

# 飯高予想関連のレポート問題

大阪大学大学院理学研究科数学専攻

藤野 修\*

令和2年6月14日

集中講義の補足になるような問題を集めておく。単位が欲しい人は問題を解いてレポートとして提出すること。最低一問は解くこと。

## 目次

1	小平次元	2
2	巨大因子	4
3	ネフ局所自由層	4
4	消滅定理	6
5	特異点	7
6	その他	8

すべて複素数体上で考えることにする。講義の補足になるような問題を集めただけなので、問題の難易度にはばらつきがある。

---

\*〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1, e-mail: fujino@math.sci.osaka-u.ac.jp

# 1 小平次元

小平次元についての問題からはじめる。次の問題はそれほど自明ではない。

**問題 1.1 (小平次元)**  $X$  を非特異射影多様体とし、 $K_X$  を標準因子とする。小平次元  $\kappa(X)$  を以下で定義する。

$$\kappa(X) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))}{\log m}$$

ただし  $\log 0 = -\infty$  とおくことにする。このとき、

$$\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim X\}$$

となることを示せ。

問題 1.1 はよく知られているが、証明はそれほど簡単ではない。次の問題を解くと問題 1.1 は明らかになる。

**問題 1.2 (小平次元)**  $X$  を非特異射影多様体とし、 $K_X$  は  $X$  の標準因子とする。すべての正の整数  $m$  に対して  $H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X)) = 0$  が成立するとき、 $X$  の小平次元  $\kappa(X)$  は  $-\infty$  とする。そうでないときは

$$\kappa(X) = \max_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \dim \Phi_{|mK_X|}(X)$$

で小平次元  $\kappa(X)$  を定義する。ただし

$$\Phi_{|mK_X|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$$

は完備線形系  $|mK_X|$  による有理写像で、 $\Phi_{|mK_X|}(X)$  は有理写像  $\Phi_{|mK_X|}$  の像の閉包とする。このとき、ここで定義した  $\kappa(X)$  が問題 1.1 で定義した  $\kappa(X)$  と一致することを示せ。こちらの定義を採用すると

$$\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim X\}$$

は明らかである。

問題 1.2 の解決には飯高ファイバー空間を考えるとよいかもしれない。

**問題 1.3 (飯高ファイバー空間)**  $X$  を非特異射影多様体とし、 $\kappa(X) > 0$  とする。このとき、 $X$  は飯高ファイバー空間と呼ばれる構造をもつ。飯高ファイバー空間の定義をしらべ、飯高ファイバー空間の基本的な性質を論じよ。

小平次元は双有理不変量である。

**問題 1.4 (双有理不変性)**  $X_1$  と  $X_2$  はともに非特異射影多様体とし、 $X_1$  と  $X_2$  は双有理同値とする。このとき  $\kappa(X_1) = \kappa(X_2)$  が成立することを示せ。

**問題 1.5**  $f: X \rightarrow Y$  を非特異射影多様体の中の generically finite な全射とする。このとき

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y)$$

が成立することを示せ。

具体例の小平次元は全く扱ってこなかったので、以下の問題をあげておこう。

**問題 1.6**  $X$  を  $\mathbb{P}^{n+1}$  内の非特異超曲面とする。このとき  $X$  の小平次元についてしらべよ。ヒント： $X$  の次数を  $d$  とすると、 $d$  が大きくなると小平次元は大きくなる。随伴公式 (adjunction)

$$K_X = (K_{\mathbb{P}^{n+1}} + X)|_X$$

を使って調べてみよう。

低次元の代数多様体はすでに分類されているので、様々なことが深く理解されている。ちなみに、代数多様体の世界で高次元といえば3次元以上のことを意味する。

**問題 1.7 (非特異射影曲線)**  $X$  を1次元非特異射影多様体とする。このとき  $X$  はコンパクトリーマン面と考えてよい。 $X$  の小平次元はどうなっているか論じよ。ヒント：コンパクトリーマン面は種数 (穴の数) で大抵の性質は決まる。リーマン-ロッホの公式が役に立つと思う。

**問題 1.8 (非特異射影曲面)** 非特異射影曲面  $X$  の小平次元  $\kappa(X)$  とエンリケス-小平分類について調べよ。

## 2 巨大因子

高次元代数多様体論では巨大因子 (big divisors) なる概念をよく使うので、いくつか問題を出しておこう。

**問題 2.1 (巨大因子)**  $D$  を正規射影多様体  $X$  上のカルティエ因子とする。

$$\kappa(X, D) := \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X(mD))}{\log m} = \dim X$$

が成立するとき、 $D$  を巨大因子と呼ぶ。巨大因子のさまざまな言い換えを調べて論じよ。

次の問題は小平の補題と名前が付いているが、それほど難しくない。

**問題 2.2 (小平の補題)**  $X$  を正規射影多様体とし、 $H$  を豊富なカルティエ因子とする。 $D$  が  $X$  上の巨大なカルティエ因子なら、正の整数  $m$  が存在して

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(mD - H)) \neq 0$$

とできる。これを証明せよ。

高次元代数多様体論でよく出てくるのがネフかつ巨大な因子である。

**問題 2.3 (ネフ巨大因子)**  $D$  を正規射影多様体  $X$  上のカルティエ因子とする。さらに  $D$  はネフと仮定する。つまり、 $D \cdot C \geq 0$  が  $X$  上のすべての曲線に対して成立すると仮定する。このとき、 $D$  が巨大であることと、 $D$  の自己交点数  $D^{\dim X}$  が正であることは同値である。この事実を証明せよ。

## 3 ネフ局所自由層

とりあえずネフ局所自由層の定義を思い出しておく。昔の文献だと semi-positive と呼んでいたが、最近ではネフと呼ぶことが多い。昔の文献を読むときは用語に注意すること。

**定義**  $\mathcal{F}$  を射影多様体  $X$  上の局所自由な連接層とする。 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{F})}(1)$  がネフになるとき、つまり  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{F})}(1) \cdot C \geq 0$  が  $\mathbb{P}_X(\mathcal{F})$  上のすべての曲線  $C$  について成立するとき、 $\mathcal{F}$  をネフと呼ぶ。 $\mathcal{F} = 0$  のときも  $\mathcal{F}$  はネフ局所自由層と呼ぶことにする。

**問題 3.1**  $\mathcal{F}$  は射影多様体  $X$  上の局所自由な連接層とする。このとき以下の (i) と (ii) が同値であることを証明せよ。

(i)  $\mathcal{F}$  はネフである。

(ii) すべての非特異射影曲線  $C$  からの射  $f : C \rightarrow X$  に対し、 $f^*\mathcal{F}$  の任意の商可逆層  $\mathcal{L}$  の次数は非負である。

ヒント： $\mathbb{P}_X(\mathcal{F})$  と  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{F})}(1)$  の定義を思い出そう。

次の性質は基本的である。

**問題 3.2**  $\mathcal{E}$  を豊富な局所自由層とし、 $\mathcal{F}$  をネフ局所自由層とする。このとき  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$  が豊富になることを示せ。

次の二つの問題に出てくるネフ局所自由層の性質はよく使う。

**問題 3.3** 以下は局所自由な連接層の短完全列とする。

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$$

このとき、以下を証明せよ。

(i)  $\mathcal{F}_2$  がネフなら  $\mathcal{F}_3$  もネフである。

(ii)  $\mathcal{F}_1$  と  $\mathcal{F}_3$  がネフなら  $\mathcal{F}_2$  もネフである。

特にネフ局所自由層  $\mathcal{F}$  の有限直和がネフになることもわかる。

次は少し難しい。

**問題 3.4**  $\mathcal{F}$  をネフ局所自由層とする。このとき  $S^\alpha(\mathcal{F})$  もネフである。ただし、 $S^\alpha(\mathcal{F})$  は  $\mathcal{F}$  の  $\alpha$  回の対称テンソル積である。ヒント：豊富な局所自由層の話の話を援用するとよい。

## 4 消滅定理

飯高予想の講義では消滅定理を何度か使った。いくつか簡単なものだけを取り上げておく。

**問題 4.1 (小平消滅定理)**  $X$  を非特異射影多様体とし、 $H$  を豊富なカルティエ因子とする。このとき

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + H)) = 0$$

が  $i > 0$  で成立することを示せ。ヒント：たくさんの証明方法がある。個人的にはモース理論を使った証明が一番簡単だと思うが、ホッジ理論を使う方が一般化を考える場合には有効だと思う。元々はコンパクト複素多様体についての主張であった。その場合は証明には調和積分論のような解析が必要不可欠だと思う。

代数多様体に対する小平の消滅定理の一般化はたくさん存在するが、私のお気に入りには以下の定理である。

**問題 4.2 (コラールの単射性定理)**  $X$  を非特異射影多様体とし、 $L$  を半豊富なカルティエ因子とする。つまり、正の整数  $m$  が存在し、完備線形系  $|mL|$  が自由になるとする。  $0 \neq s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(lL))$  を一つとる。ただし  $l$  は正の整数である。このとき、 $\otimes s$  によって引き起こされるコホモロジーの間の射

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + kL)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + (k+l)L))$$

はすべての  $i$  とすべての正の整数  $k$  で単射である。これを証明せよ。ヒント：ホッジ理論を使う証明が標準的な方法だと思うが、調和積分論を使うともう少し強いことがとても簡単に示せてしまう。調和積分論を使った証明は、調和積分論を使った小平の消滅定理とほぼ同じ議論である。この解析的証明は榎一郎による。

**問題 4.3 (コラールの消滅定理と捻れ不在定理)**  $f : X \rightarrow Y$  を非特異射影多様体  $X$  から射影多様体  $Y$  への全射とする。このとき

(i)  $R^i f_* \mathcal{O}_X(K_X)$  は  $Y$  上の捻じれがない連接層である。

(ii)  $H$  を  $Y$  上の豊富なカルティエ因子とする。すると

$$H^i(Y, R^j f_* \mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{O}_Y(H)) = 0$$

がすべての  $i > 0$  と  $j$  に対して成立する。

上の二つの主張を証明せよ。(i) はコラールの捻れ不在定理と呼ばれ、(ii) はコラールの消滅定理と呼ばれる。ヒント：問題 4.2 の単射性定理を認めれば、捻れ不在定理も消滅定理も比較的簡単に証明できる。一方、捻れ不在定理と消滅定理から単射性定理を復元することもできる。

コラールの単射性、捻れ不在定理、消滅定理は混合ホッジ構造の理論をつかって一般化され、高次元代数多様体論で大活躍中である。

**問題 4.4 (カステルヌーヴォー–マンフォード正則性)**  $\mathcal{F}$  を射影多様体  $X$  上の連接層とする。 $H$  は  $X$  上の豊富なカルティエ因子で、完備線形系  $|H|$  は自由だと仮定する。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-iH)) = 0$$

がすべての  $i > 0$  に対して成立すると、 $\mathcal{F}$  が大域切断で生成されることを示せ。つまり

$$H^0(X, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$$

が全射になることを示せ。

カステルヌーヴォー–マンフォード正則性をつかった議論も高次元代数多様体論ではしばしば目にする。身につけておくべき話である。

## 5 特異点

高次元代数多様体論では特異点が避けられないことが多々ある。

**問題 5.1 (有理特異点)** 有理特異点 (rational singularities) の定義を調べよ。定義の同値な言い換えも調べよ。

**問題 5.2 (標準特異点)** 標準特異点 (canonical singularities) の定義を調べよ。また、標準特異点は有理特異点であることを示せ。

**問題 5.3** 2次元の標準特異点を調べよ。

**問題 5.4**  $X$  を正規多様体とし、標準因子  $K_X$  は  $\mathbb{Q}$ -カルティエと仮定する。つまり、 $rK_X$  がカルティエになるような正の整数  $r$  が存在すると仮定する。このとき、 $X$  の特異点が標準特異点であるための必要十分条件は、 $X$  のある特異点解消  $f: Y \rightarrow X$  に対して

$$f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y) \simeq \mathcal{O}_X(mK_X)$$

が任意の正の整数  $m$  に対して成立することである。これを示せ。

**問題 5.5**  $X$  はゴレンシュタイン (Gorenstein) で高々有理特異点しか持たないと仮定する。このとき  $X$  の特異点は標準特異点であることを示せ。

問題 5.2 と問題 5.5 を合わせると、 $X$  がゴレンシュタインのとき、 $X$  の特異点が有理特異点であることと標準特異点であることは同値であることがわかる。

## 6 その他

その他諸々の話題をいくつかあげておく。

**問題 6.1 (弱半安定射、弱半安定還元定理)** アブラモビッチ-カルの弱半安定射 (weakly semistable morphisms) について調べてみる。弱半安定還元定理 (weak semistable reduction theorem) を調べてみる。

**問題 6.2** 曲面に対して飯高予想の不等式が成立することを示せ。もちろん曲面の分類結果を援用してもよい。

**問題 6.3** フィーベックの weakly positive sheaves と big sheaves を調べてみる。

**問題 6.4** フィーベックの予想  $Q$  から飯高予想がしたがうことを示せ。ヒント：これは何も見ずに証明できるレベルの話ではないと思う。ちゃんと勉強するとフィーベックの議論の素晴らしさ (ややこしさ?) が堪能できると思う。

**問題 6.5** 極小モデル理論を勉強してみる。

**問題 6.6** 代数幾何関連の話に興味のあることについてまとめてみる。講義と直接関係なくてもよい。

**問題 6.7** 講義の感想を書いてみる。