

2025年度 ガロア祭 懸賞問題

6月13日(金)に行いますガロア祭において、優秀な解答者を発表します。優れた解答には、豪華商品が出ます。(該当者には別途連絡を差し上げます。) もちろん一問だけでも良いので、奮ってご応募ください。

解答の提出方法

提出締切: 6月6日(金) 16:00

提出先: 理学研究科3号館1階 数学教室事務室

懸賞問題は次のページ以降にあります。

2025年度ガロア祭委員
跡部発・曾我部太郎

問題 1. (出題者: 跡部発) 整数 $n \geq 2$ と $k \geq 1$ に対して,

$$c_{n,k} = \prod_{j=1}^n \frac{j(k+j)}{(k+n+j)^2}, \quad r_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}$$

とおく.

(a) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x(x+2)^2}$ とおくと,

$$\frac{c_{n,k+1}}{c_{n,k}} \sim f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (k \rightarrow \infty)$$

となることを示せ. 但し, $a_k \sim b_k$ ($k \rightarrow \infty$) とは, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$ となることを意味する.

(b) 各 $n \geq 3$ について, 番号 $k_0(n)$ で

$$c_{n,k_0(n)} = \sup_{k \geq 1} \{c_{n,k}\}$$

を満たすものをとるとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_0(n)}{n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(c) 等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^{1/n} = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}$$

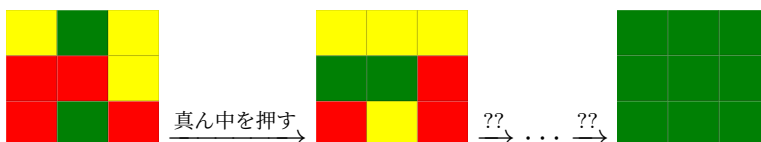
を示せ. 必要なら, スターリングの公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \rightarrow \infty)$$

を用いて良い.

問題 2. (出題者: 跡部発)

(a) タイルが縦に 3 個, 横に 3 個の合計 9 個あるとする. これらのタイルは, 緑 $\rightarrow$ 黄 $\rightarrow$ 赤 $\rightarrow$ 緑, の順で 3 色が切り替わるものとする. 但し, 各タイルのスイッチを押すと, それ自身と, その上下左右のタイルが同時に色が切り替わるものとする. このとき, 任意のタイルの色の配置から始めて, いくつかのタイルのスイッチを何回か押すことで, 全てのタイルを緑にすることはできるだろうか?



- (b) より一般に, 色の種類を n 色にした場合, 任意のタイルの色の配置から始めて, 全てのタイルを指定された一つの色に切り替えることはできるだろうか?

問題 3. (出題者: 曾我部太郎) 2つの直積集合

$$X = \{1, 2\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \{1, 2\}\},$$

$$A = \{a, b, c\}^{\mathbb{N}} = \{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \in \{a, b, c\}\}$$

を考える. X は 1, 2 という 2 種類の文字を使って表される無限ワードの集合と思える. 同様に A は a, b, c の三文字を使って表せる無限ワードの集合であるが, ここで X 語と A 語の間の翻訳辞書を作れないかを考えてみる. 試しに a, b, c という A 語の文字は 1, 11, 111 という具合に X 語に翻訳できるとしよう. するとこの翻訳に従って A 語の無限ワードを X 語の無限ワードに置き換えることで, 写像

$$F: A \rightarrow X$$

を作ることができる. しかし F は A 語のどんな文字列も $111111 \cdots \in X$ という 1 つのワードに送ってしまい, 翻訳としては全く役に立たないことがわかる.

- (a) 写像 $F: A \rightarrow X$ が全単射になるような翻訳のルール (a, b, c を 1, 2 の有限文字列で表す方法) を具体的に見つけよ.

有限直積の部分集合 $Y_m \subset \{1, 2\}^m$ および $B_m \subset \{a, b, c\}^m$ に対して, X の部分集合 $\text{pr}^{-1}(Y_m)$ と A の部分集合 $\text{pr}^{-1}(B_m)$ を

$$\text{pr}^{-1}(Y_m) = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid (x_n)_{n=1}^m \in Y_m\},$$

$$\text{pr}^{-1}(B_m) = \{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \mid (\alpha_n)_{n=1}^m \in B_m\}$$

で定め,

$$\mathcal{O}_X = \{\text{pr}^{-1}(Y_m) \mid Y_m \subset \{1, 2\}^m, m \geq 1\},$$

$$\mathcal{O}_A = \{\text{pr}^{-1}(B_m) \mid B_m \subset \{a, b, c\}^m, m \geq 1\}$$

とおく. また, 関数

$$\mu: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nu: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbb{R}$$

をそれぞれ

$$\mu(\text{pr}^{-1}(B_m)) := \frac{(B_m \text{ の濃度})}{3^m}, \quad \nu(\text{pr}^{-1}(Y_m)) := \frac{(Y_m \text{ の濃度})}{2^m}$$

で定める. これらは $B_m \subset \{a, b, c\}^m$ や $Y_m \subset \{1, 2\}^m$ の取り方に寄らないことが分かる.

- (b) (a) の全単射 F であって, F が $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_X$ との全単射を誘導し, かつ, $\mu = \nu \circ F$ となるものが存在するか, 考えよ.

問題 4. (出題者: 曾我部太郎) 辺の集合 E と頂点の集合 V が有限集合で辺には向きがついているグラフ $G = (E, V)$ を考える. このようなグラフを有限有向グラフという. 有限有向グラフ G の隣接行列 A_G とは, 次の様に定まる正方行列である.

$$A_G := \begin{pmatrix} A_G(v_1, v_1) & A_G(v_1, v_2) & \cdots & A_G(v_1, v_n) \\ A_G(v_2, v_1) & A_G(v_2, v_2) & \cdots & A_G(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_G(v_n, v_1) & A_G(v_n, v_2) & \cdots & A_G(v_n, v_n) \end{pmatrix}, \quad V = \{v_1, \dots, v_n\},$$

ただし $A_G(v_i, v_j) \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ は頂点 v_i から v_j に向かう辺の個数である.

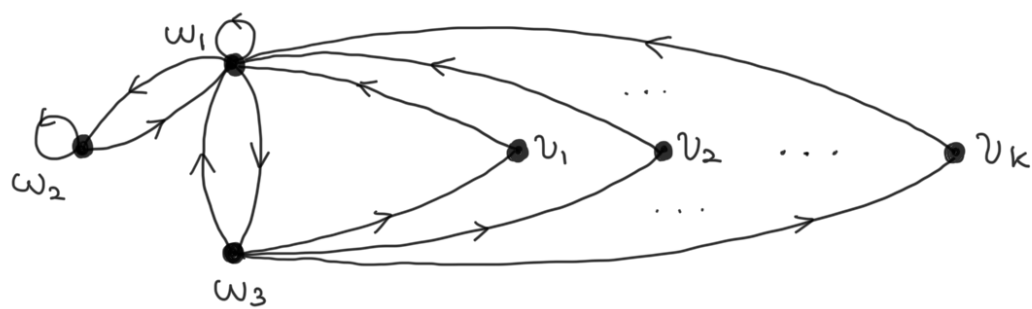
- (a) 図アの有向グラフ G_k について $\det(I_{k+3} - A_{G_k})$ の値を計算せよ. ただし I_n で $n \times n$ の単位行列を表すことにする. また, この値は頂点のナンバリングの仕方 ($w_1, w_2, w_3, v_1, v_2, \dots, v_k$ という頂点のならべ方) によらず, グラフの形だけに依存して決まることも考えてみよ.

ここで G_k のようなグラフでは, 辺を矢印に沿って頂点から頂点への移動を何度か繰り返すことで, 任意の頂点から出発して, 任意の頂点に移動することができる. このようなグラフを既約グラフと呼ぶことにする. 当然既約なグラフ (図イ) や明らかに既約でないグラフ (図ウ) がある.

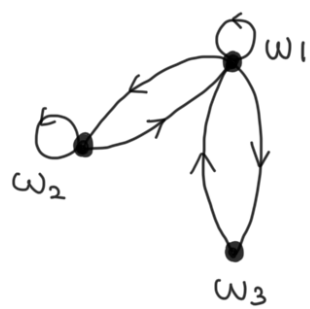
与えられたグラフ $G = (E, V)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ の頂点と辺の位置関係を変えずにいくつか頂点や辺を足して既約な別のグラフ G' に作り変えることを考える. つまり G' は既約で, G の頂点に対して $A_{G'}(v_i, v_j) = A_G(v_i, v_j)$ を満たしている.

- (b) グラフ G から頂点 w を一つ増やし w から任意の v_i への向きの辺を付け加え任意の v_i から w への向きの辺も付け加えることで得られる既約なグラフ G' とおくことにする. このとき, A_G を用いて $A_{G'}$ を表せ. また, 一般に $\det(I_n - A_G)$ と $\det(I_{n+1} - A_{G'})$ が一致するかについて証明, 或いは反例を与えよ.
- (c) 次を満たす整数 $k > 0$ が存在することを示せ. 任意の有限有向グラフ G に対して, G に頂点を k 個付け加えて, さらに辺もいくつか付け加えることで得られる新しい既約なグラフ G'' であって, $\det(I_{n+k} - A_{G''}) = \det(I_n - A_G)$ を満たすものが作れる. ただしもともとあった G の頂点 $v_1, \dots, v_n$ に対して, $A_G(v_i, v_j) = A_{G''}(v_i, v_j)$ を満たすように G'' を作ることにする. (できるだけ小さい k でチャレンジしてみよう.)

図ア



図イ



図ウ

