

極小モデル理論と消滅定理

藤野 修 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

80年代初頭に始まった極小モデル理論は、最近大きく発展している。[6]の出版以降の約10年間の発展は凄まじい。シヨクロフによる画期的なアイデア [7] は [2] に詳しい。[2] を足掛かりにして [3] が世に出た。歴史的な結果である。[5] に詳しい解説がある。今回は [1] についての話である。[1] は記述の難解さゆえに専門家の間でも評価されていなかったが、すばらしいアイデアを含んでいる。[4] で理論を整備し、技術的な困難を全て取り除くことに成功した。今日はこれについて話したい。以下全て複素数体上で考えることにする。

極小モデル理論の出発点は森による錐定理である。

定理 1 (錐定理). X は非特異射影多様体とする。このとき、 $0 < -K_X \cdot C_j \leq \dim X + 1$ となるような高々可算無限個の有理曲線 $C_j \subset X$ で、

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_j]$$

を満足するものが存在する。

非常に大雑把に言うと、クライマン–森錐体 $\overline{NE}(X)$ の K_X と負で交わる部分は、大体凸多面体的である。森による定理 1 の証明は、正標数の世界で変形理論を使うという驚異的な物であった。さらに、3次元では端射線に付随して収縮写像が存在するという事実まで森は証明している。端射線というのは、クライマン–森錐体の角のことである。この森の結果で、高次元代数幾何学の進むべき正しい道が明らかになったのである。極小モデル理論がしばしば森理論と呼ばれる理由はここにある。その後、川又–フィーベックの消滅定理に依存した証明が得られた。この川又による X 論法と呼ばれる方法は、端射線に付随する収縮写像の存在も同時に示せるし、川又対数的末端特異点を許した多様体に対しても錐定理を示すことが出来る。現在の極小モデル理論の基礎は川又–フィーベックの消滅定理に大きく依存している。とりあえず川又–フィーベックの消滅定理を思い出しておこう。いろいろな定式化が知られているが、錐定理の証明には以下の形で十分である。

定理 2 (川又–フィーベック消滅定理). X を非特異射影多様体とし、 D は豊富な \mathbb{Q} -因子とする。 D の分数部分 $\{D\}$ の台は X 上の単純正規交差因子とする。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + \lceil D \rceil)) = 0$$

が全ての $i > 0$ に対して成立する。ただし、「 D 」は D の切り上げである。

川又-フィーベックの消滅定理は小平の消滅定理の単なる一般化のように見えるが、その応用の多さは小平の消滅定理の比ではない。ここで、「対」に対する特異点の定義を簡単に思い出しておく。

定義 3 (対に対する特異点). (X, B) は正規多様体 X と有効 \mathbb{Q} -因子 B の対とする。ここで、 B は相異なる素因子 B_i を用いて、 $B = \sum_i b_i B_i$ と表示する。ただし、 b_i は非負な有理数である。 $K_X + B$ は \mathbb{Q} -カルティエ因子と仮定する。 $f: Y \rightarrow X$ を (X, B) の対数的特異点解消とする。つまり、 Y は非特異、 f は固有双有理射、 f の例外集合 E は Y 上の単純正規交差因子で、 $E + \sum_i f_*^{-1} B_i$ も Y 上の単純正規交差因子とする。ただし、 $f_*^{-1} B_i$ は B_i の Y 上への固有変換である。

$$K_Y = f^*(K_X + B) + \sum_j a_j E_j$$

と書く。全ての j に対して $a_j > -1$ のとき、対 (X, B) は川又対数的末端対といい、 $a_j \geq -1$ のとき、対 (X, B) は対数的標準対という。ただし、 $f_*(\sum_j a_j E_j) = -B$ となるように $\sum_j a_j E_j$ は選んである。

次に定義する対数的標準中心も大切な概念である。

定義 4 (対数的標準中心). (X, B) を対数的標準対とする。 X の閉部分集合 C が対数的中心であるとは、 (X, B) のある対数的特異点解消 $f: Y \rightarrow X$ が存在し、

$$K_Y = f^*(K_X + B) + \sum_{j \in J} a_j E_j$$

と書いたとき、 $f(E_{j_0}) = C$ かつ $a_{j_0} = -1$ となる $j_0 \in J$ が存在することとする。

ここまでは古典的な極小モデル理論の話である。ここから最新の極小モデル理論に話を移そう。アンブロ [1] のアイデアである。詳しいことはすべて [4] に載っている。

設定 5. M を非特異代数多様体とし、 Y を M 上の被約な単純正規交差因子とする。 D は M 上の \mathbb{Q} -因子で、 $D = \sum d_i D_i$ と書いたとき、全ての i に対して D_i は M 上の素因子で、 $0 \leq d_i \leq 1$ が成立するとする。さらに、 D と Y は共通成分を持たず、 $\text{Supp}(D + Y)$ は M 上の単純正規交差因子とする。このとき $B = D|_Y$ とおく。以下、対 (Y, B) について考える。 $\nu: Y' \rightarrow Y$ を Y の正規化とし、 $K_{Y'} + B_{Y'} = \nu^*(K_Y + B)$ とおくと、 $(Y', B_{Y'})$ は対数的標準対である。 Y の既約成分と、 $(Y', B_{Y'})$ の対数的標準中心の Y での像を (Y, B) の階層と呼ぶ。

次の定理はコラールの捻れ不在定理と消滅定理の拡張である。この定理の証明が一番面倒な点である。論文 [1] の一番問題があった部分である。もっと一般的な形は、[4] を参照せよ。

定理 6 (捻れ不在定理と消滅定理). (Y, B) は設定 5 の (Y, B) とする。 $f: Y \rightarrow X$ を固有射とし、 L を Y 上のカルティエ因子とする。さらに、 $H \sim_{\mathbb{Q}} L - (K_Y + B)$ は f -半豊富と仮定する。このとき、以下の 2 つの主張を得る。

- (1) $R^q f_* \mathcal{O}_Y(L)$ の全ての (零でない) 局所切断の台は、 (Y, B) の幾つかの階層の f での像を含む。
- (2) X を射影多様体とし、 X 上の豊富な \mathbb{Q} -カルティエ \mathbb{Q} -因子 H' によって $H \sim_{\mathbb{Q}} f^* H'$ と書けるとする。このとき、すべての $p > 0$ と $q \geq 0$ に対して $H^p(X, R^q f_* \mathcal{O}_Y(L)) = 0$ が成立する。

この新しい定理 6 を使うと、以下の錐定理が証明出来る。

定理 7 (錐定理). (X, B) は射影的な対数的標準対とする。このとき、

- (1) $0 < -(K_X + B) \cdot C_j \leq 2 \dim X$ となるような高々可算無限個の有理曲線 $C_j \subset X$ で

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{(K_X+B) \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_j]$$

を満足するものが存在する。

- (2) 任意の $\varepsilon > 0$ と豊富な因子 H に対して、

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{(K_X+B+\varepsilon H) \geq 0} + \sum_{\text{有限本}} \mathbb{R}_{\geq 0}[C_j]$$

が成立する。

- (3) $F \subset \overline{NE}(X)$ は (K_X+B) -負な端錐面とする。この時、 $(\varphi_F)_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Z$ を満たす射影多様体への射 $\varphi_F: X \rightarrow Z$ のうち、既約曲線 $C \subset X$ に対しての条件「 $\varphi_F(C) = (1 \text{ 点}) \Leftrightarrow [C] \in F$ 」を満たすものが 1 つだけ存在する。 φ_F は F の収縮と呼ばれる。
- (4) 端錐面 F と射 $\varphi_F: X \rightarrow Z$ は (3) の通りとする。 L は X 上の直線束で、 $[C] \in F$ となる任意の曲線 C について $L \cdot C = 0$ を満たすようなものとする。このとき、 Z 上の直線束 L_Z で $L \simeq \varphi_F^* L_Z$ となるものが存在する。

古典的な極小モデル理論では、川又対数的末端対 (X, B) に対してしか錐定理は証明されていなかったが、対数的標準対に対してまで錐定理が拡張出来たのである。この一見すると僅かな差が、実はかなり巨大な進歩である。厳密に言うと、(1) 中の有理曲線の長さに関する主張は [3] の大結果の助けを借りないと証明出来ない。この点は注意が必要である。定理 6 が万能と言うわけではない。次の定理の方が新しいテクニックの強力さがよく伝わるかもしれない。

定理 8. (X, B) を射影的な対数的標準対とする。 L を X 上のカルティエ因子で、 $L - (K_X + B)$ は豊富とする。 $\{C_j\}_{j \in J}$ を (X, B) の対数的標準中心のいくつかの集合とする。 X の閉部分集合 $V = \bigcup_{j \in J} C_j$ を考える。 V には被約なスキーム構造をいれておく。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{O}_X(L)) = 0$$

が全ての $i > 0$ に対して成立する。ただし、 \mathcal{I}_V は V の X 上での定義イデアルである。特に、制限写像

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(L)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(L))$$

は全射である。

川又–フィーベックの消滅定理に依存した古典的極小モデル理論のテクニックや L^2 理論では到達出来なかった定理である。ここで述べたもの以外でも、川又–フィーベックの消滅定理のかわりに定理 6 を使うことにより、川又対数的末端対に対しての定理を対数的標準対に対する定理に格上げすることが出来る。このようなことを組織的に行うには、擬対数的多様体 (quasi-log variety) なる可約な多様体のクラスで川又の X 論法を展開する必要がある。次元に関する帰納法を上手く機能させるには、可約な多様体まで理論に組み込まないといけないのである。ここが [1] の最も素晴らしいアイデアであった。

REFERENCES

- [1] F. Ambro, Quasi-log varieties, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 220–239; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 214–233.
- [2] F. Ambro, A. Corti, O. Fujino, C. Hacon, J. Kollár, J. McKernan, H. Takagi, *Flips for 3-folds and 4-folds*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **35**. Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [3] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, preprint 2006.
- [4] O. Fujino, Introduction to the log minimal model program for log canonical pairs, preprint 2008.
- [5] 藤野修, 極小モデル理論の新展開, 雑誌「数学」に掲載決定.
- [6] J. Kollár, 森重文, 双有理幾何学, 岩波書店, 1998.
- [7] V. V. Shokurov, Prelimiting flips, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 82–219; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 75–213.