極小モデル理論の解析化

藤野　修

京都大学

2025 年 8 月 28 日

はじめに

主結果は以下のとおりである。

定理 1 (..., Nakayama, ..., Fujino, ..., Enokizono, Hashizume)
複素解析空間の間の射影射に対して極小モデル理論を一般化した。

もう少し詳しく言うと以下のとおりである。

- 代数多様体の間の射影射について成り立つことは、ほぼ全て複素解析空間の間の射影射に対しても証明できた。
- 未解決問題（アバンダンス予想や極小モデルの存在など）はオリジナルの未解決問題に帰着できた。

非特異射影曲面の極小モデルプログラム (現代版)

X を非特異複素射影曲面とする。このとき、以下のように極小モデルプログラムが走る。

$$X =: X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_m$$

- 各ステップは (-1) 曲線を一点に潰す写像
- X_m は極小モデル、または、森ファイバー空間になる。
- 今の場合、森ファイバー空間とは $\mathbb{P}^2$ か曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束のこと。極小モデルとは、K_{X_m} が数値的非負ということ。
- 本質的にはイタリア学派がやっていたが、上のような見方は森理論の成果。

History

- 1980 年ごろ、森理論 (極小モデル理論ともいう) がはじまる。
- 1990 年代前半、3 次元極小モデル理論関連の主要な予想がすべて解決される。
- 1990 年代後半、極小モデル理論の冬の時代。私が研究を始める。
- 2000 年ごろ、Shokurov 氏が Prelimiting flips なる長大なプレプリントを配布する。
- 2002 年、ニュートン研究所で Shokurov のプレプリントの解読セミナー開催。
- 2005 年、Hacon と McKernan がフリップの存在証明を発表。
- 2005 年、私が代数学シンポジウム (第 50 回) で上の結果を解説。
- 2006 年、Birkar–Cascini–Hacon–McKernan による大結果のプレプリントが発表される。
- 2007 年、私が代数学シンポジウム (第 52 回) で BCHM を解説。

その後の発展は以下のとおり。

- Sarkisov program の確立 (Hacon–McKernan)
- Shokurov の ACC 予想の解決 (Hacon–McKernan–Xu)
- 安定多様体の有界性の解決 (Hacon–McKernan–Xu)
- BAB 予想の解決 (Birkar)

これらは基本的に BCHM からの自然な流れで解決。

- 極小モデル理論の枠組みの拡張 (Fujino)

その他にも、安定多様体のモジュライ、正標数の極小モデル理論、K 安定性と関連する話題、混標数の極小モデル理論、葉層構造の極小モデル理論、ケーラー多様体に対する極小モデル理論などなど、発展はとどまるところを知らない状態。

Motivations

今回の極小モデル理論の解析化の動機付けは、主に以下の二つである。

- (特異点). 2 次元正規特異点の minimal resolution の高次元化
- (退化). 半安定極小モデル理論。Kulikov の $K3$ 曲面の退化の研究の一般化

極小モデル理論の解析化

以下、BCHM を振り返る。

定理 2 (BCHM)

- X, Y: quasi-projective *algebraic* varieties
- $\pi\colon X \to Y$: projective morphism
- (X, Δ): $\mathbb{Q}$-factorial KLT such that Δ: π-big
- $C \geq 0$ such that $K_X + \Delta + C$: π-nef and $(X, \Delta + C)$: KLT

$\Longrightarrow$ we can run the $(K_X + \Delta)$-MMP/Y with scaling of C

$\Longrightarrow$ we finally get a *minimal model*/Y or a *Mori fiber space structure*/Y

定理 2 の応用として次の定理をえる。

定理 3 (BCHM)

- X, Y: quasi-projective algebraic varieties,
- $\pi\colon X \to Y$: projective morphism,
- (X, Δ): KLT,

Assume that

- Δ is π-big and $K_X + \Delta$ is π-pseudo-effective, or
- $K_X + \Delta$ is π-big

$\Longrightarrow$

(1) (X, Δ) has a minimal model over Y

(2) $K_X + \Delta$: π-big $\Longrightarrow$ (X, Δ) has a log canonical model over Y

(3) if $K_X + \Delta$ is $\mathbb{Q}$-Cartier, then

$$R(X/Y, K_X + \Delta) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \pi_* \mathcal{O}_X(\lfloor m(K_X + \Delta) \rfloor)$$

is finitely generated as an $\mathcal{O}_Y$-algebra

Comments on BCHM

- すでに述べたように、定理 2 や定理 3 は非常に多くの応用がある。
- 定理 2 と定理 3 はほぼ広中の特異点解消定理と川又–フィーベック消滅定理のみからしたがう。
- 定理 2 と定理 3 を複素解析空間の間の射影射に一般化することにはそれほど大きな障害はなさそうに見える。なぜなら、特異点解消定理は複素解析空間に対して証明されているし、複素解析空間の間の射影射に対しては小平型の消滅定理は確立されているから。

BCHM を複素解析化する最大の問題は、どのように定式化するか？である。

以下がその答えである。

設定 4

- X, Y: complex *analytic* spaces
- $\pi\colon X \to Y$: projective morphism
- W: *Stein compact subset* of Y such that $\Gamma(W, \mathcal{O}_Y)$ is noetherian

定理 5 (定理 2 の解析化)

- X, Y, $\pi\colon X \to Y$, and W: as in 設定 4
- (X, Δ): KLT, Δ: π-big
- X: $\mathbb{Q}$-factorial over W
- $C \geq 0$ such that $K_X + \Delta + C$ is KLT and π-nef over W

$\Longrightarrow$ we can run the $(K_X + \Delta)$-MMP with scaling of C over Y

Hence we have a finite sequence of flips and divisorial contractions over Y

$$(X, \Delta) =: (X_0, \Delta_0) \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow (X_i, \Delta_i) \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow (X_m, \Delta_m)$$

as usual such that (X_m, Δ_m) is a minimal model$/Y$ or has a Mori fiber space structure$/Y$

Note that each step exists only after shrinking Y around W suitably.

定理 6 (定理 3 の解析化)

- X, Y, $\pi\colon X \to Y$, and W: as in 設定 4, and (X, Δ): KLT

Assume that

- Δ is π-big and $K_X + \Delta$ is π-pseudo-effective, or
- $K_X + \Delta$ is π-big

$\Longrightarrow$

(1) (X, Δ) has a minimal model over some open neighborhood of W

(2) $K_X + \Delta$: π-big $\Longrightarrow$ (X, Δ) has a log canonical model over some open neighborhood of W

(3) if $K_X + \Delta$ is $\mathbb{Q}$-Cartier, then

$$R(X/Y, K_X + \Delta) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \pi_* \mathcal{O}_X(\lfloor m(K_X + \Delta) \rfloor)$$

is a locally finitely generated graded $\mathcal{O}_Y$-algebra

複素解析的な設定では新たな問題が生じる。(X, Δ) は KLT または LC とする。

注意 7 (π-ampleness over W)

$K_X + \Delta$ is π-ample over W

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(K_X + \Delta)|_{\pi^{-1}(w)}$ is ample for every $w \in W$

$\Longleftrightarrow$ $K_X + \Delta$ is π-ample over some open neighborhood of W

注意 8 (π-nefness over W)

$K_X + \Delta$ is π-nef over W

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(K_X + \Delta)|_{\pi^{-1}(w)}$ is nef for every $w \in W$

$\underset{?}{\Longrightarrow}$ $K_X + \Delta$ is π-nef over some open neighborhood of W

Conjectures

以下が期待される。

予想 9 (nef の openness)

Let $\pi\colon X \to Y$ be a projective morphism between complex analytic spaces. Let (X, Δ) be an LC pair. If $(K_X + \Delta)|_{\pi^{-1}(P)}$ is nef, then $K_X + \Delta$ is π-nef over some open neighborhood of P.

もう少し一般的に以下の予想が考えられる。

予想 10 (アバンダンス予想の特殊形)

Let $\pi\colon X \to Y$ be a projective morphism between complex analytic spaces. Let (X, Δ) be an LC pair. If $(K_X + \Delta)|_{\pi^{-1}(P)}$ is nef, then $K_X + \Delta$ is π-semiample over some open neighborhood of P.

詳しい説明

以下、設定 4 で必要なスタインコンパクト集合などを見ていく。

定義 11 (Stein compact subsets)

A compact subset K of a complex analytic space is called *Stein compact* if it admits a fundamental system of Stein open neighborhoods.

注意 12 (Stein spaces)

X: Stein space
$\underset{\text{equiv}}{\Longleftrightarrow} H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ for every coherent sheaf $\mathcal{F}$ and for every $i > 0$

補題 13

K: compact subset of a Stein space X

$$\widehat{K} := \left\{ x \in X : |f(x)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| \text{ for every } f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \right\}$$

$\widehat{K}$ is the holomorphically convex hull of K

$\Longrightarrow$

$\widehat{K}$: Stein compact subset of X

例 14 (Cantor set)

- $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$
- C: Cantor set. Note: $C \subset [0, 1] \subset X$.

Then C is a Stein compact subset of X.

Unfortunately,

$$\mathcal{O}_X(C) = \Gamma(C, \mathcal{O}_X) = \varinjlim_{C \subset U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

is not noetherian.

定理 15 (Siu)

Let K be a Stein compact subset of a complex analytic space X. Then $\mathcal{O}_X(K) = \Gamma(K, \mathcal{O}_X)$ is noetherian if and only if

($\star$) $K \cap Z$ has only finitely many connected components for any analytic subset Z which is defined over an open neighborhood of K.

Note that the Cantor set C has infinitely many connected components.

($\star$) plays a crucial role!

注意 16

If K is a compact *semianalytic* subset, then K always satisfies ($\star$).

How to formulate analytic MMP

- $\pi\colon X \to Y$: projective morphism of complex analytic spaces
- W: compact subset of Y
- $Z_1(X/Y;W)$: free abelian group generated by the projective integral curves C on X such that $\pi(C)$ is a point of W

We can consider the following intersection pairing

$$\operatorname{Pic}\left(\pi^{-1}(U)\right) \times Z_1(X/Y;W) \to \mathbb{Z}$$

as usual, where U is an open neighborhood of W.
We put

$$\widetilde{A}(U,W) := \operatorname{Pic}\left(\pi^{-1}(U)\right) / \equiv$$

and

$$A^1(X/Y;W) := \varinjlim_{W \subset U} \widetilde{A}(U,W)$$

In general, $A^1(X/Y;W)$ is not finitely generated!

定理 17 (Nakayama)

- $\pi\colon X \to Y$: projective morphism of complex analytic spaces
- W: compact subset of Y

Assume that

($\star$) $W \cap Z$ has only finitely many connected components for any analytic subset Z which is defined over an open neighborhood of W.

$\Longrightarrow A^1(X/Y; W)$ is a finitely generated abelian group

($\star$) is very important!

How to formulate analytic MMP, 2

When $A^1(X/Y;W)$ is finitely generated, we can put

$$N^1(X/Y;W) := A^1(X/Y;W) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

and define the Kleiman–Mori cone

$$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y;W),$$

and so on.

We can formulate and prove Kleiman's ampleness criterion and the cone and contraction theorem under the assumption that $A^1(X/Y;W)$ is a finitely generated abelian group.

まとめと課題

- 定式化がちゃんとできれば、BCHM の解析化はいくつかの技術的な点を除けば難しくない。
- 極小モデル理論の枠組みの拡張のためには、川又–フィーベック消滅定理より真に強い消滅定理が必要。代数的な場合は混合ホッジ構造をフルに使って必要な消滅定理を確立していたが、複素解析空間に直接的に混合ホッジ構造の理論を使うことはできない。

さらなる一般化

定理 18

- (X, Δ): an analytic SNC pair, Δ: a boundary $\mathbb{R}$-divisor
- $f\colon X \to Y$: a projective morphism of complex analytic spaces
- $\mathcal{L}$: a line bundle on X
- q: an arbitrary non-negative integer

$\Longrightarrow$

(i) (Strict support condition). If $\mathcal{L} - (\omega_X + \Delta)$ is f-semiample, then every associated subvariety of $R^q f_*\mathcal{L}$ is the f-image of some stratum of (X, Δ).

(ii) (Vanishing theorem). If $\mathcal{L} - (\omega_X + \Delta) \sim_{\mathbb{R}} f^*\mathcal{H}$ holds for some π-ample $\mathbb{R}$-line bundle $\mathcal{H}$ on Y, where $\pi\colon Y \to Z$ is a projective morphism to a complex analytic space Z, then we have $R^p\pi_*R^q f_*\mathcal{L} = 0$ for every $p > 0$.

- 定理 18 があると、複素解析空間に対しても対数的標準中心についての基本的なことが示せる。
- 定理 18 があると、究極的な形の錐体定理や収縮定理が複素解析的な設定で証明できる。
- 定理 18 は、最初、混合ホッジ加群の理論を使って証明された。
- その後、Fujino–Fujisawa で定理 18 は混合ホッジ加群の理論なしで証明された。

代数多様体と複素多様体の間には大きな差がある。

例 19 (Serre)

Let C be an elliptic curve and let $\mathcal{E}$ be the rank two vector bundle on C which is defined by the unique non-splitting extension

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ is a complex manifold which is Stein, where $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. We have the following two compactifications of $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$:

$$\mathbb{P}_C(\mathcal{E}) \xleftarrow[\text{ana}]{} \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \xrightarrow[\text{alg}]{} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

Note that $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ is not bimeromorphically equivalent to $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

アバンダンス予想

アバンダンス予想に関しては以下の結果が現在のところ最良であろう。

定理 20 (アバンダンス)

- X, Y, $\pi\colon X \to Y$, and W: as in 設定 4
- (X, Δ): LC

Assume that the abundance conjecture holds for projective LC pairs in dimension n.

$\Longrightarrow$

If $K_X + \Delta$ is π-nef over Y and $\dim X \leq n$, then $K_X + \Delta$ is π-semiample over some open neighborhood of W.

注意 21

$K_X + \Delta$ が $\mathbb{R}$-因子の場合は少し修正が必要。

ご清聴ありがとうございました。