2019年ガロア祭懸賞問題

締切　2019年5月27日(月) 17:00
提出先　数学事務室 (理学部3号館1階)

すぐれた解答には豪華賞品が出ます．5月31日(金)のガロア祭会場にて優秀な解答者を発表します．

もちろん一問だけでもよいので，ふるってご応募ください．

レポートには表紙を付けて，名前と学籍番号を記入してください．一人で解くことを基本としますが，もし複数人で一緒に考えた場合や文献を参考にした場合は，そのことをレポートに明記してください．

問題 1 (出題者：平賀郁)．縦 m 行，横 n 列のマスからなる盤がある．mn 個のマスのうちのいくつかには小石が置かれている．次のルールに従い，盤から小石を1個ずつ取り除くゲームを行う．

- 最初に取り除く小石 (小石 S) と，最後に取り除く小石 (小石 G) は決まっている．
- あるマスから小石を取り除いたとき，次に小石を取り除くことができるマスは，直前に取り除いた小石のマスの上下左右いずれかに接しているマスに限る．
- 盤からすべての小石を取り除いたら，ゲームは終了する．

たとえば，図1のように 3×3 の盤に8個の小石が置かれている場合は，ルールに従ってすべての小石を取り除くことができる．しかし，図2のように 3×4 の盤に11個の小石が置かれている場合は，すべての小石を取り除くことはできない．

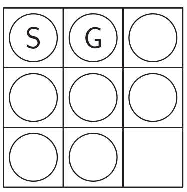

図1

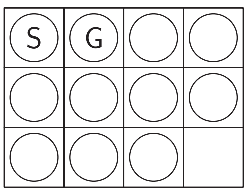

図2

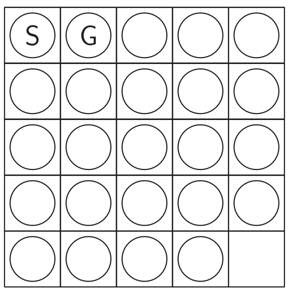

図3

(1) 図3のように，5×5 の盤に24個の小石が置かれている場合を考えましょう．このとき，すべての小石を取り除くことができることを示してください．

(2) 図1〜図3を一般化して，次のような盤の状態を考えてみましょう．m, n を2以上の整数とします．$m\times n$ の盤において，右下の角のマスを除く $mn-1$ 個のマスに小石が置かれているとします．左上の角のマスに最初に取り除く小石 S が置かれていて，その右隣のマスに最後に取り除く小石 G が置かれているとします．この状態から始めたとき，すべての小石を取り除くことができるのは，m, n がどのような条件を満たすときでしょうか．

(3) このゲームについて自由に考察してください．どのような盤の状態から始めたとき，すべての小石を取り除くことができるでしょうか．すべての小石を取り除くことができるための必要条件や十分条件を自由に考えてください．また，このゲームの一般化を自由に考えてみましょう．最後に取り除く小石が与えられていない場合や，最初に取り除く小石も最後に取り除く小石も与えられていない場合はどうでしょうか．

問題 2 (出題者 : 浅岡正幸)．C_1 を $[0,1]$ に属する実数で 5 進展開が $0,4$ のみを使って書けるもの全体，C_2 を $0,1,2,4$ のみを使って書けるもの全体，すなわち

$$C_1 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} \,\middle|\, a_n \in \{0,4\} \right\}, \qquad C_2 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} \,\middle|\, a_n \in \{0,1,2,4\} \right\}$$

とする．また，実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 S と $t \in \mathbb{R}$ に対して，$S+t$ を S を t だけ平行移動したもの，すなわち，

$$S + t = \{ s + t \mid s \in S \}$$

と定める．

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$(C_1 + t) \cap C_1 = \emptyset$ となるような $0 < t < \epsilon$ が存在することを示せ．

(2) すべての $0 < t < 1$ に対して $(C_2 + t) \cap C_2 \neq \emptyset$ が成り立つことを示せ．

$\mathbb{R}$ 上の同相写像 (連続な全単射で逆写像も連続なもの) の全体のなす集合を $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ で表わし，$\epsilon > 0$ に対して $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ の部分集合，$U^0(\epsilon), U^1(\epsilon)$ を次で定める．

$$U^0(\epsilon) = \left\{ f \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}) \,\middle|\, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - x| < \epsilon \right\},$$
$$U^1(\epsilon) = \left\{ f \in U^0(\epsilon) \,\middle|\, f \text{ は } C^1 \text{ 級}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x) - 1| < \epsilon \right\}.$$

(3) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$g(C_2) \cap C_2 = \emptyset$ となる $g \in U^0(\epsilon)$ が存在することを示せ．

(4) “$f \in U^1(\delta)$ ならば，$f(C_2) \cap C_2 \neq \emptyset$” となるような $\delta > 0$ が存在することを示せ．

(5) n 次元ユークリッド空間の部分集合 K がカントール部分集合であるとは，K が有界閉で孤立点を持たず，かつ，連結部分集合がすべて 1 点集合であることを言う (例えば，C_1, C_2 は $\mathbb{R}$ のカントール部分集合である)．$\mathbb{R}$ のカントール部分集合 C が (4) の性質を満たすための必要条件や十分条件について考察せよ．また，$n \geq 2$ について $\mathbb{R}^n$ のカントール部分集合について類似の問題を考察せよ．

問題 3 (出題者 : 伊藤哲也)．平面 $\mathbb{R}^2$ の互いに相異なる 3 点 P, Q, R を固定する．$\mathbb{R}^2$ の閉曲線で 3 点 P, Q, R のうちちょうど 2 つの点を囲む曲線を 2-1 曲線と呼ぶことにする (下図 1)．

2-1 曲線 C を C とちょうど 2 点で横断的に交わる別の 2-1 曲線に置き換える操作 X を考える．

(1) 任意の 2-1 曲線 C,C' について，C に操作 X を有限回行うことで C を C' に変形できることを示してください．例えば，下図 2 の C,C' は図 3 のように操作 X を 2 回行うことで C から C' へと変形できます．

(2) 与えられた 2-1 曲線 C,C' について，できるだけ少ない回数で C を C' に移すにはどうすればいいか考えてみてください．

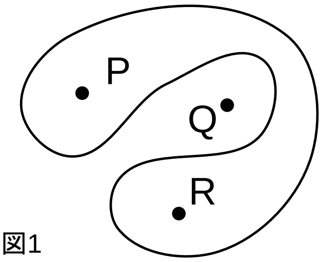

図1

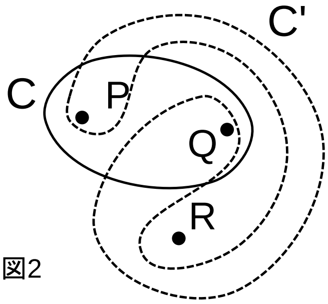

図2

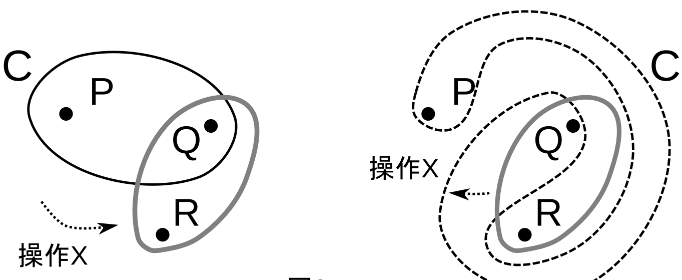

図3

問題 4 (出題者：池田保)． (1) xy 平面において A, B はそれぞれ x 軸，y 軸上の点とします．$|AB|$ を線分 AB の長さとします．A, B が $|AB| \leq 1$ を満たしながら動くとき，線分 AB の和集合はどのような図形になるでしょうか．

(2) xyz 空間において A, B, C はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸上の点とします．$|ABC|$ を三角形 ABC の周の長さとします．A, B, C が $|ABC| \leq 1$ を満たしながら動くときの三角形 ABC の和集合はどのような図形になるでしょうか．(三角形の頂点は重なっていてもよいものとします．)

(3) (1),(2) の結果を自由に一般化してみましょう．

問題 5 (出題者：石塚裕大)．次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}_{n\geq1}$ を考える．

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, \quad a_{n+4} = \frac{a_{n+3} \cdot a_{n+1} + (a_{n+2})^2}{a_n}$$

たとえば，a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 の値は次のようになる．

$$a_5 = 2, \quad a_6 = 3, \quad a_7 = 7, \quad a_8 = 23, \quad a_9 = 59$$

(1) 次の手順に従い，$\{a_n\}_{n\geq1}$ は整数列であることを証明してください．

(a) 整数 $k \geq 1$ に対し，$a_1, a_2, \ldots, a_{k+3}$ はすべて整数であると仮定する．このとき，

$$\gcd(a_k, a_{k+3}) = \gcd(a_{k+1}, a_{k+3}) = \gcd(a_{k+2}, a_{k+3}) = 1$$

を示してください．ここで，$\gcd(a, b)$ とは，正整数 a, b の最大公約数を表すものとします．

(b) 整数 $k \geq 1$ に対し，$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+7}$ が整数であると仮定する．整数 N, M を $N = a_{k+4}$ および $M = a_{k+4} \cdot a_{k+8}$ で定める．このとき，以下の合同式が成り立つことを示してください．

$$\begin{aligned} a_{k+1} \cdot a_{k+3} + (a_{k+2})^2 &\equiv 0 \pmod{N}, \\ a_{k+1} \cdot a_{k+5} &\equiv (a_{k+3})^2 \pmod{N}, \\ a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot a_{k+6} &\equiv (a_{k+3})^3 \pmod{N}, \\ (a_{k+1})^2 \cdot a_{k+3} \cdot a_{k+7} &\equiv (a_{k+3})^4 \pmod{N}, \\ M \cdot (a_{k+1})^3 \cdot (a_{k+2})^2 \cdot (a_{k+3}) &\equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned}$$

(c) これらの結果を使って，整数 $k \geq 1$ に対し，もし $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+7}$ が整数ならば，a_{k+8} も整数であることを示してください．

(2) この数列の性質を自由に考察してみましょう．たとえば，$n \to \infty$ において a_n はどのような速度で増大するでしょうか．また，この数列の一般化を自由に考察してみましょう．たとえば，どのような初項に対し，すべての項が整数になるでしょうか．より一般に，C_1, C_2 を整数としたとき，漸化式

$$b_{n+4} = \frac{C_1 \cdot b_{n+3} \cdot b_{n+1} + C_2 \cdot (b_{n+2})^2}{b_n}$$

で定まる数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ は，いつ整数列になるでしょうか．

問題 6 (出題者：伊藤哲史)．整数 m, n で $m \geq n \geq 0$ を満たすものに対し，二項係数

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

を考える．ただし $0! = 1$ とする．

(1) 正整数 r, s について，$2^r > s$ を満たすとき，$\binom{2^r}{s}$ は偶数であることを示してください．

(2) 正整数 r に対し，$2^r \geq m \geq n \geq 0$ を満たす整数の組 (m, n) の個数を $f(r)$ とおく．またこれらの整数の組のうち，$\binom{m}{n}$ が偶数になるものの個数を $g(r)$ とおく．このとき，極限 $\lim_{r \to \infty} \dfrac{g(r)}{f(r)}$ はどのような値になるでしょうか．

(3) これらの結果を一般化してみましょう．たとえば，二項係数 $\binom{m}{n}$ が 3 で割り切れる整数の組 (m, n) の個数は，どのような性質を満たすでしょうか．また，$\binom{m}{n} \equiv 1, 2 \pmod{3}$ となる組 (m, n) の個数はどのような性質を満たすでしょうか．