2020 年ガロア祭　懸賞問題

(5/18 問題 6, 問題 7 追加)

すぐれた解答には豪華賞品が出ます．6 月 19 日 (金) に，数学教室ガロア祭ホームページ

`https://www.math.kyoto-u.ac.jp/ja/event/conference/4334`

にて優秀な解答者を発表します（優秀解答者には別途連絡をさしあげます）．もちろん一問だけでもよいので，ふるってご応募ください．一人で解くことを基本としますが，もし複数人で一緒に考えた場合や文献を参考にした場合は，そのことをレポートに明記してください．

解答提出方法について

新型コロナウィルスのため，レポートの直接提出は受け付けておりません．作成した解答をスマートフォンのスキャンアプリ等を利用して電子化したものを 6 月 11 日（木）17:00 までに

`galois2020@math.kyoto-u.ac.jp`

までお送りください．

その際に，件名は『2020 ガロア祭　レポート』とし，メール本文中に氏名と学籍番号を必ず記入してください。また，レポート本体にも忘れずに名前と学籍番号を記入すること，提出前に必ず細かい字（添え字など）が読み取れるかの確認をお願いいいたします．

問題 1 (出題者：雪江 明彦)

x_{ij} $(i,j=1,\ldots,n)$ を n^2 個の変数，$x=(x_{ij})$ を (i,j) 成分が x_{ij} である $n\times n$ 行列とし，$P(x)=\det x$ とする．$\partial_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ とし，$D=\det(\partial_{ij})$ とする．$f(x)$ が $\mathbb{C}$ 係数の多項式なら $Df(x)$ は $\partial_{11}\cdots\partial_{nn}f(x)+\cdots$ などと定義する．$DP(x)^s=b(s)P(x)^{s-1}$ となる多項式 $b(s)$ を求めよ．

問題 2 (出題者：伊藤 哲也)

有名な京大グッズに，素数にしか目盛りのない『素数ものさし』が知られています．これは長さ 18 の物差しで、素数 2,3,5,7,11,13,17 にしか目盛りがない物差しです．目盛りの数が少ないですが，うまく使えば素数以外の長さも測ることができます．例えば，$18-2=16$ なので，端と目盛り 2 を用いて長さ 16 を測ることができます（実際に，18 以下の全ての自然数を測ることができます！）．一方でこの物差しは無駄もあり，4 を測るのに，$7-3=4$，$11-7=4$，$17-13=4$ と三

つもの違う測り方があります.

(i) そこで，次の性質を持つ，できるだけ長い (そして目盛りが少ない) 物差しを作ってください.

完全性　長さ N で N 以下のすべての自然数を測ることができる

一意性　全ての自然数 $m \leq N$ について、m を測る方法はただ一つ

ここで m が測れるとは，$|a-b| = m$ となる目盛り $0 \leq a, b \leq N$ が存在する，と定義します（長さ N の物差しの場合、両端の $N, 0$ も目盛りであるとみなします）.

(ii)　完全性，一意性のどちらか片方しか満たさない場合や，これらの条件を少し緩めたりしたらどうなるかなど、自由に考察してください．いくつか例を挙げると，

- 完全性は満たさないが，一意性は『全ての自然数 $m \leq N$ について，m を測る方法は存在すればただ一つ』としたもの，
- 完全性の条件を『長さ N で N 以下の自然数はただ一つの例外を除き全て測ることができる』としたもの，
- 一意性の条件を『全ての自然数 $m \leq N$ について，m を測る方法は高々二つ』

など，いろいろな考え方があると思います。

問題 3 (出題者：伊藤 哲也)

1 から 1024 までの自然数 $\{1, 2, \ldots, 1024\}$ のなす集合を次の条件を満たすように互いに交わらない二つの集合 A, B に分割することは可能か？

(条件) $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$ について $\displaystyle\sum_{a \in A} a^k = \sum_{b \in B} b^k$ を満たす

問題 4 (出題者：中安 淳)

区間 $(1, \infty)$ からそこへの 2 つの写像 F_1, F_2 を

$$F_1(x) = 2x, \quad F_2(x) = \frac{2x}{x+1}$$

で定める．この時，2 から始めて F_1 あるいは F_2 を何回か適用して得られる値の集合

$$A = \{f_n(f_{n-1}(\cdots f_2(f_1(2))\cdots)) \mid f_1, \cdots, f_n \in \{F_1, F_2\}, n = 1, 2, \cdots\}$$

は $(1, \infty)$ で稠密であることを示せ．つまり，任意の $a \in (1, \infty)$ に対して，a に収束する A 上の数列 a_n が存在することを示せ.

問題 5 (出題者：荒野悠輝)

$\mathcal{G}$ を局所有限だが必ずしも有限とは限らない無向単純連結グラフとし，その頂点の集合を V, 辺の集合を E とする [*1].

また，$\lambda > 0$ と $a\colon V \to \mathbb{R}_{>0}$ がすべての $v \in V$ に対し，以下の関係式

$$\sum_{w \in V, w \text{ は } v \text{ と隣接する}} a(w) = \lambda a(v)$$

を満たしているとする．

(i) さらに $\lambda \leq 2$ であると仮定する．このとき，$\mathcal{G}$ はどのようなグラフか.

(ii) できるだけ大きな λ に対して，$\mathcal{G}$ の形を決定せよ．

問題 6 (出題者：入谷 寛)

各点で微分可能な $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で次を満たすものを全て決定せよ．

$$f(x) - f(x-1) = f'(x)$$

問題 7 (出題者：入谷 寛)

$n \geq 3$ とし，平面上の相異なる n 点が次の条件を満たすとする．

(条件)　n 点から 2 点を選ぶとき，その 2 点を通る直線は選んだ 2 点以外の点を必ず通る．

このとき n 点は同一直線上にあるか.

[*1] グラフが局所有限とは、各頂点 v について、v と隣接する（辺で結ばれている）頂点の個数が常に有限であるということである