小田予想について

藤野　修

京都大学大学院理学研究科・教授

2024 年 9 月 7 日

はじめに

2 次元小田予想 (解決済み)

扇とは？

小田予想とは？

代数幾何学との関係

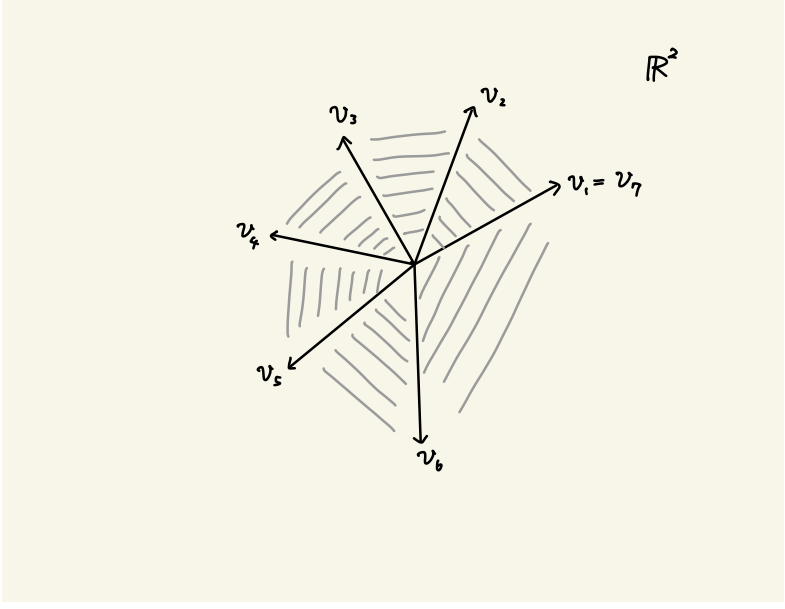
はじめに

- 小田予想はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の分割に対する初等的な予想である。（初等的ゆえに難しい！？）
- $\mathbb{R}^n$ の分割はトーリック多様体と呼ばれる代数多様体と対応する。
- 代数多様体の双有理幾何学のいくつかの問題は、トーリック多様体の問題に帰着できる。（広中の特異点解消、半安定還元、弱分解定理など）

2次元小田予想(解決済み)とは？

- 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ を有限個の整数ベクトルで分割する。
- 有限個のベクトルを反時計回りに $v_1 \ldots, v_k, v_{k+1} = v_1$ と書くことにする。
- ベクトル v_i を以下のように列ベクトルで書くことにする。

$$v_i = \begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



さらに以下のルールを満たすと仮定する。

(1) a^i_j は整数である。

(2) ベクトル v_i と v_{i+1} のなす角は 180 度未満である。

(3) $a^i_1 a^{i+1}_2 - a^{i+1}_1 a^i_2 = \pm 1$ を満たす。

(1) は有理性、(2) は強凸性、(3) は非特異性と呼ばれる。

このような $\mathbb{R}^2$ の分割を Δ と書き、2 次元完備非特異扇と呼ぶことにする。

定義 1 (爆発)

Δ にベクトル $v_i + v_{i+1}$ を追加して得られた新たな分割 Δ' を Δ の爆発 (blow-up) と呼ぶ。Δ' が Δ の爆発であるとき、この対応を $\Delta' \to \Delta$ と書くことにする。

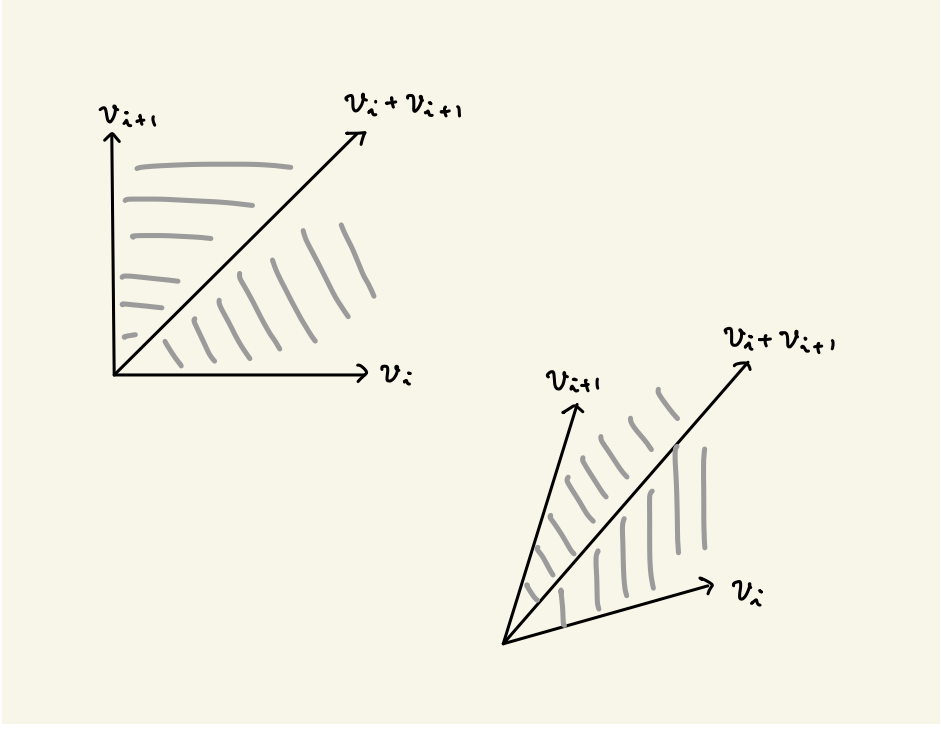


Figure: 爆発の例

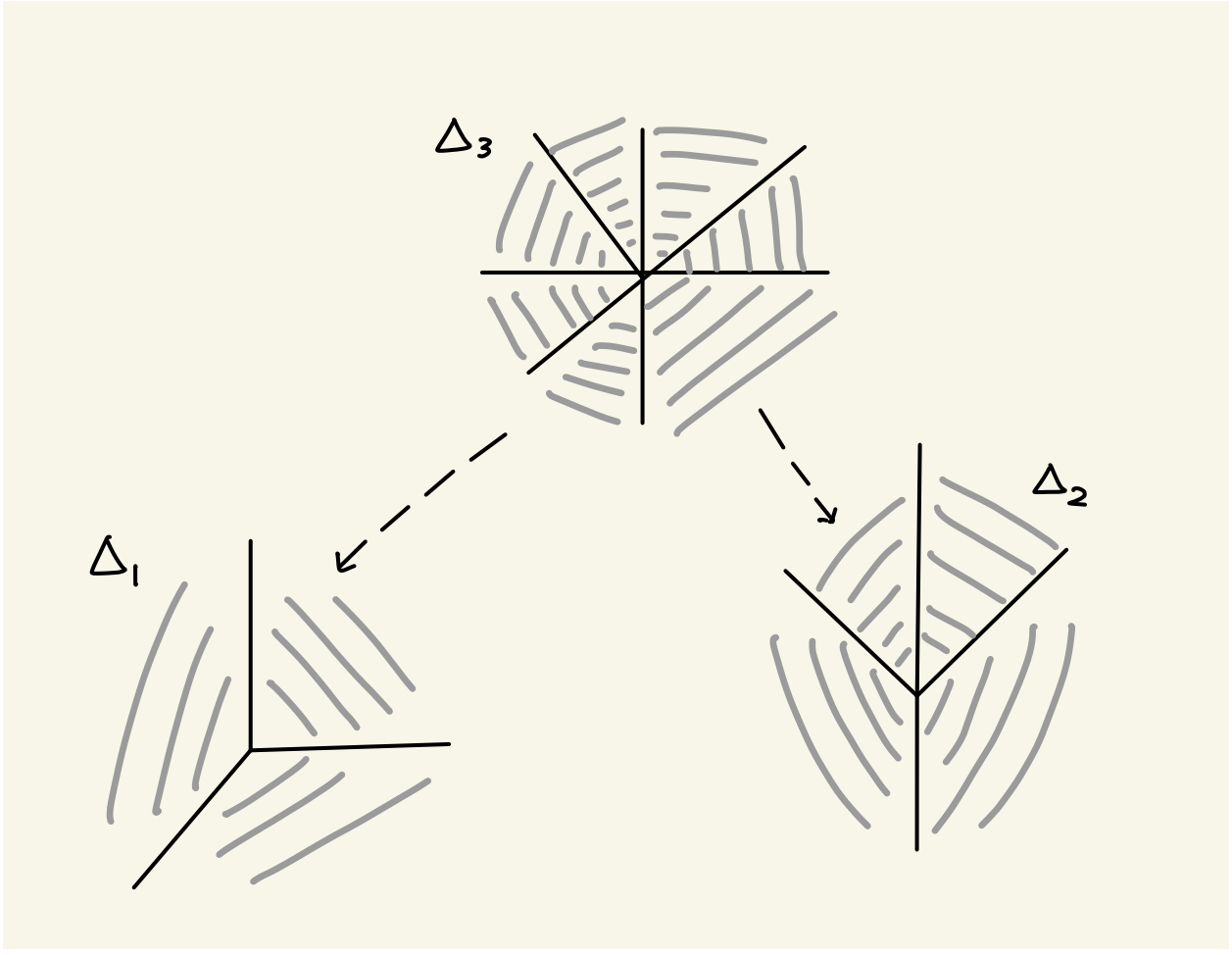
補題 2

爆発 Δ' も 2 次元完備非特異扇である。

- 有理性と強凸性は定義から明らかである。
- 非特異性は具体的に計算してみればわかる。

定理 3 (2 次元小田予想)

2 次元完備非特異扇 Δ_1 と Δ_2 が与えられたとする。このとき、Δ_1 と Δ_2 に各々有限回爆発を適当に繰り返すと、同じ 2 次元完備非特異扇 Δ_3 に到達する。



- 2 次元小田予想は頑張れば素朴な議論だけで証明できる。自明ではないが、数学科の大学生にレポート問題として出せば、一部の学生は正しい証明を書いてくれる。
- 代数幾何学 (トーリック多様体論) を使えば、一般的な理論からほぼ自動的にしたがう。
- 話はおそらく逆で、代数幾何学の予想をトーリック多様体論を通じてユークリッド空間の分割の予想にしたのが小田予想である。
- ちなみに、トーリック多様体論の創始者の一人が小田忠雄先生である。

扇とは？

以下、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ で考える。$N = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ を格子ということにする。

定義 4 (錐)

有限個の N の元 $u_1, \ldots, u_s$ が存在して

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} u_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} u_s$$

と書けるとき、σ を錐 (cone) という。

我々は、$\{0\}$ 以外に $\mathbb{R}$ 部分空間を含まない錐 σ のみを考えることにする。つまり、尖った錐のみを扱う。ここでの錐は正確には有理強凸多面錐と呼ばれるものである。

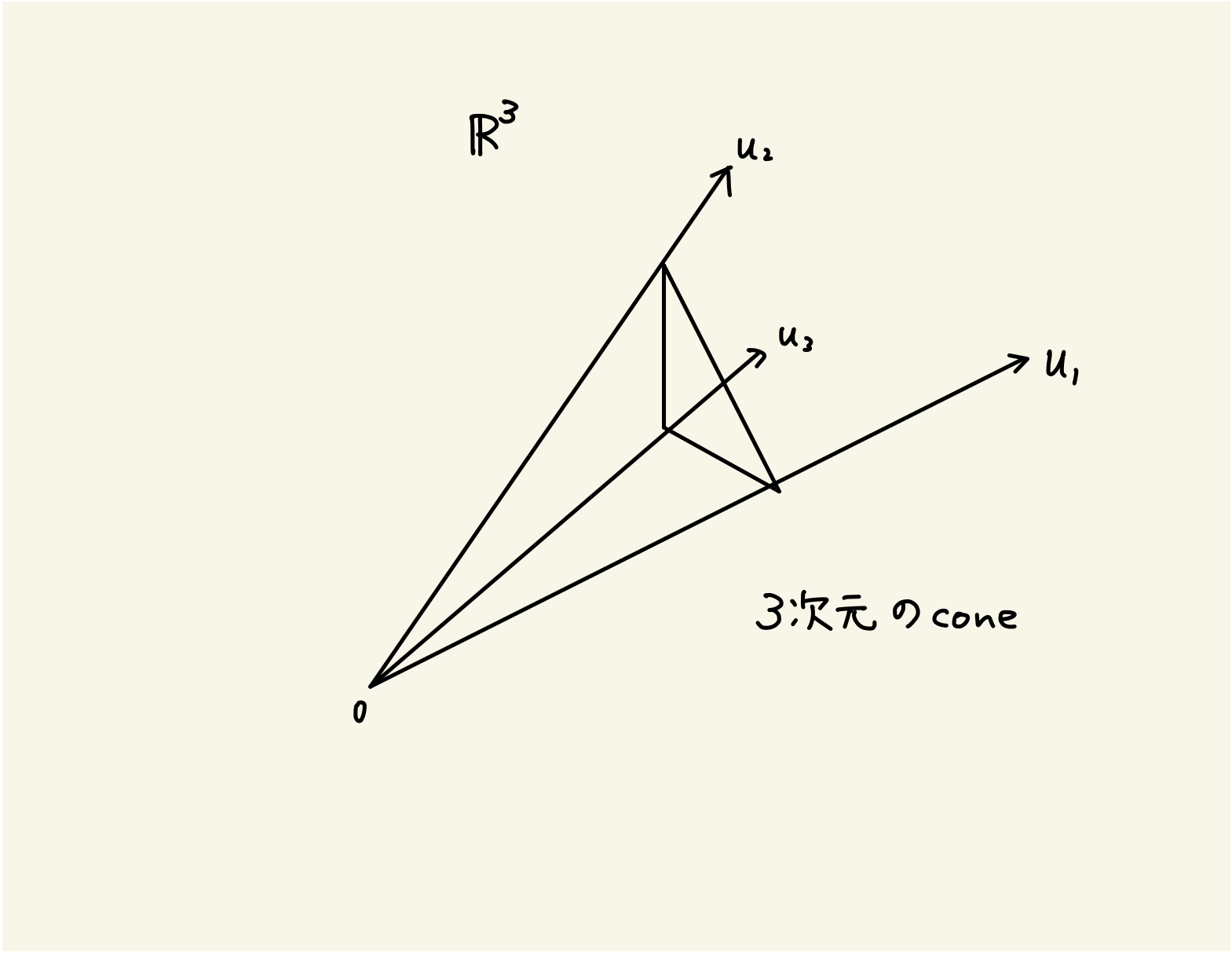


Figure: 3 次元錐の例

定義 5 (非特異錐)

定義 4 の記号で、$u_1, \ldots, u_s$ が一次独立で

$$\sigma \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}_{\geq 0} u_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{\geq 0} u_s$$

が成り立つとき、σ を**非特異錐**という。[1]

- $s = n$ のとき、上の条件は、$u_1, \ldots, u_n$ が $N = \mathbb{Z}^n$ を生成するということと同じ。つまり、$N = \mathbb{Z}u_1 + \cdots + \mathbb{Z}u_n$ ということ。

[1] すみません。定義間違っています。(2024 年 9 月 15 日記す)

定義 6 (扇)

錐の有限個の集合 Δ が以下をみたすとき、Δ を扇 (fan) という。

(i) $\sigma \in \Delta$ なら σ の面もすべて Δ に属する。

(ii) $\sigma, \tau \in \Delta$ なら、$\sigma \cap \tau$ は σ の面かつ τ の面である。

さらに、Δ に属するすべての錐が非特異のとき、Δ は非特異扇とよばれる。

我々は主に $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^n$ なる扇を扱う。これは正確には完備な扇と呼ばれる。

定義 7 (爆発)

Δ を完備で非特異な扇とする。

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} u_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} u_n$$

を Δ に含まれる錐の一つとする。σ にベクトル $u_{i_1} + \cdots + u_{i_k}$ を追加して σ を分割する。さらに、σ に隣接する錐もこれにともなって同様に分割する。このようにして新たに得られた扇を Δ' とかき、Δ' は Δ の爆発と呼ぶ。

- Δ' も完備な非特異扇である。
- $n = 3$ のときは、$u_1 + u_2 + u_3$、$u_1 + u_2$、$u_2 + u_3$、$u_3 + u_1$ のいずれかのベクトルを追加して σ を分割する。
- $n = 2$ のときは、前に説明した話そのものである。

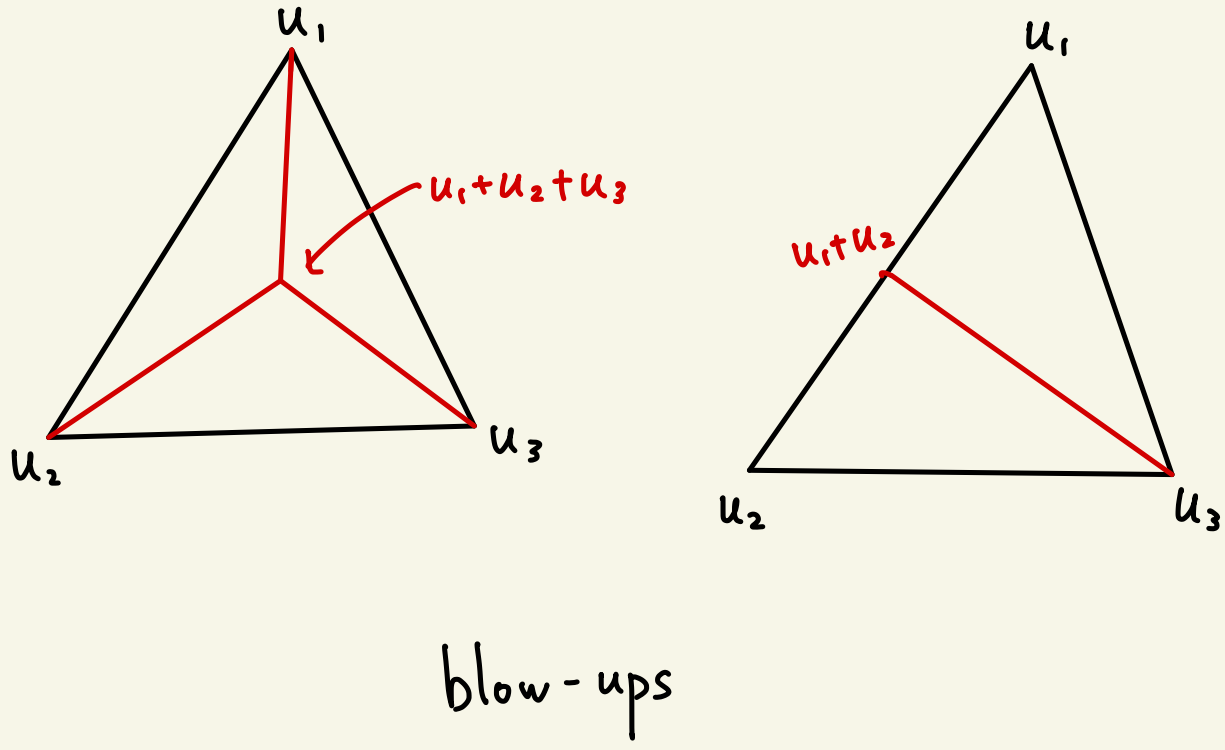


Figure: 爆発の分割の例

小田予想とは？

予想 8 (小田予想)

Δ_1 と Δ_2 を非特異で完備な扇とする。このとき、Δ_1 と Δ_2 に有限回の爆発を施すと、同じ非特異で完備な扇 Δ_3 に到達する。

- ずっと (50 年ぐらいか？) 未解決の問題である。
- おそらく、正しいと信じている人の方が多数だと思うが、絶対に正しいと信じるほどの根拠はないと思う。(個人の見解です)
- 弱小田予想は解決済み。つまり、適当に爆発とその逆を有限回繰り返すことにより、Δ_1 から Δ_2 まで到達可能である。
  (強) 小田予想は Δ_1 に有限回爆発を繰り返したあと、爆発の逆を有限回施せば Δ_2 になるはずだと主張している。

小田予想はどのように解けるだろうか？

(1) 初等的でない方法（代数幾何学の一般論）などを援用して、小田予想が主張するような上手い分割の存在が言える。

(2) 初等的な方法で上手い分割の存在を示す。つまり、たくさんの場合分けなどをして小田予想が必ず成立することを確認していく。

(3) 計算機を援用して小田予想に必要な分割は必ず実現できることを確認する。

などが考えられる。個人的には (1) が理想的であると思う。(2) は証明の細部の確認をする気が起きないし、人間はほぼ必ず場合分けを見落とすので、証明できたと言われても当分の間スッキリ感はないままになると思う。以前（4 色問題やケプラー予想）は (3) のような方法は好ましくないと思われていたが、現在の計算機の発達などを見ると、(2) より (3) の方が信頼できるかも！？と個人的には思う。

代数幾何学との関係

- 広中の特異点解消定理は長大な論文だった。少し弱い主張 (弱広中と呼ばれる) はトーリック多様体の場合に帰着することにより、10 ページぐらいの証明になった。
- Mumford たちによる半安定還元 (semistable reduction theorem) は最終的にはうまい分割が取れるか？という話が必要。最近一般次元化されたようだが、証明は「うまい分割が取れる」という話である。
- 双有理写像の弱分解定理 (weak factorization theorem) はトーリック多様体の場合に帰着し、トーリック多様体の場合は今回のような話である。

定理 9 (弱広中の特異点解消)

X を標数零の代数閉体上定義された射影代数多様体とする。このとき、$\widetilde{X} \to X$ なる非特異射影多様体からの双有理写像が存在する。この $\widetilde{X}$ を X の特異点解消と呼ぶ。

- 元々の広中の特異点解消定理は $\widetilde{X}$ の存在だけでなく、写像 $\widetilde{X} \to X$ について精密なことも主張している。
- 広中のオリジナルの論文は 200 ページを超える長大なものであった。
- 上の定理の証明は、代数幾何学の基礎的な知識があれば読める 10 ページほどの論文として出版されている。
- 巧妙な次元による帰納法を用い、トーリック多様体の場合 (正確にはトロイダル) の場合に帰着し、うまい分割の存在 (この分割の存在は簡単な話) を用いて証明する。

定理 10 (Mumford らによる半安定還元定理)

$f\colon X \to C$ を標数零の代数閉体上定義された代数多様体 X から非特異射影曲線 C への射影的な全射とする。このとき、底変換ののち爆発を繰り返せば、半安定退化と呼ばれる状態にできる。

- Mumford たちはこの定理の証明のためにトーリック多様体 (正確にはトロイダル) の理論を構築した。
- 証明の最終的なステップではうまい分割の存在を示さなくてはいけない。これはとてもハードだと思う。普通の人は証明を読まないと思う。
- C を一般次元にした場合は弱半安定還元なる定理が知られている。それも分割の話が必要であるが、それはそれほど難しくない。応用上はこの程度の結果で十分かもしれない。
- 最近は C が一般次元でも半安定還元は証明されたようだが、結局のところ、「うまい分割が取れる」ことが示されたようである。

定理 11 (弱分解定理)

X_1 と X_2 は標数零の代数閉体上定義された非特異射影多様体で X_1 と X_2 は双有理同値だとする。このとき、$X_1 \dashrightarrow X_2$ は中心が非特異である爆発かその逆の有限回の合成に分解できる。

- この定理 (これも長年未解決問題であった) と強分解予想 (こちらはまだ未解決) が今回の小田予想の元ネタである。これのトーリック多様体版が小田予想である。
- この定理は小田予想の弱バージョンの解決を用いて証明されている。
- この定理は代数幾何学の様々なところですでによく使われている。

ご静聴ありがとうございました。