小平消滅定理の一般化と双有理幾何への応用
極小モデル理論の混合化

藤野　修　(京都大学大学院理学研究科)*

1. はじめに

森重文によって始められた3次元極小モデル理論は1990年代半ばにはほぼ全ての予想が解決された。私が大学院に進学した1990年代後半は極小モデル理論の冬の時代であった。[9]はそのような状況で書かれた極小モデル理論の入門書である。前半では一般次元での極小モデル理論の枠組みを整備し、最後の章ではShokurovのアイデアに沿って3次元半安定極小モデル理論が解説されている。Shokurovは極小モデル理論発展の初期から大量に独自のアイデアを出し続けているこの分野の第一人者である。2006年にプレプリントが公表された[1](通称BCHM)はShokurovのアイデアを元に一般次元の川又対数的端末対に対する極小モデル理論のかなりの部分を完成させるという偉大な結果であった。その後もこの方向での発展は続き、Sarkisov計画の完成、ShokurovのACC予想の解決、安定多様体のモジュライの構成など重要な仕事が続き、BirkarがBAB予想の解決でフィールズ賞を受賞するという大きな流れになっている。これら一連の仕事は大雑把にいうと[9]の続きを書いていることに相当する。主な手法は川又–Viehweg消滅定理と呼ばれる小平消滅定理の一般化と、広中の特異点解消定理である。これら定理を巧妙に用いて次元による帰納法をうまく回すことにより、数々の予想が解かれている。私自身も標準束公式（森重文氏との共同研究）、特殊停止定理の厳密な証明、一般次元の半安定極小モデル理論、權業善範氏との一連の共同研究などでこの方面に貢献してきたが、2006年の[1]出現以降の私の主な研究は上の流れとは全く異なるものである。誤解を恐れずに言うと、私の主要な貢献は、[9]の基礎部分の全面書き直しである。この講演アブストラクトでは数学的に厳密な主張は述べない。興味のある方は私の一連の論文を参照してください。

2. 混合ホッジ構造の応用

極小モデル理論の一般論は川又対数的端末対(KLT)に対して展開されていた。KLTは川又–Viehweg消滅定理と広中の特異点解消を使った証明方法がうまく機能するクラスとして導入されたと言ってもよい。あまり明示的に述べられてこなかったが、ホッジ理論的には以下の対応があると考えられる。

$$\boxed{\text{川又対数的端末対}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{純ホッジ構造}}$$

実際は、川又対数的端末対の研究に混合ホッジ構造が使われたり、本来混合ホッジ構造を使うことが自然と思われる状況を幾何学的な議論で切り抜けたりしていたのが私が研究を始めた頃までの状況であった。もう少し具体的に見てみよう。射影多様体に

本研究は科研費(課題番号:21H00974)の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14E30, 14F17, 14C30, 14D07
キーワード：極小モデル理論, 混合ホッジ構造, 消滅定理
*〒606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学大学院理学研究科
e-mail: fujino@math.kyoto-u.ac.jp

対する小平消滅定理や川又–Viehweg 消滅定理は以下のスペクトル系列の E_1 退化からしたがうことが知られている。

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

ただし、X は非特異射影多様体である。D を X 上の単純正規交差因子とする。このとき、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造を考えることにより以下のスペクトル系列の E_1 退化をえる。

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p(\log D)(-D)) \Rightarrow H_c^{p+q}(X \setminus D, \mathbb{C})$$

このスペクトル系列の E_1 退化を利用することにより、小平消滅定理より真に強力なコホモロジー消滅定理を得ることができるのである。Deligne の仕事以来 $\mathcal{O}_X(K_X+D)$ は $\bigwedge^{\dim X}\Omega_X^1(\log D)$ と考えられていたが、$\mathcal{O}_X(K_X+D)$ を $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^0(\log D)(-D), \omega_X)$ と解釈する点がミソである。このアプローチを追求し、以下の強力な対応を確立することができた。

$$\boxed{\text{擬対数スキーム}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{混合ホッジ構造}}$$

ただし、左側の擬対数スキーム (quasi-log schemes) は Ambro によって導入された概念である。したがって、ホッジ理論的な観点からは、私の仕事は既存の理論の混合化とみなせる。

詳しくは [4, Chapter 5] を見ていただくとして、消滅定理について少しだけ説明しよう。Y は非特異多様体 M の上の単純正規交差因子とする。B を M 上の $\mathbb{R}$-因子とし、$\mathrm{Supp}(B+Y)$ は単純正規交差因子とする。B と Y は共通成分を持たないと仮定し、$B_Y = B|_Y$ とおく。このとき、(Y, B_Y) を**大域的に埋め込まれた単純正規交差対**と呼ぶ。局所的に「大域的に埋め込まれた単純正規交差対」になっているスキームとその上の因子の対を、**単純正規交差対**と呼ぶことにする。消滅定理をはじめ、様々な結果を単純正規交差対に対して一般化して準備しておくことが、擬対数スキームの理論やそれに続く私の一連の仕事の重要なポイントである。(Y, B_Y) を単純正規交差対とし、$f\colon Y \to X$ をスキームの間の固有射とする。ここで L を Y 上のカルティエ因子とし、$L-(K_Y+B_Y)$ は f-半豊富と仮定する。このとき、$R^qf_*\mathcal{O}_Y(L)$ の素因子は (Y, B_Y) の幾何学的情報で制限を受けることが示せる。さらに、$\pi\colon X \to S$ がスキームの間の射影射であり、$L-(K_Y+B_Y)$ がある種の正値性条件を満たせば、$R^p\pi_*R^qf_*\mathcal{O}_Y(L)=0$ が全ての $p>0$ で成立することが示せる。前半の主張は Kollár の捻れ不在定理の一般化であり、後半の主張は Kollár の消滅定理の一般化になっている。よく知られているが、Kollár の消滅定理の非常に特殊な場合として非特異射影多様体に対する小平の消滅定理が復元できる。上で説明した消滅定理やそれらの一般化などは、擬対数スキームの枠組みを用いることで強力な道具になる。あるいは、上で述べた消滅定理などを有効に使える枠組みとして擬対数スキームの理論を整備したと言った方が適切かもしれない。

次に擬対数スキームについて見てみよう。X をスキームとし、ω を X の上の $\mathbb{R}$-カルティエ因子とする。大域的に埋め込まれた単純正規交差対 (Y, B_Y) からの固有射 $f\colon (Y, B_Y) \to X$ が存在し、$f^*\omega \sim_{\mathbb{R}} K_Y + B_Y$ が成立し、自然な射 $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y(\lceil -(B_Y^{<1}) \rceil)$ がある種の条件を満たすとする。このとき、$(X, \omega, f\colon (Y, B_Y) \to X)$ を擬対数スキームと呼ぶ。簡単に $[X, \omega]$ を擬対数スキームと呼ぶことも多い。非常に大雑把にいうと、単純正規交

差対の像になっているスキームとして擬対数スキームは定義される。正確な定義や細かい性質は [4, Chapter 6] を参照してもらいたい。擬対数スキームは一見すると意味不明なややこしい対象であるが、極小モデル理論に出てくる対象の多くのものが擬対数スキームの構造を持つことが確認できる。[3] では擬射影的な半対数的標準対 (semi-log canonical pairs) が自然な擬対数スキームの構造を持つことが示されている。上でも述べたが、擬対数スキームの枠組みは、混合ホッジ構造を用いて得られた小平消滅定理の一般化などをフルに活用することを可能にする強力な枠組みになっている。応用として、小平消滅定理やその一般化、錐定理、収縮定理、固定点自由化定理などは全て半対数的標準対に対して成立することがわかる。

以上は、2006 年の秋に [1] のプレプリントを素早く読んで理解した後、[1] とは違う路線を模索した頃から始め、2017 年に [4] が出版されるまでの 10 年間ぐらいに得られた結果である。[4] の 5 章で混合ホッジ構造を用いた消滅定理、6 章で擬対数スキームの理論が論じられている。これらは 2007 年に書いた未出版のプレプリントを改訂したものである。基本的には 2008 年の秋の学会の特別講演で話した内容である。対数的標準対 (LC) への擬対数スキームの枠組みを使わないアプローチ ([2] を参照) や可約なスキームの部分特異点解消の最新の結果を援用した [3] などもあるが、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造を用いて小平消滅定理の一般化を準備し、それを駆使すると言う点はどれも同じである。

3. 混合ホッジ構造の変動の応用

ここからの話題は、今回の直接的な受賞理由ではないかもしれないが、上で述べた話と自然につながっている。コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造の有用性は上で述べた小平消滅定理の一般化から明らかになった。この流れで行くと、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造の変動を考えることは自然である。この考えは藤澤太郎氏との共同研究 [8] で実行された。そこでは混合ホッジ構造の変動の理論を用い、飯高プログラムの際に活躍した藤田–Zucker–川又半正値性定理の強力な一般化を確立することに成功している。[8] の簡単な直接的な応用としては、一般次元安定多様体のモジュライ空間の射影性の証明 [5] がある。藤田–Zucker–川又半正値性定理の一般化は、basic slc-trivial fibrations なる楕円曲面に対する小平の標準束公式の一般化を導入することにより、擬対数スキームの研究に利用可能になった。その結果として、擬対数標準対 (QLC) が Du Bois 特異点しか持たないことの証明（Haidong Liu 氏との共同研究）、森双曲性の問題の完全解決、対数的標準中心に対する随伴と逆随伴の確立 (橋詰健太氏との共同研究)、Reid–福田型の固定点自由化定理の完成など、すでにたくさんの幾何学的応用を得ている。詳しくは [6] を参照してください。

basic slc-trivial fibrations についても少しだけ述べておきたい。$f\colon (X,B)\to Y$ を単純正規交差対 (X,B) から正規多様体 Y への全射で f のファイバーは連結と仮定する。Y 上の $\mathbb{R}$-カルティエ $\mathbb{R}$-因子 D が存在して $K_X+B\sim_{\mathbb{R}} f^*D$ が成立しているとする。このとき、いくつかの自然な条件を仮定すると、$D=K_Y+B_Y+M_Y$ と書け、M_Y は潜在的数値的非負因子になる。ここで、K_Y は Y の標準因子で、B_Y は $f\colon (X,B)\to Y$ の特異ファイバーの情報から幾何学的に定まる因子である。もちろん、M_Y が潜在的数値的非負因子であることの証明に、藤田–Zucker–川又半正値性定理の強力な一般化を用いている。$K_X+B\sim_{\mathbb{R}} f^*(K_Y+B_Y+M_Y)$ と表示すると、basic slc-trivial fibrations が小平の標準束公式の一般化であることに同意していただけると思う。

4. 極小モデル理論の解析化

最後に極小モデル理論の解析化について少しだけ述べておきたい。代数幾何学の枠からはみ出た話である。[1] で擬射影的な川又対数的端末対についての極小モデル理論のかなりの部分が確立された。ここで以下の自然な対応に注意する。

$$\boxed{\text{川又対数的端末対}} \Longleftrightarrow \boxed{L^2\text{ 条件}}$$

この対応は良く知られた対応である。微分形式が二乗可積分という条件で川又対数的端末対が特徴付けられるのである。川又対数的端末対が実り多い研究対象である理由の一つは、上の対応があるからであろう。私の元々の研究の目標は、この対応を拡張し、川又対数的端末対よりも広いクラスに解析的手法を適用可能にすることであった。しかしこの方向での研究は全く進展がないままである。そこで考え方を変え、上の対応を尊重し、複素解析空間の間の射影射に極小モデル理論を拡張することを考えた。この素朴なアイデアは [7] で実現できたと思う。擬射影川又対数的端末対に対する [1] の結果をほぼそっくりそのまま複素解析空間の川又対数的端末対に移植した感じになっている。この論文 [7] は複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論の始まりを告げる論文になるはずである。

5. さいごに

今回の受賞理由であろう混合ホッジ構造の理論の応用としての擬対数スキームの理論、混合ホッジ構造の変動の応用、ごく最近の解析空間の間の射影射に関する極小モデル理論について書いてきたが、どの話題も今現在研究しているのは天邪鬼な私一人プラス若干の共同研究者のみという状態である。今回の講演を聞いて興味を持った若い研究者が参入してくれることを切に願う。

参考文献

[1] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468.

[2] O. Fujino, Fundamental theorems for the log minimal model program, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47** (2011), no. 3, 727–789.

[3] O. Fujino, Fundamental theorems for semi log canonical pairs, Algebr. Geom. **1** (2014), no. 2, 194–228.

[4] O. Fujino, *Foundations of the minimal model program*, MSJ Memoirs, **35**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2017.

[5] O. Fujino, Semipositivity theorems for moduli problems, Ann. of Math. (2) **187** (2018), no. 3, 639–665.

[6] O. Fujino, On quasi-log schemes, preprint (2021).

[7] O. Fujino, Minimal model program for projective morphisms between complex analytic spaces, preprint (2022).

[8] O. Fujino, T. Fujisawa, Variations of mixed Hodge structure and semipositivity theorems, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **50** (2014), no. 4, 589–661.

[9] J. Kollár, S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Translated from the 1998 Japanese original. Cambridge Tracts in Mathematics, **134**. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.