

極小モデル理論の解析化

京都大学大学院理学研究科数学教室

藤野 修*

令和7年8月28日

概要

複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論について説明する。

目次

| | | |
|----|---------------------------|----|
| 1 | はじめに | 2 |
| 2 | 非特異射影曲面の極小モデルプログラム（現代版） | 3 |
| 3 | 歴史 | 3 |
| 4 | 研究の動機 | 4 |
| 5 | BCHM の結果について | 5 |
| 6 | 極小モデル理論の解析化を目指して | 6 |
| 7 | BCHM の解析化 | 7 |
| 8 | π -豊富性と π -数値的非負性 | 8 |
| 9 | 極小モデル理論をいかに定式化するか？ | 10 |
| 10 | 消滅定理 | 13 |

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町, e-mail: fujino@math.kyoto-u.ac.jp

| | | |
|----|--------------|----|
| 11 | 代数的 vs. 解析的 | 14 |
| 12 | アバンダンス予想について | 15 |
| 13 | 文献についての備忘録 | 15 |
| 14 | おまけ | 17 |
| 15 | よくある質問への答え | 17 |
| 16 | 謝辞 | 19 |

1 はじめに

極小モデル理論は、本来、射影的な代数多様体に対する理論として発展してきた。しかし、現代的な代数幾何においては、相対的な設定で理論を構築することが自然であり、極小モデル理論もまた、代数多様体の間の射影射に対して展開されてきた。

ここ数年で、この理論を複素解析空間の間の射影射にまで一般化する計画を実行した。概要を述べると、次のようになる。

複素解析空間の間の射影射に対して、極小モデル理論を完全に一般化した。

より具体的には、以下の二点が主な成果である：

- 代数多様体の間の射影射に対する極小モデル理論の結果のほとんどは、複素解析空間の間の射影射に対しても証明が可能であることを示した。
- 主要な未解決問題（アバンダンス予想や極小モデルの存在など）は、射影的な代数多様体に対する元々の予想に帰着されることを明らかにした。

このように、複素解析空間の間の射影射に対しても、代数多様体の場合とほぼ同様に極小モデル理論を構築することができる。上に述べたとおり、解析的な設定での極小モデル理論の完成のためには、もとの射影的な代数多様体に対する予想を解決すれば十分である。

本稿の第 1 章から第 12 章までは、ほぼ講演の内容に基づいている。第 13 章には文献に関するメモを、また第 14 章にはおまけとして補足的な内容を付け加えた。第 15 章には、よくある質問の答えを書いておいた。興味を持たれた読者は、第 13 章の文献案内を参考にし、ぜひ原論文に挑戦していただきたい。

2 非特異射影曲面の極小モデルプログラム（現代版）

極小モデル理論を、最も基本的な場合として、非特異複素射影曲面に対して考察する。 X を非特異な複素射影曲面とするとき、以下のように極小モデルプログラムが実行される：

$$X =: X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_m$$

- 各ステップは、 (-1) 曲線と呼ばれる \mathbb{P}^1 を一点に収縮する双有理写像である。
- 最終的なモデル X_m は、**極小モデル**または**森ファイバー空間**となる。
- 非特異射影曲面が森ファイバー空間であるとは、それが \mathbb{P}^2 または曲線上の \mathbb{P}^1 束であることを意味する。
- 非特異射影曲面が極小モデルであるとは、その標準因子 K が数値的に非負 (nef と呼ばれる) であることを意味する。

上記の事実は、本質的にはイタリア学派によって既に得られていたが、極小モデルの概念およびこのような視点での体系的理解は、**森理論**の成果によるところが大きい。

極小モデルプログラムとは、非常に大まかに言えば、与えられた射影多様体に対して有限回の双有理変換を施し、極小モデルあるいは森ファイバー空間を得る操作である。

3 歴史

森理論（以下、**極小モデル理論**ともいう）の歴史を簡単に振り返る。

- 1980 年頃：森理論（極小モデル理論）が始まる。
- 1980 年代後半：森重文氏が 3 次元フリップの存在を証明し、3 次元における極小モデルの存在が確立される。これにより、1990 年に森氏がフィールズ賞を受賞。
- 1990 年代前半：3 次元極小モデル理論に関する主要な予想がすべて解決される。
- 1990 年代後半：極小モデル理論の「冬の時代」。筆者が大学院に進学し、研究を開始。
- 2000 年頃：Shokurov 氏が「Prelimiting flips」と題された長大なプレプリントを公開。
- 2002 年：ケンブリッジ大学・ニュートン研究所にて、Shokurov 氏のプレプリントの解説セミナーが開催される。
- 2005 年：Hacon 氏と McKernan 氏がフリップの存在証明を発表。

- 同年：筆者が第 50 回代数学シンポジウムにて、上記の成果を解説 ([藤 1])。
- 2006 年：Birkar–Cascini–Hacon–McKernan による重要な成果のプレプリントが発表される (後に [BCHM] として出版)。この論文は通例、BCHM と略称される。
- 2007 年：筆者が第 52 回代数学シンポジウムにて、BCHM を解説 ([藤 2])。

20 世紀における極小モデル理論は主に 3 次元代数多様体を対象としていたが、21 世紀に入ってからは、Shokurov 氏の哲学に基づき、一般次元への展開が進められていると言える。Hacon–McKernan によるフリップの存在証明の衝撃や、BCHM の登場による驚きについては、筆者が当時執筆した代数学シンポジウムの報告 ([藤 1] と [藤 2]) をご覧いただければ、当時の雰囲気を感じ取っていただけるだろう。

その後の主要な発展として、以下のような顕著な成果が挙げられる：

- Sarkisov プログラムの確立 (Hacon–McKernan)
- Shokurov の ACC 予想の解決 (Hacon–McKernan–Xu)
- 安定多様体の有界性の確立 (Hacon–McKernan–Xu)
- BAB (Borisov–Alexeev–Borisov) 予想の解決 (Birkar)

これらの成果は、基本的に BCHM を起点とした自然な流れの中で得られたものである。BAB 予想の解決によって Birkar 氏がフィールズ賞を受賞したことは、広く知られている。

これらの成果とは異なる方向への一般化として、以下のような研究もある：

- 極小モデル理論の枠組みの拡張 (Fujino)

上記の成果の多くは、Shokurov 氏の哲学を忠実に受け継ぎつつ、同一路線上で理論を「前へ前へ」と進めていったものであるのに対し、筆者の研究は、極小モデル理論の適用範囲を「横へ横へ」と広げるものであり、当初の想定を超えて研究対象を拡張した点に特徴がある。

このほかにも、安定多様体のモジュライ理論、正標数における極小モデル理論、 K 安定性との関係、混標数の極小モデル理論、葉層構造の極小モデル理論やケーラー多様体の極小モデル理論など、多方面での発展が現在も続いており、その勢いは衰える気配がない。

4 研究の動機

今回の研究の動機は、主に以下の二点である。

- 複素解析的特異点の研究
- 代数多様体の退化の研究

2次元における孤立特異点の研究では、以下のような操作が標準的に用いられる。まず特異点解消を施し、例外集合の中に (-1) 曲線が存在すれば、それを収縮する。有限回の収縮射を経ることで、最終的に例外集合内に (-1) 曲線が存在しない状態にすることができる。このような特異点解消を **minimal resolution** と呼ぶ。minimal resolution における例外集合のなす双対グラフを調べることで、特異点の性質を詳しく理解することが可能となる。

極小モデル理論の解析化の第一の動機は、このような操作を高次元の複素解析的特異点に対しても実行可能にすることである。特異点解消は有限回の爆発により得られ、解消から元の空間への射は射影的となる。したがって、複素解析空間の間の射影射に極小モデル理論を適用できるようになれば、高次元における minimal resolution を構成するための理論的枠組みが得られることになる。

第二の動機である代数多様体の退化の研究としては、Kulikov による $K3$ 曲面の退化の研究が念頭にある。単位円板上に定義された射影多様体の族を考え、原点を除く各ファイバーが非特異であるとする。このとき、原点上での退化の様子を解析する方法として、**半安定極小モデルプログラム**と呼ばれる極小モデル理論が考えられる。

ただし、単位円板自体は代数多様体ではなく複素解析空間であるため、この種の議論を理論的に保証するには、複素解析空間の間の射影射に対して極小モデル理論が構築されている必要がある。以上の理由から、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論の確立は重要であると思う。

5 BCHM の結果について

ここでは、[BCHM] の主な結果を簡単に紹介する。[BCHM] は、多くの命題を次元による帰納法により同時に示しており、その全体像を追うのは容易ではない。詳細については原論文 [BCHM] を参照されたい。ここでは、特に応用上有用で、比較的理解しやすい二つの主張に焦点を当てて述べる。

まず一つ目の定理は、適切な仮定の下で**スケール付き極小モデルプログラム**が機能することを主張している。

定理 5.1 ([BCHM, Corollary 1.4.2]) X と Y を準射影的代数多様体とし、 $\pi: X \rightarrow Y$ を射影射とする。 (X, Δ) は \mathbb{Q} -分解的な川又対数的末端対とし、 Δ は π -巨大 (big) と仮

定する。さらに、有効な \mathbb{R} -因子 C が存在して、 $K_X + \Delta + C$ が π -数値的非負 (nef) であり、 $(X, \Delta + C)$ も川又対数的末端対であるとする。このとき、 Y 上で C に関するスケール付き $(K_X + \Delta)$ -極小モデルプログラムを実行することができ、その結果として、 Y 上の極小モデルあるいは森ファイバー空間の構造を得る。

次に述べる定理は、上述のスケール付き極小モデルプログラムの実行可能性を前提とすれば、比較的容易に導かれるものである。

定理 5.2 ([BCHM, Theorem 1.2]) X と Y を準射影的代数多様体とし、 $\pi: X \rightarrow Y$ を射影射とする。 (X, Δ) は川又対数的末端対と仮定する。さらに、以下のいずれかの条件を仮定する。

- Δ は π -巨大で、かつ $K_X + \Delta$ は π -擬有効 (pseudo-effective) である。
- $K_X + \Delta$ は π -巨大である。

このとき、次の主張が成り立つ。

- (1) (X, Δ) は Y 上の**極小モデル** (minimal model) をもつ。
- (2) $K_X + \Delta$ が π -巨大であれば、 (X, Δ) は Y 上の**対数的標準モデル** (log canonical model) をもつ。
- (3) $K_X + \Delta$ が \mathbb{Q} -カルティエであれば、

$$R(X/Y, K_X + \Delta) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \pi_* \mathcal{O}_X(\lfloor m(K_X + \Delta) \rfloor)$$

は有限生成な \mathcal{O}_Y -代数である。

6 極小モデル理論の解析化を目指して

[F2] における最大の成果は、次のような設定が複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論を論じるための正しい枠組みであると見抜いた点にあると考えられる。

設定 6.1 以下が我々の目的に適した正しい設定である：

- X と Y は複素解析空間である。
- $\pi: X \rightarrow Y$ は射影射である。
- W は Y の**スタインコンパクト**な部分集合であり、 $\Gamma(W, \mathcal{O}_Y)$ はネーター環になるものとする。

見慣れない用語が含まれているかもしれないが、まずはこの設定が適切なものであると認め、その上で議論を進めることにしたい。

7 BCHM の解析化

[BCHM] の証明を精査すると、[BCHM] は究極的には**広中の特異点解消定理**と**川又-フィーベック消滅定理**しか使っていないと言ってよいだろう。川又-フィーベック消滅定理は**小平消滅定理**の一般化である。小平の消滅定理を認めると簡単に証明できる定理である。広中の特異点解消定理は元々は代数多様体に対する定理であったが、複素解析空間に対しても同様の特異点解消定理が証明されていることはよく知られている。また、小平の消滅定理は非コンパクトな複素多様体に一般化されており、その応用として複素解析空間の間の射影射に対して小平の消滅定理（の相対版）も知られている。

[BCHM] の主結果のほとんどは、複素解析空間の間の射影射に対しても移植可能である。以下では、定理 5.1 および定理 5.2 の解析的類似を述べる。

定理 7.1 ([F2, Theorem 1.1]) $X, Y, \pi: X \rightarrow Y$, および W は設定 6.1 の通りとする。 (X, Δ) は川又対数的末端対であり、 Δ は π -巨大と仮定する。また、 X は W 上 \mathbb{Q} -分解的とする。さらに、有効な \mathbb{R} -因子 C が存在して $K_X + \Delta + C$ が W 上 π -数値的非負であり、 $(X, \Delta + C)$ も川又対数的末端対であるとする。

このとき、 Y 上で C に関するスケール付き $(K_X + \Delta)$ -極小モデルプログラムを実行することができ、その結果として、 Y 上の極小モデルまたは森ファイバー空間の構造を得る。

すなわち、 Y 上のフリップおよび**因子収縮** (divisorial contraction) からなる有限列

$$(X, \Delta) =: (X_0, \Delta_0) \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow (X_i, \Delta_i) \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow (X_m, \Delta_m)$$

が存在し、 (X_m, Δ_m) は Y 上の極小モデルか、あるいは森ファイバー空間の構造をもつ。

以下は、代数的設定と解析的設定の間の重要な違いに関する注意である。

注意 7.2 定理 7.1 における各ステップ（フリップや因子収縮）では、必要に応じて Y を W のより小さな近傍に取り直す必要がある。そのため、最終的に得られる X_m も、 Y を W の近傍に置き換えた後のものである。この点は、注意 8.2 や第 15 章と深く関係している。

定理 7.3 ([F2, Theorem 1.2]) $X, Y, \pi: X \rightarrow Y$, および W は設定 6.1 の通りとし、 (X, Δ) は川又対数的末端対と仮定する。さらに、以下のいずれかの条件を仮定する：

- Δ は π -巨大であり、かつ $K_X + \Delta$ は π -擬有効である。
- $K_X + \Delta$ は π -巨大である。

このとき、次の各主張が成り立つ：

- (1) (X, Δ) は W のある近傍上で極小モデルをもつ。
- (2) $K_X + \Delta$ が π -巨大であれば、 (X, Δ) は W のある近傍上で対数的標準モデルをもつ。
- (3) $K_X + \Delta$ が \mathbb{Q} -カルティエであれば、

$$R(X/Y, K_X + \Delta) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \pi_* \mathcal{O}_X(\lfloor m(K_X + \Delta) \rfloor)$$

は局所的に有限生成な \mathcal{O}_Y -代数である。

8 π -豊富性と π -数値的非負性

代数多様体間の射影射に対する極小モデル理論と、複素解析空間間の射影射に対する極小モデル理論は非常によく似ているが、複素解析的な設定にすることによって、新たに微妙な問題が生じることもある。

以下、この章では、 $\pi: X \rightarrow Y$ を複素解析空間間の射影射とし、 W を Y の部分集合とする。 \mathcal{L} を X 上の \mathbb{R} -直線束あるいは \mathbb{R} -カルティエ因子とする。

注意 8.1 (W 上の π -豊富性) \mathcal{L} が W 上 π -豊富 (ample) であるとは、任意の $w \in W$ に対して $\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(w)}$ が豊富であることをいう。 $\pi^{-1}(w)$ は射影的であるため、 $\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(w)}$ の豊富性は、通常の数値幾何学における豊富性と同義である。

この定義からは明らかではないが、 \mathcal{L} が W 上 π -豊富であることと、 \mathcal{L} が W の適当な開近傍上で π -豊富であることは同値である。したがって、 \mathcal{L} が W 上 π -豊富であり、かつ W がコンパクトであれば、 \mathcal{L} は W の近傍上で有限個の π -豊富な直線束の $\mathbb{R}_{>0}$ -線形結合として表せることになる。

注意 8.2 (W 上の π -数値的非負性) \mathcal{L} が W 上 π -数値的非負 (nef) であるとは、任意の $w \in W$ に対して $\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(w)}$ が数値的非負であることをいう。 $\pi^{-1}(w)$ は射影的であるため、 $\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(w)}$ の数値的非負性も、通常の数値幾何学におけるものと同じである。

ここまでは豊富性とまったく同様である。しかし、 \mathcal{L} が W 上で π -数値的非負であっても、必ずしも W の近傍上で π -数値的非負となるとは限らない。

このように、 π -数値的非負性の「振る舞いの悪さ」が、解析的設定における極小モデル理論の展開において、ところどころで障害となる。以下に述べる予想は、この問題に対する自然な解決を示唆するものである。

予想 8.3 ([F2, Conjecture 8.4]) $\pi: X \rightarrow Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、 (X, Δ) を対数的標準対とする。 P を Y の一点とし、 $(K_X + \Delta)|_{\pi^{-1}(P)}$ が数値的非負であると仮定する。このとき、 $K_X + \Delta$ は P の近傍上で π -数値的非負である。

仮に予想 8.3 が正しいとすれば、解析的設定で極小モデルプログラムを実行し、 W に潰れる曲線で $K_X + \Delta$ と負に交わるものが存在しないようにできれば、それは W の近傍上で極小モデルとなる。

注意 8.4 予想 8.3 は、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論が完全に確立されれば成立することが知られている ([F2, Remark 8.5] を参照)。また、[EH3, Theorem 1.7] を用いると、 X が 3 次元以下の場合には予想 8.3 が成り立つことが確認できる。

一方で、一般の \mathbb{R} -直線束については、数値的非負性の開性 (openness) が成り立たないことが知られている ([F2, Remark 4.3])。しかし、曲面の場合には任意の \mathbb{R} -直線束に対して数値的非負性の開性が成立することが示されている ([Mo, Lemma 2.6])。

さらに強い結果として、次の予想も成立すると期待される。

予想 8.5 (アバundance予想の特殊形) $\pi: X \rightarrow Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、 (X, Δ) を対数的標準対とする。 P を Y の一点とし、 $(K_X + \Delta)|_{\pi^{-1}(P)}$ が数値的非負であると仮定する。このとき、 $K_X + \Delta$ は P の近傍上で π -半豊富 (semi-ample) である。

仮に予想 8.5 まで正しいとすれば、解析的極小モデル理論において、 W に潰れる曲線で $K_X + \Delta$ と負に交わるものが存在しないようにできれば、それは W の近傍上で**良い極小モデル** (good minimal model) になるといえる。

予想 8.3 および予想 8.5 は未解決であるが、[BCHM] の解析的類似に現れるような特定の設定 (たとえば、定理 7.1 や定理 7.3) においては、これらの予想が成り立つことが証明されている。詳しくは [F2, Theorem 8.3] を参照されたい。いずれにせよ、完全に一般の設定では、予想 8.3 と予想 8.5 は依然として非常に困難な未解決問題であると考えら

れている。

9 極小モデル理論をいかに定式化するか？

ここからは設定 6.1 をもう少し詳しく見てみたい。我々の目的には以下のスタイン空間の特徴付けを定義として採用しても問題ない。

定義 9.1 (スタイン空間) X を複素解析空間とする。 X がスタイン空間であるとは、任意の解析的接続層 \mathcal{F} に対して $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ がすべての $i > 0$ に対して成り立つこととする。

この定義を見ると、代数幾何学でのアフィンスキームと複素幾何のスタイン空間が対応すると思ってよい。

定義 9.2 (スタインコンパクト集合) X を複素解析空間とし、 K を X のコンパクト部分集合とする。 K がスタイン開集合からなる基本近傍系を持つとき、 K はスタインコンパクト集合と呼ばれる。

以下の補題を用いると、スタインコンパクト集合が多数存在することがわかる。正則凸包は多変数関数論でよく知られた概念である。

補題 9.3 (正則凸包) K をスタイン空間 X 上のコンパクト集合とする。

$$\widehat{K} := \left\{ x \in X \mid |f(x)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| \text{ for every } f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \right\}$$

と定めるとき、 \widehat{K} は K の正則凸包と呼ばれる。このとき、 \widehat{K} は X のスタインコンパクト集合である。

次の例は、ルベグ積分論でよく知られるカントール集合に関するものである。

例 9.4 (カントール集合) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ とし、 \mathcal{C} をカントール集合とする。

$$\mathcal{C} \subset [0, 1] \subset X$$

であることに注意する。このとき、 \mathcal{C} は X のスタインコンパクト集合である。なぜなら、非コンパクトなリーマン面はすべてスタインであり、 \mathcal{C} はコンパクトだからである。

しかし、

$$\mathcal{O}_X(\mathcal{C}) = \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}_X) = \varinjlim_{\mathcal{C} \subset U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

はネーター環ではない。

上の例からわかるように、スタインコンパクト集合という仮定だけでは、「病的」とも言えるような集合も存在し得る。次に述べる Siu による結果は、そのような集合を排除する条件を与えるものである。

定理 9.5 (Siu, [F2, Theorem 2.10]) K を複素解析空間 X のスタインコンパクトな部分集合とする。このとき、 $\mathcal{O}_X(K) = \Gamma(K, \mathcal{O}_X)$ がネーター環となるための必要十分条件は、以下の通りである：

(*) K の開近傍上で定義された任意の解析的集合 Z に対し、 $K \cap Z$ の連結成分は高々有限個である。

コントロール集合 C の場合、連結成分が無限個存在するため、 $\mathcal{O}_X(C)$ はネーター環とならなかったのである。

注意 9.6 条件 (*) はいつ成立するのか、あるいは (*) を満たすコンパクト集合は豊富に存在するのか、という疑問が生じるかもしれない。

一般に、 K が **半解析的集合 (semianalytic subset)** でかつコンパクトであるとき、 K は条件 (*) を満たすことが知られている。

解析空間 X のある点 P の近傍で何かを考察する際には、局所的に X を多重円板内に実現できる。このような状況において、 P の近傍にスタインコンパクトな半解析的集合を構成することはいくらかでも可能である。

$\pi: X \rightarrow Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、 W を Y のコンパクトな部分集合とする。 $\pi(C)$ が W の点になるような X 上の射影曲線 C たちが生成する自由アーベル群を $Z_1(X/Y; W)$ と書く。現時点では W はコンパクト部分集合であることのみを仮定する。

U を W の開近傍とすると、

$$\text{Pic}(\pi^{-1}(U)) \times Z_1(X/Y; W) \rightarrow \mathbb{Z}$$

なる交点形式を定義することができる。ここで、我々が考える曲線は π によって W の点に移るものであるため、 U が W の近傍であれば、上の交点形式は問題なく定義される。

代数的な場合と同様に、数値的同値関係 \equiv で割った空間

$$\tilde{A}(U, W) := \text{Pic}(\pi^{-1}(U)) / \equiv$$

を考える。さらに、 W の開近傍 U を走らせて

$$A^1(X/Y; W) := \varinjlim_{W \subset U} \tilde{A}(U, W)$$

と定義する。もちろん $A^1(X/Y; W)$ はアーベル群であるが、一般には有限生成とは限らない。

ここで、以下の中山の定理が重要な役割を果たす。

定理 9.7 (Nakayama, [N2, Chapter II. 5.19. Lemma], [F2, Theorem 4.7]) $\pi: X \rightarrow Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、 W を Y のコンパクト部分集合とする。

(*) W の開近傍上に定義された任意の解析的集合 Z に対して、 $W \cap Z$ の連結成分は高々有限個である。

という条件 (*) が成り立つとき、 $A^1(X/Y; W)$ は有限生成アーベル群である。

すでにお気付きの読者も多いと思われるが、定理 9.7 における条件 (*) は、定理 9.5 における条件 (*) と全く同じものである。このことから、結局のところ (*) という条件が様々な有限性を保証するために本質的なものであることがわかる。単にコンパクト部分集合を固定するだけでは不十分であり、(*) を満たすコンパクト部分集合を考える必要がある。

$A^1(X/Y; W)$ が有限生成アーベル群であるとき、

$$N^1(X/Y; W) := A^1(X/Y; W) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

は有限次元の実ベクトル空間となる。このとき、その双対ベクトル空間 $N_1(X/Y; W)$ 内に、**クライマン–森錐体**

$$\overline{NE}(X/Y; W)$$

を定義することができる。すなわち、 $\overline{NE}(X/Y; W)$ は、 π によって W の点に移る曲線たちが張る錐体の $N_1(X/Y; W)$ 内での閉包である。

$\overline{NE}(X/Y; W)$ が定義できれば、**クライマンの豊富性判定法**も、代数多様体の場合と同様に、 $\overline{NE}(X/Y; W)$ を用いて定式化・証明することができる。また、極小モデル理論の出発点である**錐体定理** (cone theorem) や**収縮定理** (contraction theorem) も、代数的な場合と類似の形で定式化可能である。ただし、すでに見たように、「 W 上での π -数値的非負性」と「 W の近傍上での π -数値的非負性」には差があるため、細かな技術的修正が必要になる。いずれにせよ、 $\overline{NE}(X/Y; W)$ が適切に定義できるような枠組みを整備する段階自体が、非自明であると思われる。

10 消滅定理

川又対数的末端対を扱うだけであれば、小平の消滅定理の解析版だけで十分である。しかし、対数的標準対や、さらに悪い特異点を持つ複素解析空間まで扱おうとすると、既存の消滅定理では全く不十分である。このような状況を踏まえ、以下の定理を証明した。代数多様体に対する同様の定理は、極小モデル理論や高次元代数多様体に関する研究においてすでに大きな役割を果たしている。ここではその複素解析空間版を与えることが主張である。

定理 10.1 ([F4, Theorem 1.1]) (X, Δ) を解析的な単純正規交叉対とし、 Δ を境界 \mathbb{R} -因子とする。 $f: X \rightarrow Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、 \mathcal{L} を X 上の直線束とする。 q は任意の整数とする。

- (i) (Strict support condition) $\mathcal{L} - (\omega_X + \Delta)$ が f -半豊富であるとき、 $R^q f_* \mathcal{L}$ の随伴部分多様体 (associated subvariety) は、 (X, Δ) のある階層 (stratum) の f による像である。
- (ii) (Vanishing theorem) $\pi: Y \rightarrow Z$ を複素解析空間の間の射影射とし、 \mathcal{H} を Y 上の π -豊富な \mathbb{R} -直線束とする。 $\mathcal{L} - (\omega_X + \Delta) \sim_{\mathbb{R}} f^* \mathcal{H}$ が成り立つとき、任意の $p > 0$ に対して、 $R^p \pi_* R^q f_* \mathcal{L} = 0$ が成立する。

技術的な定義については詳述しないが、定理 10.1 に現れる単純正規交叉対 (X, Δ) とは、単純正規交叉的な複素解析空間 X と、その上の境界因子 Δ からなる対をいう。特に、 X は一般には可約であることに注意しておきたい。

注意 10.2 代数的な設定における定理 10.1 の証明には、混合ホッジ構造が本質的に用いられていた。代数多様体は常にコンパクト化可能であるため、大域的なホッジ理論の結果を利用することができる。詳しくは [F1, Chapter 5] を参照されたい。

実際、混合ホッジ構造の理論から導かれるスペクトル系列の E_1 退化を用いることで、代数的な設定における定理 10.1 は証明されていた。

しかし、この手法は定理 10.1 のような解析的な設定には適用できないため、同定理は長らく未解決の問題として残されていた。

定理 10.1 は、最初に [F4] で、斉藤盛彦による混合ホッジ加群の理論を用いて証明された。定理 10.1 に関しては、[F7] も参照されたい。その後、[FF] において、ホッジ加群を

用いない別の証明が与えられた。[FF] では、タイトルにもある通り混合ホッジ構造の変動の理論を利用している。証明のアイデア自体は、[F4] および [FF] の両者で本質的に同じである。その後、[Mu] では、上記の定理を含むより一般的な結果が示されているようだが、残念ながら私はその内容を十分に追えていない。

いったん定理 10.1 が証明されると、複素解析空間に対しても対数的標準中心 (log canonical center) に関する基本的な性質が示されるほか、究極的な形の錐体定理や収縮定理も複素解析的な設定で証明できるようになる。詳しくは [F5] や [F6] を参照されたい。

川又対数的末端対よりも悪い特異点をもつ複素解析空間に対しては、今回の一連の研究における最大の成果は、まさに定理 10.1 を解析的な設定で証明できたことである。というのも、定理 10.1 を出発点として導かれるさまざまな結果は、代数的な設定においてすでに多くの蓄積があり、それらはほとんどそのまま複素解析空間の場合にも翻訳可能だからである。

11 代数的 vs. 解析的

これまで全体を通じて、代数的な場合と解析的な場合の類似性を強調してきたが、ここでは両者の違いを際立たせる Serre の有名な例を紹介する。

例 11.1 (Serre) C を楕円曲線とし、以下のような分裂しない短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

によって定義される階数 2 のベクトル束 \mathcal{E} を考える。

このとき、 $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ は、射影ベクトル束 $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ のザリスキ開集合として実現可能である。もう少し詳しく言うと、 $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ のザリスキ開集合 U が存在して、複素解析空間として $U \simeq \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ が成り立つ。もちろん、 U は代数多様体としては $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ と同型ではない。

一方、 $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ は明らかに $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ のザリスキ開集合でもある。

すなわち、

$$\mathbb{P}_C(\mathcal{E}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \text{解析的} \end{array} \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \text{代数的} \end{array} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

という形で、 $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ に対して二通りのコンパクト化を構成することができる。

複素解析空間が必ずしもコンパクト化できるとは限らないことは、よく知られている事実である。また、 $f: X \rightarrow Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、 X と Y がそれ

ぞれコンパクト化可能であったとしても、 f がそれらのコンパクト化の間で双有理型 (bimeromorphic) 写像を与えるとは限らない。上の Serre の例は、まさにそのような現象が起り得ることを示している。

12 アバundance予想について

極小モデル理論において最も困難な未解決問題と考えられているのが、アバundance予想である。この予想は複数の形で述べられるが、ここでは以下のように定式化する。

予想 12.1 (アバundance予想) (X, Δ) を射影的な対数的標準対とする。 $K_X + \Delta$ が数値的に非負であるとき、 $K_X + \Delta$ は半豊富である。

この予想に関して、以下のような定理が証明できた：

定理 12.2 (複素解析空間の間の射影射に対するアバundance定理、[F9, Theorem 1.10])
予想 12.1 が n 次元で成立すると仮定する。 $\pi: X \rightarrow Y$ は複素解析空間の間の射影射とし、 W は Y のコンパクト部分集合で、 (X, Δ) が対数的標準対であるとする。このとき、 $K_X + \Delta$ が Y 上で数値的に非負かつ $\dim X \leq n$ であれば、 $K_X + \Delta$ は W の適当な近傍上で π -半豊富である。

定理 12.2 は [F9] において証明されたが、その証明は決して容易ではない。

注意 12.3 厳密に言えば、定理 12.2 において Δ が \mathbb{R} -因子の場合には若干の修正が必要である。詳しくは [F9, Corollary 1.11] を参照されたい。しかしながら、いずれにしても、射影的な多様体に対するアバundance予想 (予想 12.1) が成立すれば、複素解析空間の間の射影射に対してもアバundance予想が成り立つことがわかる。

この定理のおかげで、アバundance予想に関しては、射影的な (元々の) 設定における予想さえ解決すれば十分であることが明確になった。この意味において、複素解析空間の間の射影射に対するアバundance予想は解決したと言ってもいいであろう。

13 文献についての備忘録

ここでは複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論関連の文献について述べておく。

この方面を最初に系統立てて研究したのは中山による [N1] である。1980 年代の仕事

で、極小モデル理論のかなり初期段階の仕事であった。もちろん、扱っている対象は川又対数的末端対のみであった。3次元極小モデル理論の研究で必要に応じて複素解析的設定の極小モデル理論を扱うことは他の人の論文内でもあったと思うが、一般次元で一般論を本格的に論じたものは [N1] だけであったと思う。中山は著書 [N2] で [N1] の不備を修正している。定理 9.7 は [N2] が初出である。

その後は複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論関連の仕事はまったく存在しなかった。ここ数年の一連の仕事の始まりは [F2] である。すでに述べたように、[F2] では [BCHM] をほぼ忠実に複素解析空間の間の射影射に対して一般化した。その後、[DHP] では少し異なる方法で [F2] の主要な結果を再現している。また、[LM] は [DHP] と似た方法で、複素解析空間以外にも適用可能なさらなる一般化を与えている。

いずれにせよ、ここまで述べた仕事は主に川又対数的末端対に対するものであり、特異点解消定理と小平の消滅定理が解析的設定で成り立つことを考えれば、とくに驚くことではない。中山の [N1]、[N2] と [F2] の主たる貢献は、極小モデル理論を論じる正しい設定を見つけ、定式化した点であると思う。

次に、[F4] で複素解析空間の間の射影射に対して強力な消滅定理 (定理 10.1) を確立した。これは個人的には長年未解決の問題で、[F2] の仕事を完成させた後も、定理 10.1 は私が現役の間には証明できないかもしれないと思っていた主張であった。いずれにせよ、[F4] が完成してしまえばあとは一気に研究が進むのは自明であった。

[F5] では対数的標準対に対して極小モデル理論の基礎である錐体定理や収縮定理を証明した。消滅定理の応用である。[F6] では半対数的標準対 (semi-log canonical pairs) など扱えるように複素解析空間にも擬対数的構造 (quasi-log structure) を導入して基本的な道具を全部揃えた。

榎園と橋詰は [EH1] で複素解析空間の間の射影射に対して (弱) 半安定退化定理を確立し、それを用いて [EH2] で対数的標準対に対しても解析的な極小モデル理論を論じた。[F9] では上記結果も援用し、アバンダンス予想を論じた。特に対数的標準フリップ (log canonical flip) が複素解析的設定でも存在することを示した ([F9, Theorem 1.7])。フリップの存在問題は最初の非自明で重要な場合が森によって証明されたが、ここにきて通常考えられるフリップの一番一般的な存在定理が確立したことになる。[F9] や [EH3] で、極小モデル関連のほぼすべての予想はオリジナルの代数的な設定の予想に帰着できることが確認され、ある意味、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論は完成したと言って良いだろう。

橋詰は [H] でさらに特異点の悪い場合の極小モデル理論も扱っている。いずれにせよ、ここ数年の一連の仕事で、複素解析空間の射影射に対しても代数多様体の場合とほぼ同じ

ように極小モデル理論は使える、となり、一段落ついたと思う。

複素解析的な設定での対数的標準閾値 (log canonical threshold) の ACC については [F3] と [F9, Theorem 6.2]、複素解析的な設定での対数的標準性についての逆随伴は [F8] と [F9, Theorem 6.3] で扱われている。

14 おまけ

今回の極小モデル理論の解析化に関する話の前半 (論文 [F2] で扱った部分) は、[BCHM] を読めば誰でもすぐに思いつくような話である。優秀な学生でちょうどいい問題を探している人がいればやらせてみよう、と考えていたのだが、そんな機会がないまま気づけば 10 年以上が経ってしまっていた。

コロナ禍の 2021 年 9 月、「極小モデル理論についての問題」というタイトルで講演を行った (講演記録は [藤 3] を参照)。この講演では、極小モデル理論の解析化についても話したのだが、その後、数理研の講究録 ([藤 3]) を書く段になって、「変なこと言ってなかったかな?」「当たり前のことばかりじゃなかったかな?」と少し気になり始めた。そこで改めて考えてみたところ、気づけば [F2] ができあがっていた、というのが今回の研究の裏話である。

当時はコロナ禍で外出も少なく、時間に余裕があり、周囲の雑音に惑わされることもなかったので、集中して仕事ができる。その結果、10 年以上手つかずだった消滅定理の複素解析化も [F4] であっさり証明できてしまった。

こうなると、あとは代数的な結果を複素解析的な設定にどんどん翻訳していくだけの話であった。

15 よくある質問への答え

ここでは、よくある質問への答えを記しておく。代数多様体の場合には問題とならなかったが、複素解析空間の間の射影射を扱う際に現れる現象である。

Y を非特異射影曲面、 $P \in Y$ とする。

$$\pi: X \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\alpha} Y$$

を次のように構成する。 $\alpha: Z \rightarrow Y$ は Y の点 P におけるブローアップ、 $\beta: X \rightarrow Z$ は $Q \in Z \setminus \text{Exc}(\alpha)$ におけるブローアップとする。 β による例外曲線を $F \subset X$ 、 α による例外曲線の厳密変換 (strict transform) を $E \subset X$ とする。

このとき、 $W := P$ において錐体定理を考えると、

$$\overline{\text{NE}}(X/Y; P) = \mathbb{R}_{\geq 0}[E]$$

となることは明らかであろう。ここで、 Y 上の豊富なカルティエ因子 H を一つ選び、 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(\pi^*H + F)$ とおく。

このとき、 $\mathcal{L} \cdot E = 0$ より、 \mathcal{L} は明らかに P 上で π -数値的非負である。また、

$$K_X = \pi^*K_Y + E + F$$

より、 $-K_X$ は P 上で π -豊富である。

さらに、 $\mathcal{L} - K_X$ は P 上で π -豊富となるので、複素解析空間の間の射影射に対する固定点自由化定理 (basepoint free theorem) を用いれば、 \mathcal{L} は P のある開近傍上で π -半豊富であることが示せる。

しかしながら、 $\mathcal{L} \cdot F = -1$ であるため、 \mathcal{L} はそもそも Y 上では π -数値的非負ではない。したがって、当然ながら \mathcal{L} は Y 上で π -半豊富にはなりえない。

\mathcal{L} は $\overline{\text{NE}}(X/Y; P) = \mathbb{R}_{\geq 0}[E]$ における K_X -負な端射線の支持関数を与え、また、 \mathcal{L} はこの端射線に含まれる曲線を潰す収縮写像を与えるが、この収縮写像は Y 上ではなく、 $Y \setminus \alpha(Q)$ 上でのみ存在する。

複素解析空間の間の射影射に対する極小モデルプログラムにおいて、各ステップが W の適当な近傍に制限しないと存在しないというのは、このような現象によるものである。

もちろん、ここで取り上げた例は極めて単純であり、 Y 上で目的の E のみを潰す射の存在は明らかであるが、 $\overline{\text{NE}}(X/Y; W)$ の端射線から一般論により収縮射を構成すると、 W の近傍上でしかその存在を言えないことになる。

通常の錐体定理を考えると、

$$\overline{\text{NE}}(X/Y) = \mathbb{R}_{\geq 0}[E] + \mathbb{R}_{\geq 0}[F]$$

となり、このとき \mathcal{L} は $\mathbb{R}_{\geq 0}[E]$ の支持関数にはならない。たとえば、 $\mathcal{L}' := \mathcal{O}_X(\pi^*H - F)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}[E]$ の支持関数となることが分かり、通常代数多様体の場合の収縮定理を用いれば、 \mathcal{L}' は Y 上で E のみを潰す収縮写像を与える。

一方、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデルプログラムでは、 W に潰れる曲線のみを扱うため、上記のような差異が生じるのである。

折角なので、もう一つ別の例も扱ってみる。今度は $Y := \mathbb{P}^3$ とし、点 $P \in L \subset \mathbb{P}^3$ を取る。ただし、 L は \mathbb{P}^3 上の直線とする。 $\pi: X \rightarrow Y$ を L に沿ったブローアップとする。

このとき $W = P$ として錐体定理を考えると、

$$\overline{NE}(X/Y; P) = \mathbb{R}_{\geq 0}[\ell]$$

となることは明らかであろう。ここで、 $\ell := \pi^{-1}(P) \simeq \mathbb{P}^1$ である。

π の例外因子を E とすると、

$$K_X = \pi^* K_Y + E$$

と書けるので、 $-K_X$ が π -豊富であることがわかる。

このとき、複素解析空間の間の射影射に対する収縮定理を用いることで、 P の開近傍 U が存在し、 Y を U に縮めた上で、 ℓ を点に潰す収縮射 φ が存在することがわかる。

さらに、 $\pi: E \rightarrow L$ に剛性補題 (rigidity lemma) を適用すると、 $Q \in L \cap U$ の任意のファイバー $\pi^{-1}(Q) \simeq \mathbb{P}^1$ は収縮射 φ により点に潰されることがわかる。

この例からわかるように、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデルプログラムでは、 $W = P$ に潰れる曲線だけを用いて錐体定理および収縮定理が構成されている。しかし、極小モデルプログラムの各ステップにおいては、 W からはみ出す曲線が潰されることもある。

つまり、 $\overline{NE}(X/Y; P)$ は P に潰れる曲線のみを考慮しているが、実際にプログラムを走らせると、 P のファイバー内だけでフリップや因子収縮が生じるとは限らない。この点には注意が必要である。

16 謝辞

代数学シンポジウムの開催に際し、プログラム責任者である岸本崇さんおよび藤田健人さんをはじめ、運営にご尽力くださった皆さまに深く感謝申し上げます。また、本稿を丁寧に読んで有益なコメントを寄せてくださった橋詰健太さんと森山奈緒さんにも心より御礼申し上げます。

参考文献

- [BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468.
- [DHP] O. Das, C. Hacon, M. Păun, On the 4-dimensional minimal model program for Kähler varieties, Adv. Math. **443** (2024), Paper No. 109615, 68 pp.

- [EH1] M. Enokizono, K. Hashizume, Semistable reduction for complex analytic spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **378** (2025), 7667–7688.
- [EH2] M. Enokizono, K. Hashizume, Minimal model program for log canonical pairs on complex analytic spaces, preprint (2024). arXiv:2404.05126 [math.AG]
- [EH3] M. Enokizono, K. Hashizume, On termination of minimal model program for log canonical pairs on complex analytic spaces, preprint (2025). arXiv:2501.03531 [math.AG]
- [F1] O. Fujino, *Foundations of the minimal model program*, MSJ Memoirs, **35**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2017.
- [F2] O. Fujino, Minimal model program for projective morphisms between complex analytic spaces, preprint (2022). arXiv:2201.11315 [math.AG]
- [F3] O. Fujino, ACC for log canonical thresholds for complex analytic spaces, *Higher Dimensional Algebraic Geometry. A Volume in Honor of V. V. Shokurov*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. **489**, Cambridge University Press, Cambridge, 2025, 11–18.
- [F4] O. Fujino, Vanishing theorems for projective morphisms between complex analytic spaces, *Math. Res. Lett.* **32** (2025), no. 3, 739–769.
- [F5] O. Fujino, *Cone and contraction theorem for projective morphisms between complex analytic spaces*, MSJ Memoirs, **42**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2024.
- [F6] O. Fujino, On quasi-log structures on complex analytic spaces, preprint (2022). arXiv:2209.11401 [math.AG]
- [F7] O. Fujino, On vanishing theorems for analytic spaces, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **100** (2024), no. 4, 21–25.
- [F8] O. Fujino, Log canonical inversion of adjunction, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **100** (2024), no. 2, 7–11.
- [F9] O. Fujino, On finiteness of relative log pluricanonical representations, preprint (2024). arXiv:2506.00760 [math.AG]
- [藤 1] 藤野 修、Recent developments in the log minimal model program (対数的極小モデル理論の最近の発展について) 第 50 回代数学シンポジウム報告集 p151–p162 (2005). https://www.mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp05_files/Fujino.pdf

- [藤 2] 藤野 修、Recent developments in the log minimal model program II (対数的極小モデル理論の最近の発展について II) 第 52 回代数学シンポジウム報告集 p141–153 (2007). <https://www.mathsoc.jp/assets/file/sections/algebra/algsympo/algsymp07/fujino.pdf>
- [藤 3] 藤野 修、Problems on the theory of minimal models (極小モデル理論についての問題) 数理解析研究所講究録, no. **2211**, p223–235 (2022). <https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/server/api/core/bitstreams/e39c64da-0df7-4b6b-b996-f264ccd173d2/content>
- [FF] O. Fujino, T. Fujisawa, Variation of mixed Hodge structure and its applications, *Internat. J. Math.* **36** (2025), no. 9, Paper No. 2550020, 43 pp.
- [H] K. Hashizume, Minimal model program for normal pairs along log canonical locus in complex analytic setting, preprint (2025). arXiv:2501.04057 [math.AG]
- [LM] S. Lyu, T. Murayama, The relative minimal model program for excellent algebraic spaces and analytic spaces in equal characteristic zero, preprint (2022). arXiv:2209.08732 [math.AG]
- [Mo] N. Moriyama, Remarks on the minimal model theory for log surfaces in the analytic setting, preprint (2025). arXiv:2505.18055 [math.AG]
- [Mu] T. Murayama, Injectivity theorems and cubical descent for schemes, stacks, and analytic spaces, preprint (2024). arXiv:2406.10800 [math.AG]
- [N1] N. Nakayama, The lower semicontinuity of the plurigenera of complex varieties, *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, 551–590, *Adv. Stud. Pure Math.*, **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [N2] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, *MSJ Memoirs*, **14**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004. xiv+277 pp.