

飯高予想について

大阪大学大学院理学研究科数学専攻

藤野 修*

令和2年6月3日

概要

飯高予想に関して色々述べる。ほぼ雑談である。

目次

1	はじめに	2
2	飯高予想とは？	2
3	飯高プログラムとその時代背景	2
4	1970年代の飯高プログラム	3
5	1980年代の飯高プログラム	4
6	飯高プログラム冬の時代	5
7	1990年代	5
8	飯高予想との出会い	7
9	私の個人的な不満	7
10	私の本の歴史	8

*〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1, e-mail: fujino@math.sci.osaka-u.ac.jp

11 今回の集中講義で扱った話題の記録	10
12 さいごに	12

1 はじめに

2020年の5月に名古屋大学の多元数理科学研究科で飯高予想に関する集中講義をする予定であった。残念ながら新型コロナの影響で集中講義はメディア授業となってしまい、なんとなく中途半端な欲求不満の残る集中講義になりそうである。通常の形での集中講義なら、思い出話や研究の裏話などを盛り込む予定であった。そのような話のいくつかをここに書き残しておきたい。

2 飯高予想とは？

そもそも、飯高予想とはなんだろうか？以下すべて複素数体上で話を進めることにする。

予想 2.1 (飯高予想) $f: X \rightarrow Y$ を非特異射影多様体の間の全射で、ファイバーは連結とする。このとき、小平次元の間に以下の不等式が成り立つ。

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa(Y)$$

ただし、 F は $f: X \rightarrow Y$ の十分一般 (sufficiently general) なファイバーである。

これは1970年頃に飯高茂によって提起された予想である。約50年ほど経つが、未解決のままである。 X が曲面の場合は曲面の分類表を援用すると飯高予想の不等式は比較的容易に確認できる。おそらく飯高が上記不等式を予想したときに知られていたのは曲面の場合だけであろう。なので、飯高予想はかなり大胆な予想であったと思われる。

3 飯高プログラムとその時代背景

飯高先生の経歴を見ると、1942年生まれである。したがって飯高先生が数学の研究者を志して本格的に勉強をしていたのは1960年代の前半か

ら半ばにかけてであろう。1960年代と言うと、フランスで Grothendieck が EGA を書いていた頃である。1964年には広中による特異点解消の大論文が出版されている。いわゆる広中の電話帳と呼ばれる 200 ページを超える大作である。一方、小平は1960年代には精力的に複素解析曲面の研究を行い、イタリア学派の代数曲面論を超える複素解析曲面に関する Enriques–Kodaira の分類などを確立した。もちろん Hartshorne の有名なスキーム論の教科書はまだ出版されていない。Deligne が混合ホッジ構造について語ったのは1970年に Nice で開催された国際数学会議での講演である。1960年代は3次元以上の代数多様体の構造についてはほぼ何も知られていなかったのではないだろうか?と想像する。飯高先生はこのような状況で、1970年頃に D 次元の理論を創始した。小平次元や飯高ファイバー空間の理論である。現在の我々が小平次元や飯高ファイバー空間のことを勉強してもなんの驚きもないが、飯高先生の論文が1970年頃の仕事であることには驚かされる。もちろん、小平次元は曲面論を参考にしたことは明らかであるし、飯高ファイバー空間は楕円曲面の素直な高次元化に過ぎないとも思えるが、1970年頃にこのような考えに到達したことは賞賛に値すると思う。さらに飯高先生は、雑誌数学の論説の中で数々の予想を述べている。その予想の中の 하나가飯高予想 (予想 2.1 参照) と呼ばれることになる小平次元に関する不等式である。飯高先生の一連の考えに沿って3次元以上の代数多様体の構造を調べていく計画は『飯高プログラム』と呼ばれている。かなり野心的なプログラムに見える。

4 1970年代の飯高プログラム

飯高プログラムは東大を中心とする若い日本人研究者によって精力的に推進された。上野健爾による講義ノートは飯高プログラムについてのバイブルであり、現在でもこの分野の必読の書であると思う。出版は1975年なので、飯高プログラムが始まってすぐの話である。飯高プログラムは明らかに世界の高次元代数多様体の研究と異なる方向を目指していたように思う。1970年代初め頃の高次元代数多様体に関する有名な結果としては、単有理だが有理的でない多様体の発見であろう。Clemens–Griffiths、Iskovskih–Manin、Artin–Mumford らが重要な仕事をしている。1970年代に得られた3次元以上の代数多様体に関する他の素晴らしい結果としては、Iskovskih の3次元ファノ多様体の研究、Kulikov の $K3$ 曲面の族の退化の研究などがあるが、どれも飯高プログラムとは異なる趣の仕事で

ある。ちなみに、飯高先生ご本人は1970年代半ばから後半にかけては対数的小平次元なる不変量を導入している。Deligneの混合ホッジ構造の理論などに触発されたものだと推測するが、Deligneの論文の出版年を考えると、飯高先生は結構ミーハーで素早く新しいものを取り入れていたという印象を受ける。この『対数的』という考えは現在の高次元代数多様体論では不可欠な枠組みに育っていることも注意しておく。

5 1980年代の飯高プログラム

1970年代後半から藤田隆夫、Eckart Viehweg、川又雄二郎らによって飯高予想の重要な部分的解決が次々に得られる。この時代が飯高プログラムの絶頂期の一つだったのではないかと推測する。飯高プログラムにはそもそも弱点があった。飯高の考えに沿って分類を推進したとしても、小平次元が $-\infty$ で不正則数が0の多様体に関しては何の情報も得られないのである。いずれにせよ、高次元代数多様体を分類するという大きな目標には何か欠けている状態だった。ここで森理論の登場である。1970年代後半にハーツホーン予想を驚異的なアイデアで解決したのが若かりし日の森重文である。その後すぐに端射線の理論を創始し、高次元代数多様体の双有理幾何学に革命を起こした。現在極小モデル理論と呼ばれることの多い森理論は順調に発展し、高次元代数多様体研究の標準理論になっている。では、飯高プログラムはどうなったのか？飯高予想に関しては以下の解答が与えられている。1980年代半ばの結果である。

定理 5.1 (川又雄二郎) $f : X \rightarrow Y$ を非特異射影多様体の間の全射で、ファイバーは連結とする。 $f : X \rightarrow Y$ の幾何学的生成ファイバー $X_{\bar{\eta}}$ は良い (good) 極小モデルを持つと仮定する。このとき、小平次元の間に以下の不等式が成り立つ。

$$\kappa(X) \geq \kappa(X_{\bar{\eta}}) + \kappa(Y)$$

$f : X \rightarrow Y$ の十分一般のファイバー F に対して等式 $\kappa(F) = \kappa(X_{\bar{\eta}})$ が成立するので、飯高予想は幾何学的生成ファイバーの良い極小モデルの存在を認めれば正しいことがわかる。

$\kappa(X_{\bar{\eta}}) \geq 0$ のとき、 $X_{\bar{\eta}}$ は必ず良い極小モデルを持つと予想されている。これは極小モデル理論の世界では絶対に成り立つと信じられている予想

なので、飯高予想も絶対に正しいと信じられている。ただ、残念ながら極小モデル理論は未完成の理論なので、飯高予想も未解決のままである。上の川又の定理によって飯高プログラムは極小モデル理論に吸収されてしまったとも考えられる。いずれにせよ、これ以降、飯高予想関連の仕事は激減し、皆無になってしまったのである。

6 飯高プログラム冬の時代

1980年代後半に János Kollár が飯高予想を F が一般型という仮定のもとで完全解決した。これは極小モデル理論とは無関係の結果である。かなり難解な結果である。今回の集中講義では、この Kollár の結果の一般化に比較的簡単な証明を与える予定である。この Kollár の結果が1970年あたりから始まる飯高プログラムの最後の結果と言っているかもしれない。これ以降、飯高プログラムは冬の時代に入ったように思える。

飯高による小平次元関連の仕事は形を変えて受け継がれていた。飯高の学生だった中山昇は小平次元の様々な亜種を導入した。中山による数値的小平次元の理論は21世紀の高次元極小モデル理論の大発展で不可欠な道具として活躍する。私が大学院に進学した1997年頃は飯高プログラムを研究している人は全く目につかない状態であった。もちろん私は数理研で中山先生の影響を強く受けることになる。

7 1990年代

学生の皆さんが生まれたのは1990年代半ばあたりだろうか？1990年代は森重文先生のフィールズ賞受賞から始まる10年である。1990年に京都で国際数学者会議が開催され、森重文先生がフィールズ賞を受賞された。私はまだ高校生で、特に数学に興味を持っていたわけではないので、当時のことはほとんど記憶にない。もちろんニュース程度は目にしたと思うが、残念ながら記憶にない。1993年に大学に入学したが、入学した頃は数学を専門にしようと思っていなかったし、大学の数学については何も知らなかった。結局数学を専攻することになったのだが、なぜ代数幾何学を専門に選んだのかはあまり明確に覚えていない。当時の京都大学の数学教室の代数幾何関連のスタッフは、丸山先生、上野先生、斎藤政彦先生、森脇先生、清水先生で、ホモロジー代数、層の理論、可換環論、リーマン面、多変数関数論、グレブナー基底などの講義をされていた。このよ

うな環境で育てば、代数幾何を専門に選ぶのは当然だったかもしれない。ただ、私は代数的な議論より複素多様体論や多変数関数論のような話の方が好きだったので、本当なら4年生のセミナーでは複素多様体論を選ぶはずだったかもしれない。運命のいたずらか、私が4年生になる年の上野先生のセミナーのテーマはテータ関数やソリトンなどであり、複素多様体ではなかった。助教授になりたての森脇先生のところでMumfordのComplex Projective Varietiesを読むことになった。同時に森脇先生の講義も受けていたのだが、その内容はモーデル-ファルティングスの定理であった。最近その当時の講義ノートがサイエンス社から単行本として出版されたので、興味のある方は見ていただきたい。この講義を受けた私は、なんだか好みと違うな〜と思い、大学院は数理研に進学することにしたのである。モーデル-ファルティングスの定理を解説した講義を聞かなかつたら、深く考えずにそのまま数学教室の大学院に進学していたかもしれない。1996年から1997年にかけて数理研はミラー対称性や高次元代数多様体論のスペシャルイヤーであったと思う。数学教室の廊下の掲示板に数理研のプロジェクト関連の来日予定数学者一覧というような紙が貼ってあった。当時の私はその貼り紙を見て、数理研の大学院に進学して一般次元の代数多様体を分類してしまおう！と軽く考えたのかもしれない。若者は自分の能力を理解していないので、全部解決しちゃえばいいのだ！と思って数理研に進学することを決めたように思う。1997年に大学院に進学し、そこから私の高次元代数多様体論の修業生活が始まるのであるが、当時は高次元代数多様体論は冬の時代だったと思う。3次元極小モデル理論は1980年頃から1990年代初め頃に主要な問題はほぼ全て解決されていた。4次元以上の多様体についての極小モデル理論はまだまだわからないことだらけであった。1980年代に3次元極小モデル理論のブームに乗った比較的若い人たちは新たな研究対象を見つけ、様々な方向に研究を展開していつている感じであった。当時の森脇先生は私がいるところで山木さん(私の同級生で森脇先生の学生)に向かって「もう双有理幾何学はやることないよ」と言っていた。いずれにせよ、私が高次元代数多様体の双有理分類を目指して大学院に進学した当時は、飯高プログラムはおろか極小モデル理論も冬の時代だったような気がする。ちなみに、最近聞いたフィールズ賞受賞者であるCaucher Birkarの講演では、1990年代初めに3次元極小モデル理論関連の問題がほぼ全て完成したあと2000年過ぎのShokurovの仕事までの間をdrought(干ばつ)と表現していた。

8 飯高予想との出会い

私が飯高予想と出会ったのはいつのことなのかもう覚えていない。ただ、大学4年生の頃にはすでに知っていたのは間違いない。飯高予想の類が大学の学部向けの講義で扱われることは皆無であろうし、そのような講義を受講した記憶もない。なので、自分でどこかで勉強したのだと思う。当時は現在のようにインターネットは普及していなかったので、パソコンに向かって『飯高予想』とキーワードを打ち込んで調べることはもちろんできなかった。そもそも私が学部生をしていた頃は日本語で書かれた入手可能な代数幾何の教科書は現在よりもずっと少なかった。例えば、スキーム論を扱った日本語の本で入手可能だったのは宮西先生の『代数幾何学』だけであった。永田-丸山-宮西による『抽象代数幾何学』は当時は手に入らなかった。今出川通りにある吉岡書店で飯高先生の『代数幾何学』三部作と『可換環論』の古本は手に入れていた。おそらく1冊700~800円ぐらいで購入したと思う。1970年代に出版された岩波の基礎数学である。この飯高先生の代数幾何学の3巻目は飯高先生自身による小平次元の理論の解説になっており、当然飯高予想にも言及している。詳しいことは思い出せないが、おそらく訳も分からずに飯高先生の本を眺め、勝手に飯高予想に憧れてしまったのではないだろうか？飯高-上野-浪川による『デカルトの精神と代数幾何』の中にも飯高予想が載っているが、この本はとても難しい本なので、学部生時代の私が読みこなせていたとは思えない。ちなみに、飯高先生の岩波基礎数学の『代数幾何学』と『可換環論』は現在はオンデマンドで入手可能である。もちろん私はオンデマンド版を購入した。

話は脱線するが、飯高先生の『可換環論』は可換環論を扱った教科書ではなく、藤田隆夫先生の偏極多様体の理論を解説した代数幾何学の本である。私は2019年度の大阪大学の大学院生向けの講義で藤田健人さんによる藤田理論(藤田隆夫先生の理論)の解説を聞き、改めて飯高先生の『可換環論』のお世話になった。私が突然2020年の初っ端から論文内で藤田先生の Δ 種数を扱ったのは、藤田健人さんの講義の影響である。

9 私の個人的な不満

ここで高次元代数多様体論冬の時代に研究を始めた私の個人的な不満を述べておきたい。私が1997年に数理研の大学院に進学した頃は高次元

代数多様体論は冬の時代だった。私にとって非常にラッキーだったのは、ちょうどその頃に森先生と Kollár は『双有理幾何学』の執筆中であった。私はこの本の原稿の最初の読者であった。この本が書かれるまでは KMM と呼ばれる解説記事が極小モデル理論のバイブルとして知られていた。ただ、KMM は専門家向けのリファレンスという感じで、初学者が勉強のために使うにはかなりハードルが高かった。『双有理幾何学』は技術的に不満の残る部分も多々あるのだが、入門書としても専門家のリファレンスとしても使える丁度いい塩梅の専門書になった。この『双有理幾何学』の出版は 21 世紀初頭からの極小モデル理論の爆発的な発展に大きく貢献したことは間違いないと思う。明らかに極小モデル研究の若い世代の教育に大きく貢献した。一方、飯高予想に関しては教科書的なものが全く無い状況であった。最近まで飯高予想の入門書的なものは一切出版されていなかった。1970 年頃に始まった飯高プログラムには、1980 年代後半にはある程度まとまった成果があった。したがって、1980 年代後半か 1990 年代あたりに適切なレベルの教科書的なものが書かれていれば、若い世代の研究者が増え、その後もっと活発に研究されていたはずである。結局、誰も教科書的なものを書かなかったので、今回私が入門書的なものを書いたのである ([F10] 参照)。出版されたのは飯高プログラムが始まって約半世紀が経った 2020 年である。飯高プログラムの推進者たちはなぜ後進のために本を書いておいてくれなかったのか？これが私の個人的な不満である。ちなみにこの原稿を書いている時点では、私はまだ [F10] を手にとってはいない。電子版しか持っていない。

10 私の本の歴史

2001 年から 2002 年頃にかけて私は [F1]、[F2]、[F3] で飯高予想の特殊な場合をいくつか扱っていた。2003 年の 4 月に多元数理科学研究科に異動していた私は、2003 年の 9 月から約 1 年間プリンストン高等研究所に滞在した。プリンストンでは非常にヒマだったので、色々勉強をしていた。私がプリンストンに滞在していたときの高等研究所は偏微分方程式のスペシャリヤーだったはずで、代数幾何関連の人は皆無であった。自分で好きなように好きなことを勉強する時間が大量にあったのである。そこで、川又先生の修士論文の一つである対数的小平次元に関する飯高予想の結果 $\overline{C}_{n,n-1}$ の解説を試みようとした ([K] 参照)。ところが、なんとプリンストンの研究所の図書室には川又先生の論文の載った本が所蔵さ

れていなかったのである。仕方ないので司書に頼み、どこかの図書館からコピーを取り寄せてもらった記憶がある。せっかく勉強したので自分なりの証明を [F4] としてまとめておいた。川又先生の修士論文はとても素っ気なく、証明には穴がある。もう少し詳しく書くと、川又先生の論文 [K] は Viehweg の論文 [V1] に大きく依存している。証明は self-contained ではなく、Viehweg の論文を手直しすればよいという形で書かれている。残念なことに、[V1] はとても読みにくい論文である。曲線のモジュライ空間の話を使っていたと思うが、[V1] が書かれた当時は曲線のモジュライ空間に関してまだまだ発展途上であったし、現在では考えられないような間違いも含まれていた。Viehweg 本人は [V1] の訂正 [V2] を出版しているが、川又先生の修士論文はその訂正 [V2] を考慮に入れていないので、明らかに [K] の証明には穴があるのである。そこで私は川又先生の修士論文の細部を詰めるのではなく、論文を参考にしつつ自分なりの証明をつけることにした。私が使った強力なテクニックは、Abramovich–Karu による弱安定還元定理である。この結果は de Jong のオルタレーションのテクニックを発展させたものである。de Jong のオルタレーションは曲線のモジュライ空間の話フルに使用した結果である。したがって、かなり深い結果である。私が修士1年生の頃は de Jong のオルタレーションのテクニック関連の話題がかなり華やかだった。弱広中定理 (広中の特異点解消の劇的に短い証明。主張は弱くなっているが、普通の人には応用上十分かもしれない。) などがしきりに宣伝されていた。博士1年生のときには松木謙二さんが数理研に滞在し、当時研究されていた weak factorization に関して連続講演をされた。松木さんの来日に合わせ、私は予習のために weak factorization を勉強して数理研の先生方の前で発表していた。私が比較的 toroidal geometry をよく使うのは、この博士1年生のときの経験があるからである。プリンストンで書いた [F4] は特に出版の予定はなかった。数年後に arXiv に投稿したが、深い意味はなかった。10年ほど経ったとき、そういえば結局 [F4] 以外だれも $\overline{C}_{n,n-1}$ の厳密な証明は書いてないな、と思ったのである。私はこの10年ほどの間はトーリック多様体論、極小モデル理論、 L^2 理論などにどっぷりと浸かっており、飯高予想そのものはあまり考えていなかったと思う。[F4] はぺらぺらの数ページのメモのようなプレプリントで、たくさんの非自明な結果を引用して用いていた。そこで自分の勉強も兼ねて [F7] にバージョンアップしてみた。 $\overline{C}_{n,n-1}$ の証明に必要な飯高予想関連の結果に証明を与え、[V1] などはまったく参照せずに証明を書き切ろうと試みたのである。[F7] 誕

生の詳しい背景は後で述べる。もう細かいことは忘れてしまったが、ソウルに出張したとき、シュプリンガーの中村さんに何か本を出さないかと誘われたと記憶している。そのときに [F7] が頭にあり、加筆修正して短めの本として出版するという事になったのだと思う。[F7] をバージョンアップし、2018 年には大阪大学で大学院生向けに飯高予想に関する講義をした。その年から江尻さんが PD として大阪にいたので、ちょうどいい機会だと思って院生のレベルを超える講義をした記憶がある。紆余曲折を経てやっと 2020 年の 5 月に [F10] は発売されたようである。飯高予想誕生から約 50 年経ってやっと飯高予想の入門書 (?) が発売されたのである。

11 今回の集中講義で扱った話題の記録

2012 年の秋の学会は九州大学で開催された。私はちょっとだけ参加した記憶がある。会場まで行ったけどほとんど講演は聞かずに帰って来たような気がする。九州大学のキャンパス内で権業さんと少し議論をした。権業さんはその当時飯高予想の対数化に興味を持っていたようで、アフィン多様体はうまくコンパクト化すれば良い (対数的) 極小モデルが取れるからどうのこうのと彼の考えを話してくれた。飯高予想は小平次元の間の不等式に関する予想であるが、対数的小平次元に関する飯高予想も同様に考えられる。飯高予想は極小モデル理論が完成すれば正しいことが川又の定理 (定理 5.1 参照) で保証されているが、対数的小平次元に関する飯高予想はその成立をサポートするような結果はほとんどなかったと思う。誰でも考えつくことであるが、私は対数的小平次元に関する飯高予想は (対数的) 極小モデル理論に帰着できるはずだと考えたのである。その後しばらくこの話題は扱っていなかったと思うが、2014 年の 5 月にフランスのリールの研究集会に参加したとき、ホテルで対数的小平次元に関する飯高予想を再考していた記憶がある。もしかしたら既に証明はほぼ得ており、時間に余裕のあった出張先のリールのホテルで証明をチェックしていたのかもしれない。川又の定理 (定理 5.1 を参照) を対数化するのではなく、中山の数値的小平次元に関する不等式を一般化し、良い (対数的) 極小モデルが存在すれば数値的小平次元が通常対数的小平次元と一致するという二段構えで対数的小平次元の飯高予想を (対数的) 極小モデル理論に帰着させる方法をとることにしたのである。中山の証明を解説して丁寧に証明を必要な形に変形していくと、目的の結果はそれほど

困難なく得られたと記憶する ([F5] 参照)。リール滞在中には証明できていたと思う。ちなみに、私の対数的小平次元に関する飯高予想の結果はその後、橋詰健太さんによってある意味一般化されている。リールにはイギリスに長期滞在中の権業さんも参加していた。そのリール滞在中にボン滞在中の Christian Schnell さんから Popa-Schnell の最新のプレプリントがメールで送られてきた ([PS] 参照)。専門家の私にとってはすぐに読める論文で、その証明の巧妙さにとっても感心した記憶がある。Popa-Schnell の論文は影響力のある論文だった。私は Popa-Schnell の結果は $f_*\omega_{X/Y}^{\otimes m}$ の nef 性の証明に有用であることにすぐに気付いた。問題は $f_*\omega_{X/Y}^{\otimes m}$ が局所自由でファイバー積でうまく振る舞うような設定を見つけることであった。最終的に、weakly semistable な射で幾何学的生成ファイバーが良い極小モデルを持つという設定でこの問題を解決した。9月にはプレプリントを書いて arXiv に出している ([F6] 参照)。ここまでくれば、安定多様体のモジュライ空間の射影性を示す議論を焼き直せば一般ファイバーが一般型のときに Viehweg 予想が簡単に示せることは専門家(といってもその当時飯高予想の専門家は事実上私以外は誰もいなかったが)にとっては明らかであった。すぐにノートを書いた ([F7] 参照)。[F7] で [F4] をかなり self-contained に近づけるという目標も達成できた。色々と紆余曲折を経ながら研究は進んでいるのである。このノートの拡充版が今年5月に出版された飯高予想の本である ([F10] 参照)。このように書くと順調に話は進んだように見えるが、私の対数的小平次元に関する飯高予想の論文 [F5] は、中山の数値的小平次元に関する Lehmann の論文に穴が見つかったことにより、証明に穴が空いた。この Lehmann の論文の穴は影響力大で、極小モデル理論の基本的な結果の証明にも一瞬穴が空いてしまったほどである。その穴は未だ塞がれていないが、応用に必要な程度の少し弱い不等式を証明するという方向で一応の解決を得ている ([F9] 参照)。また、 $f_*\omega_{X/Y}^{\otimes m}$ の nef 性に関する論文は思いのほかさっさと掲載が決まったのであるが、出版されるなり証明に穴を見つけてしまうという大失態を犯してしまった。もうすこし厳密にいうと、神戸大学で講演した際、聴衆にいた松木先生から質問があり、色々考えると自分の勘違いに気付いたのである。これも既に証明の訂正を出版しており、現在は問題のない状態になっている ([F8] 参照)。

12 さいごに

参考文献内の私の論文は書いた順番に並んでいる。飯高予想関連の文献や関連する話題の詳しいことは [F10] を買って読んでください。私には、ここで述べなかった対数的小平次元の理論やそれに関する仕事もいくつか存在する。興味のある人は調べてください。

参考文献

- [F1] O. Fujino, A canonical bundle formula for certain algebraic fiber spaces and its applications, Nagoya Math. J. **172** (2003), 129–171.
- [F2] O. Fujino, Algebraic fiber spaces whose general fibers are of maximal Albanese dimension, Nagoya Math. J. **172** (2003), 111–127.
- [F3] O. Fujino, Remarks on algebraic fiber spaces, J. Math. Kyoto Univ. **45** (2005), no. 4, 683–699.
- [F4] O. Fujino, $\overline{C}_{n,n-1}$ revisited, preprint (2003).
- [F5] O. Fujino, On subadditivity of the logarithmic Kodaira dimension, J. Math. Soc. Japan **69** (2017), no. 4, 1565–1581.
- [F6] O. Fujino, Direct images of relative pluricanonical bundles, Algebr. Geom. **3** (2016), no. 1, 50–62.
- [F7] O. Fujino, Subadditivity of the logarithmic Kodaira dimension for morphisms of relative dimension one revisited, preprint (2015).
- [F8] O. Fujino, Corrigendum: Direct images of relative pluricanonical bundles (Algebraic Geometry **3**, no. 1, (2016), 50–62), Algebr. Geom. **3** (2016), no. 2, 261–263.
- [F9] O. Fujino, Corrigendum to “On subadditivity of the logarithmic Kodaira dimension”, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [F10] O. Fujino, *Iitaka Conjecture: An Introduction*, SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Singapore, 2020.

- [K] Y. Kawamata, Addition formula of logarithmic Kodaira dimensions for morphisms of relative dimension one, *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)*, 207–217, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978.
- [PS] M. Popa, C. Schnell, On direct images of pluricanonical bundles, *Algebra Number Theory* **8** (2014), no. 9, 2273–2295.
- [V1] E. Viehweg, Canonical divisors and the additivity of the Kodaira dimension for morphisms of relative dimension one, *Compositio Math.* **35** (1977), no. 2, 197–223.
- [V2] E. Viehweg, Correction to: “Canonical divisors and the additivity of the Kodaira dimension for morphisms of relative dimension one” (*Compositio Math.* **35** (1977), no. 2, 197–223). *Compositio Math.* **35** (1977), no. 3, 336.