2021年度 ガロア祭 懸賞問題

6月15日(火) に行いますガロア祭において、優秀な解答者を発表します。優れた解答には、豪華賞品が出ます。(該当者には別途連絡を差し上げます。) もちろん一問だけでもよいので、奮ってご応募ください。一人で解くことを基本としますが、もし複数人で一緒に考えた場合や文献を参考にした場合は、そのことを提出物に明記してください。提出は、記述は明瞭なPDFファイルでお願いします。

解答の提出方法
提出締切: 6月7日(火)
提出先: galois2021(アット)math.kyoto-u.ac.jp

本年度のガロア祭は昨年度と同様に zoom を用いてオンラインで開催いたします。例年のような懇談会は予定しておりませんが、優秀者発表だけではなく、2名の先生による講演がありますので、皆様奮ってご参加ください。講演の詳細や参加登録は、ガロア祭のホームページをご覧ください。

懸賞問題は次のページ以降にあります

2021年度ガロア祭委員
筒井容平・森田陽介

修正履歴:

- 5月14日. 問題4. 5行目: $\sum_{i=1}^{r} \Rightarrow \sum_{i=1}^{R}$.
- 5月15日. 問題1. 2行目: $x_i^p \to |x_i|^p$.

問題 1 (出題者: 荒野悠輝): $1 < p < \infty$ と $x = (x_i)_{i=1,2,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

と定める．$n \times n$ 行列 $T \in M_n(\mathbb{R})$ が関係式

$$\|Tx\|_p = \|x\|_p$$

を満たしているとする．

さらに，$p \neq 2$ とする．このとき，T はある $1, 2, \ldots, n$ の置換 σ と $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \{\pm 1\}$ によって，

$$(Tx)_i = \omega_i x_{\sigma(i)}$$

とかけることを示せ．

問題 2 (出題者: 筒井容平): $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし、$m \in \mathbb{N}_0$ かつ $n \in \mathbb{N}$ とします。$\mathbf{P}_m$ を実数を係数とする次数が m 以下の n 変数多項式全体とします。つまり，

$$\mathbf{P}_m := \left\{ \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha x^\alpha ; a_\alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

ここで、$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,\ x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

と定めます。次に、空でない有限集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ をとり、${}^{\#}S$ で S の要素の数を表すとします。この時、もし

$$\dim \mathbf{P}_m > {}^{\#}S$$

であるならば、恒等的に 0 ではない $P \in \mathbf{P}_m$ で、S 上では 0 となるものが存在することを示してください。

問題 3 (出題者: 雪江明彦): $W_1 = \mathbb{C}^4$, W_2 を 4×4 交代行列全体よりなる複素ベクトル空間とする．ただし，A が ${}^tA = -A$ という条件を満たすとき交代行列という．

$$V = \{(A_1, A_2, A_3, v) \mid A_1, A_2, A_3 \in W_2, v \in W_1\}$$

とする．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を n 次正則行列全体よりなる集合とする．$G = \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ とし，$g = (g_1, g_2) \in G$, $x = (A_1, A_2, A_3, v) \in V$ に対し $gx = (B_1, B_2, B_3, g_1 v)$ とする．ただし，

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = g_2 \begin{pmatrix} g_1 A_1 {}^t g_1 \\ g_1 A_2 {}^t g_1 \\ g_1 A_3 {}^t g_1 \end{pmatrix}$$

である．また

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$w = (M_1, M_2, M_3, v_0)$ とする．

(1) 有理数を係数とする V 上の多項式 $P_1(x), P_2(x)$ で

$$
\begin{aligned}
&P_1((g_1, g_2)x) = (\det g_1)^2(\det g_2)P_1(x), \\
&P_2((g_1, g_2)x) = (\det g_1)^3(\det g_2)^2P_2(x), \\
&P_1(w) = P_2(w) = 1
\end{aligned}
$$

となるものが存在することを証明せよ.

(2) (1) の $P_1(x), P_2(x)$ として整数係数であるものが取れることを証明せよ.

問題 4 (出題者: 雪江明彦): $1 \leq R \leq N$ を整数とする.

$$X = \{c = (c_1, \ldots, c_R) \mid 1 \leq c_1 < \cdots < c_R \leq N\}$$

とする. つまり X は組み合わせ全体の集合である. $L(N, R, c)$ を c の辞書式順序による c の順番とする. ただし $c = (1, 2, \ldots, R)$ なら $L(N, R, c) = 1$ である.

$$L(N, R, c) = \sum_{i=1}^{R} \left(\binom{N-i}{R-i+1} - \binom{N-c_i}{R-i+1} \right) + 1$$

であることを証明せよ. なお

$$\binom{n}{n+1} = 0, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

とする.

問題 5 (出題者: 中安淳): 数列 (a_n) を $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して 2^{n-1} を十進数表示したときの先頭の位の数を a_n とすることで定義する。すなわち (a_n) は第 1 項から順番に書き出すと

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, \cdots$$

となっている。ここで、数列 (b_n) を $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

により定める時、この数列 (b_n) は $n \to \infty$ とした時に収束するか発散するか、収束する場合には極限値は何か答えよ。

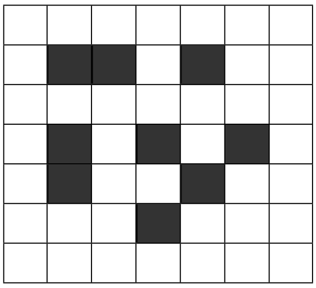
問題 6 (出題者: 森田陽介): 自然数 m, n, k に対し, 縦 $(m+2)$ 個, 横 $(n+2)$ 個からなる $(m+2) \times (n+2)$ 個のマスを考え, 黒いタイルを k 枚, 白いタイルを $(m+2)(n+2) - k$ 枚使い, それぞれのマスに黒または白のタイルを 1 枚ずつ配置する. そのようなタイルの配置の仕方のうち, さらに下記の条件 (a)–(c) をすべて満たすものの総数を $f(m, n, k)$ とする:

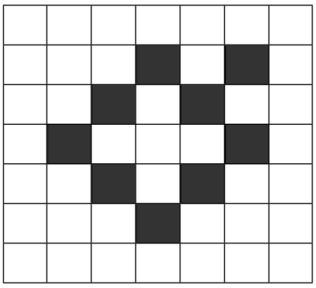
(a) 外周 1 マス分は全て白いタイルを配置する.

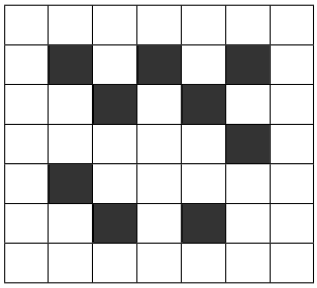
(b) 黒いタイル同士は上下左右に隣接しない.

(c) 白いタイルを任意に 2 枚選んだとき, 片方からもう片方まで, 上下左右に隣接する白いタイルをたどって行くことができる.

例えば $m = n = 5$, $k = 9$ のとき, 下図は左から順に (b) のみを満たさない配置, (c) のみを満たさない配置, (a)–(c) をすべて満たす配置である.







(1) 任意の自然数 m, n, k に対し, $f(m,n,k) \le f(2m+1, 2n+1, (m+1)(n+1)+k)$ が成り立つことを示せ.

(2) $f(m,n,k)$ が満たす別種の不等式・等式や, 条件 (a) を外すとどうなるか, タイルが正方形でなく正三角形や正六角形だったらどうなるか, $f(m,n,k) \ne 0$ となるための必要条件・十分条件など色々考えてみよ.

問題 7 (出題者: 塩田隆比呂): $m \in \mathbb{N}$ に対し, 写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{T}^m := \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ による $x \in \mathbb{R}^m$ の像を $[x]$ と記す. (Gauss 記号ではありません.)

無理数 α に対して $\{[n\alpha] \in \mathbb{T}^1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $\mathbb{T}^1$ で稠密であること, より一般に

$$\begin{aligned}&\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m,\ \text{ただし } 1,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上 } 1 \text{ 次独立},\\ &\text{に対し, } \{[n\alpha] \in \mathbb{T}^m \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ が } \mathbb{T}^m \text{ で稠密であること}\end{aligned} \tag{$*$}$$

はよく知られた事実で, 鳩の巣原理を使って証明できますが, もう少し一般に, $l \in \mathbb{N}$ と上記のような $\alpha \in \mathbb{R}^m$ に対して, $\mathbb{T}^m$ の部分集合 $\{[n^l\alpha] \mid n \in \mathbb{N}\}$ の性質を調べてください.

(i) 例えば自然数の列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ で, 次の性質を満たすものが存在することを証明してください.

$$\forall \lambda \in \{1, \ldots, l\},\ \lim_{k\to\infty}[n_k^{\lambda}\alpha] = [0]. \tag{$\dagger$}_l$$

(ii) 無理数 α に対して $\{[n^l\alpha] \in \mathbb{T}^1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $\mathbb{T}^1$ で稠密であることを証明してください. ($m = 1$ の場合の $(\dagger)_l$ を使って示せます.) 一般の m に対して, 同様のことが言えるでしょうか.