Log pluricanonical representations and abundance conjecture

Osamu Fujino

1　はじめに

今回の話は、權業善範さん（東京大学）との共同研究である。

なぜ可約な多様体を考えるのか？: 代数多様体の退化、モジュライのコンパクト化、次元による帰納的な扱いなどには可約な代数多様体が自然に現れる。

なにが問題になるのか？: X が可約な多様体とする。X^ν を X の正規化とする。X^ν 上の関数を X 上に落とすには、貼り合わせを論じなくては駄目。

なぜ難しいのか？: 高次元になると、のりしろ部分も次元を持ち、のりしろ部分が非自明な自己同型を持ったりする。そもそも、非正規な代数多様体は扱い難い！

2　B-双有理射

定義 (B-双有理射) (X, Δ) を射影的な対数的標準対とする。双有理射 $f : X \dashrightarrow X$ が B-双有理射であるとは、以下のような図式が存在することとする。

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

ただし、$\alpha, \beta : W \to X$ は共に特異点解消で、

$$\alpha^*(K_X + \Delta) = \beta^*(K_X + \Delta)$$

が成立する。

3　対数的多重標準表現

定義　(対数的多重標準表現)

$$\mathrm{Bir}(X,\Delta)=\{f\mid f\text{ は }B\text{-双有理射}\}$$

とおくと、$\mathrm{Bir}(X,\Delta)$ は写像の合成で自然に群になる。m を正の整数で $m(K_X+\Delta)$ がカルティエになるものとする。このとき、

$$\rho_m:\mathrm{Bir}(X,\Delta)\to\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(H^0(X,m(K_X+\Delta)))$$

なる群準同型を得る。つまり、$\mathrm{Bir}(X,\Delta)$ は有限次元ベクトル空間 $H^0(X,m(K_X+\Delta))$ に自然に作用する。これを**対数的多重標準表現**と呼ぶ。

4 主定理

定理 A. $K_X+\Delta$が半豊富なら、$\rho_m(\mathrm{Bir}(X,\Delta))$は有限群である。

応用として次の結果を得る。

定理 B. (X,Δ)を射影的な半対数的標準対とする。$\nu: X^\nu \to X$を正規化とし、$K_{X^\nu}+\Theta=\nu^*(K_X+\Delta)$とおく。このとき、$K_{X^\nu}+\Theta$が半豊富なら$K_X+\Delta$も半豊富である。

定理Bによって、半対数的標準対に対するアバンダンス予想が対数的標準対のアバンダンス予想に帰着出来た。極小モデル理論が完成すれば定理Aから定理Bが従うことは知られていた。

5　歴史

定理Aの歴史について。

X が非特異代数多様体のとき $\Rightarrow$ 上野–中村、Deligne

(X, Δ) が対数的標準特異点を許した曲面 $\Rightarrow$ 藤野（修士論文）

X が一般次元で $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0 \Rightarrow$ 權業 (2010)

注意 X が非特異射影代数多様体のときは、双有理射全体のなす群 $\mathrm{Bir}(X)$ を考えれば十分である。上野–中村、Deligne の結果は、コンパクトなモイシェゾン多様体とその双有理型写像全体のなす群について主張している。

6　定理Aの証明のアイデア

Step1. (X, Δ) が射影的な川又対数的末端対の場合に定理Aを証明する。

$$\text{川又対数的末端対} \Rightarrow \text{二乗可積分条件}$$

分岐被覆をとって $\Delta = 0$ の場合に帰着させる。

Step2. $K_X + \Delta$ が巨大 $\Rightarrow K_X + \Delta$ から $\llcorner \Delta \lrcorner$ を少し減らして川又対数的末端対の場合に帰着。巨大性は保たれる。

Step3. 一般の場合は $K_X + \Delta$ で飯高ファイバー空間を作り、一般化された小平の標準束公式を用いる。

次元による帰納法を用いる部分では、最近の極小モデル理論の発展をフルに使っている。

7　さいごに

今回は述べなかったが、定理Aと定理Bはたくさんの応用を持っている。詳しくは

O. Fujino, Y. Gongyo, Log pluricanonical representations and abundance conjecture, preprint (2011).

を参照してください。

ご清聴ありがとうございました。