飯高予想について

藤野　修

大阪大学

2020 年 6 月 22 日

はじめに

- ここでは複素数体上定義された非特異射影多様体をあつかう。
- セールの GAGA 原理より、コンパクト複素多様体で射影空間に埋め込まれたものと思っても問題ない。
- 集中講義の詳しい内容は、

  Osamu Fujino, Iitaka Conjecture, Springer 2020

  を読んでください。絶賛発売中 !!

高次元代数多様体論概観

標準因子

X を非特異射影多様体とする。

- T_X：接ベクトル束
- T_X^*：余接ベクトル束
- $\omega_X := \det T_X^*$：標準束
- $\mathcal{O}_X(K_X) \simeq \omega_X$ なるカルティエ因子 K_X を標準因子という。

標準因子 K_X が高次元代数多様体論の主役！

- K_X が正か負か零で X の大雑把な形がわかる !?
- K_X が正（あるいは負）は微分幾何的には負（あるいは正）に曲がっているイメージ。

K_X は X が正規代数多様体ならヴェイユ因子として定義できることに注意！

小平次元（その１）

集中講義の主役である小平次元の定義を思い出す。

定義 2.1 (小平次元)

X を非特異射影多様体とし、K_X を X の標準因子とする。このとき

$$\kappa(X) = \limsup_{m\to\infty} \frac{\log \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))}{\log m}$$

とおき、$\kappa(X)$ を X の小平次元という。ただし、$\log 0 = -\infty$ とおく。

- 小平次元は双有理不変量である。
- $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \ldots, \dim X\}$ が成立する。

小平次元によって非特異射影多様体はざっくりと $\dim X + 2$ 個のクラスに分けられた。

小平次元（その２）

- 小平次元には別の定義方法もある。そちらの方が親しまれているかもしれない。
- 小平次元 $\kappa(X)$ が異なると X の性質はかなり異なる。$\kappa(X)$ は X の性質をとらえた本質的な不変量。
- 小平次元は 1970 年頃に飯高茂によって導入された。
- $\kappa(X) = \dim X$ が成立するとき、X は一般型（general type）であるという。

ファノ、カラビ–ヤウ、一般型

大雑把な名称は以下の通り。

- $-K_X$ が豊富（正）のとき、X はファノという。
  例：射影空間 $\mathbb{P}^n$、グラスマニアンなど
- K_X が零のとき、X はカラビ–ヤウという。
  例：$K3$ 曲面、アーベル多様体など
- K_X が巨大 $(\kappa(X) = \dim X)$ のとき、X は一般型という。

名前からわかるように、その他大勢の代数多様体は全て一般型。
ここでのカラビ–ヤウはかなり緩い定義。

曲線の小平次元

$\dim X = 1$ のときは、X はコンパクトリーマン面。
X の種数（穴の数）を $g(X)$ と書くことにする。

- $g(X) = 0$：$\kappa(X) = -\infty$、$X \simeq \mathbb{P}^1$
- $g(X) = 1$：$\kappa(X) = 0$、X は楕円曲線
- $g(X) \geq 2$：$\kappa(X) = 1$、X はその他大勢の曲線

1 次元のときは種数でほぼ全てのことがわかるので、小平次元を導入するメリットはない。

曲面の小平次元

X は非特異射影曲面とする。

- $\kappa(X) = -\infty$：X は有理曲面かルールド曲面と双有理同値
- $\kappa(X) = 0$：X はアーベル曲面、$K3$ 曲面、エンリケス曲面、超楕円曲面と双有理同値
- $\kappa(X) = 1$：（一般の）楕円曲面と双有理同値
- $\kappa(X) = 2$：一般型曲面と呼ばれる

曲面は大雑把な分類は完成しており、各論は現在も活発に研究されている。

超曲面

n 次元非特異超曲面 $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を考える。X は斉次多項式 F で定義されているとする。つまり $X = (F = 0)$ とする。

- $\deg F \leq n + 1$：$\kappa(X) = -\infty$ （ファノ多様体）
- $\deg F = n + 2$：$\kappa(X) = 0$（カラビ–ヤウ多様体）
- $\deg F \geq n + 3$：$\kappa(X) = \dim X$（一般型多様体）

代数多様体は大雑把には、ファノ、カラビ–ヤウ、一般型の組み合わせでできているはず。（飯高ファイバー空間や森ファイバー空間の考え方）

森理論登場

- 1980 年頃に森理論（極小モデル理論と呼ぶことが多い）が出現！
- 現在の高次元代数多様体の標準理論は極小モデル理論である。
- 残念ながら今回の集中講義では扱わない。

極小モデル理論（その１）

予想 2.2 (良い極小モデルの存在予想)

X を非特異射影多様体とする。$\kappa(X) \geq 0$ なら X と双有理同値な射影多様体 X' で以下の性質を持つものが存在。

(i) X' は $\mathbb{Q}$-分解的で端末特異点しか持たない。

(ii) $K_{X'}$ は半豊富である。

X' は X の良い (good) 極小モデルであると呼ばれる。

- (ii) で $K_{X'}$ がネフだけしか要求しない場合は、X' は X の極小モデルと呼ばれる。
- (ii) より飯高ファイバー空間 $\Phi_{|mK_{X'}|} : X' \to Y$ の存在がわかる。
- 飯高ファイバー空間の一般ファイバーはカラビ–ヤウである。

極小モデル理論（その２）

予想 2.3 (森ファイバー空間の存在予想)

X を非特異射影多様体とする。$\kappa(X) = -\infty$ なら X と双有理同値な射影多様体 X' で以下の性質を持つものが存在。

(i) X' は $\mathbb{Q}$-分解的で端末特異点しか持たない。

(ii) $\pi : X' \to Y$ なる全射で、$-K_{X'}$ は π-豊富、相対的ピカール数 $\rho(X'/Y) = 1$、$\dim Y < \dim X'$ となるものが存在。

$\pi : X' \to Y$ は X の森ファイバー空間と呼ばれる。

- 通常は、$X \dashrightarrow X'$ は negative な双有理写像と仮定する。
- 森ファイバー空間の一般ファイバーはファノである。

非消滅予想（その１）

まず以下の定義を思い出す。

定義 2.4 (ユニルールドな多様体)

n 次元非特異射影多様体 X に対して $n-1$ 次元非特異射影多様体 Y と $Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ なる支配的な有理射が存在するとき、X はユニルールドであるという。

- ユニルールドな多様体とは、ざっくりと言うと、有理曲線で覆われた多様体のことである。
- X がユニルールドなら $\kappa(X) = -\infty$ である。

非消滅予想（その２）

以下の予想は高次元代数多様体論で最も重要で難解な未解決問題の一つである。

予想 2.5 (非消滅予想)

X を非特異射影多様体とし、ユニルールドでないとする。このとき $\kappa(X) \geq 0$ が成立する。

- 非消滅予想が成立すれば、対数的極小モデルの存在問題は全て解決する（Birkar、橋詰）
- X がユニルールドでないための必要十分条件は、K_X が pseudo-effective であることである

現在の状況

- 一般型に関しては、一般論はほぼ完成。標準モデルの存在（BCHM)、有界性の問題（HMX)、モジュライ空間の存在などは全て解決済み。
- ファノに関しては、Birkar の最近のフィールズ賞受賞の仕事（有界性の問題)、ケーラー–アインシュタイン計量の存在問題（K 安定性)、モジュライ空間の構成などが大発展中。
- カラビ–ヤウに関しては高次元代数多様体の一般論はあまり強力ではない！

最終的にはカラビ–ヤウがいちばん内容豊かな部分として残るのか？

飯高予想とは

飯高予想とは（その１）

集中講義の主題である飯高予想について見ていこう。

予想 3.1 (飯高予想)

$f : X \to Y$ を非特異射影多様体の間の全射とし、f のファイバーは連結とする。このとき以下の不等式

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa(Y)$$

が成立する。ただし F は f の一般ファイバーとする。

飯高予想について（その２）

飯高予想について知られている結果のいくつかを紹介する。

- Y が一般型のとき（Viehweg）
- F が良い極小モデルをもつとき（川又）
- F が一般型のとき（Kollár）
- Y が maximal Albanese dimensional のとき（Cao–Păun）

川又の定理により、飯高予想は極小モデル理論に帰着されている。なので、飯高予想は絶対に正しい予想だと考えられている。

飯高予想の歴史

- 飯高は 1970 年頃に D 次元の理論を創始した。小平次元 $\kappa(X)$ や飯高ファイバー空間の概念が導入された。
- 飯高は雑誌数学の論説の中で、高次元代数多様体の双有理分類プログラムを提唱した。これがいわゆる飯高プログラムである。
- 論説の中にはたくさんの予想が述べられているが、小平次元の不等式に関する飯高予想は脚注で述べられていた。
- 飯高プログラムは極小モデル理論に吸収される形で表舞台から消えてしまったように思える。

今週の集中講義の目標

主定理（その１）

以下の定理が今週の集中講義の目標である。

定理 4.1 (O. Fujino)

$f : X \to Y$ を Abramovich–Karu の意味の弱半安定射とし、f の一般ファイバー F は一般型とする。このとき

$$f_*\omega_{X/Y}^{\otimes m}$$

は任意の正の数 m に対してネフ局所自由層になる。

さらに $\mathrm{Var}(f) = \dim Y$ が成立すると仮定する。このとき、ある整数 $k \geq 2$ が存在し、

$$f_*\omega_{X/Y}^{\otimes k}$$

はネフかつ巨大な局所自由層になる。

主定理（その２）

- 弱半安定射は半安定射（semistable morphism）の一般化の一つである。トロイダルでファイバーは全て被約な射である。
- ネフ局所自由層とは、数値的に非負に曲がったベクトル束のことである。
- $\mathrm{Var}(f) = \dim Y$ とは、f のファイバーがどの方向にも非自明に変形している状況である。
- $f_*\omega_{X/Y}^{\otimes k}$ が巨大とは、豊富な可逆層 $\mathcal{H}$ と正の整数 ν が存在し、generically に同型な埋め込み

$$\bigoplus_{\text{finite}} \mathcal{H} \hookrightarrow S^{\nu}\left(f_*\omega_{X/Y}^{\otimes k}\right)$$

が存在することとする。

主定理（その３）

定理 4.1 を認めると以下の系を得る。

系 4.2 (J. Kollár)

$f : X \to Y$ を非特異射影多様体の間の全射で、ファイバーは連結とする。f の一般ファイバー F が一般型のとき、

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa(Y)$$

が成立する。つまり、飯高予想の不等式が成立する。

定理 4.1 から系 4.2 を導く方法は、Viehweg の議論として専門家にはよく知られている。

証明について

- $f_*\omega_{X/Y}^{\otimes m}$ の局所自由性の証明がキーポイント。ここが最も新しい点。
- $f : X \to Y$ が弱半安定射であることと F が良い極小モデルをもつという仮定を使って局所自由性を証明する。
- Popa–Schnell の結果（消滅定理の応用）により、$f_*\omega_{X/Y}^{\otimes m}$ がネフであることが示せる。
- グラスマニアンへの埋め込みを使って $\det f_*\omega_{X/Y}^{\otimes k}$ がネフかつ巨大な可逆層であることを示す。自己交点数の計算。
- 後は専門家には知られた一般論で全て片付く。

補足

今回のアプローチの最大の利点は、

- 従来のアプローチと異なり、VHS の深い結果を使わなくて済む！

に尽きる。消滅定理やその一般化の応用として定理 4.1 が示されている。必要となる消滅定理はホッジ理論的な結果なので、定理 4.1 がホッジ理論的な結果であることには変わりがないと思う。

ありがとうございました

ありがとうございました！