On images of weak Fano manifolds

Osamu Fujino and Yoshinori Gongyo

1 問題

$f : X \to Y$ を非特異複素射影多様体の間の**滑らかな**射とする。

問題: X のどのような性質が Y に遺伝するか？

定理1: X がファノ多様体のとき、Y もファノ多様体である。つまり、$-K_X$ が豊富なら $-K_Y$ も豊富になる。

定理2: $-K_X$ が数値的非負なら、$-K_Y$ も数値的非負になる。

定理1と定理2はKollár–宮岡–森による有理曲線の変形理論の応用としてよく知られている。定理1と定理2は正標数の世界でも正しいが、逆に正標数還元テクニックを使わない証明は知られていなかった。

2　主結果

定理3: $-K_X$ が半豊富のとき、$-K_Y$ は数値的非負である。

定理4: X が弱ファノ多様体なら、Y も弱ファノ多様体である。つまり、$-K_X$ が数値的非負かつ巨大のとき、$-K_Y$ も数値的非負かつ巨大である。

注意: 定理3は定理2より弱い結果であるが、証明には正標数還元テクニックを使わない。

注意: 定理4の証明も正標数還元テクニックは使わない。さらに、定理4の証明を精密化すると定理1の正標数還元テクニックを使わない証明も得られる。

3　予想

予想: $-K_X$ が半豊富のとき、$-K_Y$ も半豊富である。

注意: 上の予想は**標準因子公式**(canonical bundle formula) に関する予想に帰着できる。したがって、少なくとも標数が零のときは正しいと思われる。

注意: $-K_X$ が巨大のとき $-K_Y$ は巨大か？という問題には簡単に反例が構成出来る。

4　標準因子公式

小平の標準因子公式の一般化

B が X 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子とし、(X, B) が川又対数的末端 (klt) で $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} f^*D$ とする。ただし、D は Y 上の $\mathbb{Q}$-因子である。このとき、

$$D \sim_{\mathbb{Q}} K_Y + \Delta + M$$

と書ける。ここで、Δ は $f : (X, B) \to Y$ の特異ファイバーからの寄与で決まる有効 $\mathbb{Q}$-因子で、M は $f : (X, B) \to Y$ のモジュライから決まる $\mathbb{Q}$-因子である。

5　証明のアイデア

(1) B を $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$ なる様に選ぶ。

(2) 標準因子公式より $-K_Y \sim_{\mathbb{Q}} \Delta + M$ と書ける。ただし、Δ と M は B に依存して決まる。

(3) 藤田–川又の半正値性定理 (例えば Hodge 構造の変形理論より従う) より、M はだいたい数値的非負と思ってよい。

(4) C を Y 上の曲線とする。$-K_Y \cdot C$ が非負を示すには、M が数値的非負であることに注意すると、$C \not\subset \Delta$ なる様に Δ が選べれば十分である。

(5) B を一般に選ぶと Bertini の定理より $C \not\subset \Delta$ となるように出来る。

6　補足

証明のキーポイントは、B を選ぶ際に自由度がある点である。

モジュライからの寄与 M はだいたい半豊富であると予想されている。この予想が正しければ予想は肯定的に解決される。

予想は、$f : X \to Y$ のファイバーが 1 次元のときと、Y の次元が 2 以下の場合には肯定的に解決出来ている。

定理4には globally F-regular variety の理論からのアプローチもある。

7　最後に

今回の仕事は東京大学の権業善範さんとの共同研究である。

今回の定理4は九州大学の安武和範さんの質問が出発点である。安武さんの明日の講演も聞いてください。