トーリックの世界
– 森理論入門 –

藤野 修

Contents

1. はじめに 1
2. いいわけ 2
3. このノートの読み方 2
4. 森理論ってなんだ？ 2
5. トーリックってなんだ？ 3
6. 記号と方言など 3
7. 凸多面体の単体分割 3
8. 凸多面体のいろは 4
9. 初等的証明 5
10. 扇ってなんだ？ 6
11. ちょっとだけ代数幾何 8
12. 特異点解消だ！ 9
13. クライマン - 森コーン 9
14. 端射線ってなんだ？ 12
15. フリップしちゃいましょう 13
16. 極小モデルプログラムを走らせろ！ 13
17. やっとこさ証明完了 14
18. まとめというか哲学！？ 15
19. もっと勉強したい方に 15
20. お疲れさま 15
21. 感謝 16
References 16

1. はじめに

公開講座にようこそ．この講座では**トーリック**のお話をしましょう．といっても何も不必要に難しがる必要はありません．扱うのは単なる**凸多面体**とか**扇**とかです．非常に素朴で誰にでもわかる対象を扱います．ただ，一見簡単そうに見える多面体の話が実はよく考えるとそれほど簡単

ではない, という事実にすぐに気付かれる筈です. まあ, とにかく読み進んでいきましょう. 4 日間よろしくお願いします.

2. いいわけ

この公開講座の講師の依頼を引き受けたのはイギリス滞在中の 2 月でした. そのときは深く考えずに「トーリック幾何学」の簡単な話でもしておこう, と思っていました. 内容を真剣に考えずに 8 月の講演のタイトルを決めてしまったのでした. その後いろいろな話題を考えたのですが, 結局のところ, トーリック幾何学に真正面から立ち向かうのは無理だ, との結論に達してしまいました. **代数幾何**の基礎知識が十分ある人にとってはトーリックはなかなか面白いおもちゃなのですが…. 代数幾何の基礎を予備知識として要求するのはちょっと無理なので, 今回は凸多面体の分割のお話をすることに決めました. したがってタイトルは「トーリックの世界」となってますが, 「トーリックのアイデアをつかった凸多面体, 扇の世界」というのが本当の内容です. 今回の目標は

「凸多面体の分割を**森理論**の観点からサクッとやってしまおう」

です. サブタイトルにあるように森理論の考え方の入門を兼ねています. 上手く解説できるのでしょうか？

3. このノートの読み方

このノートは数学的に厳密には書いていません. 数学的な正確さよりも読みやすさを優先してあります. あまり数学の部分を増やすと読む気がおきないですよね. それと, あんまり全部書いてしまうと講義を聞く必要がなくなってしまいますから. 肩肘張らずにサラサラッと読み流してください. 講義では黒板にセッセコセッセコ絵を描いて説明する予定です. このノート通りに講義をするわけではありません.

トーリック幾何学や凸多面体の話を理解するには数式を追うことも大事ですが, 自分で絵を描いて（もしくは頭の中で図を想像して）納得するのが一番です. もちろん絵に頼りすぎるのはいけませんが…. 講義で黒板に描かれた絵を見て「な〜んだ, 簡単やん！」と思って頂けると有難いです. （注：付録の絵も見よう！）

セミプロ（代数幾何の基礎知識がある人）は代数幾何の意外な応用を楽しんでください. 凸体の得意な人は普通とちょっと違う凸体の扱いを楽しんでください.

4. 森理論ってなんだ？

そもそも森理論ってなんなんでしょう？実はここだけの話, ボクもよく分かっていないです.

皆さん代数幾何学をご存じでしょうか？代数幾何学は**代数多様体**を研究する分野です. それでは代数多様体って言うのは何なんでしょうか？代数多様体は多項式の零点集合として定義される幾何学図形です. と簡

単に言ってはみたものの, 実際に厳密に代数多様体を定義しようとすると, **可換環論**, **層係数コホモロジー論**, **スキーム論**？などなど, チンプンカンプンな言葉がたくさん必要になってきます. 通常大学 4 年までの授業で教わることはないぐらいの高級（？）な数学です.

大雑把にいうと, 「代数多様体を（双有理的に）分類しよう！」と言うのが**分類理論**で, 高次元代数多様体（われわれ業界人は 3 次元以上を高次元と呼ぶ）の分類論に新しい観点を導入したのが森先生です. その後色々発展してどこまでを森理論と呼ぶのかよく分からなくなってしまいました. 今回はトーリック多様体の幾何学を森理論の観点から見直してみましょう, というわけです. もちろん森理論は現在も発展中です.

5. トーリックってなんだ？

それでは**トーリック多様体**って言うのは何なんでしょう？**トーラス**と呼ばれる代数多様体（11 章も見よう！）がパンパンに詰まった特殊な代数多様体です. たぶんこれが本来のトーリック多様体の正しい定義です. ところが不思議なことにトーリック多様体は定義からは想像がつかない面白い性質をたくさん持っています. トーリック多様体は数学の色々なところで出没します. トーリックを扱う流儀もたくさんあります. **扇**を使った記述もそのうちの一つです. 今回のお話では, 「トーリック多様体は扇である！」という考えの元でトーリックと遊びましょう. 結局のところ今回の主人公は「扇」です.

6. 記号と方言など

ここではこのノートで使う基本的な記号をまとめておきましょう. $\mathbb{Z}$ で**有理整数環**を表します. もっと具体的に書くと

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

です. $\mathbb{Q}$ で**有理数体**, $\mathbb{R}$ で**実数体**を表すのは現代数学の基礎です. $\mathbb{R}_{>0}$ で**正の実数**, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ で**非負な実数**の集合を表します. 後で「錐」とか「扇」とかを定義しますが, 文献によって微妙に定義が異なります. 我々の定義する「錐」は他の文献では「強凸有理多面錐」と呼ばれていたりします. 注意してください. 線形代数は予備知識として仮定します.

7. 凸多面体の単体分割

無駄話ばっかりで数学を全くしていなかったのでそろそろ数学に突入しましょう. 今回の素朴な疑問は以下の問題です. これは簡単なのでしょうか？一見すると簡単そうですが, 実際に証明しようとするとちょっと大変そうです.

疑問 1 (単体分割). 凸多面体を考える. この凸多面体を頂点を増やすことなく単体に分割出来るか？

色々と聞きなれない言葉が出てきましたね．ひとつずつ定義していきましょう．用語に不慣れな方は先に次の章を見た方がいいかもしれません．

定義 2 (格子点)．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考える．$\mathbb{R}^n$ の点 A が**格子点**であるとは，$A = (a_1, \cdots, a_n)$ と座標標示した時にすべての a_i が整数になることとする．

定義 3 (凸多面体)．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考える． 有限個の格子点の凸閉包を**凸多面体**と呼ぶ．凸多面体の次元はそれを含むユークリッド空間の最小の次元と定義する．

定義 4 (単体)．$n+1$ 個の格子点の凸閉包を n 次元**単体**という．ただし，$n+1$ 個の点はひとつの超平面上にはのっていないとする．

凸多面体の例は平面凸多角形とか立方体とかです．単体は 2 次元の時は単なる三角形, 3 次元だと四面体ですね．

上の疑問 1の答えは「Yes」です．今回は森理論を使って上の疑問 1に一つの解答を与える予定です．

先に進む前にちょっと図を書いて考えてみてください．平面図形の時は単体分割は明らかですね．凸多角形を三角形分割するだけです．対角線を引けばいいだけです．ただ, 対角線が交わってはいけません．「頂点を増やさずに」という条件がありますから．3 次元の多面体の時はどうでしょうか？立方体とかは簡単に分割できそうです．だけどもっとややこしい図形になったらどうでしょうか？サッカーボールみたいな凸多面体ではどうでしょう？ 4 次元以上では絵が描けないのでちょっと大変そうですね．数学的に厳密に証明するには何かキチンとした分割の方法を与えなくてはいけません．簡単な絵で分かったつもりになってもそれは数学の定理ではありません. 9章で初等的な証明を与えておきましょう．

8．凸多面体のいろは

この章では凸多面体の基本的な事をまとめておきましょう．

定義 5 (凸集合)．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が**凸集合**であるとは, A に属する任意の 2 点を結ぶ線分が A に含まれる時に言う．

定義 6 (凸閉包)．$\mathbb{R}^n$ 内の任意の部分集合 A が与えられたとき, A を含む $\mathbb{R}^n$ の凸部分集合で, 包含関係で最小なものを A の**凸閉包**とよぶ．

凸閉包が存在することのチェックは各自の演習問題にしておきましょう．

定義 7 (超平面)．$\mathbb{R}^n$ 内の**超平面** $\mathcal{H}$ とは

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b\} \subset \mathbb{R}^n$$

と書き表せるものである. 後の都合上,

$$\mathcal{H}^+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b\};$$

$$\mathcal{H}^- = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b\}.$$

と書いておく.

定義 8 (支持超平面). 超平面 $\mathcal{H}$ が凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ の**支持超平面**であるとは次の条件が成立することとする.

(i) $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}^+$ または $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}^-$;
(ii) $\emptyset \neq \mathcal{P} \cap \mathcal{H} \subsetneq \mathcal{P}$.

次がこの章最後の定義です.

定義 9 (面). 凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ の**面**とは, $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}$ と書ける $\mathcal{P}$ の部分集合のことである. ただし, $\mathcal{H}$ は支持超平面である.

どうですか？理解できましたか？分かりにくいときは絵を描いてひとつずつチェックしましょう.

凸多面体の「いろは」が身に付いたかどうかの確認のためいくつか問題を出しておきましょう. ただし, どれも厳密に証明しようとするとそれなりに面倒です. 困ったときは絵を描いて納得しましょう.

演習 10. 凸多面体 $\mathcal{P}$ の面 $\mathcal{F}$ もまた凸多面体であることを確認せよ.

演習 11. 凸多面体 $\mathcal{P}$ の面 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ があって, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ とする. この時 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}'$ の面である事を確認せよ.

演習 12. 面の面は元々の凸多面体の面である事を確認せよ.

演習 13. 二つの面の交わりもまた面であることを確認せよ.

それでは疑問 1の初等的証明に移りましょう.

9. 初等的証明

疑問 1の初等的証明を与えます. この証明は [3] の (13.11) 命題の特殊な場合です. スタンレーさんの議論が元ネタらしいです.

段階 1. 凸多面体 $\mathcal{P}$ の頂点に順番を付けて, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_v$ とする. 面 $\mathcal{F}$ があったとき, $\mathcal{F}$ に属する頂点 α_i で i が最小のものを $\omega(\mathcal{F})$ で表す. 特に $\omega(\mathcal{P}) = \alpha_1$ である.

段階 2. 凸多面体 $\mathcal{P}$ の面の列

$$\Psi : \mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_{d-1} \subsetneq \mathcal{P}$$

があって, $\mathcal{F}_i$ が $\mathcal{P}$ の i 次元面のとき, Ψ を $\mathcal{P}$ の**旗**と呼ぶ. ただし, d は $\mathcal{P}$ の次元とする. さらに, 旗 Ψ が**満員**であるとは, 任意の $1 \leq i \leq d$ に対して, $\omega(\mathcal{F}_i)$ が $\mathcal{F}_{i-1}$ の頂点でないときにいう.

段階 3. 満員な旗 Ψ があったとき, $\omega(\mathcal{F}_0)$, $\omega(\mathcal{F}_1)$, $\cdots$, $\omega(\mathcal{F}_{d-1})$, $\omega(\mathcal{P})$ を頂点とする d 次元単体およびその面の全体の集合を $\Delta(\Psi)$ で表す. そして,

$$\Delta_0 = \bigcup \Delta(\Psi)$$

と定義する. ただし, Ψ は満員の旗すべてを走るとする. この時 Δ_0 は $\mathcal{P}$ の単体分割を与える.

簡単な図形で確認してみてください. 証明の詳しいチェックはもちろん各自の演習問題です.

さあ, 次の章からは森理論を使って別証明を考えていきましょう！代数幾何のような大掛かりな道具を使わなくても証明出来るからいいやん！という意見の方は皆さんの中にいないと信じていますが….

10. 扇ってなんだ？

とにかく問題は決まりました. それではさっそく「扇」を定義しましょう. 凸多面体はそれ自身面白い対象だしトーリックの手法で扱う事も出来ますが, ここからはもっと扱い易い「扇」を扱う事にします. まずは「錐」を定義します.

まず階数 r の自由 $\mathbb{Z}$- 加群 $N \simeq \mathbb{Z}^r$ を固定しましょう. **格子**と呼んだりします. N の係数を実数体 $\mathbb{R}$ に拡張した $\mathbb{R}$- ベクトル空間を $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ と書きます.

定義 14 (錐). $N_{\mathbb{R}}$ の部分集合 σ が**錐**（あるいは**錐体**）であるとは, 有限個の N の元 $e_1, e_2, \cdots, e_s$ が存在して

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_s = \{a_1e_1 + \cdots + a_se_s, a_i \geq 0 \text{ for every } i\}.$$

さらに $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ を仮定する. この性質は**強凸**と呼ばれる. ここで $\{e_i\}$ を錐 σ の生成系と呼ぶ. また $\dim \sigma$ を σ を含む最小の $\mathbb{R}$- 部分空間 $\sigma + (-\sigma) = \mathbb{R}\sigma$ の次元とする. 今後は省略して $\sigma = \langle e_1, \cdots, e_s \rangle$ と書く事もある. 以下特に断らなければ e_i は**原始元**とする. つまり e_i は $N \cap \mathbb{R}e_i$ を $\mathbb{Z}$- 加群として生成しているとする. ようするに最も短いベクトルである. 以下, 1 次元錐体 $\langle e_i \rangle$ を省略して e_i と書くこともある.

次の「面」の定義は凸多面体の時の「面」の定義と基本的に同じ概念です. ちょっと趣きの違う定義をしておきましょう.

定義 15 (面). σ を錐体とする. $f : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ を線形写像とする. ここで f は σ 上非負とする. つまり $f(\sigma) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. この時 $\tau := \sigma \cap \{f\}^{\perp} = \{x \in \sigma; f(x) = 0\}$ を σ の**面**という.

もちろん8章で述べた凸多面体の面についての性質と同様の性質が錐体の面についても成り立ちます. 数学的に書くと難しいですが, 絵で描くと当たり前ですね. 次に「扇」を定義します.

定義 16 (扇). N の**扇**とは $N_{\mathbb{R}}$ の錐の空でない集合 Δ であって次の性質を満たす.

(i) $\sigma \in \Delta$ なら σ の面もすべて Δ に属する.
(ii) $\sigma, \tau \in \Delta$ なら共通集合 $\sigma \cap \tau$ は σ の面かつ τ の面である.
(iii) Δ に含まれる錐体の数は有限である.

和集合 $|\Delta| := \cup_{\sigma \in \Delta} \sigma$ を**扇の台**とよぶ. $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$ のとき, Δ を**完備扇**と呼ぶ.

扇が与えられた時これの完備化は存在するのでしょうか？つまり以下のような扇は存在するのでしょうか？

疑問 17 (完備化). Δ を扇とする. この時 Δ を部分集合として含む扇 Δ' で $|\Delta'| = N_{\mathbb{R}}$ なるものが存在するか？

実は扇の完備化は常に存在します. 代数幾何の隅広の同変コンパクト化定理を使えばいいのです. 代数幾何を使わない初等的な証明は最近エヴァルドさんによって得られたらしいです. 簡単そうなのに初等的な証明は大変らしいです. 意欲的な方は証明にチャレンジしてください.

ともかく我々は必要なら以後完備扇を扱えばいいようになったわけです.

注意 18. 森理論を使って扇の分割を扱うときは, 完備扇を扱う方が技術的に簡単である. もっというなら**射影扇**と呼ばれる扇が森理論的には最も扱い易い. 一応射影扇は定義しておく. しかし, 代数幾何を知らないと射影性の有り難みは理解できないかもしれない. 扇を分割することによって完備扇は必ず射影的にすることが出来る. 代数幾何でいう**チャウの補題**である. さらに特異点解消（12 章で説明）で作った分割は常に射影的にとれる. したがって我々は射影性についてはあまり深く考えないでおく. ただし, 代数幾何, 特に森理論では射影性が本質的に効いてくる.

定義 19 (射影扇). Δ を完備扇とする. 実数値連続関数 $h : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ が**支持函数**であるとは, N 上で整数値をとり, かつ各 r 次元錐体 $\sigma \in \Delta$ 上では線形となることである. すなわち, 各 r 次元錐体 $\sigma \in \Delta$ に対して線形函数 $l_\sigma : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ が存在し, σ 上 $h = l_\sigma$ である.

さらに, すべての r 次元錐体 σ に対し, $l_\sigma(n) \geq h(n)$ であり, しかも等号成立は $n \in \sigma$ の時に限る時, h は**狭義に上に凸**であるという.

狭義に上に凸な支持函数が存在するとき Δ は**射影扇**であるという.

定義 20 (単体的). 次元と同じ数からなる生成系を持つ錐を**単体的**という. すべての錐が単体的なる扇を単体的な扇と呼ぶ.

次の問題を考えましょう.

疑問 21. 扇が与えられたとき 1 次元錐を付け加えることなく単体的に分割できるか？

この問題は疑問 1の一般化になっています．何故でしょうか？考えてみてください．

命題 22. 疑問 *1*は疑問 *21*より従う．

答えは簡単です．凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたとき $\mathbb{R}^{n+1}$ 内で $\mathcal{P} \times \{1\}$ と原点 $\{0\}$ で張られた錐体を考えれば良いのです．絵を描いてみましょう！

おっと, 扇の分割をキチンと定義していませんでしたね. 扇の分割とは以下の事をさします.

定義 23 (扇の分割)**.** 扇 Δ' が扇 Δ の**分割**（もしくは**細分**）であるとは各 $\sigma' \in \Delta'$ に対し, $\sigma \in \Delta$ が存在して $\sigma' \subset \sigma$ を満たす．もちろん $|\Delta| = |\Delta'|$ を仮定する．

ずらずらと書き並べてきたけど理解できましたか？分からないときは絵を描きましょう！

結局のところ我々は疑問 21を証明すれば良いことになったわけです.

お話 24. トーリック幾何学の言葉で言えば, 単体的という条件は扇に対応するトーリック多様体が $\mathbb{Q}$**-分解的**である, ということである．したがって, 疑問 *21*は「トーリック多様体が与えられたとき, それの $\mathbb{Q}$-分解化は存在するか？」と言い換えられる．1 次元錐体を付け加えることなくという条件は $\mathbb{Q}$-分解化が**スモール**であるという事に対応する．また, トーリック多様体が $\mathbb{Q}$-分解的ということと**オービフォールド**であるということは同値である．したがってトーリック多様体は $\mathbb{Q}$-分解的のときに非常に扱いやすくなる．これが疑問 *21*の代数幾何的な意味である.

11. ちょっとだけ代数幾何

ここらでちょっとだけ代数幾何的なトーリック多様体の理論を覗いてみましょう. 雰囲気を味わって下さい. 詳しい定義は省略します.

定義 25 (トーリック多様体)**.** Δ を N の扇とする．$M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ とおく．$\sigma \in \Delta$ の双対錐を $\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$ と書く．$X(\sigma) := \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ を σ に対応する**アフィントーリック多様体**と呼ぶ．各 $\sigma \in \Delta$ に対し $X(\sigma)$ が定義され, それらを自然に貼り合わせる事により**トーリック多様体** $X(\Delta)$ が得られる.

例 26 (トーラス)**.** $\sigma = \{0\}$ とする．すなわち 0 次元錐体である．この時 $X(\sigma) = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \cdots, X_r, X_r^{-1}] \simeq (\mathbb{C}^\times)^r$. $(\mathbb{C}^\times)^r$ を r 次元**トーラス**と呼ぶ.

お話 27. 上で述べたトーラスがトーリック多様体の名前の由来である. トーリック (*toric*) はトーラスの形容詞形である. 「トーリック」は形容詞なので厳密に言うと「トーリックの世界」というタイトルも文法的におかしいですね.

代数幾何は忘れて元のお話に戻りましょう.

12. 特異点解消だ！

扇の特異点解消をお話しましょう.

定義 28 (非特異扇). 扇 Δ が**非特異**とは, 各 $\sigma \in \Delta$ が次の意味で非特異になることである. $N \simeq \mathbb{Z}^r$ の $\mathbb{Z}$- 基底 $\{e_1, \cdots, e_r\}$ および $s \leq r$ が存在して $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_s$ とかける.

次の定理は基本的な結果です. 証明はそれほど難しくないです. **重心細分**という手法で分割をしていくと簡単に証明できます.

定理 29 (特異点解消). 任意の扇は非特異な扇に分割できる.

非特異な扇はもちろん単体的です. したがって扇が与えられたとき単体的な分割が必ず存在することは上の定理に含まれています. 我々が証明したい問題は「1 次元錐」を付け加える事なく単体的に分割できるか？です. したがって我々は特異点解消で作った扇の無駄な 1 次元錐体を単体的という条件を損なわないように取り去っていけば良いわけです. ここが今回のお話のミソです. 最初に 1 次元錐体についての条件を無視してドンドン分割してやります. そのあとに不必要に付け加えてしまった錐体をドカドカと壊していって欲しい単体的分割を得よう！というのです.

とりあえず我々は特異点解消を認めて先に進みましょう.

お話 30. 非特異, 特異点解消について述べたが, これは代数幾何学の用語である. 扇が非特異であるというのは対応するトーリック多様体が非特異であるという事に対応している. 特異点解消は標数零の時は広中先生によって一般の代数多様体で証明されている. 論文は約 *230* ページもあるので「広中の電話帳」と呼ばれている. トーリック多様体の特異点解消はそれほど難しくない. 最近は一般の代数多様体の特異点解消をトーリックの場合（正確に言うとトロイダル）に帰着させる方法もある. 弱広中定理と呼ばれている. トロイダルへの帰着の証明はなんと *10* ページ足らずである！

13. クライマン - 森コーン

いきなりですが, ここらでクライマン - 森コーンなるものを定義しましょう. クライマン - 森コーンは代数多様体の双有理的性質を記述する大切なものです. 我々の扇に適用すると, 扇の無駄な**壁**をつぶす方法を教

えてくれる不思議なコーン（錐体）です．まずは「交点数」から定義しましょう．

単体的な n 次元完備扇 Δ で交点数を考えます．すなわち，$|\Delta| = N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ とします．まず $(n-1)$ 次元錐体 $\sigma = \langle e_1, \cdots, e_{n-1} \rangle$ を考えましょう．扇 Δ が単体的なので σ は n 次元錐体 $\tau_n = \langle e_1, \cdots, e_n \rangle$ と $\tau_{n+1} = \langle e_1, \cdots, e_{n-1}, e_{n+1} \rangle$ の交わりになります．すなわち $\sigma = \tau_n \cap \tau_{n+1}$ と表せます．$n+1$ 個の 1 次元錐体はひとつの線形な関係式を満たします．

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i = 0$$

と書きましょう．ただし，$a_{n+1} = 1$ と正規化しておきましょう．この時 $a_n > 0$ です．いいですか？絵を描くと明らかですね．あとは適当に順番を入れ替えて

$$\begin{cases} a_i < 0, & \text{もし } 1 \le i \le \alpha \\ a_i = 0, & \text{もし } \alpha + 1 \le i \le \beta \\ a_i > 0, & \text{もし } \beta + 1 \le i \le n+1 \end{cases}$$

とできます．ここで $0 \le \alpha \le \beta \le n-1$ です．これで準備が出来ました．

定義 31 (交点数)**.** e を一次元錐体とする．σ と e の**交点数**を以下で定義する．

$$\begin{cases} \sigma \cdot e = 0 & \text{もし } e \notin \{e_i\}_{i=1}^{n+1} \\ \sigma \cdot e = \frac{\mathrm{mult}(\sigma)}{\mathrm{mult}(\tau_{n+1})} > 0 & \text{もし } e = e_{n+1} \\ \sigma \cdot e = a_i \sigma \cdot e_{n+1} & \text{もし } e = e_i. \end{cases}$$

よく分からないですか？そうそう，mult を定義していませんでした．$\mathrm{mult}(\sigma) := [N_\sigma : \mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_{n-1}]$ です．N_σ は σ で生成される格子で $\mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_{n-1}$ は $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ で生成される格子です．mult は格子間の**指数**で定義します．$\mathrm{mult} = 1$ と「錐体が非特異」は一対一に対応します．

上で定義した交点数は代数幾何の言葉でいうと，曲線と因子の交点数です．扇の世界では大雑把に言って単位平行多面体の体積に相当します．実はこれで交点数がキチンと定義されているのです．厳密なチェックはそれほど簡単ではないですが…．

ここで $Z_1(\Delta) = \sum \mathbb{R}\sigma$, $Z^1(\Delta) = \sum \mathbb{R}e$ とおきます．ただし，σ は $(n-1)$ 次元錐体すべてを動き，e は 1 次元錐体すべてを動くものとします．もちろん両方とも有限次元ベクトル空間です．この時，上で定義した交点数は双線形な交点形式

$$\cdot : Z_1(\Delta) \times Z^1(\Delta) \to \mathbb{R}$$

に自然に拡張できます．この交点形式は簡単にわかるように有理数体上定義されています．

定義 32 (数値的同値関係). $\sigma_1, \sigma_2 \in Z_1(\Delta)$ が**数値的に同値**とはすべての $e \in Z^1(\Delta)$ に対して $\sigma_1 \cdot e = \sigma_2 \cdot e$ が成立することである. この時 $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ と書く. 同様に $Z^1(\Delta)$ にも数値的同値関係を定義できる. $N_1(\Delta) := Z_1(\Delta)/\equiv$, $N^1(\Delta) := Z^1(\Delta)/\equiv$ と書くことにする. $\sigma \in Z_1(\Delta)$ の $N_1(\Delta)$ での像を $[\sigma]$ と書きましょう. $Z^1(\Delta)$ についても同様である. もちろん有理数体上定義された非退化な交点形式

$$N_1(\Delta) \times N^1(\Delta) \to \mathbb{R}$$

が得られる.

定義 33 (クライマン - 森コーン). Δ を射影的で単体的な n 次元扇とする. この時

$$NE(\Delta) := \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[\sigma]$$

を**クライマン - 森コーン**と呼ぶ. ただし σ は $(n-1)$ 元錐体すべてを走るとする. $NE(\Delta)$ は $N_1(\Delta)$ 内の錐体である. つまり強凸 (尖っている) である. これは射影性の帰結である.

定義 34 (相対的クライマン - 森コーン). Δ_S を完備な n 次元扇とする. Δ を Δ_S の細分で単体的な扇とする. さらに Δ は Δ_S 上**相対的に射影的**とする. この時

$$NE(\Delta/\Delta_S) := \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[\sigma]$$

を**相対的クライマン - 森コーン**と呼ぶ. ただし, σ は Δ の $(n-1)$ 次元錐体だが Δ_S に含まれないものとする. これもやはり錐体である.

注意 35. 上で述べたクライマン - 森コーンは一般の代数多様体での話をトーリック多様体の時に適用し, それを扇の話に翻訳したものになっている. われわれの目的は一般論を展開することではないので上記のように天下り的に与えた.

定義 36 (例外因子). $E := \sum e_i$ と置く. ここで e_i は $\Delta \setminus \Delta_S$ の 1 次元錐体すべてとする.

この時次の事実が成立します.

補題 37 (負値性補題). E は零でなければ**相対的ネフ**になれない. ここで相対的ネフとはすべての $a \in NE(\Delta/\Delta_S)$ に対し $E \cdot a \geq 0$.

負値性補題は代数幾何の簡単な補題です. ここではアッサリと認めてしまいましょう.

注意 38 (相対的射影性について). 相対的射影性については何も定義をしなかった. 射影性の定義を少し変えればいいだけなのだが, 技術的になるのでここではこれ以上踏み込まないことにする. 注意 18でも述べたように射影性は森理論では極めて大切な条件であることだけは注意しておく.

14. 端射線ってなんだ？

前の章でクライマン - 森コーンを定義しましたね．覚えていますか？$NE(\Delta/\Delta_S) = \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[\sigma]$ が（相対的）クライマン - 森コーンでした．この錐体の「角」を端射線（たんしゃせん）と呼びます．厳密に言うと次の通りです．

定義 39 (端射線)**.** R を $NE(\Delta/\Delta_S)$ の 1 次元錐体とする． 次の条件を満たすとき R を**端射線**と呼ぶ． $a, b \in NE(\Delta/\Delta_S)$ が $a + b \in R$ なら常に $a \in R$ かつ $b \in R$.

結局のところ錐体の「かどっこ」です．端射線を見ると扇の壁の潰し方が分かるのです．これは代数幾何でいう収縮写像の話です．

定理 40 (収縮定理)**.** R を端射線とする．もちろん $R = \mathbb{R}_{\geq 0}[\sigma]$ という形で書ける．注意して頂きたいのは $\sigma_1 \neq \sigma_2$ であっても $\mathbb{R}_{\geq 0}[\sigma_1] = \mathbb{R}_{\geq 0}[\sigma_2]$ でありうる事である．この時 Δ から R に入る $(n-1)$ 次元錐体をすべて取り払ったもの Δ' はやはり扇で Δ_S の細分になっている．Δ から Δ' を作る対応を**収縮射**と呼ぶ．

ようするに端射線から決まる壁を潰したわけです．ここでいう**壁**とは，$(n-1)$ 次元錐体のことです．

注意 41. 射影性については細かいことを気にしないでおく．ただし，収縮定理で作った扇 Δ' は扇 Δ_S 上相対的に射影的になることだけは注意しておく．

先ほどの章で説明した記号を使いましょう．すると次の事がわかります．

定理 42. 端射線 $R = \mathbb{R}_{\geq 0}[\sigma]$ に付随する収縮射は以下の *3* 通りに分類できる．α は *13* 章で導入したものである．

(1) $\alpha = 0$ のとき，この時は**ファノ収縮**と呼ばれる．いわゆる**森ファイバー空間**の構造を与える．しかし今の場合は相対的な話にしているので実はこの場合はおきない．面倒なのでこの場合は以下無視する．
(2) $\alpha = 1$ のとき，この場合は**因子収縮**と呼ばれる．行き先の Δ' はやはり単体的である． Δ' の 1 次元錐体の数は Δ のそれよりも減っている．
(3) $\alpha \geq 2$ のとき，この時は**小収縮**とか**フリッピング収縮**と呼ばれる．残念ながらこの時は Δ' は単体的にならない．実は Δ と Δ' の 1 次元錐体は一致することがわかる．

この章で得たことをまとめておきましょう． クライマン - 森コーンの角をひとつ指定すると，それに伴って Δ の「壁」を潰した新しい扇 Δ' が得られました．これは Δ_S の細分になっています．収縮射には大きく分けて 3 通りありました． 今の場合は因子収縮とフリッピングしか起きません．フリッピングのときは Δ' が単体的でないことに注意しましょう！

さすがにこれだけの説明では意味不明ですね．絵を描いて考えてみましょう！3 次元の扇のときは尤もらしい絵が描けます．もちろん一般次元のときは絵が描けないので頭の中で想像して数式を頼りに理解するしかありませんが…．

すぐに理解できなくても悩まなくていいです．ボクもキチンと理解するのに数年かかりました．数学ってそんなもんです．

お話 43. 定理 *42*は一般の代数多様体に対して成り立つ．簡単のために非特異な射影的な代数多様体を考える．この時，クライマン - 森コーンが考えられる．ただし，一般の多様体のときはクライマン - 森コーンは有限本の端射線で張られているわけではない．しかし，端射線に付随して収縮射が存在する．これは**固定点自由化定理**の応用である．この辺の話は高次元代数幾何の基礎の基礎である．トーリックの時は初等的に扇の話で書ける．

15. フリップしちゃいましょう

収縮射については理解できたでしょうか？問題はフリッピングです．単体的な分割を探していたのにフリッピング収縮が起きると単体的な扇が単体的でなくなってしまうので困ってしまいます．さてどうしましょう？ここで「フリップ」の登場です．

定理 44 (フリップ)**.** Δ から Δ' をフリッピング収縮とする．この時以下の性質を持つ単体的な扇 Δ^+ がただひとつ存在する．Δ^+ は Δ とは異なる．さらに Δ^+ は Δ' の細分になっていて，Δ^+ から Δ' はフリッピング収縮である．この新しい Δ^+ を**フリップ**と呼ぶ．

これがフリップ定理です．証明は潰した壁を違う方向に付け変えるという操作です．大雑把に言うと，横方向にあった壁をいったん潰して縦方向に新しい壁を作る，という感じです．

お話 45 (フリップって？)**.** 3 次元代数多様体のフリップの存在は森先生によって得られた．約 *15* 年も前の事である．その後色々発展してきて最近では 3 次元のフリップの証明はかなり簡略化されている．しかし 4 次元以上ではまだまだ研究途上である．

トーリック多様体のフリップについてはリードさんが約 *20* 年前に論文を書いている．いわゆるトーリック版森理論である．このリードさんの論文 [5] がトーリック版森理論のバイブルである．

高次元代数幾何学の大問題の一つが「フリップは常に存在するか？」である．解ければいいんですが…．

16. 極小モデルプログラムを走らせろ！

端射線が指定されると収縮射が存在するというのは分かって頂けましたか？因子収縮が起きたときは Δ の代わりに Δ' を使って先に進みます．

フリッピング収縮が起きたときは Δ の変わりにフリップした後の Δ^+ を考えます.

素朴な疑問は,「どうやって端射線を選ぶの？」です. このために $E = \sum e_i$ を考えます. すでに述べたように E は零でない限り相対的ネフにはなり得ません. したがって必ず $E \cdot R < 0$ なる端射線 R が存在します. これはクライマン - 森コーンを見れば明らかですね.

我々は E との交わりが負になる端射線を選んで収縮射を使います. 上で述べたように Δ の代わりに Δ', または Δ^+ を使って同じことを繰り返します.

この操作の事を業界人は「**極小モデル理論を走らせる**」とか「**ミニマルモデルプログラムを走らせる**」と言います. 残った問題は「このプログラムは止まるのか？」です.

17. やっとこさ証明完了

次の事実に注意しましょう.

定理 46. 因子収縮射を考える. すると Δ' の 1 次元錐体の数は Δ のそれよりも必ず減っている.

いままで絵を描いて確かめたものについては確かに上の定理は成り立っていますね. これは代数幾何では「**相対的ピカール数**が減る」という事実に対応しています. これによって因子収縮写像が有限回しか起こり得ないことがわかりました. 扇の中に入っている 1 次元錐体の数は有限個であることに注意しましょう.

したがって次の定理を認めればほとんど定理は完成です.

定理 47 (フリップの停止)**.** フリップは有限回で止まる.

フリップの列があったとしましょう. フリップを思い出すと, Δ と Δ^+ の 1 次元錐体は一致しています. 変わったのは「壁」の方向だけです. 1 次元錐体を固定したときにそれを 1 次元錐体として持つ扇の可能性は有限個しかないという簡単な事実と, **ディスクレパンシー（食い違い係数）**という不変量を見ることでフリップの無限列があり得ないことがすぐにチェックできます. ここでも負値性補題が活躍します. 代数幾何学的には簡単な議論です.

これでプログラムは停止しました. E が零でないと必ず E と負で交わる端射線が存在するので結局 $E = 0$ が証明できました. 最後に得た扇を Δ_M と書きます. 以上まとめて,

結論 48. 完備な扇 Δ_S が与えられたとする. 特異点解消を用いて Δ_S 上射影的な非特異扇 Δ を作る. E を例外因子とし, これと負に交わる端射線でミニマルモデルプログラムを走らせる. その結果 Δ_S 上射影的な細分 Δ_M が得られる. Δ_M は以下の性質を持つ.

(i) Δ_M は Δ_S の細分である.

(ii) Δ_M と Δ_S の 1 次元錐体は一致する.
(iii) Δ_M は単体的である.

そうです. Δ_M が我々の欲しかった単体的分割なのです！

注意 49. Δ_M は極小モデルを走らせるときの端射線の選び方に依存するので唯一つ存在するわけではない. 単体的分割が 2 つあったときそれらはフロップという操作で互いに移り合える, などなど色々と知られている.

お話 50. 定理 *47*はトーリックの時は簡単だが, 一般の代数多様体の時は難問である. フリップの存在予想と並ぶ未解決問題である.

18. まとめというか哲学！？

非常に大雑把に言ってしまうと, 「扇」をドンドン分割していくことは代数幾何学的には**爆発（ブローアップ）**とか特異点解消に対応します. 分割しすぎた扇から出発し, 無駄な壁を潰していって目的の扇を目指すのが「森理論」です. これはまさに高次元代数幾何のスタンダードな考え方です. 森理論の神髄をわかって頂けたでしょうか？

「不必要に膨らんでいるところを潰せ!」

です.

19. もっと勉強したい方に

トーリック多様体をもう少ししっかりと勉強したいという方は文献表の本を参考にしてください. [1] はオーソドックスなトーリック多様体の入門書です. 2.5 節がトーリック版森理論の解説になっています. ただし, この本を読むには代数幾何の基礎知識が必要です. [2] は最近出版されたトーリック多様体の入門書です. 代数幾何の言葉を使わずに扇の話で書いてあります. これは現在も本屋で入手可能と思います. この本の前半はこの講義ノートと同じスタイルで書かれています. 今回の話の理解に役立つと思います. [4] は今年出版されたばかりの洋書です. 最後の 14 章がトーリック版森理論の詳しい解説です. 他に洋書でトーリック多様体の教科書が幾つかあります. 後は上記の本の文献表を頼りに各自の興味に合う論文を探して下さい.

ちなみに, 小田先生, 石田先生はトーリック多様体の専門家, 松木先生は森理論の専門家です. もちろんボクはトーリック多様体の専門家ではなく, 森理論の専門家です.

凸体のお話は [3] がおすすめです.

20. お疲れさま

みなさまお疲れ様でした. どうでしたか？素朴なお話も現代数学の最先端の話と関連していることを分かってもらえたでしょうか？ただ, ボ

クの説明が拙いせいで「簡単なことを小難しく説明してるだけやん！」という印象を与えてしまったかも知れません．森理論を扇の分割に活用すると実は今回お話出来なかったような事も証明できます．これは凸多面体を見ているだけではちょっと思いつかないぞ！という事を含んでいます．今回は取り上げた問題が簡単すぎたので「鶏肉を割くに牛刀を用う」という印象があったと思いますが, 凸多面体の素朴な話で, 代数幾何の大道具を使うと頗る簡単だが初等的証明はメチャクチャ難しいという問題がたくさんあります．この講義を通じて少しでも現代数学の雰囲気を味わって頂けたのならいいのですが….

それではみなさんご機嫌よう！！

21. 感謝

阪大の日比先生には単体分割の初等的証明を教えて頂きました．ありがとうございました．凸多面体の部分の記述は [3] を大いに参考にさせて頂きました．この原稿執筆中に多くの方から助言を頂きました．ありがとうございました．それから, ここまで読んでくれた方々にも感謝します．

References

[1] 小田忠雄, 凸体と代数幾何学．(紀伊國屋)
[2] 石田正典, トーリック多様体入門—扇の代数幾何—．(朝倉書店)
[3] 日比孝之, 可換代数と組合せ論．(シュプリンガー)
[4] 松木謙二, Introduction to the Mori Program．(Springer)
[5] M. Reid, Decomposition of toric morphisms．(論文)

〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所