけ map があるんだけども — こいつは、singular になる。こういうことが知られているわけです。代数幾何の例があるんです。元々、こういう、 T^2 がずっとあって、最後に何か。こういうのが考えられるんです。

5.10 Singularity があるときは？

で、これもちょっといやらしいんだけど。例をいくつか。Submersion という概念があって、こういう所に singularity があると、そこから寄与して、genus が 1 だという風に思えるんです。それは代数幾何の概念です。でも、そういう意味では微分幾何ではしづらい。なぜかというと、こいつは、almost complex structure で考えて、この singularity をどう寄与させて、genus が 1 だと考えるかというのは、定義してないわけです。

で、微分幾何では、こう考えます。 $\mathbb{C}P^1$ と、こっちが T^2 で、こういう所からの map だとする（図 5.14 参照）。それで、点 z が、 $\mathbb{C}P^1$ に載っているわけですね。それで、 T^2 全体は、この点に写るとします。Genus があった所では、trivial な map になっている。Genus がない部分、 $\mathbb{C}P^1$ の方は、nontrivial な map だと。こういう風に思いなさい。こう思うと、これ、stable ですね。ペアの stable. それは、なぜかというと、こっちは、map は止めてるんだけれども、genus があるからいいわけです。で、こっちは、genus はないんだけれども、map があるからいい。そういう話がある。

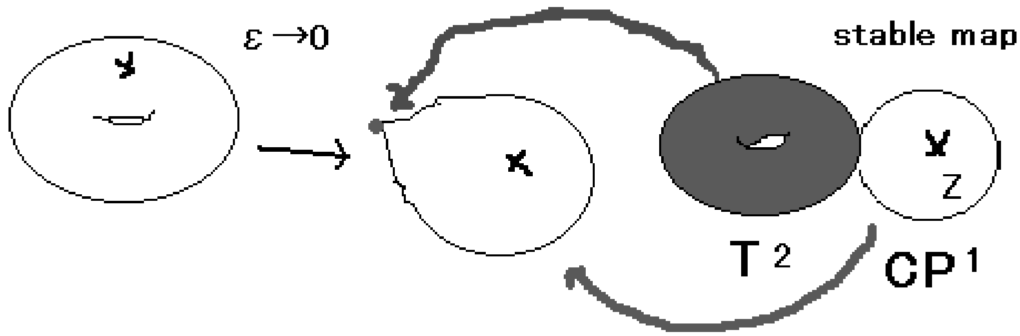

図 5.14: (φ, J_Σ) は stable map ← OK

こういうことをずっと考えるんです。証明をやろうと思うと、こういう現象を基本的に含んで、コンパクト性を証明しなくちゃいけないというのが、ちょっといやらしい。

Stable map の収束というのは、普通は、リーマン面の方は、動いて行って、map の方は、適当な identification で収束するんだという風に思えばいいんだけども。ちょっと、singular な場合というのは、もうちょっとデリケートな所がある。それをちゃんと基本的に全部やるというのは、ちょっと無理なんです。

第 5 章　（中）いくつかの注意と例

第 5 章（中）では、まず、 $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta)$ のコンパクト性の証明に、シンプレクティックだという条件 $d\omega = 0$ が必要だということを述べる。また、 $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta)$ の例をあげ、自己同型がある場合の問題点についても触れる。

5.11　条件： $d\omega = 0$

$$\omega(V,W) := \Leftrightarrow g(V,JW) \tag{5.23}$$

ω は、こう置きます。

$$d\omega = 0 \text{ を仮定した。} \tag{5.24}$$

それで、これは大事なポイントなんですが。さっき書いたときに、 $d\omega = 0$ という条件を付けました。これを仮定した。

$$\text{条件 (5.24) がないと、} \bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta) \text{ は、compact にならない。} \tag{5.25}$$

これは、必要なんです。この条件がないと、コンパクト性というのは、どうやって示すかというのが分からない。コンパクト性が言えない。コンパクトにならない。それを説明したいわけですが。

5.12　$\varphi^*\omega$ の計算

$$\begin{aligned} &\Sigma \xrightarrow{\varphi} M \\ &d\varphi J_\Sigma = J_M d\varphi \end{aligned} \tag{5.26}$$

今ですね、 Σ から M に φ という、pseudo holomorphic map があって、 $d\varphi J_\Sigma = J_M d\varphi$ となっています。

$$\varphi^*\omega \tag{5.27}$$

そこでですね、こいつ $\varphi^*\omega$ をちょっと計算してみましょう。

$$
\begin{aligned}
&p \in \Sigma \\
&e_1, e_2 : T_p\Sigma \text{ の正規直交基底 (ONB)},\ J_\Sigma e_1 = e_2 \\
&h : \Sigma \text{ 上の metric} \\
&\quad h(JV, JW) = h(V, W) \text{ となるように取れる。 } (J_\Sigma\text{-compatible metric})
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

今、1 点 p で計算してみます。何でもいいから、 Σ に metric を入れておいて、 e_1, e_2 を $T_p\Sigma$ の正規直交基底とします。

$$
\begin{aligned}
(\varphi^*\omega)(e_1, e_2) &= \omega(\varphi_* e_1, \varphi_* e_2) \\
&= \omega(\varphi_* e_1, \varphi_* J_\Sigma e_1) \\
&= \omega(\varphi_* e_1, J\varphi_* e_1) \\
&= \Leftrightarrow g(\varphi_* e_1, J^2 \varphi_* e_1) \\
&= g(\varphi_* e_1, \varphi_* e_1)
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

今、 $\varphi^*\omega$ に、 (e_1, e_2) を代入しますと、 $\omega(\varphi_* e_1, \varphi_* e_2)$ となるんですが。 e_1, e_2 は、正規直交基底で、向きがあるから。 e_2 は、 $J_\Sigma e_1$ としておきます。もちろん、 Σ の metric を、 J が保つように取っておきます。そうすると、こうなっている。で、これを引っ繰り返す。これ、使うんですね。引っ繰り返りますから。 $J\varphi_* e_1$. それで、 ω の定義式 (5.23) に代入すると、 J の 2 乗が出てくるので、 $g(\varphi_* e_1, \varphi_* e_1)$ と、こうなるんですね。

$$
\begin{aligned}
(\varphi^*\omega)(e_1, e_2) &= \omega(\varphi_* e_1, \varphi_* e_2) \\
&= \Leftrightarrow \omega(\varphi_* e_2, \varphi_* e_1) \\
&= g(\varphi_* e_2, J\varphi_* e_1) \\
&= g(\varphi_* e_2, \varphi_* J_\Sigma e_1) \\
&= g(\varphi_* e_2, \varphi_* e_2)
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

似たような計算でできるんですが。リーマン計量を引っ繰り返したんだけど。これは、イコールになることの $g(\varphi_* e_2, \varphi_* e_2)$ というのが言えます。

5.13 $E(\varphi)$ の式について

$$
E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_\Sigma g_{ij}\ h^{ab}\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^a} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^b}\ \Omega \tag{5.31}
$$

そこで、前にちょっとやった、 φ のエネルギー $E(\varphi)$ というのは、積分することの g_{ij} の h^{ab} の、こうでした。

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{at } p \tag{5.32}$$

今、 e_1, e_2 というのは、 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ ですよね。

$$h^{ab} = \begin{cases} 1 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases} \tag{5.33}$$

これは、局所座標を取ってやると、 $a = b$ のときは、 h^{ab} というのは、もちろん、1 なんです。

$$\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \tag{5.34}$$

で、 Ω は、もちろん、 $dx^1 \wedge dx^2$.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int \big(g(\varphi_* e_1, \varphi_* e_1) + g(\varphi_* e_2, \varphi_* e_2)\big)\, dx^1 \wedge dx^2 \\ =&\frac{1}{2}\int 2(\varphi^*\omega)(e_1, e_2)\, dx^1 \wedge dx^2 \\ =&\int (\varphi^*\omega)(e_1, e_2)\, dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \tag{5.35}$$

従って、この式をこのままに計算してやるとどうなっているかというと。これは、これの p で考えなきゃいけない。被積分関数の p で考えると、これは、 $g(\varphi_* e_1, \varphi_* e_1)$ 足す $g(\varphi_* e_2, \varphi_* e_2)$ になります。これの $dx^1 \wedge dx^2$. ここで、さっきの (5.29) と (5.30) を使うと、 $\int (\varphi^*\omega)(e_1, e_2) dx^1 \wedge dx^2$ とこうなります。

$$\begin{aligned} &(\star)\cdots \boxed{E(\varphi) = \int_\Sigma \varphi^*\omega} \\ &\text{一般には} \quad \geq \\ &= \text{ が成立するのは} \quad \varphi_* J_\Sigma = J_M \varphi_* \end{aligned} \tag{5.36}$$

エネルギーの φ というのは、結局、 $\int_\Sigma \varphi^*\omega$ になるんです。一般には、同じような計算をすると、確か、不等号 $\geq$ なんです。つまり、 $\varphi_* J_\Sigma = J_M \varphi_*$ というのを仮定しないで似たような計算をやると、エネルギーの方が実は、大きくなる。 $\varphi_* J_\Sigma = J_M \varphi_*$ が成り立っているときには、 $(\star)$ の両辺は等しくなります。

例えば、Kähler manifold というのが有名でして。そういう複素多様体があったとき、例えば、射影空間からの、こういう不等式がありまして。要するに、complex 1-manifold のときに、エネルギーが非対称です。こういうのが、Wirtinger の不等式です。これ、次元が高くても成立する、Kähler 多様体の重要な式です。

5.14 大事なこと：積分が homology class だけに依存する

$$\textbf{重要}\quad \boxed{\begin{array}{l} d\omega = 0 \\ \Rightarrow \\ (5.36)(\star)\ \text{の右辺は homology class}\ \varphi_*[\Sigma] = \beta\ \text{のみに依存} \end{array}} \tag{5.37}$$

$d\omega = 0$, シンプレクティックという条件をどうしてここに使うか。 $d\omega$ が 0 だと、 $(*)$ の右辺は、 $\varphi_*[\Sigma](=\beta)$ の homology class だけに依存します。これは、ストークスの定理です。

$$\begin{array}{l} \boxed{\ \cdots\ }\ \text{は} \\ [\omega]\cdot\varphi_*[\Sigma] = \int_\Sigma \varphi^*\omega \\ [\omega] \in H^2_{DR}(M),\ \varphi_*[\Sigma] \in H_2(M) \end{array} \tag{5.38}$$

だから、右辺は何かというと、 ω の表わす cohomology class に、 Σ のホモロジーをここにやる。 $[\omega]$ は、ド・ラム コホモロジーの元で、 $\varphi_*[\Sigma]$ は、普通のホモロジーの元ですから。 $\int_\Sigma \varphi^*\omega$ に等しいわけですね。そうでないとすると、これは、ホモロジーの意味は持たなくて、唯のこいつを積分したやつというのは、こいつを動かせば。

$$\begin{array}{l} (\Sigma,\varphi) \in \bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M) \\ E(\varphi) = \beta\cdot[\omega]\ \text{は}\ \Sigma,\varphi\ \text{に依らない！} \end{array} \tag{5.39}$$

この条件から、こういうことが分かるんですね。今、書いた $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M)$ という所に、 (Σ,φ) が行ったとすると、エネルギーの φ というやつは、 β と $[\omega]$ の積分だから、この積分 $\int_\Sigma \varphi^*\omega$ は、 Σ,φ に依らないわけです。これが、大事なことです。

5.15 有界性

$$\rightsquigarrow E(\varphi) \le \exists\, C \tag{5.40}$$

なぜ、こんなことがいいか。要するに、ここの元に対して、こういうのがある constant C 以下というのがあるんです。非常に荒っぽく言っちゃうと、 φ のイメージがあまりでかくなれないんです。エネルギーっていうのは、一般には、長さみたいなものでして。要するに、長さとか面積はどういうものかというと、大体、 φ で Σ を持っていった、その図形の大きさを表わすんです。

$$\rightsquigarrow \varphi_i(\Sigma_i)\ \text{の大きさも有界} \tag{5.41}$$

ですから、何か、図形の列があったときに、そいつが収束するかというときには、大きさが、何か抑えられないとしょうがないわけです。つまり、長さだったらば、curve の列があったときに、長

さがでかくなるんだったらば、収束するというのはあり得ないんです。Curve の長さというのは、ある有限な値で抑えられていれば、収束するということがある。つまり、コンパクト性を言おうとしたときにですね、こういう列があったときに、エネルギーというのが有界なんです。このことを使うと、こいつの大きさというのが、何かある意味で有界になる。

$$
\begin{array}{l}
\downarrow \text{ analysis} \\
(\varphi_i, J_{\Sigma_i}) \text{ は } \bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M) \text{ で収束する} \\
\quad\uparrow \\
\text{部分列}
\end{array}
\tag{5.42}
$$

これは、すぐには出ないですが。こういうことが全然ないと、解析も何もが始まらなくて。ここから、nonlinear PDE のいくつかの道具を使いますと。これ、解析なんですが。こいつが、ここで収束する列なんです。ここの部分は、ちょっと、technical には一番、難しい部分なんだけど。やっていると、たくさんのことをやることになりますから、全然やりませんが。

5.16 Symplectic structure は、なぜ必要か

とにかく、symplectic structure の肝心な所というのは、こういうですね、今、考えている φ の大きさというものが。こちらは、単に、リーマン幾何学的な量ですね。こちらは、微分形式の積分だから、そういうリーマン幾何的なものに依らない、topological な量。こういう、幾何学的な量が topological な量で、こう、分かってしまう。そのことを本質的に使わないと、この図形は。それは、ここに書いた、symplectic という条件が大きいわけです。Symplectic structure を使ったというのは、ここです。実際、使うのはここだけなんですね。

で、元の物理の定式化、ラグランジアンとか、そういう関数だけしていると、なぜ、シンプレクティック構造が出てくるかというのは、実は、全然見えないんです。ただ、そういう意味では、物理の定式化の中には含まれていないと思うんですが。それがなぜかというのをよくよく考えてやると、モジュライ空間というのがコンパクトでないと、intersection number が定義できないんですが。シンプレクティック構造がないと、とにかく距離が近いんだけども、サイズが有限というコンパクト性を証明するための一番基本的な性質が成立しないということになります。これが、symplectic structure がなぜ必要かということの説明です。

5.17 2 つの要点

定理は、いっぱい書きましたけども、証明というのは、やるわけにはいかないので。2 つ要点をお話しします。1 つ目は、stable map という概念を用いると、コンパクト化して出てくるものの候補がとにかく求まる。しかも、それがハウスドルフだという。そこでいくつかのデリケートな例でちゃんと、位相というのを考える。2 番目に、多分、コンパクト性を証明するためには基本的な道具として、symplectic structure というのを使って、ここに書いたこの式を証明して、エネルギーという、大きさを表わす量を、元々の topological な量で評価する。そういうものを使って、偏微分方程式の道具を使って、証明しようというわけです。だから、例えば、有界領域上の正則関数の

L^2 ノルムが有界だったらば、収束部分列を持つという話というのはいいですね。そういうのは、多分、いいわけです。例えば、正則関数だったらば、一様有界な正則関数の列は収束部分列を持つというのは、いいですね。そういうのは、証明できるわけだけれども、例えば、正則関数の列があっても、有界性の条件が全くなかったらできないんです。有界性の条件さえあれば、正則関数というのはいいものだから、滑らかさがどんどん出てくるから、収束するというのは。そこで、楕円型方程式を使います。それで、コンパクト性というのは、証明できる。

5.18　$T^2 \times S^2$ の例

で、何をやろうとしたかというと、こいつを計算したかったんですね。こいつの数を勘定したいんです。これの数。「数を勘定するといっても、代数的に、単に数を数えるということじゃないんだよ」ということをちょっとお話しします。

$$\begin{aligned} &\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta) \text{ の order} \\ &T^2 \times S^2 = M \\ &g = 1,\ m = 0 \\ &\#\bar{\mathcal{M}}_{1,0}(T^2 \times S^2, \beta) \end{aligned} \tag{5.43}$$

何の例がいいか。 $T^2 \times S^2$ にしましょう。掛け算。複素構造も込めて。これを M とします。それで、 g が 1 で、 m が 0 とします。本当は、これ、stable じゃないからいやなんですが。こいつ $\#\bar{\mathcal{M}}_{1,0}(T^2 \times S^2, \beta)$ を計算しましょう。

$$\beta := [T^2 \times \{\text{one point}\}] \in H_2(T^2 \times S^2) \tag{5.44}$$

今、 β は、 T^2 掛ける 1 点の homology class だとします。

$$\bar{\mathcal{M}}_{1,0}(T^2 \times S^2, \beta) = S^2 \tag{5.45}$$

これ、計算してやるんですけども。すると、virtual 次元[1]が 0 だというのは、本当かという気がして来るんですけれど。これ、安直に考えます。これ、何かというと、 S^2 なんですね。

$$\begin{aligned} (\because)\quad &T^2 \overset{\varphi}{\hookrightarrow} T^2 \times S^2,\ \text{holomorphic} \\ &\varphi_*([T^2]) = [T^2 \times \{\text{one point}\}] \\ &\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \\ &\varphi_2 : T^2 \to S^2,\ \text{holomorphic} \\ &\varphi_{2*}([T^2]) = 0 \Rightarrow \varphi_2 \equiv \text{constant} \\ &\varphi(x) = (x, \exists p) \quad \text{up tp Aut}(T^2) \quad \Box \end{aligned} \tag{5.46}$$

[1]Virtual 次元については、第 5 章（下）で取り上げている。

今、 T^2 から $T^2 \times S^2$ への holomorphic map φ があるとします。これ、 T^2 の structure を込めて何でもいいです。このとき、 φ_* で行った $[T^2]$ のイメージが $T^2\times$ 1 点の homology class になるのはいつかというのを考えるんですが。 φ を (φ_1, φ_2) と書きましょう。 φ_2 は、 T^2 から S^2 への holomorphic map です。これ、homology class は 0 ですよね。で、これ、今、複素多様体ですから、0 homologus だというと、実は、 φ_2 は constant です。リーマン面の間の holomorphic map が nonconstant だったらば、できる。だから、 $\varphi(x)$ は、何か (x, p) で、 p は constant ですが。そうすると、この p の取り方があるから。

5.19 複素構造をずらす

これは S^2 だから、こういうのは全部勘定できないだろうと思われるかもしれませんが、勘定しないといけないわけです。それを言うために、複素構造を変形してみます。ちょっとずらすんです。それは、こういう風にずらすんですね。

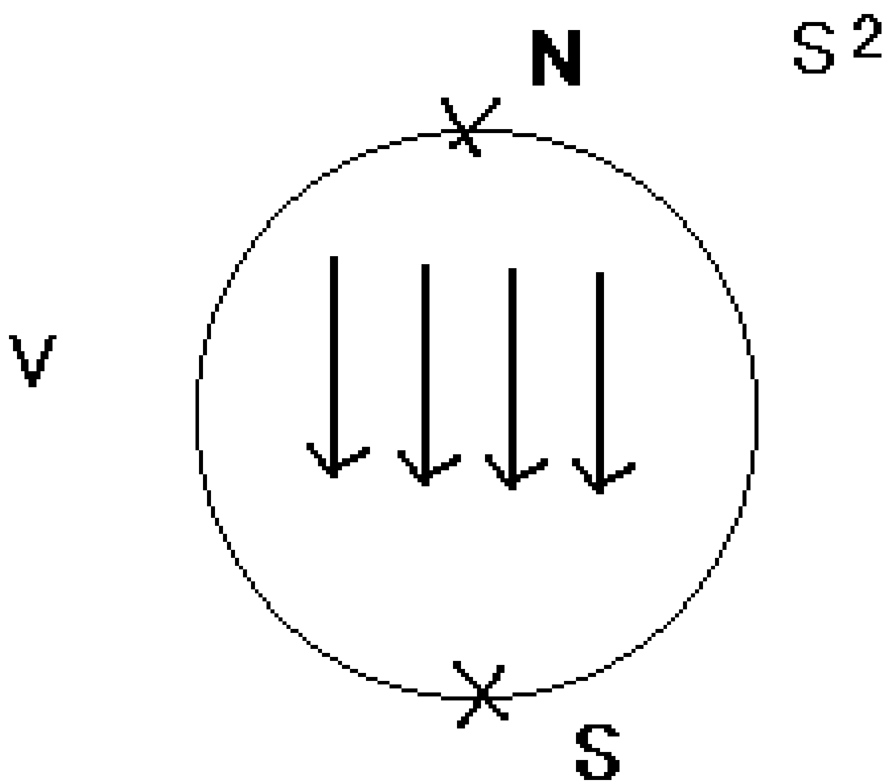

図 5.15: S^2 のベクトル場

今、何でもいいから、 S^2 に何かベクトル場 V を考えます（図 5.15）。それで、 T^2 は、何か

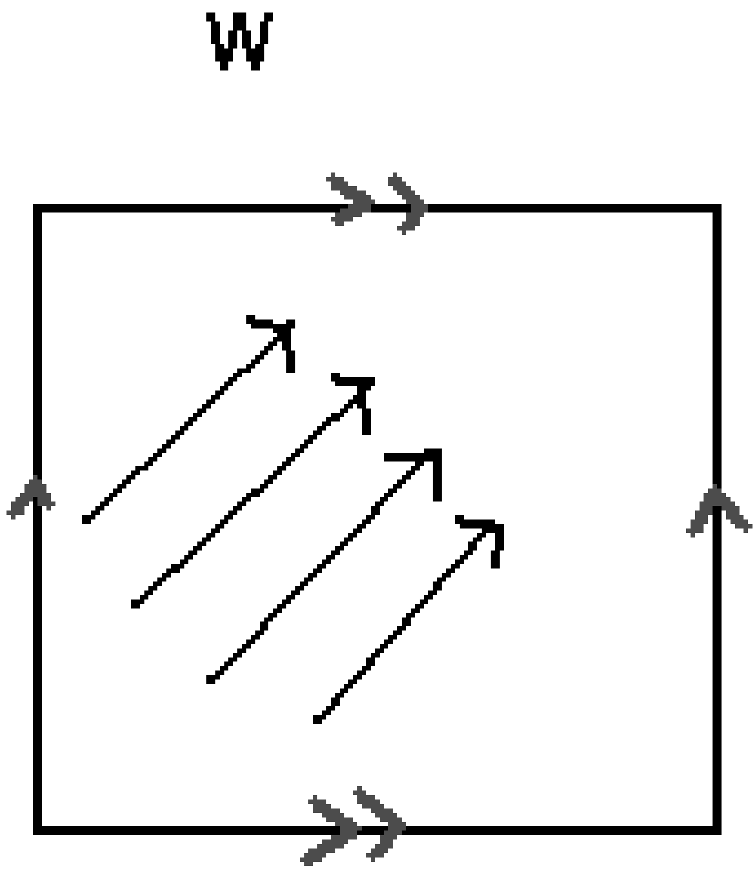

図 5.16: T^2 のベクトル場

W という、0 でないベクトル場を持つ（図 5.16）。

$$\begin{aligned} &J := J_0 + \varepsilon\delta J, \\ &\delta J(W) = V \text{ あとは、zero!} \end{aligned} \tag{5.47}$$

それで、元の複素構造を J_0 として、今、 $J_0+\varepsilon\delta J$ というのを、 J とします。 δJ というのは、この W が V に行って、後は 0 とするものです。いいですね。ほんのちょっと付け加える。これ、ちゃんと証明しないといけないんだけれど、これは、ある complex structure を、Riemann metric を動かして。そうすると、これに関して holomorphic というのを考えます。ちゃんと証明しませんが。

$$\begin{aligned} &\text{このとき } \varphi : T^2 \to T^2 \times S^2, \text{ J-holo は 2 個} \\ &\varphi(x) = (x, N) \text{ or } (x, S) \\ &\rightsquigarrow \#\bar{\mathcal{M}}_{1,0}\big(T^2 \times S^2, [T^2 \times \{\text{point}\}]\big) = 2 \end{aligned} \tag{5.48}$$

だから、こちらの方向は動いちゃうんですよね。 T^2 からこう持って行ったときに、こちらの方向は、動いちゃうんです。だから、この 2 点以外の所にいようと思うと、holomorphic にできないんです。いいですか。まず、こっち、 T^2-成分の方は、こういう具合だから、 T^2-成分を nontrivial にすると、行く限り、どんどんこっちにぐるぐる落ちてきちゃうから、こっち成分が生きている限りは、holomorphic にできないんです。だから、これについて、holomorphic な map φ というのは、2 個しかないんです。この fixed point を N と S で表わすとすると、 $\varphi(x)$ が、 (x,N) という形をしているか、または、 (x,S) という形をしているか。北極と南極という、ちょうど 2 個しかないんです。だから、almost complex structure を 1 個止めておくと、最初は S^2 分あるんだけども、ちょっと動かした瞬間にこう 2 点になって、2 個しかない。しかも、index とかいうのをちゃんと言わないといけないんだけれども。 $\bar{\mathcal{M}}_{1,0}(T^2 \times S^2, [WT^2 \times \{\text{point}\}])$ という、これの order というのは、2 だという風に思うんです。というのが、ここで出てきた結論です。この 2 はいいんですが。これが 1 つ。

5.20 Compatible

さっき compatible というのが。本当は、 W と J の関係をですね、こういう風にしましたね。これが W の V の JW. こう書きましたね。本当は、こうではなくてよくて、 W と J の関係として、これがですね、こう、対称化したやつなんですね。これがリーマン計量になるというのを言っているんだけれども。それは tame なんだけれども。本当は、tame の範囲で。それは、Morse function が必ず、変なんですけど、ベクトル場 V があるときにですね、 V が gradient の f だという条件がこうあるんですね。これが大体、さっきの compatible ですけれども。これに当たる。これが、大体、compatible に対応しているもので、今言った tame という条件が対応するのは、こういう条件ですね。 V で f を積分したやつが。こういうのを gradient ベクトル場ですね。で、tame という条件は大体 gradient ベクトル場という。実は、さっきの compactness という話は、ここまで落としても大丈夫です。というのは、同じ議論なんですけれども。

で、これ、2 の計算してこうなったんですけど、これ、2 はまだ、おぞましい。

5.21 もっといやな例（自己同型がある場合）

$$\begin{aligned} &g \circlearrowleft T^2 \times S^2 \\ &\mathbb{Z}_3 = \{1, g, g^2\} \end{aligned} \tag{5.49}$$

もっといやな例ですが。 $T^2 \times S^2$ に、今、何か nontrivial な群を作用させる。例えば、order 3 の有限群 $\mathbb{Z}_3$ を作用させるんですが。 $\mathbb{Z}_3$ の作用は、 S^2 上では $\frac{1}{3}$ 回転とします。北極 N と南極 S が固定点です。

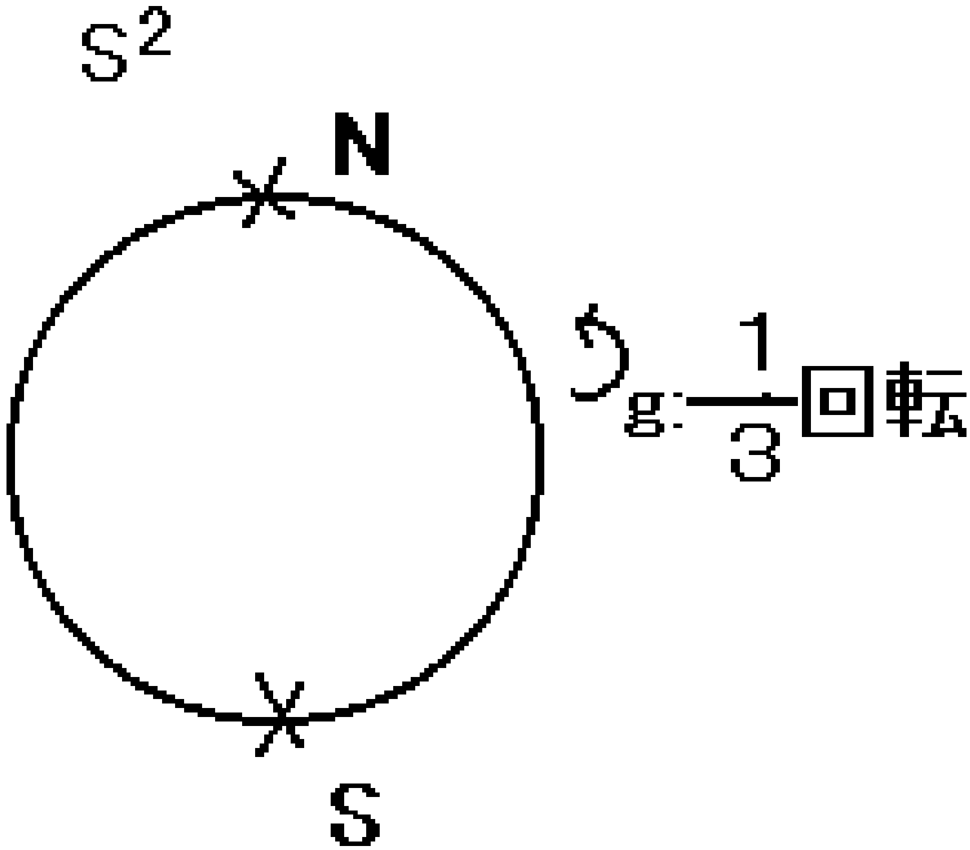

図 5.17: S^2 への $\mathbb{Z}_3$ の作用

$$T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \ni (x, y) \mapsto \left(x + \frac{1}{3}, y\right) \tag{5.50}$$

T^2 上では平行移動とします。つまり、 $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ として、そこの元を (x, y) とすると、 x を $x + \frac{1}{3}$ として、 y は変えない。こうやる。そうすると、 T^2 上では必ず動きますから、 $\mathbb{Z}_3$ の作用は、 $T^2 \times S^2$ 全体では、free なんです。こういうのがある。

$$\frac{T^2 \times S^2}{\mathbb{Z}_3} = M \overset{\pi}{\Leftrightarrow} S^2/\mathbb{Z}_3 \overset{\text{homeo.}}{\approx} S^2 \tag{5.51}$$

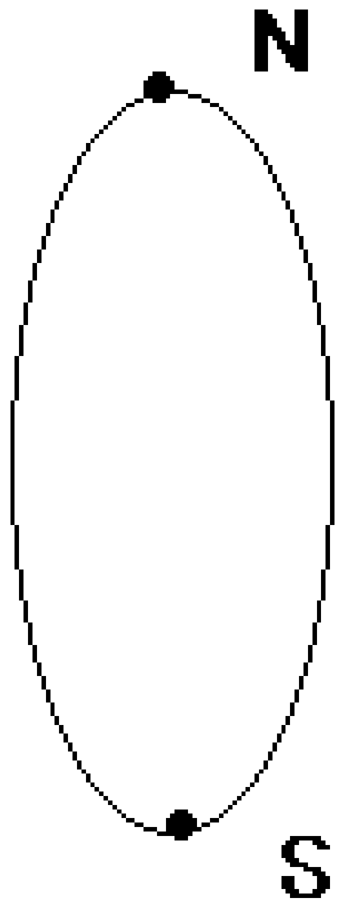

図 5.18: $S^2/\mathbb{Z}_3$

$$\pi^{-1}(p) = \beta,\ [T^2] = \beta \tag{5.52}$$

$$\#\bar{\mathcal{M}}_{1,0}(M, \beta) =? = S^2/\mathbb{Z}_3, \quad \beta = 3\pi^{-1}(N) \tag{5.53}$$

今、 $\bar{\mathcal{M}}_{1,0}(M,\beta)$ の数はいくつかというのを考えたいんですが。この β の homology class というのは、3 倍の $\pi^{-1}(N)$ です。北極と南極というのは、固定点なんですけれども、ここでは、3 重回りです。

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(N) & \to & T^2 \\ & \downarrow & \\ T^2 & \to & T^2 : 3\text{ 重 cover} \end{array} \tag{5.54}$$

これ、3 重回りしているから、ここの fiber の T^2 を段々近づけて、3 重回り。これに注意して頂くと、このモジュライ空間は、この辺ではずうっと普通のやつがあって、ここところではですね、3 重回りのやつがあります。実はですね、それだけではなくて、いくつか isolated なものがあるんですが。どうなっているかというと、例えば、 $\pi^{-1}(N)$ がありますけども、これ T^2 なんだけども。

$$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \text{ の index 3 の subgroup を } n \text{ 個とする} \tag{5.55}$$

T^2 から T^2 への 3 重 cover というのは、 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ の index 3 の部分群の分だけあるんですね。この個数を n と置きます。いくつあるか忘れましたが、少なくとも 2 個はあるんです。それは、こちら側の index とこちら側の index があるから。

$$\text{この } n \text{ 個のうちの 1 つだけが } S^2/\mathbb{Z}_3 \text{ の点に対応} \tag{5.56}$$

そうすると、 n 個のうちの、このうちの 1 つだけが、こうできない。

$$T^2 \to \frac{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_2}{\mathbb{Z}_3} \tag{5.57}$$

例えば、今、こうありますよね。これが、今、これの fiber に T^2 があるわけですけども、これはここに行きますね。今、ここの fiber の T^2 というのは、今、 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ をさらに $\mathbb{Z}_3$ で割ったんですが。この $\mathbb{Z}_3$ はどう作用したかというと、 (x,y) に対して、 x は $\frac{1}{3}$ 足して、 y は動かさない。こういう作用なんです。下の点は $\mathbb{Z}_3$ で fix して、上の点はこうやって動かすというのが規則だったんだから、これはこういう作用です。だから、これは、ここに行った瞬間には、 x の方向だけ 3 重まわりして、 y はまわらないやつというのに、最後には収束しているんです。ところが、例えば、 x は変えないで、 y の方だけ 3 重まわりするとかいうやつも、当然、ここの fiber は 3 重回りして生き残っているんです。

$$\begin{array}{lcl} \#\bar{\mathcal{M}}_{1,0}(M,\beta) & = & \frac{S^2}{\mathbb{Z}_3} \cup 2(n \Leftrightarrow 1) \text{ 個の点} \\ \quad\downarrow \text{perturb する } : J_0 + \varepsilon\delta J & & \\ \#\bar{\mathcal{M}}_{1,0}(M,\beta) & = & 2n \text{ 個の点} \\ & & \uparrow \\ & & \text{この点を動かす } \varphi \text{ には自己同型がある！} \end{array} \tag{5.58}$$

どうなるかというと、これは、これプラスですね、このモジュライ空間を基準に考えると、$S^2/\mathbb{Z}_3$ と、2 倍の n 引く、1 個の点。$n \Leftrightarrow 1$ 個というのは、n 個あるうちの 1 個がここに入っているわけですが、他のやつは入っていない。要するに、$S^2/\mathbb{Z}_3$ が 1 個あって、その他に、$2(n \Leftrightarrow 1)$ 個の点がある。こういうのが、$\bar{\mathcal{M}}_{1,0}(M,\beta)$ の、数なんです。

5.22 これの数を数えようと思ったら …

それでですね、これの数を数えようと思ったら、これを一つだけ、perturb して。多分、同じ perturbation でいいわけですね。今、考えているこの perturbation というのは、何か、linear な flow をこう縦に流すことだから、$\frac{1}{3}$ 回転でよくって。同じように、J をさっきの $J_0 + \varepsilon$ perturb して。これが変わって、両側は、$2n$ 個の点になります。

$$\begin{gathered} T^2 \xrightarrow{3\text{重}} T^2 \hookrightarrow M \\ \text{自己同型群の order} = 3 \end{gathered} \tag{5.59}$$

それでですね、いやな話ですが、これは自己同型があるんです。この点を表わす φ には、自己同型がある。自己同型とは、どういうやつだったかというと、T^3 から、3 重 cover で、cover されるのが。これ、ここは embedding でいい。こういう map だったんですね。そうすると、被覆変換群を考えて、この自己同型は 3 つある。自己同型群の order は、3 です。要するに、この 3 重 cover の自己同型だから、これは、3 で割るんです。

$$\begin{gathered} \#\mathcal{M}_{1,0}(M,\beta) = \tfrac{2n}{3} \\ \text{一般に有理数（整数でない）} \end{gathered} \tag{5.60}$$

これは、3 で割らないといけなくて。$2n$ を 3 で割ってやる。これが答えです。ここが、計算のちょっとデリケートなことで。こういうことがいつでも起こります。今の場合は、S^2 上の orbifold なんだけど、orbifold になるのは本当にいやなんだけど、一般に起こります。

ちょっと注意しなくちゃいけないのは、これ、一般に有理数なんですね。つまり、整数でないんです。これがいやで、数を勘定するとか言っても、実は有理数になってしまう。こういうことがあるので、数を勘定するとか言っても、本当は、その同値類になってしまう。まあ、大体の規則を言えば、数を勘定するときに、自己同型があるものについては、自己同型の order で割って、数を勘定する。これ以上、申し上げませんが。こういう Gromov-Witten invariant を見たときに、よく分数が出てくるわけですが。そうすると不審に思うわけですね。数を勘定するのに、どうして分数が出てくるのか。それは、こういう風にして起こります。

第 5 章　（下）次元について：経路積分が意味を持つ場合

第 5 章（下）では、 $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta)$ の個数を数えるときに起こってくる、次元についての問題を取り上げ、virtual dimension の定義を述べる。それを用いて、経路積分が意味を持つ場合はいつで、そのときどうなるのかということを言う。

5.23　次元について

$$\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta)\ \text{は、次元が zero とは限らない} \tag{5.61}$$

$\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta)$ の数を数えるとかいうのを、ずっとやってきたんですけど。数を数えると言っても、これには、一般に次元がある。つまり、 $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta)$ の次元が 0 とは限らないんです。

$$\begin{array}{l} E \\ \downarrow\uparrow s \circlearrowleft G \\ X \end{array} \tag{5.62}$$

今まで、いろいろと説明してきた一般的な状況というのは、ここに E があって、 X があって、全体に G が作用している。こういう構造でしたね。

$$\mathcal{M} = \frac{s^{-1}(0)}{G} \tag{5.63}$$

考えているモジュライ空間というのは、ここに s があって、 $s^{-1}(0)$ を G で割ったものになっている。

$$\text{全部、有限次元とする} \tag{5.64}$$

これら、 X, G, E の全部が、有限次元だとします。

$$\dim \mathcal{M} = \dim X \Leftrightarrow \dim G \Leftrightarrow \mathrm{rank}\ E \tag{5.65}$$

$\mathcal{M}(=\frac{s^{-1}(0)}{G})$ の次元というのは、まず、 X の次元から、 G の次元を引いて、 E というベクトル・バンドルのランクを引いたものです。

$$\begin{aligned} &\dim X &&: \text{変数の数} \\ &\dim G &&: \text{対称性の次元} \\ &\mathrm{rank}\, E &&: \text{方程式の数} \end{aligned} \tag{5.66}$$

これらの次元やランクというのは、元々何を言っているか。$\dim X$ は、変数の数で、 $\dim G$ は、対称性の次元ですね。それで、 $\mathrm{rank}\, E$ が方程式の数。方程式の数といっても、これは、代数方程式だと思ったときの方程式ですけれども。有限次元です。普通の、有限個の変数の方程式だと思って。微分方程式じゃなくて、ただの方程式だと思ってやる。変数の数から方程式の数を引いて、対称にした数で割ったものが次元だと。これは、明らか。

5.24　無限をキャンセルする

$$\begin{aligned} &\text{問題のケースは、全て } \infty \text{ 次元} \\ &\dim \mathcal{M} = \infty \Leftrightarrow \infty \Leftrightarrow \infty = ? \end{aligned} \tag{5.67}$$

で、今の場合、全部、無限次元です。これ、無限引く、無限引く、無限になって、こうなるんです。これをどうやって考えるか。

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{G} \overset{\mathrm{act}_p}{\Leftrightarrow\!\!\to} T_pX \overset{ds_p}{\Leftrightarrow\!\!\to} E_p \tag{5.68}$$

そこでですね、さっき説明した、これの微分の条件に戻りますと。 $\mathfrak{G}$ という、 G のリー環があって、ここから T_pX へ act_p という map があって、さらにここから E_p へ ds_p という map があります。こういうのがあるんです。

$$\text{If} \quad \left.\begin{aligned} \mathrm{Ker}\ \mathrm{act}_p = 0 \\ \mathrm{Im}\ ds_p = E_p \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dim \frac{s^{-1}(0)}{G} = \dim \frac{\mathrm{Ker}\ ds_p}{\mathrm{Im}\ \mathrm{act}_p} = \dim H^1 = \dim T_p\Big(\frac{s^{-1}(0)}{G}\Big) \tag{5.69}$$

これで無限をキャンセルするんです。例えばですね、もし、 act_p の kernel が 0 で、 ds_p が surjective だったら。このときは、 $s^{-1}(0)/G$ の次元というのは、自然に、$\mathrm{Ker}\ ds_p/\mathrm{Im}\ \mathrm{act}_p$ の次元になる。そしてこれは、 H^1 の次元であるということが、すぐ分かります。実は、これがですね、tangent space ですね。それはこう有限次元の場合で考えてやれば、当たり前で。それでですね、残された対称性というのが、obstruction で。

5.25　Virtual dimension の定義

$$\text{vir-dim}\ \bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta) := \dim H^1 \Leftrightarrow \dim H^0 \Leftrightarrow \dim H^2 \tag{5.70}$$

ここで、次のように次元を定義します。Virtual dimension というんですが。これは、dimension の H^1 引く、dimension の H^0 引く、dimesion の H^2 とこう定義するんです。

$$H^0, H^1, H^2 : (5.68) \text{ のコホモロジー} \tag{5.71}$$

ここで、 H^0, H^1, H^2 は、今、ここに書いた、こいつ (5.68) のコホモロジー。

$$\text{generic には、} \bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta) \text{ は、 vir-dim } \left(\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta)\right) \text{ 次元の orbifold} \tag{5.72}$$

そこで、定理をやりますと、generic には、 — generic にはという意味は、ちょっと言わないで。これ、うそだから — こいつは、この virtual dimension が dimension に一致するような次元の orbifold である。こういうことだという風に思って頂くのが、一番やさしい。一番、見やすいです。ちょっと取りあえず、これでいいことにさせて下さい。うそなんですが。

5.26 経路積分が意味を持つ場合

$$\text{Fix} \begin{cases} w \in \mathcal{M}_{g,m} \\ N_1, \dots, N_m \subset M \end{cases} \tag{5.73}$$

これがいいとしますとですね、そこで、ちょっと思い出すわけです。前に計算したときに何があったかというと、 w という $\mathcal{M}_{g,m}$ の元を fix したんですね。これは、submanifold ですが。後は、こういう $N_1, \dots, N_m$ を fix したんです。

$$\int_w \mathcal{D}h \int_{\mathrm{Map}(\Sigma,M,\beta)} \mathrm{ev}^*(u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) e^{\sqrt{-1}\mathcal{L}} \mathcal{D}\varphi \tag{5.74}$$

$$N_i \overset{\mathrm{PD}}{\longleftrightarrow} u_i \tag{5.75}$$

それで、 w の方で積分することの、evaluation map の*の、 — N_i の Poincaré dual を u_i としますと — u_1 から u_m のこういうのを計算しようという所から話が始まったんです。

$$\mathrm{Map}(\Sigma, M, \beta) := \{\varphi \mid \varphi : \Sigma \to M,\ \varphi_*([\Sigma]) = \beta\} \tag{5.76}$$

この (Σ, φ) というペアは、 $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M)$ に入っている。それで、map 全部でやるとあれなので、ここに、 β というのを付けまして、 $\mathrm{Map}(\Sigma, M, \beta)$ というのを考えるんですが。元としては、$\varphi : \Sigma \to M$ で、さらに、homology class $\varphi_*[\Sigma]$ が β であるものだけを取ることにします。こうしないと、収拾がつかないので。

$$(5.74) \leftrightarrow \#\{(\varphi, J_\Sigma) \mid (\varphi, J_\Sigma) \in \bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M),\ \varphi_*[\Sigma] = \beta,\ \Sigma \in w,\ \varphi(z_i) \in N_i\} \tag{5.77}$$

それで、もう一回お話ししますと、この積分、こういう、経路積分というのを思い出して計算すると。計算というか、何か、こう自在に考えて、答えは何になるか考えると。こいつは β になって。で、この Σ というのがここに入っているんだけど、それだけじゃなくて、こいつは、 w に入っている。それで、後はですね、 $\varphi(z_i)$ が N_i に入っている。こういう風になります。

もう一回言いますと、まずですね、これとこれが対応、最初に言った、これを入れないで、これ、全部で動かしちゃうと、うまく考えないで、全体で積分するということに当然なっちゃいますね。それはいいことにします。次に、これを付けるというのは、ちょうどこの条件を付けるということが、これにすることに対応しているわけです。それは大体そうです。こういう、 u_i をウェッジして積分するというのは、Poincaré duality で写してやると、何か、intersection number を取るということだから、こういう条件を付けて数を勘定するということと、こういうやつを積分するということが対応する。従って、もし、この経路積分というのを計算しようと思うと、こういうやつの数を勘定することになる。

$$\text{この量が意味を持つ} \Leftrightarrow \text{vir-dim}\ \bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M, \beta) = \sum \text{codim}\ N_i + \text{codim}\ w \tag{5.78}$$

そうすると、今、書いた、この集合の数というのが意味を持っているなら、0 次元にならなきゃ困るので、virtual dimension のこいつがですね、等しいことの Σ の codimension の N_i と、後、codimension の w です。これです。ですから、こういう場合にしか、数は計算しないわけです。何かよく分かってないことを言いますと、多分ですね、こういう場合でないと、積分自身というのが何かアノーマリーになって定義できないとか、そういう風にして話が対応しているんだと。

結局、こういう経路積分を計算したかったんだけど、それが意味を持つ場合は、実は、こういう条件が成り立っている場合に限られている。その時には、この数勘定というのは、何か、エネルギーを入れて数を勘定したような量という所まで話が進んでいます。

じゃあ、少し休憩してから再開します。

第6章　Quantum cohomology

第 6 章では、quantum cohomology の基本的なことについて述べる。最後に問題点について少し述べる。

6.1　$g = 0,\ m = 3$ の場合

これを、もっと一般の g, m にするとどうなるか。私は話がちゃんと見えてないんだけれども。

$$\begin{aligned} &g = 0,\ m = 3 \\ &\mathcal{M}_{0,3} = \{\text{one point}\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

今ですね、 $\mathcal{M}_{0,3}(M, \beta)$ というのを考えます。これは 1 点ですね。

$$\text{vir-dim}\ \bar{\mathcal{M}}_{0,3} = 2n + 2\, c_1(M) \cdot \beta \tag{6.2}$$

さっき、virtual dimension について説明しました。 $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}$ の virtual dimension というのは計算できまして、 $2n + 2\, c_1(M) \cdot \beta$ とこういう風になるんです。

$$\dim_{\mathbb{R}} M = 2n \tag{6.3}$$

ここで、M は $2n$ 次元です。実次元ですけど。

$$(M, \omega, J)\ \rightsquigarrow\ c^1(TM) \ni H^2(M) \tag{6.4}$$

今、M と ω と J というのがあるんですが。それで、 $c_1(M)$ というのは何かというと、tangent bundle TM — complex vector bundle ですが — こいつの、first Chern class です。

6.2　さらに、 $\beta = 0$ としたとき

$$\begin{array}{ccccc} \beta = 0 & \rightsquigarrow & \bar{\mathcal{M}}_{0,3}(M, 0) & = & M \\ & & \uparrow & & \\ & & \text{constant map} & & \end{array} \tag{6.5}$$

一番単純な場合として、 β が 0 の場合を考えます。すぐ分かることですが、 $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}(M,0)$ は、constant map です。あの、holomorphic map で、homology class が 0 だと constant map だから。こういうの、リーマン・ロッホとか、Atiyah-Singer の指数定理。

$$W = \mathcal{M}_{0,3} \subset \mathcal{M}_{0,3} \tag{6.6}$$

これ、1 点だから、 W というのがこれ、ここに入っているから。

$$N_1, N_2, N_3 \subset M \tag{6.7}$$

今、 $m = 3$ だから、 N_1, N_2, N_3 という、 M の submanifold を 3 個持ってきて。

$$\sum_i \mathrm{codim}\ N_i = 2n + 2\, c_1(M) \cdot \beta \tag{6.8}$$

Codimension の N_i を全部足したやつが、(6.2) 右辺の $2n + 2\, c_1(M) \cdot \beta$ になります。

$$\mathrm{PD}(N_i) = u_i \in H^{k_i}(M) \tag{6.9}$$

今、ホモロジーでやりましたけれど、 N_i の Poincaré dual を、何か、 u_i と書きますと。これは、 $H^{k_i}(M)$ の元なんですけれども。

$$k_1 + k_2 + k_3 = 2n + 2\, c_1(M) \cdot \beta \tag{6.10}$$

この k_i っていうのは、 N_i の codimension ですね。あの、 N_i の Poincaré 双対の次元は、 N_i の codimension になりますから。 $k_1 + k_2 + k_3$ が、 $2n + 2\, c_1(M) \cdot \beta$. こういう場合を考える。

6.3　元々の Q_0

$$Q_0 : H^k(M) \otimes H^\ell(M) \otimes H^{2n-k-\ell}(M) \Leftrightarrow\!\!\!\to \mathbb{Q} \tag{6.11}$$

大分前に書いたように、 Q_0 というのは、 M のコホモロジーを 3 つ掛けたものから、 $\mathbb{Q}$ への写像でした。

$$\begin{aligned} u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \quad \mapsto \quad & \textstyle\int u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \\ = \quad & \#(N_1 \cap N_2 \cap N_3) \\ = \quad & \{\varphi \in \bar{\mathcal{M}}_{0,3}(M,\beta) \mid \mathrm{ev}(\varphi) = (\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3)) \subset N_1 \times N_2 \times N_3\} \end{aligned} \tag{6.12}$$

元々の Q_0 っていうのは、$u_1 \otimes u_2 \otimes u_3$ というのを、この微分形式の積分 $\int u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ に写すものですから。u_i の Poincaré 双対というのを N_i とすると、こいつは等しいことの $\#(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$ — ちょっと、後で、言うことにすると — こういうものですね。これは、intersection は、何か、transversal. これはよくよく考えて頂くと、こうなるんです。 φ という、 $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}(M, 0)$ の元であって、これ、evaluation map の φ だから、 φ で入れるわけですけども。今の場合、 $g = 0, m = 3$ で $\beta = 0$ だと、φ は、constant map ですから。その constant map φ に対して、$(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3))$ が、 $N_1 \times N_2 \times N_3$ に入っていることだから、こうです。

従って、元々の出発点の Q_0 というのは、ちょうど、モジュライ空間で、 $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}(M, \beta)$ の β が 0 の場合になる。ついでに言いますと、次元がぴったり合っていて。 $2n + 2\,c_1(M) \cdot \beta$ で、今、 β が 0 だから、 $2\,c_1(M) \cdot \beta$ の部分が 0 で、全体が $2n$ になる。 $2n$ というのが、割と、シックな表現なんですが。それはこっちでいくと、ちょうど、cohomology class ですね。これを足して、 $2n$ になってときに、こう、1 点にしますから。

6.4 一般の β で考える … Q_β

$$Q_\beta : H^k(M) \otimes H^\ell(M) \otimes H^{2n-k-\ell+2c_1(M)\cdot\beta}(M) \Leftrightarrow\!\!\to \mathbb{Q} \tag{6.13}$$

今、 Q_0 っていうのができたわけだから。これからですね、各 β に対して、 Q_β っていうのができてくる。 Q_β というのはどういう map だと思えるかというと。やはり、 M のコホモロジーを 3 つテンサーしたものから $\mathbb{Q}$ への写像ですが。 Q_0 ではコホモロジーの次元が $k, \ell, 2n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow \ell$ となっていました（(6.11) 参照）。 Q_β にすると次元はどうなるかと言うと、 k は同じで、 ℓ も同じで、ここの次元が増えて、 $2n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow \ell + 2\,c_1(M) \cdot \beta$ になります。

$$Q_\beta(u_1, u_2, u_3) = \{\varphi \in \bar{\mathcal{M}}_{0,3}(M, \beta) \mid \mathrm{ev}(\varphi) \subset N_1 \times N_2 \times N_3\} \tag{6.14}$$

$Q_\beta(u_1, u_2, u_3)$ というのを、(6.14) で、定義します。すなわち、 $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}(M, \beta)$ に入っているような φ で、evaluation map の φ というのが、$N_1 \times N_2 \times N_3$ に入っている。

$$\mathrm{PD}(N_i) = u_i \tag{6.15}$$

Poincaré 双対の N_i というのが u_i.

これ、 $\mathbb{Q}$ になっちゃうのは、先ほども言いましたけど、ああいうのを数えると自己同型があるから有理数しか出てこない。もちろん、積分で書いているから $\mathbb{R}$ のように見えるんですけれども、これが、manifold の Poincaré 双対だったら、この積分が整数になるというのがまあ。

$$\begin{aligned} &\mathrm{codim}\ N_1 = k \\ &\mathrm{codim}\ N_2 = \ell \\ &\mathrm{codim}\ N_3 = 2n + 2\,c_1(M) \cdot \beta \Leftrightarrow k \Leftrightarrow \ell \end{aligned} \tag{6.16}$$

Dual にうつすと、Poincaré 双対の N_1 の次元というのは k で、Poincaré 双対の N_2 の次元というのは ℓ で、Poincaré 双対の N_3 の次元というのが、 $2n + 2\,c_1(M)\cdot\beta \Leftrightarrow k \Leftrightarrow \ell$ ですね。

$$\sum_i \text{codim } N_i = 2n + 2\,c_1(M)\cdot\beta = \dim \bar{\mathcal{M}}_{0,3}(M,\beta) \tag{6.17}$$

Codimension を全部、足すと、 k と ℓ は、キャンセルして、 $2n + 2\,c_1(M)\cdot\beta$ になります。これは $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}(M,\beta)$ の次元ですね。

$$\begin{aligned}&\mathrm{ev}(\varphi) \subset N_1 \times N_2 \times N_3\\ &\text{この条件で } \textstyle\sum_i \text{codim } N_i \text{ 次元が減る！}\end{aligned} \tag{6.18}$$

この直積の codimension が、ちょうど、dim $\bar{\mathcal{M}}_{0,3}(M,\beta)$ だから、これが落ちて、これが 0 次元になります。

6.5　Q_β たちを使って、 Q を定義する

というわけで、 Q_β の変形ができたんですが。これは、各 β で、parametarize されています。そこで、ちょっとテクニカルですが、次のようにします。

$$\frac{H_2(M,\mathbb{Z})}{\mathrm{Tor}} \text{ の base}\quad \beta_1,\ldots,\beta_\sigma \tag{6.19}$$

今ですね、これが、全部、このまま一緒にするには、こういう風にした方がいいんで。まあ、 H_2 の $\mathbb{Z}$ にしようか。これの base を取りましょう。これを何か、 β_1 から、 β_σ とすると。

$$q_1,\ldots,q_\sigma : \text{変数} \tag{6.20}$$

さらに、 q_1 から q_σ という、パラメーターを取ります。

$$Q = \sum_\beta q^\beta Q_\beta,\quad \beta = \sum_i n_i\beta_i,\quad q^\beta = \Pi q_i^{n_i},\quad Q \in \mathbb{Q}[q_i, q_i^{-1}] \tag{6.21}$$

そこで、 Q というのを q^β 掛ける Q というのの形式的な和だという風に思うことにします。ここで、 $\beta = \sum n_i\beta_i$ で、 $q^\beta = \Pi q_i^{n_i}$ です。形式的冪級数です。多項式じゃないんですよね、これ。 q_i たちと q_i^{-1} たちを、両方、これ、集めないとだめなんですよね。これ、マイナスが付きますが。ローラン多項式になります。

$$\deg q_i := \Leftrightarrow 2\,c_1(M)\cdot\beta_i \tag{6.22}$$

それで、何か、grading したいんですが。 q_i という、 i 番目の変数の degree というのをいくつと思うかというと。deg q_i を、 $\Leftrightarrow 2\, c_1(M) \cdot \beta_i$ と、こういう風に定義してやります。

$$Q : H^*(M) \otimes H^*(M) \otimes H^*(M) \to \mathbb{Q}[q_1, \ldots, q_\sigma, q_1^{-1}, \ldots, q_\sigma^{-1}] \tag{6.23}$$

$\mathbb{Q}[q_1, \ldots, q_\sigma, q_1^{-1}, \ldots, q_\sigma^{-1}]$ が次数付きの環になるんですね。 Q は、 $H^*(M)$ を 3 つテンサーした所から、この多項式環への準同型になります。

$$\Lambda := \mathbb{Q}[q_1, \ldots, q_\sigma, q_1^{-1}, \ldots, q_\sigma^{-1}] \tag{6.24}$$

これを Λ と置きます。これから、コホモロジーは、この係数で考えることにします。

$$H^*(M) := H^*(M, \Lambda) \tag{6.25}$$

以下、 M のコホモロジー $H^*(M)$ と書いたらば、係数は、この多項式環 Λ だとしましょう。

$$Q : H^* \otimes H^* \otimes H^* \to \Lambda \tag{6.26}$$

今、定義した Q は、 $H^* \otimes H^* \otimes H^*$ から Λ への写像と書けますね。

6.6 環構造 ••• $H^*(M)$ のカップ積を Q を用いて deform する

第 2 章で説明しましたけど、結合法則というのが大事なんです。環構造がある。それは、どうやってやるか。

$$\alpha \cup_Q \beta := \sum Q(\alpha, \beta, x_i) y_i \tag{6.27}$$

今、コホモロジーの元 α と β があるとします。この量子カップ積 $\alpha \cup_Q \beta$ を $Q(\alpha, \beta, x_i) y_i$ の和で定義します。

$$x_i, y_i \text{ は } H^*(M, \mathbb{Q}) \text{ の base で} \quad \int x_i \wedge y_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{6.28}$$

この x_i, y_i というのは、コホモロジー環の base であって。 $\mathbb{Q}$ 係数のコホモロジーです。関係式は、 $x_i \wedge y_j$ の積分というのが、1 または 0. こういう風にして、カップ積を決めます。これは、係数は拡大しますが、 Λ 係数のコホモロジーと思うときのカップ積ですね。

$$
\begin{aligned}
\alpha \cup_Q \beta &= \sum_i Q(\alpha,\beta,x_i) y_i \\
&= \sum_i \sum_\beta q^\beta Q_\beta(\alpha,\beta,x_i) y_i \\
&= \sum_\beta \sum_i q^\beta Q_\beta(\alpha,\beta,x_i) y_i \\
&= \alpha \cup \beta + \sum_\beta q^\beta \alpha \cup_\beta \beta
\end{aligned} \tag{6.29}
$$

ついでに言いますと、(6.27) はこう書いてますけれども。本当はですね、何か、この積っていうのは、ここに何かあったら、こういう具合に書けていますね。ここを、もう一回、書き直してやると、(6.21) より、こうなって。普通のカップ積というのがあって、まず、 q^β というのを、こう、何か、 Q の。こんな感じなんです。

6.7　Analogy の気分

$$
q \rightsquigarrow \varepsilon : \text{ 十分小さい数} \tag{6.30}
$$

ここで、analogy の気分というのを、こういう風に味わってみましょう。 ε という、小さい数を代入する場合を考えます。

$$
\varepsilon = 0, \quad a \cup_Q b \to a \cup b \tag{6.31}
$$

そうするとですね、 ε が 0 のときには、 $a \cup_Q b$ というのは、元のカップ積 $a \cup b$ です。これは、量子変形だという風に考えるんです。ただ、何か分からない例は、分かんなくて。代入するといっても、何か。これ、マイナスになったりするのは、何かよく分からないですよね。

$$
(\because) \quad \omega(X,Y) := \Leftrightarrow g(X, JY) \tag{6.32}
$$

今、symplectic form $\omega(X,Y)$ が、 $\Leftrightarrow g(X,JY)$ でしたね。

$$
\varphi : \Sigma \to M, \text{ holomorphic}, \ \varphi \not\equiv \text{constant} \tag{6.33}
$$

そうすると、こういうことが分かるんです。 $\varphi : \Sigma \to M$ という、pseudo holomorphic curve があるんだけど。 φ は nonconstant とします。

$$
E(\varphi) = \int_\Sigma \varphi^* \omega > 0 \tag{6.34}
$$

こいつというのは、正です。これは、 φ のエネルギーです。

$$\beta_i[\omega] \geq 0 \text{ としてよい！} \tag{6.35}$$

ちょっと、さっき、変なことを言ったけど、 β_i を取るときに、今、 ω の cohomology class $[\omega]$ とこういうやつを、単に、 β_i だけ取るわけです。マイナスじゃないんです。片側だけなので。

$$q^\beta := q_1^{n_1} \cdots q_\sigma^{n_\sigma} \overset{\text{改めて}}{\rightsquigarrow} q^\beta := \exp\left(\Leftrightarrow \frac{\beta \cdot [\omega]}{\hbar}\right) \in \mathbb{R} \text{ と定義する} \tag{6.36}$$

さらに言いますと、 q^β は、こう考えたら、こんな書き方ですね。こういうことをせずに、 q^β というのを次のように考えるんです。これを exponential の、マイナスの、 β と ω の cohomology class の積を $\hbar$ — プランク constant ですが — で割る。今度は、実数です。こう思ってやりますと、本当に、これ、数になってしまう。

$$\text{次の } \Lambda \text{ に変更！}$$
$$\Lambda = \left\{ \sum a_\beta \varepsilon^\beta \;\middle|\; \begin{array}{l} a_\beta = 0 \quad \text{if} \quad \beta \cdot [\omega] < 0 \\ a_\beta = 0 \quad \text{if} \quad \beta \cdot [\omega] = 0,\ \beta \neq 0 \\ \qquad\qquad \boxed{\;\;*\;\;} \end{array} \right\} \tag{6.37}$$

さっき、変なことをいくつかあげたので。もう一回、 Λ というのを。 Λ というのは、fomal に考えたんで、こうなんですけども。 a_β は、0. $\beta \cdot [\omega]$ は、負。で、同じように、 a_β は 0. もし、 $\beta \cdot [\omega]$ が 0 で、 β が 0 でなかったら。もっとあるけど、それは後で。これ、書き直しますね。

6.8 無限和になっている

$$a \cup b = \sum_\beta q^\beta a \cup_\beta b \quad \text{右辺は一般に無限和} \tag{6.38}$$

実は、これ、大事なことを書き忘れまして。今、こう書いたんですが。実はですね、右辺は一般に無限和なんです。それは、どうしてかというと。例えば、 $c_1(M) = 0$ の場合というのを考えましょう。こういうのは、Calabi-Yau ですが。楕円型ですが。

$$\begin{aligned} &c_1(M) = 0 \\ &\text{vir-dim } \bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M, \beta) = 2n \end{aligned} \tag{6.39}$$

そうすると、この次元の 2 $c_1(M) \cdot \beta$ の部分というのは、いつでも 0 なんですね。このとき、virtual dimension の $\bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M, \beta)$ は、いつでも $2n$ なんです。この $c_1(M)$ が 0 なので。

$$\text{無限個の } \beta \text{ について } \bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M, \beta) \neq \emptyset \tag{6.40}$$

従って、こういうやつは、生き残っている項というのは、実は、無限個の β についてあるわけです。

6.9　例：$\dim_{\mathbb{R}} M = 6,\ c_1(M) = 0$ のとき

$$\text{例}：\dim_{\mathbb{R}} M = 6,\ c_1(M) = 0 \tag{6.41}$$

ちょっと例を言ってみます。 M の実次元を 6 としましょう。

$$\beta = m\beta',\ m \neq \pm 1 \text{ となっていない} \tag{6.42}$$

実は、同値なんですね。 β というのが、何か、 $m\beta'$ で、 $m \neq \pm 1$ となっていないとき。これ、なぜいいかというのはもう説明しませんが。

$$(S^2 \to M : \text{holomorphic, homology class が } \beta) \text{ となるのは 有限個（} d_\beta \text{ 個と置く）とする} \tag{6.43}$$

今ですね、 S^2 から M への holomorphic map で、homology class が β であるのは、有限個しかない。こんなことがもし起こっていると、何か、こういう map と、 β' の homology class と、 m 重 cover というのがあって。それで、この virtual dimension のですね、この、6 ですね。6 がどうなっているか。

$$\begin{aligned} &\beta = [S_i^2] \\ &M \supset S_1^2, \ldots, S_{d_\beta}^2 \end{aligned} \tag{6.44}$$

こういうやつが、有限個あるわけですね。 M の中に有限個の、何か、homology class β の holomorphic function がある。

$$S_i^2 \ni (p, q, r) \tag{6.45}$$

この S_i^2 の中に、3 点 p, q, r を取ります。

$$S^2 \overset{\varphi}{\Longleftrightarrow} S_i^2 \quad \text{ちょうど一個} \quad \varphi(0) = p,\ \varphi(1) = q,\ \varphi(\infty) = r \tag{6.46}$$

そうすると、 S^2 から、 S_i^2 であって、 $\varphi(0)$ が p で、 $\varphi(1)$ が q で、 $\varphi(\infty)$ が r. こういうのがあるわけです。これは明らかです。6 次元がいいのは何でかというと、どっかの成分にこう、3 つの点を取る。その自由度がちょうど 6 次元だから、6 次元。幾何学的にを見たらば、こういうのは、有限個しかないので。その中に適当に 3 点を取ったやつが有限個。

6.10 このとき、カップ積はこうなる

$$Q_\beta(a,b,c) = \#\{\varphi : S^2 \to M \in \bar{\mathcal{M}}_{g,m}(M,\beta) \mid \varphi(0) \in N_1,\ \varphi(1) \in N_2,\ \varphi(\infty) \in N_3\} \tag{6.47}$$

この特別な場合にですね、カップ積は何かというのを考えるんです。 $Q_\beta(a,b,c)$ というのを考えます。

$$\begin{aligned} a &\overset{PD}{\longleftrightarrow} N_1 \\ b &\overset{PD}{\longleftrightarrow} N_2 \\ c &\overset{PD}{\longleftrightarrow} N_3 \end{aligned} \tag{6.48}$$

今、 a の Poincaré dual を N_1, b の Poincaré dual を N_2, c の Poincaré dual を N_3 とします。そうすると、これは数であって、 — もう一回書きますと — φ という、 S^2 から M であって、$\varphi(0)$ が N_1 に入って、 $\varphi(1)$ が N_2 に入って、 $\varphi(\infty)$ が N_3 に入っている。こういうものです。

$$(6.47)\text{ の右辺 } \ni \varphi \quad \varphi(S^2) = S_i^2 \tag{6.49}$$

こういう元を φ としますと、 $\varphi(S^2)$ というのは、何かの S_i^2 なんです。

$$N_1, N_2, N_3 \text{ は } S_i^2 \text{ と transversal} \tag{6.50}$$

このですね、 N_1, N_2, N_3 を動かして、 S_i^2 たちと全て、transversal にします。

$$\dim N_i = 4 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{6.51}$$

今、一番、大事な場合は、 N_i の次元が全部 4 の場合です。そうすると、codimension はそれぞれ 2 で、3 つを足すと 6 なんですね。

$$N_1 \cdot S_i^2 = \beta \cdot N_1 = \int_\beta a \tag{6.52}$$

N_1 と S_i^2 の intersection number を考えます。こいつは何点あるか。 φ のホモロジーは β だから、 β で考えて、それに N_1 をこうやったものですね。これは、 β で N_1 の Poincaré dual a というやつを積分するわけです。こんな感じです。

どうなっているかというと、今、ここに、 S_i^2 があるんですね。ここに、 N_1, N_2, N_3 というのが、3 つあるんです。今の場合、 S_i^2 と N_j は有限個の点でしか交わらないんです。 N_j が 4 次元で、 S_i^2 が 2 次元で、 M が 6 次元だから、有限個の点でしか交わらない。

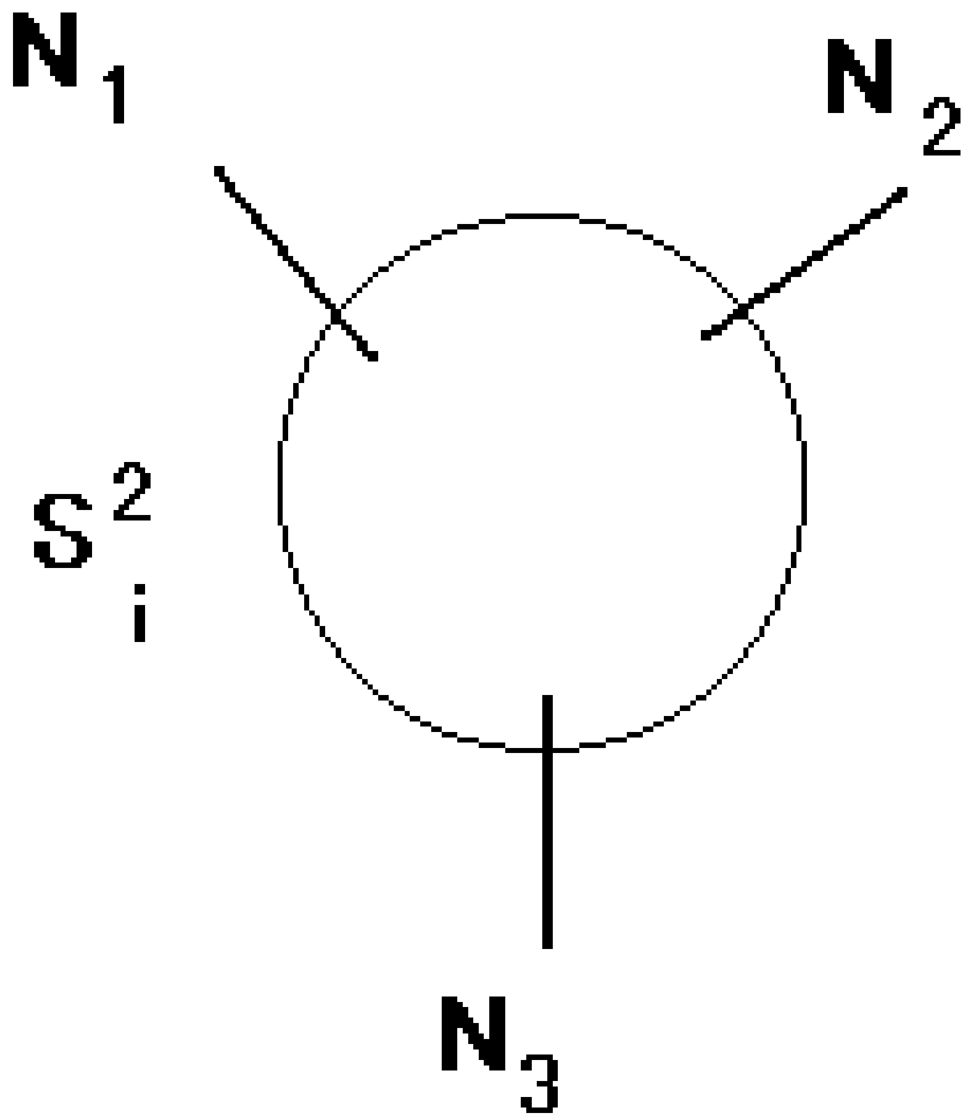

図 6.1: S_i^2 と N_j との交わりを考える

$$\left.\begin{array}{l} N_1 \cap S_i^2 \text{ の点} \\ N_2 \cap S_i^2 \text{ の点} \\ N_3 \cap S_i^2 \text{ の点} \end{array}\right) 1 \text{ つずつ選ぶ} \tag{6.53}$$

そうすると、 $N_1 \cap S_i^2$ の点と $N_2 \cap S_i^2$ の点と $N_3 \cap S_i^2$ の点を 1 つずつ選ぶと、こういうものが決まります。これ、1 対 1 です。もちろん、この i と、こういうのを選べば、決まるわけです。

$$\Rightarrow Q_\beta(a, b, c) = d_\beta \langle \beta, a\rangle \langle \beta, b\rangle \langle \beta, c\rangle \tag{6.54}$$

そうすると、こういう数が分かって。 d_β と各 cohomology class に、 $\langle \beta, a\rangle$ 掛ける $\langle \beta, b\rangle$ 掛ける $\langle \beta, c\rangle$. こういう風に。要するに、こういうものを計算しているんだと理解すればよくて。カップ積というのは、こういうものなんです。これが一つです。

6.11 Homology classが β となるpseudo holomorphic curveの数を数える

$$\begin{array}{l} d_\beta \ \cdots \text{ これの計算に帰着} \\ \text{homology class が } \beta \text{ となる pseudo-holomorphic curve の数} \end{array} \tag{6.55}$$

結局、quantum cohomology の計算というのは、こういう、Calabi-Yau で、6 次元の $CY = 0$ の場合というのが一番大事なんです。これが計算できるケースです。これは、homology class が β である、pseudo holomorphic curve の数です。こういうのをどうやって数えるという問題に結局、帰着している。

6.12 Λ について

$$\underline{\text{Fact}} \quad \forall C > 0 \quad \#\{\beta \mid \mathcal{M}_{g,m}(M, \beta) \neq \emptyset,\ \beta \cdot \omega < C\} < +\infty \tag{6.56}$$

さっき、 Λ の定義を言い忘れたのをもうちょっとお話ししますと。任意の constant C に対して、 β の集合であって、 $\mathcal{M}_{g,m}(M, \beta)$ が non-empty であって、しかも、 $\beta \cdot \omega$ が C より小である。これが有限集合。ということが知られています。

$$(6.56) \text{ の証明は } \mathcal{M}_{g,m}(M, \beta) \text{ の compact 性の場合と同様} \tag{6.57}$$

これは、こいつのコンパクト性の証明と大体同様なものです。なぜかというと、 φ が、ここに含まれていたらば、 φ と ω の積分、エネルギーの φ が C より小さいとき。これは、何に等しかっ

たかというと、 β と ω の内積、これは、 C より小。これ、エネルギーが有界のとき、これは、コンパクト性。有限集合。

$$\{\beta \mid a, b : \mathrm{fix},\ a \cup_\beta b \neq 0,\ \beta \cdot \omega < C\} : \text{有限集合} \tag{6.58}$$

こうなんですね。 a, b を fix したときに、 $a \cup_\beta b$ が 0 でないような β であって、それで、 $\beta \cdot \omega$ がある constant C より小さいというのは、有限集合である。

$$\Lambda := \left\{ \sum c_\beta q^\beta \;\middle|\; \begin{array}{l} c_\beta = 0,\ \beta \cdot \omega < 0, \\ c_\beta = 0,\ \beta \cdot \omega = 0,\ \beta \neq 0, \\ \boxed{\quad\cdots\quad} \end{array} \right\} \tag{6.59}$$

そこで、 Λ の正しい定義はこうです。ちょっと最初に書き間違えたのを書き直しますと、 q の β 乗の 1 次結合ですね。但し、係数 c_β は 0 で、 $\beta \cdot \omega$ が 0 より小で。で、 c_β がやっぱり、0 で、 $\beta \cdot \omega$ が 0 で、 β が 0 でない。

$$\forall C \quad \#\{\beta \mid \beta \cdot \omega < C,\ c_\beta \neq 0\} < +\infty \tag{6.60}$$

さっき書いた、この条件は何かといいますと、任意の constant に対して、 β の集合であって、 β と ω の内積が C よりも小さくて、 c_β が 0 でないというのが、有限集合です。何かごちゃごちゃ言いましたけども、まあ、こういうのがある。これが有限集合というのを使うと、これがここに入っているというのが分かる。

6.13　Conjecture： $a \cup_Q b$ は収束する

$$a \cup_Q b = \sum \exp\left(\frac{\Leftrightarrow \omega \cdot \beta}{\hbar}\right) a \cup_\beta b \tag{6.61}$$

さっき、ちょっと、代入するというのを言いかけたんですが。こういうのを代入するんです。この、量子カップ積というのを、quantum cup 積というのを、どうやって定義したいかというと。Exponential の、 $\dfrac{\Leftrightarrow \omega \cdot \beta}{\hbar}$ の $a \cup_\beta b$. こうやる。

$$\text{Conjecture} : \hbar : \text{十分小} \Rightarrow a \cup_Q b \text{ は収束する} \tag{6.62}$$

$\dfrac{\omega \cdot \beta}{\hbar}$ がでっかくなると、ここの term $\exp(\dfrac{\Leftrightarrow \omega \cdot \beta}{\hbar})$ がどんどん 0 に近づくから、ここがちゃんと収束してくれるんです。もう一回言いますと、これ、 c が小さい所では、有限個しかないですけれども。ここがどんどんでっかくなると、こっちが長くなるから、収束するわけです。これは、conjecture で、 $\hbar$ が十分小ならば、 $a \cup_Q b$ は、収束する。これは証明されていません。Explicite に計算できる場合というのは、全部、そうなっているんです。この係数というか、数がある意味で、ある exponential よりも小さい。そういう弱い評価なんですけれども、そういう評価もできない。だから、harmonic map の数の評価があるんですけれども、きちっとは。

6.14 Conjecture の baby 版

この conjecture の baby 版というのを言ってみたい。

$$\begin{aligned} &M : \text{Riemannian manifold} \\ &u : \text{closed 1-form} \\ &X := u^{\#} \in \chi(M) \end{aligned} \tag{6.63}$$

今、 M を有限次元の Riemannian manifold で、 u を closed 1-form とします。なんで、有限次元を考えるのかというのは、説明できないんですけど。似たようなケースが出てくるんですけれども。それでですね、今、 X というのを $u^{\#}$ とします。

$$\begin{aligned} &\underline{\text{仮定}} \quad \#\{p \mid u(p) = 0\} < +\infty \\ &\ni \forall p, \quad u = d\,\exists f \text{ at neighbourhood of } p \\ &\text{s.t.} \quad f \text{ は Morse function}, \ u(p) = 0 \end{aligned} \tag{6.64}$$

仮定として、これは有限集合です。すみません、何を言っているのか分からないかもしれませんが。Conjecure がありましたが、あれに近いことです。それで、後は、ここのですね、任意の p に対して、もちろん、 $u = df$ と書けるわけですが。このとき、 f は Morse function です。

$$\text{index}(p) := f \text{ の } p \text{ での Morse index} \tag{6.65}$$

そのとき、つまり、 $u(p)$ が 0 のときに、 p の index というのを、 f の p での Morse index で定義します。こう、書けるわけですね。もちろん、up to constant で unique だから、それが、Morse function に。単に、closed 1-form の Morse theory ですけれども。

$$p, q : u(p) = u(q) = 0 \tag{6.66}$$

今、 p と q があって、 $u(p)$ と $u(q)$ が 0 とします。

$$p \text{ の Morse index} = q \text{ の Morse index } + 1 \tag{6.67}$$

そして、 p の Morse index が、 q の Morse index +1 になっているとしましょう。

$$\begin{aligned} &\bar{m}(p,q) = p \text{ と } q \text{ を結ぶ } X \text{ の積分曲線} \\ &z \mapsto \textstyle\sum_{\ell \in \bar{m}(p,q)} z^{\int_\ell u} =: f(z) \end{aligned} \tag{6.68}$$

それで、 $\bar{m}(p,q)$ というのを p と q を結ぶ、このベクトル場 X の積分曲線とします。こういう関数 f を考えましょう。 z に対して、 Σ の z のですね、 ℓ で u を積分したもの。この和は、 ℓ

が $\bar{m}(p,q)$ に入っているという条件で取ります。これ、実は、無限和です。これを f とします。大体、さっきやった、 ω と β の内積とかいうやつに対応するのが、今、ここに書いたものです。

$$\text{Conjecture}: \quad f\ \text{の収束半径}\ > 0 \quad z = \exp\left(\Leftrightarrow \frac{1}{\hbar}\right) \tag{6.69}$$

Conjecture は、こいつの収束半径は 0 より大。これは、さっきのアナロジーです。 $\hbar$ が十分小さければ収束するということのアナロジー。収束すると何か非常におもしろい。こういうことができると、この次のこっちの収束ができるわけですが。こちらの方の、さっき書いた quantum cohomology の方というのを具体的に書いて、代入したときの収束というのは全然証明できませんで。これが、要するに、無限次元のときの conjecture の有限次元版なんですが、これができると少しは。

6.15　Quantum cohomology の結合法則

$$\underline{\text{結合法則}} \quad \sum_i Q_0(a,b,x_i)Q_0(y_i,c,d) = \sum_i Q_0(a,d,x_i)Q_0(y_i,b,c) \tag{6.70}$$

今までで、quantum cohomology の定義をしたわけですが、最後に、結合法則というのをちょっと説明したいんです。Quantum cohomology の一番大事な定理は、結合法則です。結合法則って何だったかというのを思い出しますと。前、説明したんですね。結合法則というのは、 Q_0 の、これで、2 個、入れ替えたのが等しいとかいうものでした。

$$Q_0 \rightsquigarrow Q = Q_0 + \sum \varepsilon^{\beta} Q_{\beta} \tag{6.71}$$

それで、 Q_0 の 0 を取ってですね。 Q_0 から Q にして同じことが言えるかというのが、前に説明した問題です。

$$(a \cup_Q b) \cup_Q c = a \cup_Q (b \cup_Q c) \tag{6.72}$$

全部、たどって何を証明するかというと、こうなんですね。Quantum cohomology での結合法則というのは、等式がこれから出てくる。その過程というのは、前に説明しましたから言いませんけれども。

$$\begin{aligned} &Q\ \text{に書き換える} \\ &\textstyle\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\sum_i Q_{\beta_1}(a,b,x_i)Q_{\beta_2}(y_i,c,d) = \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\sum_i Q_{\beta_1}(a,d,x_i)Q_{\beta_2}(y_i,b,c) \end{aligned} \tag{6.73}$$

Q_0 の、この規則を書き換えると、こういうことです。何かというと、左側は、 $\beta_1+\beta_2=\beta$ で動くことの、 i の、 $Q_{\beta_1}(a,b,x_i)$ の $Q_{\beta_2}(y_i,c,d)$. 右側も同じように、 $\beta_1+\beta_2=\beta$ で動くことの i で、 $Q_{\beta_1}(a,d,x_i)$ の $Q_{\beta_2}(y_i,b,c)$. これが結合法則。

6.16 さっきの Calabi-Yau

ついでに言いますと、さっきの、3 次元の Calabi-Yau の多項式なんだけど。 $\mathbb{C}P^2$ の場合には、ほとんど、この式だけを使って、全部、計算することができます。この式と、確か、2 点を通る、$\mathbb{C}P^2$ の曲線を一本、 — 有名な式ですが — それを使って計算する。その計算は忘れましたが。

この式だけを仮定して、この式と多分一番単純な、 a, b, x, x が、3 個の場合ですね、3 個でやって、多分、degree が 1 か何かの一番やさしい場合を計算して。多分、これですね。 P^1 の generator を取ってきて。こちらに 1 点というのと、これ、何でもいい。これ、1 ですね。これ、何かというと、与えられた 2 点を通る 3 番目は何でもいいですけれども、与えられた 2 点を通る P^1 と homologus なペアの数だから、2 点を通る曲線を 1 本です。この式とこの法則を一所懸命、組み合わせて、がちゃがちゃと計算する。あと、もう 1 つだけ。 Q_0 の、こういうのがあります。これは、普通のカップ積ですね。これとこれだけ組み合わせて、後、これを使うと帰納法で出てきます。

こういうのの計算ですか。グラスマンか何かでやろうとすると、どのくらい要るかど うか知らないんだけど も。でも、グラスマンでも quantum cohomology は、ほとんど計算されているはずなので。ただ、もうちょっと。これでも答えが。ここに degree が全部出てくる。例えば、こういうの。これからこういうのを計算し ようと思ったとき、そんなにすぐ には出ないんです。これは、codimension が 2, 4 ですか。これから計算し ようと思うと、 n の多項式になるけど。こういうのを計算するっていうのは、割と基本問題で。例えば、これでもいいんだけど。2 点を通る degree が degree n の curve が何本かというとですね。それは、elementary なんです。それは、与えられた曲線があったときに、その 2 本の曲線と交わるような、与えられた degree の、リーマン面が P^2 に何本あるかということを勘定しなくちゃいけない。それは、そういうものもやり出すと、けっこうしんどいけれど。多分、quantum cohomology のそういう問題を一遍に答えを出すということはなかったんだけど。

6.17 $\mathcal{M}_{0,4}(M, \beta)$

それで、これをちょっとやりますと。これは、物理の方の背景から来ているわけなんですが。ここに 4 点を考えて。今、これ、 a, b, c, d とあるんです。このアイディアは。ここが a で、ここが b で、ここが c で、ここが d. これが一方で、もう一方は。前、何か、こんな絵を描きましたけど。このリーマン面は 2 種類退化させて、但し、この 4 点のこちら側とこちら側を組にして退化させているか、こちら側とこちら側を組にして、退化させているか。その 2 通りあるわけです。これが一番大事です。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{0,4}(M,\beta) & \ni & (\Sigma,\varphi) \\ \downarrow \ \pi & & \downarrow \\ \mathcal{M}_{0,4} & & \Sigma \text{ で stable でない component はつぶす} \end{array} \tag{6.74}$$

それをもうちょっと正確に言いますと。今度は、 $\mathcal{M}_{0,4}(M, \beta)$ から、こういう map があるんです。ちょっとだけ注釈しますと、ここの元というのは、何か、 Σ と φ のペアなんですが、 Σ で、stable でない component は、全部、1 点につぶしちゃう。

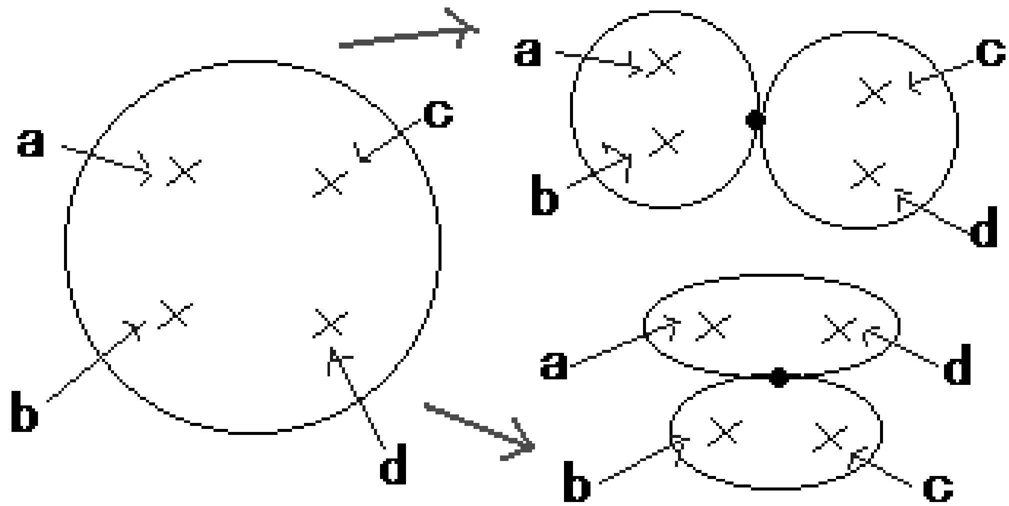

図 6.2: 4 点付きリーマン面を 2 通りに退化させる

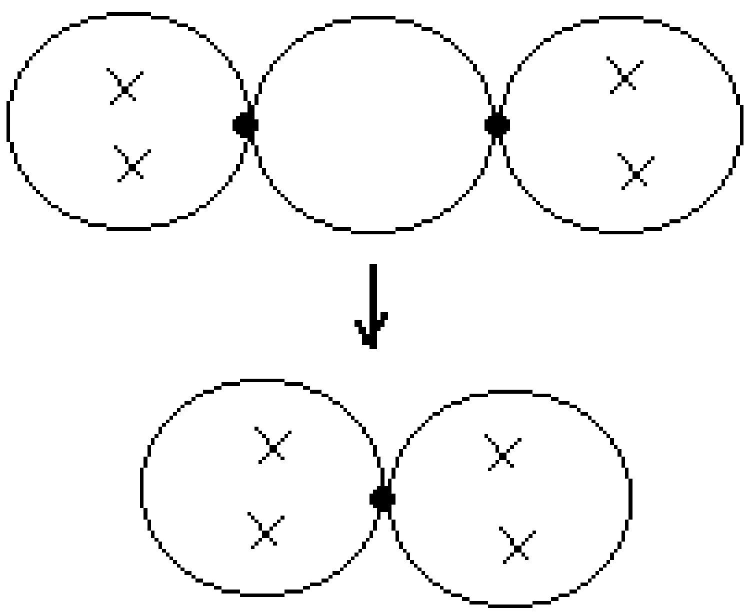

図 6.3: Stable でない component を 1 点につぶす

だから、元々、ここの元というのは、こんな風になっているかもしれない。これと φ というのがあるとします。 φ が、ここところでは、nontrivial で、ここは trivial でよくて、ここが nontrivial という条件なんだけれども。これで、 Σ を忘れるときには、これは本当に忘れてしまって、こうする。いらない component はつぶすという話。

6.18

$$a, b, c, d \text{ の PD を } N_1, \ldots, N_4 \tag{6.75}$$

今、この中の submanifold を考えます。今、 a, b, c, d の Poincaré dual というのを、 N_1 から N_4 とします。

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} = \{(\Sigma, \varphi) \mid \mathrm{ev}(\varphi) \subset N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4\} \\ \quad \downarrow \pi \\ \bar{\mathcal{M}}_{0,4} \end{array} \tag{6.76}$$

そこで、今、こいつを、切るんですが。 (Σ, φ) であって、evauluation map の φ というのが、 $N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4$ に入っている。こういうやつを考えます。そうするとですね、 $\mathcal{M}$ という所から、 $\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$ に map があるんですが。これを π とします。

$$\sum \mathrm{codim}\ N_i = 2n + 2c_1 \cdot \beta \tag{6.77}$$

ここでちょっと次元を計算します。Codimension の N_i を全部足すと、ちょうど $2n + 2c_1 \cdot \beta$ になるんです。

$$\dim \mathcal{M} = 2 \tag{6.78}$$

Dimension の $\mathcal{M}$ というのは 2 なんですが。しかも、こいつは、closed manifold です。

$$\forall X \in \bar{\mathcal{M}}_{0,4} \quad \#\pi^{-1}(X)\big(= \deg(\pi)\big) \text{ は } X \text{ に依らない} \tag{6.79}$$

今ですね、任意の X に対して、 $\pi^{-1}(X)$ というのを考えます。今、これ、2 次元ですから、これの数というのは、意味があります。さらに $\#\pi^{-1}(X)$ は X に依らない。こういうことが言えます。つまり、2 次元多様体から 2 次元多様体への smooth map があったときに、その fiber の数というのは、符号まで考えると、点の取り方に依らない。これは、要するに degree なんです。Generic の点の逆像の数を符号付きで数えるというのは、degree です。これをですね、2 通りに計算すると話が広がるんです。

6.19

$$\bar{\mathcal{M}}_{0,4} \backslash \mathcal{M}_{0,4} \tag{6.80}$$

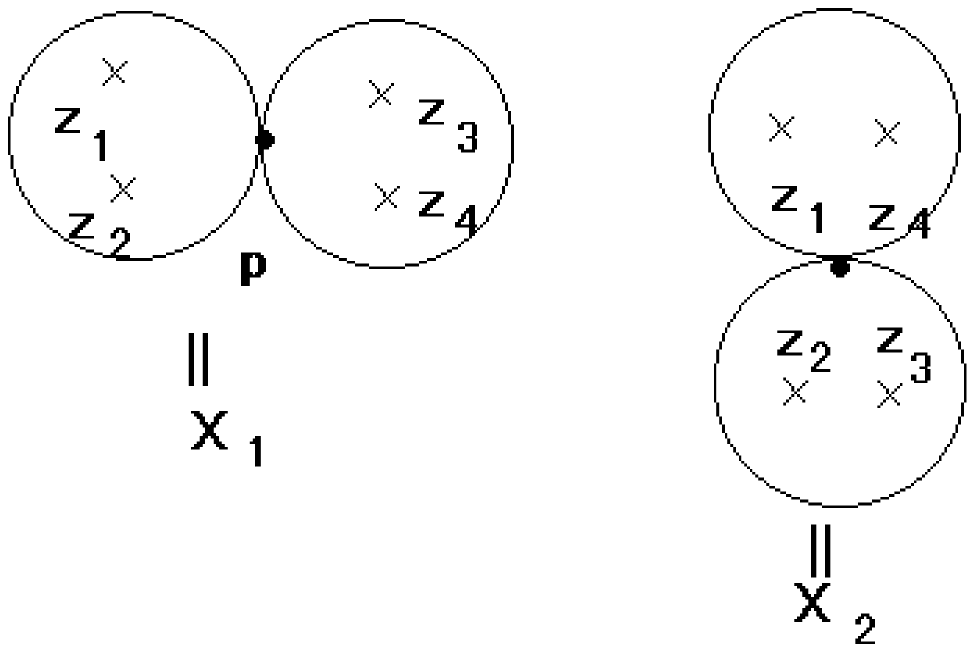

図 6.4: X_1 と X_2

今、$\bar{\mathcal{M}}_{0,4}$ から、$\mathcal{M}_{0,4}$ を引いたやつを考えてみます。この中に、こういう点があるわけです。2 個あります。$(z_1$ と $z_2)$ と $(z_3$ と $z_4)$ を X_1 として。もうひとつ、$(z_1$ と $z_4)$ と $(z_2$ と $z_3)$ があります。これを X_2 とします（図 6.5 参照)。

$$\#\pi^{-1}(X_1) \overset{\text{これを示す}}{=} \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \sum_i Q_{\beta_1}(a,b,x_i) Q_{\beta_2}(y_i,c,d) \tag{6.81}$$

これを証明して終わることにします。この、$\pi^{-1}(X_1)$ の数というものは、$\beta_1+\beta_2=\beta$ になることの i の $Q_{\beta_1}(a,b,x_i)$ の $Q_{\beta_2}(y_i,c,d)$ ということ、これを証明しよう。

$$\#\pi^{-1}(X_2) \overset{\text{これを示す}}{=} \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \sum_i Q_{\beta_1}(a,b,x_i) Q_{\beta_2}(y_i,c,d) \tag{6.82}$$

で、この等式は何かというのを考えるんです。まず、この符号を。この式はですね、大体、こういう風にしていって、下の方と上の方は、これの無限遠の所で関係する。それは、大体、一般的

です。これ、リーマン面があったら、例えば、これがつぶれますけれど。そこで、これ、切り開いてやると、こういう風な感じになって。だから、段々、リーマン面を単純にしていこうと思ったらば、singular なものを考える。Singular なやつというのは、大体、genus が低いとか、そういうやつ、より簡単なやつから理解できます。これ、genus が減っています。これを見ようと思ったら、もう一個くっつけてやると、これが、こうなるんですよね。これを引き離してやると、これは、こいつが 2 個になるんです。 g が 1 で、 m が 2 だったんだけど、これは、 g が 0 で m が 3 の場合にこう帰着したんです。大体、リーマン面の場合には、こういうことをやって、こういうことを調べる。一般の g で見ようと思ったら、どんどん、切っていくと。だから、原理はこうです。

$$
\begin{aligned}
\because\quad &\#\pi^{-1}(X_1)\\
&= \left\{ \varphi : X_1 \to M \;\middle|\; \varphi(z_i) \subset N_i, i = 1, \dots, 4,\ \varphi(\chi_1) = \beta \right\} \qquad (6.83)\\
&= \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_1 : S^2 \to M, \\ \varphi_2 : S^2 \to M, \end{array} \begin{array}{l} \text{(i) } \varphi_1(z_1) \in N_1, \\ \text{(ii) } \varphi_1(z_2) \in N_2, \\ \text{(iii) } \varphi_2(z_3) \in N_3, \\ \text{(iv) } \varphi_2(z_4) \in N_4, \\ \text{(v) } \varphi_1(p) = \varphi_2(p), \end{array} \quad \varphi_{1*}[S^2] + \varphi_{2*}[S^2] =: \beta_1 + \beta_2 = \beta \right\}
\end{aligned}
$$

(6.84)

その集合をちょっと見てみるんですが。そうすると、 φ という、 X_1 から M へのの map があって、 $\varphi(z_1)$ が N_1 に入っていて、 $\varphi(z_2)$ が N_2 に入っていて、 $\varphi(z_3)$ が N_3 に入っていて、 $\varphi(z_4)$ が N_4 に入っていて。後は、 φ で持って行った X_1 の homology class が β になっている。こういうものです（(6.83) 参照)。

$$X_1 = S^2 \cup_p S^2,\ \varphi = \varphi_1 \cup \varphi_2 \tag{6.85}$$

X_1 というのは、2 つの S^2 を p で貼ったものですが。そして、 φ というのも、 φ_1 と φ_2 を貼ったものです。そうすると、すぐに等号ができまして（(6.48) 参照)。これは、 φ_1 と φ_2 のペアであって、 φ_1 は、 S^2 から M で、 φ_2 も S^2 から M です。条件は何かというと、これ、全部書くんですね。 $\varphi_1(z_1) \in N_1$ で、 $\varphi_1(z_2) \in N_2$ で、 $\varphi_2(z_3) \in N_3$ で、 $\varphi_2(z_4) \in N_4$ で。もう一個ありまして、 $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ である。これ、 p で貼り合わされているんです。さらに、もう一個ありまして、 $\varphi_{1*}[S^2]$ と $\varphi_{2*}[S^2]$ を、今、 β_1, β_2 と置きますと、これを足したのが β になる。

$$\mathcal{M}(M, \beta_i) = \{\varphi : S^2 \to M \mid \text{holomorphic},\ \varphi_*[S^2] = \beta_i\} \tag{6.86}$$

これ、ざっと見ると、何が書いてあるか見づらいけれども、よくよく見てやると結構見やすくてですね。今、単に、 $\mathcal{M}(M, \beta)$ と書いたらば、 — これ、ちゃんと書くと、0,0 ですね — φ という S^2 から M への、holomorphic であって、 $\varphi_*[S^2]$ が β_i と、こういう風にします。

$$(6.84) \subsetneqq \cup_{\beta_1+\beta_2=\beta} \mathcal{M}(M, \beta_1) \times \mathcal{M}(M, \beta_2) \tag{6.87}$$

これは、ここに入っているんですね。Union の $\beta_1+\beta_2=\beta$ になることの、$\mathcal{M}(M,\beta_1)\times\mathcal{M}(M,\beta_2)$, ここに入っているんです。これ、書いていると長いんだけど、やっていることは割と単純で。何か、長い講義をやって、最後の方で、こういうのをわっとやるのはあれなんだけど。

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}(M,\beta_i) & \stackrel{\mathrm{ev}}{\to} & M^3 \\ \ni \varphi & \mapsto & \big(\varphi(0),\varphi(1),\varphi(\infty)\big) \end{array} \tag{6.88}$$

今ですね、 $\mathcal{M}(M,\beta_i)$ から M^3 という所へ map があるんです。 φ に $\big(\varphi(0),\varphi(1),\varphi(\infty)\big)$ というのを対応させるんですが。

6.20

$$(6.84)=\cup_{\beta_1+\beta_2=\beta}\{(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathcal{M}(M,\beta_1)\times\mathcal{M}(M,\beta_2)\mid(\mathrm{ev}(\varphi_1),\mathrm{ev}(\varphi_2))\in\overset{\text{(i)}}{N_1}\times\overset{\text{(ii)}}{N_2}\times\overset{\text{(v)}}{\triangle}\times\overset{\text{(iii)}}{N_3}\times\overset{\text{(iv)}}{N_4}\} \tag{6.89}$$

そうすると、こうなんですが。この (6.84) の集合ですね。この集合の数を勘定したい。(6.84) の集合というのは、$\beta_1+\beta_2=\beta$ になるものの和で、(φ_1,φ_2) の組であって、$\mathcal{M}(M,\beta_1)\times\mathcal{M}(M,\beta_2)$ に入っていて。但し、evaluation の φ_1 と evaluation の φ_2 を合わせたやつというのが、どこに入っているか。この条件を順番に入れるんです。これ、きたないですけれど。

これは、実は、 $N_1\times N_2\times$ diagonal $\times N_3\times N_4$ なんです。Diagonal というのは、 $M\times M$ の diagonal です。どうしてかというと、条件の 1 番目と 2 番目と 3 番目と 4 番目と 5 番目というのを順番に書き並べていくと、この条件というのが、1 番目というわけで、これが 2 番目に対応している。これが 3 番目に対応して、これが 4 番目に対応して、これが 5 番目ですね。これはいいですね。だから、こっちの最初の方に、 S^2, 3 個であって、1 番目は N_1 に行って、2 番目は N_2 に行って、2 番目の方の 1 番目が N_3 に対応して、2 番目の 1 番目が N_4 に対応しているんですが。ここは何を言っているかというと、 S^2 上の 3 番目の点というのと、もう一個の点が一致しているということです。それは、diagonal です。これでいい。そうすると、これは、はっきりしていて、まあこうなっている。

$$\#(6.84)=\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\mathrm{ev}_*[\mathcal{M}(M,\beta_1)\times\mathcal{M}(M,\beta_2)]\cdot[N_1\times N_2\times\triangle\times N_3\times N_4] \tag{6.90}$$

(6.84) の数というのは何か。これを足さなくちゃいけないんですが。この ev という map で、このホモロジー類 $[\mathcal{M}(M,\beta_1)\times\mathcal{M}(M,\beta_2)]$ を持って行ったときの、これを考えなさい。それと、こいつの表わす homology class $[N_1\times N_2\times\triangle\times N_3\times N_4]$ との intersection number を取ります。これだというのは、定義から明らかですね。等しい。こういうもので、ここにちょうど入っているということは、ホモロジーの言葉で言うと、fundamental cycle を map で持って行って、交点数を取るということだから、こうなるんです。

6.21

$$[\triangle]=\sum[x_i\times y_i] \tag{6.91}$$

そこで、先週の注意で。先週、私はいなかったんですけど。ええと、前に注意した、diagonal の homology class $[\triangle]$ というのは、等しいことの $\sum[x_i\times y_i]$ です。これになったわけです。

$$(6.90)=\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\mathrm{ev}_*[\mathcal{M}(M,\beta_1)][N_1\times N_2\times x_i]\times\mathrm{ev}_*[\mathcal{M}(M,\beta_2)]\cdot[y_i\times N_3\times N_4] \tag{6.92}$$

こいつは、等しいことの $\beta_1+\beta_2=\beta$ になることの ev^* の $[\mathcal{M}(M,\beta_1)]\cdot[N_1\times N_2\times x_i]$ を取って、それで、もう一個、 ev^* の $[\mathcal{M}(M,\beta_2)]\cdot[y_i\times N_3\times N_4]$ を掛ける。こうなっているんです。

$$\mathrm{ev}_*[\mathcal{M}(M,\beta_1)]\cdot[N_1\times N_2\times x_i]=Q_{\beta_1}(N_1,N_2,x_i) \tag{6.93}$$

ここで、こいつを計算したいんですが。これは $Q_{\beta_1}(N_1,N_2,x_i)$ なんです。これは、ほとんど明らかでして。この diagonal という集合をここを分けて書く。ここがくっついていると分からないんです。

$$\begin{aligned}&\mathrm{ev}_*[\mathcal{M}(M,\beta_1)]\cdot[N_1\times N_2\times x_i]\\ =&\#\{\varphi\mid\varphi:S^2\to M,\ \varphi_*[S^2]=\beta_1,\ \varphi(0)\in N_1,\ \varphi(1)\in N_2,\ \varphi(\infty)=x_i\}\\ =&Q_{\beta_1}(N_1,N_2,x_i)\quad\square\end{aligned} \tag{6.94}$$

ついでに言うと、これがあれば、こっちも同じだから。そうすると、こっちは、$\mathrm{ev}_*[\mathcal{M}(M,\beta_2)[y_i\times N_3\times N_4]$ で。これを足し上げたやつが、この式に等しいというのが、ここで言いたかったことなんです。これを言えば、おしまいになるんですが。これは、ほとんど定義そのもので。これ、数ですね。 φ の数であって、 φ は、 S^2 から M であって、holomorphic はもう言いませんが、 φ の homology class が β_1 であって、 $\varphi(0)$ が N_1 に入って、 $\varphi(1)$ が N_2 に入って、 $\varphi(\infty)$ が x_i になる。定義によって、これが $Q_{\beta_1}(N_1,N_2,x_i)$ ですけれども。

そういうことで、証明が終わったんですが。何か、式を書いていると、長々しいんですが。アイディアさえ分かれば、これはすっと出てくる式で。簡単に覚えられる式なんですが。

$$\begin{array}{ccc}\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\sum_i Q_{\beta_1}(a,b,x_i)Q_{\beta_2}(y_i,c,d) & = & \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\sum_i Q_{\beta_1}(a,d,x_i)Q_{\beta_2}(b,c,y_i)\\ \downarrow & & \downarrow\\ (S^2,\text{点}\,a,\text{点}\,b)\cup_{1\text{ 点}}(S^2,\text{点}\,c,\text{点}\,d) & \overset{\mathcal{M}_{0,4}}{\rightsquigarrow} & (S^2,\text{点}\,a,\text{点}\,d)\cup_{1\text{ 点}}(S^2,\text{点}\,b,\text{点}\,c)\end{array} \tag{6.95}$$

こういう所から出発して、ここに a, b, c, d が載っている。この fiber にある数というのが、何か、 $Q_{\beta_1}(a,b,x_i)Q_{\beta_2}(y_i,c,d)$ なんです。最後に、ここが、こう変わって、 a, d の b, c になると、これは、いつのまにか、 $Q_{\beta_1}(a,d,x_i)Q_{\beta_2}(b,c,y_i)$ になる。これが、この話の筋です。だから、モジュライ空間、この中でこいつをつなぐことが。これ、大分、前に、交点数が well-defined であることを示したときに使ったものと、全く同じ cobordism argument ですね。One parameter family でこれを動かして、モジュライ空間が等しいということを証明した。

6.22 Massey 積:DGA から cohomology 環に落とすと失われる物

それで、Quantum cohomology の結合法則をやったんですが、後、いくつか、言葉を説明して終わります。

$$\begin{array}{ccc} H^*(M,\mathbb{Q}) & \rightsquigarrow & H^*(M,\Lambda) \\ \supset & \text{deform} & \supset Q \end{array} \tag{6.96}$$

今、コホモロジー環のカップ積というのが、こう、one parameter の Quatum cup 積というのに deform する。

$$M \to \text{DGA} \overset{\text{Massey 積?}}{\Leftrightarrow} H^*(M) \tag{6.97}$$

もっといろいろ deform したかったんですが。後、こういうことがいろいろあるわけですね。今、M に対して、こう、chain complex というのが決まるわけですね。DGA ですが。Differential graded algebra です。これを、cohomology 環に落としていまうと、一番、単純に失われるものとして、Massey 積というのがあるんです。気分を言いますと、Massey 積というのは、こういうものです。

$$u, v, w \in \Omega(M) \tag{6.98}$$

今ですね、differential graded algebra の中で、 u, v, w っていうのがあるとし ます。

$$du = dv = dw = 0 \tag{6.99}$$

例えば、 du も dv も dw も 0 だとしましょう。

$$[u \wedge v] = 0 \text{ とせよ} \tag{6.100}$$

$u \wedge v$ のコホモロジー類が 0 だとしなさい。

$$u \wedge v = dz \tag{6.101}$$

このとき、 $u \wedge v$ というのは、 dz と書けます。

$$u, v \text{ をうまく取って、} z = 0 \text{ とできるか？} \tag{6.102}$$

問題は、u, v をうまく取って、 z を 0 とできるかということですが。そうしたいわけです。コホモロジー・レベルで考えると、この、環の積は 0 なんです。だけど、コホモロジー・レベルでは、0 だからといって、chain として、0 に取れるかど うかは分からない。取れない場合というのがある。

$$[v \wedge w] = 0 \text{ とせよ} \quad v \wedge w = dy \tag{6.103}$$

例えば、 $v \wedge w$ のコホモロジー類も 0 だとします。そうすると、 $v \wedge w$ が dy と書けます。

$$\alpha = z \wedge w \pm u \wedge y \tag{6.104}$$

そこで、こういうやつを取るんです。 $z \wedge w \pm u \wedge y$ というのを α と置きます。

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad d\alpha &= dz \wedge w \Leftrightarrow u \wedge dy \\ &= u \wedge v \wedge w \Leftrightarrow u \wedge v \wedge w \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.105}$$

すると、 $dw = 0, du = 0$ より、 $d\alpha$ は $dz \wedge w \Leftrightarrow u \wedge dy$ ですね[1]。 $dz = u \wedge v, dy = v \wedge w$ ですから、これは、 $u \wedge v \wedge w \Leftrightarrow u \wedge v \wedge w$ です。本当に、0 になります。

$$[\alpha] \in H^*(M) \tag{6.106}$$

そこで、 α の cohomology classっていうのが、こう決まるわけです。

$$y \rightsquigarrow y' \quad (y \Leftrightarrow y' = a,\ du = 0) \tag{6.107}$$

y を y' に変えます。 $y \Leftrightarrow y'$ を a と置く。 du は 0 でした。

$$\alpha = z \wedge w \pm u \wedge y \rightsquigarrow z \wedge w \pm u \wedge y' = z \wedge w \pm u \wedge (y \Leftrightarrow a) = \alpha + u \wedge a \tag{6.108}$$

そうすると、 α というのは、 $\alpha \mp u \wedge a$ に変わります。

$$[\alpha] \in \frac{H^*(M)}{\{[u],[v] \text{ で生成される ideal}\}} \quad \text{well-defined} \tag{6.109}$$

α の cohomology class $[\alpha]$ というのは、どこの元として、well-defined かというと。コホモロジーの M を、 $[u]$ と $[w]$ で生成される ideal で割ったもの。こういう環の元として、well-defined になる。

$$M = \frac{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \middle| * \in \mathbb{R}^3 \right\}}{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \middle| * \in \mathbb{Z}^3 \right\}} \tag{6.110}$$

[1] こうなるように、 α は $z \wedge w + u \wedge y$ か $z \wedge w - u \wedge y$ を選んでおく。

で、これは 0 でない例がありまして、こういう風に。もう、時間がないので、これぐらいにしますが。これを M とすると。

$$\text{Massey 積} \neq 0 \tag{6.111}$$

これ、Massey 積と言うんですが、これは、0 でない。

$$\begin{array}{ccc} \text{Cup 積} & + & \underline{\text{Massey 積} + \text{ その高次元アナロジー}} \\ \downarrow & & \| \\ \text{Quantum cohomology } (M, J) & & M \text{ の } \mathbb{Q}\text{-homology type (if } \pi_1(M) : \text{nilpotent)} \end{array} \tag{6.112}$$

これの π_1 というのは、べき零リー群なんです。べき零リー群が abelian とずれるという問題なんですが。ずれの空間を、もうちょっと正確に言うと、Massey 積と。そういう意味で、これ、0 でないやつがあるんですが。これ、Massey 積というのが 2 次のなんですが、これを、こう、繰り返して行くと。こういうのを secondary operator というんですが。Cup 積、プラスと Massey 積と、その高次元アナロジーというのがたくさんあるんですね。こういうのを全部足すと、これが、 M の rational homotopy type というものになる。まあ、ちょっと、rational と言えないんだけど。大体、torsion を無視して、algebraic topology で分かる範囲は全部これになるということが知られています。但し、これ、 $\pi_1(M)$ が nilpotent ですね。だから、 π_1 があんまり。これ、多分、70 年代の知られているものですが。これの quantum ですね。こういうのは、できたんです。

6.23

$$\underline{\text{Massey 積} + \text{ その高次元アナロジー}} \quad \to \quad \text{これの quantum 版はできる！} \tag{6.113}$$

これができる。これの quantum version というのが実はある。ですから、講義の最初でお話ししたように、 M の空間というものを代数で近似して行って、代数をちょっと deform して、元の M の幾何学を対応させようということを考えるとします。このとき、カップ積の deformation は quantum cohomology でいいだろう。

$$M \text{ の homotopy 論} \overset{\text{ギャップ}}{\rightsquigarrow} M \text{ の differential topology} \tag{6.114}$$

で、Massey 積の deformation はある。だから、rational homotopy type の、ホモトピー論の中で、torsion に関わらないことに関しては、全部、deformation ができる。ということまではあるんです。ただ、これ、 M のホモトピー型というのと、これは、algebraic topology じゃなくて、differential topology ですが、 M のホモトピー。 Q なんですね、これ。で、分母が出てくるとだめだというのは、今、さきほどの orbifold になっちゃうんで、分母はあるので、整係数ホモトピー論でやろうと思うと、すでに、ホモロジーのレベルで正しいか分からないので、そこは、まだ、できていないんです。

ホモトピー論というのと、 M の differential topology というので、ギャップがあるんですね。ギャップというのは、algebraic topology のホモトピー群とかホモロジー群とか調べて分かる範囲では区別がつかないんだけれども、diffeo ではない。あの、exoticness とか、そういうのがいっぱいあるわけですが。

$$\begin{array}{l}\underline{\text{Sullivan}}\\ \text{up to finite}\\ n \geq 5,\ \pi_1 = 1\\ \text{homotopy+Pontrijagin 類で } M \text{ の differential topology は分かる}\end{array} \tag{6.115}$$

そこで、Sullivan という人は何をやったかというと、up to finite で、次元が 5 より大きければ、あと、単連結です。ホモトピー、プラスの Pontrijagin 類 — これは、特性類なんですが — これで分かる。で、 M の diffeo type が決まる。これが Sullivan の話です。

$$\underline{\text{問}}\quad \text{Pontrijagin 類の quantum version は何か？} \tag{6.116}$$

最初に、お話しした、空間の deformation という立場から言うと、ここと ここはいいから、後、Pontrijagin 類ぐらいが分かれば、diffeo type の deformation というのは、up to finite で、torsion 的なものを除いて分かっているということになります。で、それは、忘れて。どうやって考えれば分からない。だから、Pontrijagin 類の quantum version は何かというのをちょっと。これ、すぐに、出てくるものなんです。いくつか、考えることがあるんですが。

$$\begin{array}{l} n = 4,\ \pi_1 = 1\\ \exists\, M\\ \exists\, M_1, \ldots, M_k, \cdots : \text{無限個}\\ \text{s.t.} \begin{cases} M \approx M_i : \text{homeo.} \\ M_i \ncong M_j : \text{diffeo でない} \quad \text{if } i \neq j \end{cases}\end{array} \tag{6.117}$$

ついでに言いますと、これ、4 次元だけ、残っているわけです。 $n = 4$ で、単連結にしてもですね、homeo で diffeo でないものが無限個あるんですね。ある M に対して、 $M_1, \ldots,$ こう、何か、無限個あって、今、 M と M_i は全部、homeo なんだけれども、 M_i と M_j は、どれも diffeo でないんです。これは、多分、Donaldson ですね。Donaldson か Freedman ですけども。

4 次元の場合の Pontrijagin 類というのは、実は、ホモトピー型から決まるんです。Pontrijagin 類というのは、 H^4 というトップの次元からなんですが、大体、 M の交点 2 次形式で決まる。これは、何を言っているかというと、この Sullivan の notation の。これ、うそなんです 4 次元。このですね、Pontrijagin 類の quantum version ができてもまだ、だめなんだけれども。4 次元の場合はだめなんだけれども。その場合は何が要るかというのはよく分からない。Donaldson invariant の quantum version は何かなんていうのは。そんなのはよく分からないんで。ただ、こうやると、4 次元はだめかもしれない。とにかく、こういう流れを一つ考えて。そういうことをいくつか。この辺は、始まりでこうなっていて。でも、代数でしたやつを変形しているんですね。そうでなく

て、対応をもっとですね、50 年代、60 年代に考えていくと、変形したやつの見え方がいくつか見えないかというのは。まあ、そういうことのあれとして、私の興味を持った、そういう方法だけど、もっと具体的に、さっき言ったように。そういうことをやりたいんです。

Thank you !