

# Kodaira vanishing theorem for log canonical varieties

対数的標準特異点をもった多様体に対する小平の消滅定理

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

藤野 修\*

## 概要

対数的標準特異点なる特異点を許した射影的代数多様体に対し、小平の消滅定理を証明する。小平の消滅定理は様々な一般化が知られているが、極小モデル理論の観点から考えると、ここで述べる定理は最良の結果の一つであると思われる。ただし、対数的標準特異点を許した多様体に対する極小モデル理論を考える際には、小平の消滅定理の一般化の一つであるコラールの捻れ不在定理と消滅定理を、可約な多様体に対して定式化し直す方が正しいと思われる。この辺りの事情についても解説したいと思う。

## 目次

1	はじめに	2
2	主定理	4
3	特異点の定義	6
4	主定理の証明	7
5	小平の消滅定理が成り立たない例	13
6	川又-フィーベックの消滅定理が成り立たない例	17

---

\*〒 464-8602 名古屋市千種区不老町, e-mail: fujino@math.nagoya-u.ac.jp

## 1 はじめに

この報告書では、対数的標準特異点 (log canonical singularity) を許した代数多様体に対して、小平の消滅定理 (Kodaira vanishing theorem) を証明する。特殊な場合として、非特異射影的代数多様体に対する通常の小平の消滅定理も証明したことになる。ボホナートリック (Bochner trick) に依存する微分幾何的な証明ではなく、ホッジ理論に依存した証明である。ホッジ理論の若干の知識を仮定すれば、小平の消滅定理とその一般化が簡単に証明出来ることを味わっていただきたい。以下「つぶやき」となっている部分は、私の個人的な意見や、高次元代数多様体論の最新の話題に関することであり、興味のない人は読み飛ばすことを前提に書いてある。

内容について簡単にまとめておく。2章では小平の消滅定理とその一般化のいくつかを述べる。主定理もここで述べる。定理 2.3 が主定理である。3章では、代数多様体の特異点について簡単に復習する。この報告書に必要な程度しか説明しない。4章は主定理の証明である。ホッジ理論の結果を若干仮定するが、それ以外の部分は丁寧に説明する。5章ではソマーゼ (Sommesse) の例を詳しく解説する。今回の主定理がある意味最良であるということを示す例である。あまり知られていなかったと思うので、細部まで証明を書いておいた。5章はこの報告書のセールスポイントの一つである。通常の論文にはこのような面倒な計算の部分は書かず、結果だけを書くことが多いと思う。6章では小平の消滅定理の一般化の一つである川又-フィーベックの消滅定理が、対数的標準特異点を許した多様体上では必ずしも成立しないことを示す。このような例は文献内に見つけられないと思う。この6章もセールスポイントである。最後の7章では、対数的標準特異点を許した高次元代数多様体に対する極小モデル理論に不可欠と思われる、コラル (Kollár) の捻れ不在定理と消滅定理の一般化について述べる。証明はここでは与えない。

この報告書は、[K 森, §2.4 小平消滅定理] を読んだ後に読むとよいと思う。基本的にそこと同じスタイルで書いてある。ここでは、定理ごとに文献をあげたりすることはしなかった。消滅定理に関して言えば、別にオリジナルの文献で証明を読む必要はないと思うからである。

つぶやき 1.1 多賀城での講演を引き受けた際は、代数幾何学者のみの研

究集会だと勘違いしていたので、Theory of non-lc ideal sheaves なるタイトルで講演すると返事をしてしまった。最近の代数幾何の流行の一つは、ネーデル (Nadel) がファノ多様体のケーラー・アインシュタイン計量の研究の際に導入した乗数イデアル層 (multiplier ideal sheaves) を巧みに使う話である。多重種数の変形不変性の証明やフリップの存在定理の証明の中に、乗数イデアル層やその一般化が巧みに取り入れられている。乗数イデアル層というのは、極小モデル理論の観点から見ると、non-klt ideal sheaves というべきものである。klt でない部分を定義するイデアルと言ってよい。klt という条件は、解析的には二乗可積分条件に対応するので、ネーデルの解析的な話と極小モデル理論の話がうまく噛み合うのは、自然なことであった。非常に安直な考えであるが、lc でない部分を定義するイデアルも考えることが出来る。定義するのは誰でも出来る。これを non-lc ideal sheaves と勝手に名付けて研究を始めてみたのである。現在のところ道半ばで、これと言った大きな結果は出ていないが、non-lc ideal sheaves を導入し性質を調べるということは、非常に自然だと思われる。では、なぜ今まで誰も non-lc ideal sheaves を考えてこなかったのか? と疑問を持つのが自然であろう。理由は簡単である。乗数イデアル層の場合はネーデルの消滅定理という消滅定理があった。これは小平の消滅定理の直接的な一般化である。代数的な設定でネーデルの消滅定理を考えると、これは川又-フィーベックの消滅定理に他ならない。消滅定理の存在によって、乗数イデアル層の理論はたくさんの応用を持つ理論になっているのである。ここで素朴な疑問がわくのである。klt なる特異点を許す多様体上では小平の消滅定理は成立する。それでは、lc なる特異点まで許した多様体上でも小平の消滅定理は成り立つのか? もし成り立たないのなら、non-lc ideal sheaves なる概念を導入しても、ほとんど役に立たないのではないか? 結論を述べると、lc なる特異点を許しても小平の消滅定理は成立する。ただし、この消滅定理は現在のところ応用上ほとんど役に立たないような気がする。おそらく、小平の消滅定理の一般化であるコラールの捻れ不在定理と消滅定理を、大域的に埋め込まれた単純正規交差対 (global embedded simple normal crossing pairs) なる可約な多様体上に一般化するのが正しい方向であろう。これの非常に特殊な場合として、lc なる特異点を許した多様体上の小平の消滅定理が得られる。

謝辞. JSPS から科学研究補助金、若手研究 (A)20684001 を受けている。稲盛財団からも研究費の補助を受けている。また、数理解析研究所の中

山昇氏に有益なアドバイスを頂いた。感謝する。最後に、世話役の先生方にも感謝する。

## 2 主定理

主定理を述べる前に小平の消滅定理を述べておこう。

定理 2.1 (小平の消滅定理)  $Y$  を非特異射影的代数多様体とし、 $L$  を豊富なカルティエ因子とする。このとき、

$$H^i(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + L)) = 0$$

が任意の  $i > 0$  で成立する。セールの双対定理を用いると、

$$H^i(Y, \mathcal{O}_Y(-L)) = 0$$

が  $i < \dim Y$  で成立すると言っても良い。

つぶやき 2.2 上で述べた小平の消滅定理は本当の小平の消滅定理ではない。本来の小平の消滅定理は、 $Y$  はコンパクトケーラー多様体、 $\omega_Y$  は標準直線束で、 $\mathcal{L}$  は曲率が正なる計量をもつ直線束と仮定し、 $H^i(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}) = 0$  が  $i > 0$  で成立することを主張する。結果的に、曲率が正なる計量を持つ直線束  $\mathcal{L}$  が存在すると、そのコンパクトケーラー多様体は小平の埋め込み定理によって射影空間に埋め込めることが証明出来、 $\mathcal{L}$  が豊富な直線束になることが分かる。そこでセールの GAGA 原理を用いると、最終的には小平の消滅定理は定理 2.1 と同値であることが分かる。ただし、小平の埋め込み定理の証明にはオリジナルの小平の消滅定理が必要となるので、結局はコンパクトケーラー多様体上でボホナートリックを使って小平の消滅定理を証明することは避けられない。もちろん、代数幾何しか勉強しない人にとっては定理 2.1 の形で十分である。ボホナートリックは見た目より強力な手法で、小平の消滅定理と同じ証明で、複の単射性定理なるコホモロジー群の間の単射性を示すことが出来る。これはコラルの単射性定理のコンパクトケーラー多様体版である。1950 年代のテクニックで、コラルの 80 年代の結果よりいい結果が簡単に示せるという不思議な状況になっている。この辺りの話は、[藤 1] に詳しい。ただ、[藤 1] の 5 章の「その後の発展」の部分はちよつと間違っているかもしれない。現在忙しくて証明の確認まで手が回らない。そこに述べてある結果を使いたい人は、自分で証明をチェックしていただきたい。ここで懺悔しておく。

この報告書の主定理を述べよう。特異点については次の3章で解説する。

**定理 2.3**  $Y$  を射影的な代数多様体で、高々対数的標準特異点しか持たないとする。 $L$  は  $Y$  上の豊富なカルティエ因子とする。このとき

$$H^i(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + L)) = 0$$

が任意の  $i > 0$  に対して成立する。

**注意 2.4** 定理 2.3 の設定で、 $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(-L)) = 0$  は必ずしも  $i < \dim Y$  に対して成立しない。なぜなら、 $Y$  は必ずしもコーエン-マコーレーではないので、セールの双対定理が成り立たないからである。

注意 2.4 に関して具体例を一つ挙げておく。

**例 2.5**  $X$  を射影的正規 (projectively normal) なアーベル曲面  $S \subset \mathbb{P}^N$  上の錐体とする。 $f: Y \rightarrow X$  を頂点の爆発とする。さらに  $L$  を  $X$  上の豊富なカルティエ因子とする。まず、 $K_Y = f^*K_X - E$  が成立することに注意する。したがって、 $X$  は高々対数的標準特異点しか持たない。ただし、 $E$  は  $f$  の例外集合である。特に、 $E$  はアーベル曲面である。ルレイのスペクトル系列より、

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, f_*f^*\mathcal{O}_X(-L)) \rightarrow H^1(Y, f^*\mathcal{O}_X(-L)) \rightarrow H^0(X, R^1f_*f^*\mathcal{O}_X(-L)) \\ \rightarrow H^2(X, f_*f^*\mathcal{O}_X(-L)) \rightarrow H^2(Y, f^*\mathcal{O}_X(-L)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

をえる。よって、 $H^2(X, \mathcal{O}_X(-L)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(-L) \otimes R^1f_*\mathcal{O}_Y)$  が成立する。ここでは  $Y$  上で川又-フィーベックの消滅定理を使った。ところで、グラウエルト-リーメンシュナイダーの消滅定理より、 $R^qf_*\mathcal{O}_Y(-E) = 0$  がすべての  $q > 0$  で成立するので、 $R^qf_*\mathcal{O}_Y = H^q(E, \mathcal{O}_E)$  が任意の  $q > 0$  で成立する。したがって、 $H^2(X, \mathcal{O}_X(-L)) = \mathbb{C}^2$  である。一方、主定理を用いると、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) = 0$  がすべての  $i > 0$  で成立する。

**注意 2.6**  $X$  を射影的代数多様体とし、 $L$  を豊富なカルティエ因子とする。そもそも、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(-L)) = 0$  がすべての  $i < \dim X$  で成立したら、 $X$  はコーエン-マコーレーである。

**注意 2.7** 代数多様体間の双有理射に対するグラウエルト-リーメンシュナイダーの消滅定理は、相対的な川又-フィーベックの消滅定理の特殊な場合と見なせる。また、相対的な川又-フィーベックの消滅定理は、スペクトル系列を使った議論で、普通の川又-フィーベックの消滅定理から簡単に示すことが出来る。

先に進む前に、有理特異点しか持たない代数多様体についての小平の消滅定理を述べておく。

**定理 2.8**  $Y$  を射影的な代数多様体で、高々有理特異点しか持たないとする。 $L$  は  $Y$  上の豊富なカルティエ因子とする。このとき、

$$H^i(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + L)) = 0$$

が任意の  $i > 0$  に対して成立する。

**証明 2.9**  $f: X \rightarrow Y$  を特異点解消とする。このとき、 $f^*L$  は  $X$  上のネフで巨大な因子である。川又-フィーベックの消滅定理より、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + f^*L)) = 0$  が任意の  $i > 0$  に対して成立する。また、グラウエルト-リーメンシュナイダーの消滅定理より、 $R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X) = 0$  が任意の  $j > 0$  に対して成立する。また、 $Y$  は高々有理特異点しか持たないので、 $f_* \mathcal{O}_X(K_X) \simeq \mathcal{O}_Y(K_Y)$  である。ルレイのスペクトル系列と射影公式を用いれば、上で証明したことから、 $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + L)) = 0$  がすべての  $i > 0$  で成立する。

定理 2.8 の系として次の結果をえる。

**系 2.10**  $Y$  を射影的な代数多様体で、高々川又対数的末端特異点しか持たないとする。 $L$  は  $Y$  上の豊富なカルティエ因子とする。このとき、

$$H^i(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + L)) = 0$$

が任意の  $i > 0$  に対して成立する。

**証明 2.11**  $Y$  は高々有理特異点しか持たないことがよく知られている。したがって、上の定理より明らかである。

### 3 特異点の定義

ここでは特異点の定義について最低限のことだけを述べておく。詳しくは、[K 森, §2.3] を見ていただきたい。

**定義 3.1**  $X$  は正規多様体で、 $K_X$  は  $\mathbb{Q}$ -カルティエ因子と仮定する。つまり、正の整数  $m$  が存在し、 $mK_X$  がカルティエになるとする。 $f: Y \rightarrow X$

は特異点解消で、 $f$  の例外集合が  $Y$  上の単純正規交差因子になるものとする。このとき

$$K_Y = f^*K_X + \sum_i a_i E_i$$

と書ける。ただし、 $E_i$  達は  $f$  の例外素因子である。ここで、すべての  $i$  に対し、 $a_i > -1$  が成立するとき、 $X$  は高々川又対数的末端特異点 (klt と略す) を持つといい、すべての  $i$  に対し、 $a_i \geq -1$  が成立するとき、 $X$  は高々対数的標準特異点 (lc と略す) を持つという。

**注意 3.2**  $X$  は高々商特異点しか持たない正規代数多様体とする。このとき、 $X$  は高々川又対数的末端特異点しか持たないということが知られている。また、川又対数的末端特異点は有理特異点であることもよく知られている。

もう少し一般的な設定も書いておくと、主定理の理解には不要である。読み飛ばしても問題ない。帰納的な議論をするためには、以下のように「対 (pair)」を考える方が有効なのである。

**定義 3.3** (対に対する特異点)  $(X, B)$  は正規多様体  $X$  と  $\mathbb{R}$ -因子  $B$  の対とする。ここで、 $B$  は相異なる素因子  $B_i$  を用いて、 $B = \sum_i b_i B_i$  と表示する。ただし、 $b_i$  は非負な任意の実数とする。 $K_X + B$  はカルティエ因子の  $\mathbb{R}$ -線形結合で書けるとする。 $f: Y \rightarrow X$  を  $(X, B)$  の対数的特異点解消とする。つまり、 $Y$  は非特異、 $f$  は固有双有理射、 $f$  の例外集合  $E$  は  $Y$  上の単純正規交差因子で、 $E + \sum_i f_*^{-1} B_i$  も  $Y$  上の単純正規交差因子とする。ただし、 $f_*^{-1} B_i$  は  $B_i$  の  $Y$  上への固有変換である。

$$K_Y = f^*(K_X + B) + \sum_j a_j E_j$$

と書く。全ての  $j$  に対して  $a_j > -1$  のとき、対  $(X, B)$  は川又対数的末端対 (klt と略す) といい、 $a_j \geq -1$  のとき、対  $(X, B)$  は対数的標準対 (lc と略す) という。ただし、 $f_*(\sum_j a_j E_j) = -B$  となるように  $\sum_j a_j E_j$  は選んである。

## 4 主定理の証明

この章では、GAGA の原理があるので、コホモロジー群は複素解析的設定で計算する。まず最初にホッジ理論の結果を用意する。

定理 4.1  $V$  を非特異射影的代数多様体とし、 $\Sigma$  を  $V$  上の単純正規交差因子とする。 $\iota: V \setminus \Sigma \rightarrow V$  を自然な開埋め込み射とする。このとき自然な包含関係  $\iota_*\mathbb{C}_{V \setminus \Sigma} \subset \mathcal{O}_V(-\Sigma)$  は、全射

$$H_c^i(V \setminus \Sigma, \mathbb{C}) = H^i(V, \iota_*\mathbb{C}_{V \setminus \Sigma}) \rightarrow H^i(V, \mathcal{O}_V(-\Sigma))$$

を任意の  $i$  に対して引き起こす。

証明 4.2 (証明の概略)  $\iota_*\mathbb{C}_{V \setminus \Sigma}$  は複体  $\Omega_V^\bullet(\log \Sigma) \otimes \mathcal{O}_V(-\Sigma)$  と擬同型である。この複体からホッジ-ドラームのスペクトル系列をつくる。

$$E_1^{p,q} = H^q(V, \Omega_V^p(\log \Sigma) \otimes \mathcal{O}_V(-\Sigma)) \Rightarrow H_c^{p+q}(V \setminus \Sigma, \mathbb{C})$$

これが  $E_1$  で退化することが言えれば十分である。ここで、 $n = \dim V$  とおく。ポアンカレ双対より、 $H^{2n-(p+q)}(V \setminus \Sigma, \mathbb{C}) \simeq H_c^{p+q}(V \setminus \Sigma, \mathbb{C})^*$  が成立する。一方、セール双対より、 $H^{n-q}(V, \Omega_V^{n-p}(\log \Sigma)) \simeq H^q(V, \Omega_V^p(\log \Sigma) \otimes \mathcal{O}_V(-\Sigma))^*$  をえる。ドリーニュ (Deligne) のよく知られた結果より、

$${}'E_1^{n-p, n-q} = H^{n-q}(V, \Omega_V^{n-p}(\log \Sigma)) \Rightarrow H^{2n-(p+q)}(V \setminus \Sigma, \mathbb{C})$$

は  $E_1$  で退化する。よって、 $\sum_{p+q=i} \dim E_1^{p,q} = \dim H_c^i(V \setminus \Sigma, \mathbb{C})$  となるので、目的の  $E_1$  退化も得る。

注意 4.3 定理 4.1 で  $\Sigma = 0$  とすると、定理の主張は単なるホッジ分解から従う。つまり、 $\mathbb{C}_V \subset \mathcal{O}_V$  なる包含関係から導かれるコホモロジー群の間の写像

$$H^i(V, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(V, \mathcal{O}_V)$$

は、すべての  $i$  に対して全射である。以下の定理の証明で、 $S = 0$  の場合はこの注意で得られたコホモロジー群の間の全射で十分である。これはまさしく、コラール自身によるコラールの単射性定理、消滅定理の証明である。コラールの元々の証明は、もっと込み入った物であった。ここで述べたのは、彼自身による簡略化された証明である。

注意 4.4 定理 4.1 は、双対定理を用いることにより、ドリーニュのよく知られたホッジ理論の結果に帰着できた。コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造を考えることにより  $E_1$  退化を示す方が普通と思われる。そのためには、重みフィルトレーションを考える必要がある。ここでは証明をサボったわけである。消滅定理の証明には重みフィルトレーションを使う必要はないからである。7章で述べる結果を示すためには、もっと丁寧に混合ホッジ構造を考える必要がある。



次にコホモロジー群の間の単射性定理を示す。これだけでも十分強力な結果で、小平の消滅定理（定理 2.1）の一般化になっている。 $S = 0$ の時はコラールの結果で、 $S \neq 0$ の時はエノー–フィーベックの結果と思う。正直な話、たくさんの人が貢献しているので、誰の結果と言ってよいのかよくわからない。

**定理 4.5**  $X$  を非特異射影的な代数多様体とし、 $S$  を  $X$  上の単純正規交差因子とする。 $M$  は  $X$  上のカルティエ因子とする。 $X$  上に非特異な因子  $D$  が存在し、 $dD \sim mM$  が成立すると仮定する。ただし、 $d$  と  $m$  は互いに素な正の整数で、 $d < m$  を満たし、 $D$  と  $S$  は共通成分なしで、 $D + S$  は単純正規交差因子だと仮定する。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + M)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + M + bD))$$

はすべての正の整数  $b$  と任意の  $i$  に対して単射である。ただし、上の写像は自然な包含写像  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(bD)$  から導かれた物とする。

以下の証明は、 $S = 0$  の時のコラールの証明を一般化しただけである。

**証明 4.6**  $dD \sim mM$  より、 $D$  で分岐する  $m$  重巡回被覆  $\pi : Y \rightarrow X$  を構成出来る。 $T = \pi^*S$  とおくと、 $Y$  は非特異で  $T$  は  $Y$  上の単純正規交差因子になる。 $\iota : Y \setminus T \rightarrow Y$  を自然な開埋め込みとする。すると、包含関係  $\iota_*\mathbb{C}_{Y \setminus T} \subset \mathcal{O}_Y(-T)$  は次の全射

$$H^i(Y, \iota_*\mathbb{C}_{Y \setminus T}) \rightarrow H^i(Y, \mathcal{O}_Y(-T))$$

を任意の  $i$  に対して導く。 $\pi$  は有限射なので、高次順像はすべて消え、

$$H^i(X, \pi_*\iota_*\mathbb{C}_{Y \setminus T}) \rightarrow H^i(X, \pi_*\mathcal{O}_Y(-T))$$

が任意の  $i$  に対して全射ということがわかる。巡回群  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  の作用により、固有層分解

$$\pi_*\iota_*\mathbb{C}_{Y \setminus T} = \bigoplus_{k=0}^{m-1} G_k$$

と

$$\pi_*\mathcal{O}_Y(-T) = \bigoplus_{k=0}^{m-1} \mathcal{O}_X(-S - kM + \lfloor \frac{kd}{m} \rfloor D)$$

をえる。ただし、 $G_k \subset \mathcal{O}_X(-S - kM + \lfloor \frac{kd}{m} \rfloor D)$  となるように添字を付けておく。直和因子をとることにより、

$$H^i(X, G_1) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M))$$

はすべての  $i$  に対して全射である。層  $G_1$  は  $D$  の周りで自明でないモノドロミーを持つので、 $H^0(U, G_1|_U) = 0$  が成立する。ただし、 $U \subset X$  は  $U \cap D \neq \emptyset$  となるような連結な開集合とする。

補題.  $F$  は位相空間  $X$  上のアーベル群の層とし、 $F_1, F_2 \subset F$  は部分層とする。 $D \subset X$  は閉部分集合とする。次の2つの条件を仮定する。

- (1)  $F_2|_{X \setminus D} = F|_{X \setminus D}$ ,
- (2) もし  $U$  が連結開集合であり  $U \cap D \neq \emptyset$  を満たすならば、 $H^0(U, F_1|_U) = 0$  が成立する。

このとき、 $F_1$  は  $F_2$  の部分層である。

証明は明らかである。この補題をつかうと、 $G_1 \subset \mathcal{O}_X(-S - M)$  は  $G_1 \subset \mathcal{O}_X(-S - M - bD) \subset \mathcal{O}_X(-S - M)$  と分解する。ただし、 $b$  は任意の正の整数である。従って、全射

$$H^i(X, G_1) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M))$$

は

$$H^i(X, G_1) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M - bD)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M))$$

と分解するので、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M - bD)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(-S - M))$$

はすべての  $i$  に対して全射である。セール双対を使うと、目的の単射をえる。

定理 4.5 の直接的な系として、次の結果を得る。乗松の消滅定理として知られている。 $S = 0$  とすると、通常の小平の消滅定理 (定理 2.1) である。

系 4.7 (乗松の消滅定理)  $X$  を非特異射影的な代数多様体とし、 $S$  を  $X$  上の単純正規交差因子とする。 $L$  を  $X$  上の豊富なカルティエ因子とする。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + L)) = 0$$

がすべての  $i > 0$  に対して成立する。

証明 4.8  $|mL|$  が固定点自由になるような正の整数  $m \geq 2$  をとる。 $|mL|$  の一般元を  $D$  とすると、 $D \sim mL$ 、 $D$  と  $S$  は共通成分なしで、 $D + S$  は単純正規交差因子と出来る。定理 4.5 より

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + L)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + L + bD))$$

がすべての正の整数  $b$  に対して単射である。セールの消滅定理より、 $i > 0$  なら右辺は  $b \gg 0$  で零である。よって、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + L)) = 0$  が任意の  $i > 0$  で成立する。

次の定理で  $S = 0$  のときは、コラールの消滅定理としてよく知られている。後で見るように、この定理は定理 2.3 を含んでいると言ってよい。

定理 4.9  $f: X \rightarrow Y$  を非特異射影的代数多様体  $X$  から射影的代数多様体  $Y$  への射とする。 $S$  は  $X$  上の単純正規交差因子とし、 $L$  は  $Y$  上の豊富なカルティエ因子とする。このとき

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) = 0$$

が任意の  $i > 0$  と  $j \geq 0$  に対して成立する。

証明 4.10  $n$  を正の整数で  $n \geq 2$  とし、 $|nL|$  は固定点自由な線形系とする。この  $n$  は証明の途中で注意するように、十分大きく取っておく必要がある。 $D \in |nL|$  を一般の元とし、 $Z = f^{-1}(D)$  は非特異で  $Z + S$  は  $X$  上の単純正規交差因子になるように取っておく。ここで定理 4.5 を使うと、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L + bZ))$$

は任意の正の整数  $b$  とすべての  $i$  に対して単射である。以下、 $\dim Y$  についての帰納法で定理をしめす。 $\dim Y = 0$  なら自明である。短完全列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L) &\rightarrow \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*(1+n)L) \\ &\rightarrow \mathcal{O}_Z(K_Z + S|_Z + f^*L|_Z) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

を考える。高次順像をとって、 $D$  が  $|nL|$  の一般元であることに注意すると、任意の  $j$  に対し、

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L) &\rightarrow R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y((1+n)L) \\ &\rightarrow R^j f_* \mathcal{O}_Z(K_Z + S|_Z) \otimes \mathcal{O}_D(L) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

を得る。帰納法の仮定と、上の短完全列から得られるコホモロジー群の長完全列より、

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) \simeq H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y((1+n)L))$$

が  $i \geq 2$  で成立する。セールの消滅定理より

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y((1+n)L)) = 0$$

が  $n \gg 0$  で成立する。もう少し正確に言うと、最初にこのコホモロジー群が消滅する程度に  $n$  を十分大きくとっておくのである。よって

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) = 0$$

が任意の  $i \geq 2$  で成立する。全く同じ議論により、

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L + bD)) = 0$$

が任意の  $i \geq 2$  と任意の正の整数  $b$  に対して成立することを注意しておく。次にルレイのスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L + bD)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L + bZ))$$

を考える。ただし、 $b$  は非負整数とする。すでに上で示した結果より、短完全列

$$0 \rightarrow E_2^{1,j} \rightarrow E^{j+1} \rightarrow E_2^{0,j+1} \rightarrow 0$$

をえる。これから次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow H^1(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) & \longrightarrow & H^{j+1}(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L)) \\ & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$0 \longrightarrow H^1(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L + bD)) \longrightarrow H^{j+1}(X, \mathcal{O}_X(K_X + S + f^*L + bZ))$$

をえる。右の垂直方向の矢印は単射なので、左の垂直方向の矢印

$$H^1(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) \rightarrow H^1(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L + bD))$$

は、任意の正の整数  $b$  に対して単射である。セールの消滅定理より、

$$H^1(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X + S) \otimes \mathcal{O}_Y(L)) = 0$$

も従う。よって、目的の消滅定理を得る。

ここまでくると、この報告書の主定理の証明は簡単である。

証明 4.11 (定理 2.3 の証明)  $f : X \rightarrow Y$  を特異点解消とする。ただし、 $f$  の例外集合  $S$  が  $X$  上の単純正規交差因子になるように  $f$  を選ぶ。これは広中の定理で保証されている。このとき、対数的標準特異点の定義より  $f_*\mathcal{O}_X(K_X + S) \simeq \mathcal{O}_Y(K_Y)$  が成立する。ゆえに、主定理は定理 4.9 より従う。

## 5 小平の消滅定理が成り立たない例

ここでは、ソメーゼによる小平の消滅定理が成立しない多様体の例を解説する。私は定理 2.3 を証明するまで、この例を知らなかった。意外と知られていないような気がするので、丁寧に解説しておく。

命題 5.1 (ソメーゼ)  $\mathbb{P}^1$  上の  $\mathbb{P}^3$  束  $\pi : Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 3}) \rightarrow \mathbb{P}^1$  を考える。 $\mathcal{M} = \mathcal{O}_Y(1)$  をトートロジー的直線束 (tautological line bundle) とする。線形系  $|(M \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^{\otimes 4}|$  の一般元を  $X$  とすると、 $X$  は 3 次元正規射影的代数多様体でゴレンシュタインであり、対数的標準特異点より悪い特異点をもつ。ここで、 $\mathcal{L} = \mathcal{M} \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$  とおくと、 $\mathcal{L}$  は豊富な直線束である。このとき、 $H^2(X, \mathcal{L}^{-1}) = \mathbb{C}$  である。セール双対をつかうと、 $H^1(X, \mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{L}) = \mathbb{C}$  である。よって、小平の消滅定理は成立しない。

証明 5.2 短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^{-1}(-X) \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}|_X \rightarrow 0$$

より

$$\cdots \rightarrow H^i(Y, \mathcal{L}^{-1}(-X)) \rightarrow H^i(Y, \mathcal{L}^{-1}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{L}^{-1}) \rightarrow H^{i+1}(Y, \mathcal{L}^{-1}(-X)) \rightarrow \cdots$$

をえる。通常の小平の消滅定理より、 $H^i(Y, \mathcal{L}^{-1}) = 0$  が  $i < 4$  で成立する。よって、

$$H^2(X, \mathcal{L}^{-1}) = H^3(Y, \mathcal{L}^{-1}(-X))$$

である。したがって、

$$H^3(Y, \mathcal{L}^{-1}(-X)) = \mathbb{C}$$

を示せば十分である。

以後、 $\mathcal{O}_X(K_X)$  を  $K_X$  のように略して書くことにする。定義より、

$$K_Y = \pi^*(K_{\mathbb{P}^1} \otimes \det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 3})) \otimes \mathcal{M}^{-4} = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes \mathcal{M}^{-4}$$

である。また、

$$\mathcal{L}^{-1}(-X) = \mathcal{M}^{-1} \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \otimes \mathcal{M}^{-4} \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4) = \mathcal{M}^{-5} \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$$

である。 $\mathcal{M} = \mathcal{O}_Y(1)$  であったことを思い出すと、 $R^i\pi_*\mathcal{M}^{-5} = 0$  が  $i \neq 3$  で成立することは明らかである。次に  $R^3\pi_*\mathcal{M}^{-5}$  を計算する。グロタンディーク双対より

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathbb{R}\pi_*\mathcal{M}^{-5}, K_{\mathbb{P}^1}[1]) = \mathbb{R}\pi_*\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}^{-5}, K_Y[4])$$

である。もう一回つかって、

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\pi_*\mathcal{M}^{-5} &= \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathbb{R}\pi_*\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}^{-5}, K_Y[4]), K_{\mathbb{P}^1}[1]) \\ &= \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathbb{R}\pi_*(K_Y \otimes \mathcal{M}^5), K_{\mathbb{P}^1})[-3] = (*) \end{aligned}$$

である。一方、

$$K_Y \otimes \mathcal{M}^5 = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes \mathcal{M}$$

である。よって、 $R^i\pi_*(K_Y \otimes \mathcal{M}^5) = 0$  が全ての  $i > 0$  で成立する。また、

$$\pi_*(K_Y \otimes \mathcal{M}^5) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes \pi_*\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 3}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)^{\oplus 3}$$

である。これより

$$(*) = \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)^{\oplus 3}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))[-3] = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4)^{\oplus 3})[-3]$$

をえる。ゆえに、 $R^3\pi_*\mathcal{M}^{-5} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4)^{\oplus 3}$  である。したがって、 $R^3\pi_*\mathcal{M}^{-5} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3}$  をえる。

スペクトル系列をつかうと、

$$\begin{aligned} H^3(Y, \mathcal{L}^{-1}(-X)) &= H^3(Y, \mathcal{M}^{-5} \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)) \\ &= H^0(\mathbb{P}^1, R^3\pi_*(\mathcal{M}^{-5} \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))) \\ &= H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3}) = \mathbb{C} \end{aligned}$$

である。以上で、 $H^2(X, \mathcal{L}^{-1}) = \mathbb{C}$  が示せたことになる。

$X$  は  $|(\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^{\otimes 4}|$  の一般元であった。

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 3} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0$$

に対応する  $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  の切断を負切断  $C$  と書くことにする。 $|(\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^{\otimes 4}|$  が負切断  $C$  の外で固定点自由が言えると、 $X$  は余次元1で非特異がわかる。また、 $X$  は非特異な多様体  $Y$  の上のカルティエ因子なので、もちろんコーエン-マコーレーである。よって、 $X$  は正規である。随伴公式をつかって、 $X$  はゴレンシュタインであることも分かる。

以下、 $|(\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^{\otimes 4}|$  が  $C$  の外で固定点自由であることを確認して行く。もっと強く、 $|\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)|$  が  $C$  の外で固定点自由であることを証明する。まず、 $Z \in |\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)| \neq \emptyset$  とする。 $H^0(Y, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0$  より、 $Z$  は  $\pi$  のファイバーを既約成分に持てない。つまり、 $Z$  の任意の既約成分は  $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  で  $\mathbb{P}^1$  に支配的におちる。また、 $l$  を  $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  のファイバー内の直線とすると  $Z \cdot l = 1$  である。よって、 $Z$  は既約である。 $F = \mathbb{P}^3$  を  $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  のファイバーの一つとする。

$$\begin{aligned} 0 &= H^0(Y, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \otimes \mathcal{O}_Y(-F)) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \\ &\rightarrow H^0(F, \mathcal{O}_F(1)) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \otimes \mathcal{O}_Y(-F)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

を考える。 $(\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \cdot C = -1$  より、 $|\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)|$  の全ての元は  $C$  を含む。 $F \cap C = P$  とすると、

$$\alpha : H^0(Y, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \rightarrow H^0(F, \mathcal{O}_F(1))$$

の像は  $H^0(F, m_P \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$  である。なぜなら、左のコホモロジー群の次元は3次元だからである。ただし、 $m_P$  は  $P$  の極大イデアルである。このファイバーへの制限の話より、 $|\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)|$  は  $C$  の外では固定点自由が分かった。特に、 $|(\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^{\otimes 4}|$  も  $C$  の外で固定点自由である。定理 2.3 を使うと、 $X$  は対数的標準特異点より悪い特異点を持つことも分かる。

もう少し別の見方をすると、単射

$$\alpha : H^0(Y, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \rightarrow H^0(F, \mathcal{O}_F(1))$$

の像は  $H^0(F, m_P \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$  で、

$$H^0(Y, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 3}) = \mathbb{C}^3$$

で

$$H^0(Y, (\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^{\otimes 4}) = H^0(\mathbb{P}^1, \text{Sym}^4(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 3})) = \mathbb{C}^{15}$$

である。 $H^0(Y, (\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^{\otimes 4})$  の  $F$  への制限は  $\text{Sym}^4 H^0(F, m_P \otimes \mathcal{O}_F(1))$  である。よって、 $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  の一般ファイバー  $f$  は、 $P = f \cap C$  を頂点とする平面 4 次曲線上の錐体である。したがって、食い違い係数の計算から、対  $(Y, X)$  は対数的標準対ではない。なぜなら、 $X$  は  $C$  を 4 重に含むからである。もし  $X$  が高々対数的標準特異点しか持たないならば、逆随伴定理より、 $(Y, X)$  は対数的標準対でなければならない。よって、 $X$  は対数的標準特異点より悪い特異点を持つ。

いずれにせよ、 $X$  は主張通りの性質を持った多様体であることが分かった。

**注意 5.3** 上の命題では、 $H^2(X, \mathcal{L}^{-1}) \neq 0$  であった。 $\mathbb{P}^1$  上の  $\mathbb{P}^{k+1}$  束  $\pi: Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus(k+1)}) \rightarrow \mathbb{P}^1$  を考え、 $\mathcal{M} = \mathcal{O}_Y(1)$ 、 $\mathcal{L} = \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$  とおく。ただし、 $k \geq 2$  とする。このとき、 $\mathcal{L}$  は豊富直線束である。 $|(\mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^{\otimes(k+2)}|$  の一般元を  $X$  とすると、命題 5.1 と全く同じ方法で以下のことが証明出来る。

- (1)  $X$  は  $k+1$  次元正規な射影的代数多様体で、ゴレンシュタインである。
- (2)  $X$  は対数的標準特異点より悪い特異点を持つ。
- (3)  $R^{k+1} \pi_* \mathcal{M}^{-(k+3)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1-k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2-k)^{\oplus(k+1)}$  で、 $i \neq k+1$  なら  $R^i \pi_* \mathcal{M}^{-(k+3)} = 0$  が成立する。
- (4)  $\mathcal{L}^{-1}(-X) = \mathcal{M}^{-(k+3)} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k+1)$  より、

$$\begin{aligned} H^{k+1}(Y, \mathcal{L}^{-1}(-X)) &= H^0(\mathbb{P}^1, R^{k+1} \pi_* \mathcal{M}^{-(k+3)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k+1)) \\ &= H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus(k+1)}) = \mathbb{C} \end{aligned}$$

である。

以上で、 $H^k(X, \mathcal{L}^{-1}) = H^{k+1}(Y, \mathcal{L}^{-1}(-X)) = \mathbb{C}$  をえる。 $k=2$  のときが命題 5.1 である。

コホモロジー群  $H^1$  については、次の定理があることに注意しておく。



定理 5.4 (マンフォード)  $V$  を正規で完備な代数多様体とし、 $\mathcal{L}$  を半豊富 (semi-ample) な直線束とする。さらに  $\kappa(V, \mathcal{L}) \geq 2$  を仮定する。このとき、 $H^1(V, \mathcal{L}^{-1}) = 0$  が成立する。

証明 5.5  $f: W \rightarrow V$  を特異点解消とする。ルレイのスペクトル系列より

$$0 \rightarrow H^1(V, f_* f^* \mathcal{L}^{-1}) \rightarrow H^1(W, f^* \mathcal{L}^{-1}) \rightarrow \dots$$

をえる。 $W$  上で川又-フィーベックの消滅定理を使うと、 $H^1(W, f^* \mathcal{L}^{-1}) = 0$  である。とくに、 $H^1(V, \mathcal{L}^{-1}) = H^1(V, f_* f^* \mathcal{L}^{-1}) = 0$  をえる。

## 6 川又-フィーベックの消滅定理が成り立たない例

この章では川又-フィーベックの消滅定理について考える。川又-フィーベックの消滅定理はいろいろな形が知られているが、ここでは以下の定式化を採用する。

定理 6.1 (川又-フィーベックの消滅定理)  $X$  を射影的な代数多様体で、高々川又対数的末端特異点しか持たないとする。 $D$  は  $X$  上の  $\mathbb{Q}$ -カルティエなヴェイユ因子で、 $D - K_X$  はネフかつ巨大とする。このとき

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$$

が任意の  $i > 0$  に対して成立する。

$X$  が対数的標準特異点を持つとき、定理 6.1 は一般には成り立たない。それを次の例で見よう。

例 6.2  $V = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  とおき、 $p_i: V \rightarrow \mathbb{P}^2$  を  $i$  番目への射影とする。 $\mathcal{L} = p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$  とおいて、 $V$  上の  $\mathbb{P}^1$  束  $\pi: W = \mathbb{P}_V(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_V) \rightarrow V$  を考える。 $\pi$  の負切断、つまり、 $\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow 0$  に対応する  $\pi$  の切断を  $F = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  とおく。線形系  $|\mathcal{O}_W(1) \otimes \pi^* p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$  を使うと、負切断  $F = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  を  $\mathbb{P}^2 \times \{1 \text{ 点}\}$  に潰せる。

次に楕円曲線  $C \subset \mathbb{P}^2$  を考える。 $Z = C \times C \subset V = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  とおく。 $\pi: W \rightarrow V$  の  $Z$  への制限を  $\pi: Y \rightarrow Z$  とおく。先程の収縮写像  $\Phi_{|\mathcal{O}_W(1) \otimes \pi^* p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|}: W \rightarrow U$  の  $Y$  への制限を  $f: Y \rightarrow X$  と書く。すると、

$f: Y \rightarrow X$  の例外集合は  $E = F|_Y = C \times C$  で、 $f$  は  $E$  を  $C \times \{1 \text{ 点}\}$  に潰す。

$\mathcal{O}_W(1)$  を  $\mathbb{P}^1$  束  $\pi: W \rightarrow V$  のトートロジー的直線束とすると、構成方法から  $\mathcal{O}_W(1) = \mathcal{O}_W(D)$  である。ただし、 $D$  は  $\pi$  の正切断、つまり、 $\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$  に対応する  $\pi$  の切断である。すると、

$$K_W = \pi^*(K_V \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_W(-2)$$

が成り立ち、随伴公式を使うと、

$$K_Y = \pi^*(K_Z \otimes \mathcal{L}|_Z) \otimes \mathcal{O}_Y(-2) = \pi^*(\mathcal{L}|_Z) \otimes \mathcal{O}_Y(-2)$$

が成立する。 $E = F|_Y$  で、

$$\mathcal{O}_Y(K_Y + E) = \pi^*(\mathcal{L}|_Z) \otimes \mathcal{O}_Y(-2) \otimes \mathcal{O}_Y(E)$$

である。また、 $\mathcal{O}_Y(E) \otimes \pi^*(\mathcal{L}|_Z) \simeq \mathcal{O}_Y(D)$  に注意する。先程述べたことから  $\mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_Y(D)$  なので、 $\mathcal{O}_Y(-(K_Y + E)) = \mathcal{O}_Y(1)$  を得る。ゆえに、 $-(K_Y + E)$  はネフかつ巨大である。また、 $f^*K_X = K_Y + E$  が分かるので、 $-K_X$  もネフかつ巨大である。

$X$  についてももう少し詳しく見ておこう。まず、 $X$  は3次元の射影的な代数多様体である。 $X$  は楕円曲線上の錐体を並べたもので、 $X$  はコーエン-マコーレーであることがわかる。もっと言うと、 $X$  はグレンシュタインである。 $X$  は曲線  $G = f(E)$  にそって、対数的標準だが川又対数的末端よりも悪い特異点を持つことも簡単にわかる。 $G$  以外のところでは非特異である。

最後に短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J} \rightarrow 0$$

を考える。ただし、 $\mathcal{J}$  は  $X$  の乗数イデアル層である。乗数イデアル層に不慣れな人は、下の注意 6.3 を見よ。今の場合、 $\mathcal{J} = f_*\mathcal{O}_Y(-E) = \mathcal{I}_G$  であることがすぐに分かる。もちろん  $\mathcal{I}_G$  は  $G$  の  $X$  内での定義イデアル層である。 $-K_X$  がネフかつ巨大であるので、ネーデルの消滅定理を使うと、

$$H^i(X, \mathcal{J}) = 0$$

が任意の  $i > 0$  で成立する。よって、 $H^i(X, \mathcal{O}_X) = H^i(G, \mathcal{O}_G)$  がすべての  $i > 0$  で成立する。 $G$  は楕円曲線だったので、 $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^1(G, \mathcal{O}_G) = \mathbb{C}$  である。これは川又-フィーベックの消滅定理が対数的標準特異点を許した多様体上では一般に成立しないことを示している。

**注意 6.3** 乗数イデアル層やネーデルの消滅定理に不慣れな人のための補足である。 $\mathcal{J} = f_*\mathcal{O}_Y(-E)$  とおくと、 $\mathcal{J} = \mathcal{I}_G$  は明らかである。次に、短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-E) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$$

を考える。これを  $X$  に落とすと、

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y(-E) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_E \rightarrow R^1f_*\mathcal{O}_Y(-E) \rightarrow \dots$$

である。 $f^*K_X = K_Y + E$  とグラウエルト-リーメンシュナイダーの消滅定理より、 $R^j f_*\mathcal{O}_Y(-E) = 0$  が任意の  $j > 0$  に対して成立する。よって、短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_G \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_G \simeq f_*\mathcal{O}_E \rightarrow 0$$

を得る。一方、 $-K_X$  はネフかつ巨大で  $-E = K_Y - f^*K_X$  なので、川又-フィーベックの消滅定理を使うと、すべての  $i > 0$  に対して  $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(-E)) = 0$  が成り立つ。スペクトル系列と  $R^j f_*\mathcal{O}_Y(-E) = 0$  がすべての  $j > 0$  で成立することに注意すると、任意の  $i > 0$  に対して  $H^i(X, f_*\mathcal{O}_Y(-E)) = 0$  を得る。つまり、 $H^i(X, \mathcal{J}) = 0$  がすべての  $i > 0$  で成立する。

**注意 6.4** ネフかつ巨大ではなく、ネフかつ対数的巨大 (log big) という条件にすれば、 $X$  に対数的標準特異点を許しても川又-フィーベックの消滅定理 (定理 6.1) は成立する。豊富な因子は、ネフかつ対数的巨大であることを注意しておく。ただし、この一般化の証明はかなり面倒である。詳しくは [F1] を見ていただきたい。

## 7 進んだ話題

ここでは [F1] に従って対数的標準対の極小モデル理論で必要となるコラールの定理の一般化を説明する。この章では、用語等に関しては詳しく説明しない。極小モデル理論の最近の大発展については、[藤2] を見ていただきたい。

$M$  を非特異代数多様体とし、 $Y$  を  $M$  上の被約な単純正規交差因子とする。 $D$  は  $M$  上の  $\mathbb{R}$ -因子で、 $D = \sum_i d_i D_i$  と書いたとき、全ての  $i$  に対して  $D_i$  は  $M$  上の素因子で、 $0 \leq d_i \leq 1$  が成立するとする。さらに、 $D$  と  $Y$  は共通成分を持たず、 $\text{Supp}(D + Y)$  は  $M$  上の単純正規交差因子とする。このとき  $B = D|_Y$  とおく。以下、対  $(Y, B)$  について考える。 $\nu: Y' \rightarrow Y$

を  $Y$  の正規化とし、 $K_{Y'} + B_{Y'} = \nu^*(K_Y + B)$  とおくと、 $(Y', B_{Y'})$  は対数的標準対である。 $Y$  の既約成分と、 $(Y', B_{Y'})$  の対数的標準中心 (log canonical center) の  $\nu$  での像を  $(Y, B)$  の階層 (stratum) とよぶ。さらに、 $Y$  上の  $\mathbb{R}$ -カルティエ因子  $A$  の台が  $(Y, B)$  のどの階層も含まないとき、 $A$  は許容可 (permissible) と呼ぶ。すると、コラールの単射性定理 (cf. 定理 4.5) の一般化として次の定理を得る。

**定理 7.1**  $Y$  は完備と仮定する。 $L$  を  $Y$  上のカルティエ因子とし、 $A$  を  $Y$  上の有効カルティエ因子で  $(Y, B)$  に関して許容可とする。さらに次を仮定する。

- (1)  $L \sim_{\mathbb{R}} K_Y + B + H$  が成立する。
- (2)  $H$  は半豊富な  $\mathbb{R}$ -カルティエ因子である。
- (3)  $(Y, B)$  に関して許容可能な有効  $\mathbb{R}$ -カルティエ因子  $A'$  と正の実数  $t$  が存在し、 $tH \sim_{\mathbb{R}} A + A'$  とかける。

このとき、包含射  $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y(A)$  から自然に引き起こされるコホモロジー群の間の射

$$H^q(Y, \mathcal{O}_Y(L)) \rightarrow H^q(Y, \mathcal{O}_Y(L + A))$$

は任意の  $q$  に対し単射である。

定理 7.1 から次の定理を得る。(1) はコラールの捻れ不在定理の一般化で、(2) はコラールの消滅定理の一般化である。

**定理 7.2**  $f: Y \rightarrow X$  を固有射とし、 $L$  を  $Y$  上のカルティエ因子とする。さらに、 $H \sim_{\mathbb{R}} L - (K_Y + B)$  は  $f$ -半豊富と仮定する。このとき、以下の 2 つの主張を得る。

- (1)  $R^q f_* \mathcal{O}_Y(L)$  の全ての (零でない) 局所切断の台は、 $(Y, B)$  の幾つかの階層の  $f$  での像を含む。
- (2)  $\pi: X \rightarrow V$  を射影射とし、 $X$  上の  $\pi$ -豊富な  $\mathbb{R}$ -カルティエ  $\mathbb{R}$ -因子  $H'$  によって  $H \sim_{\mathbb{R}} f^* H'$  と書けるとする。このとき、 $R^p \pi_* R^q f_* \mathcal{O}_Y(L) = 0$  がすべての  $p > 0$  と  $q \geq 0$  に対して成立する。

詳しい用語の解説と証明は、[F1]を見ていただきたい。非コンパクトな  $V$ -正規交差多様体というべきものの上でコンパクト台コホモロジー群を考え、そこに入る混合ホッジ構造を解析するという非常に面倒な証明である。この定理 7.2 を用いると、対数的標準対についての極小モデル理論の枠組みが完成する。つまり、錐定理 (cone theorem) や収縮定理 (contraction theorem)、固定点自由化定理 (base point free theorem) が対数的標準対に対して証明出来るのである。この辺りの話は、元々アンブロ (Ambro) のアイデアである。詳しい話は [F2] を見ていただきたい。

補足 7.3 この補足を書いているのは、2008 年 6 月 7 日である。現在の予定では、[F1] を出版する気はない。いくつかの未出版のプレプリントをまとめて、[F3] として出版する予定である。また、数理研の研究集会「Bergman 核と代数幾何への応用」で、消滅定理について 3 日間の連続講演をおこなった。講究録の方にも概説を書く予定である。そちらも見て頂けるとありがたい。

## 参考文献

- [藤 1] 藤野 修, On Kollár's injectivity theorem (コラールの単射性定理について), 数理解析研究所講究録, no. 1550, 131–140 (2007).
- [藤 2] 藤野 修, 極小モデル理論の新展開, 雑誌数学の論説として掲載決定.
- [F1] O. Fujino, Vanishing and injectivity theorems for LMMP, preprint (2007).
- [F2] O. Fujino, Lectures on the log minimal model program, preprint (2007).
- [F3] O. Fujino, Introduction to the log minimal model program for log canonical pairs, in preparation.
- [K 森] J. Kollár, 森重文, 双有理幾何学, 岩波書店, 1998.